Blätterungen asymptotisch flacher Mannigfaltigkeiten durch Flächen vorgeschriebener mittlerer Krümmung

Dissertation

der Fakultät für Mathematik und Physik
der Eberhard-Karls-Universität Tübingen
zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften

vorgelegt von

Jan Metzger

aus Albstadt

betreut von

Prof. Dr. G. Huisken

Mai 2004

Datum der mündlichen Qualifikation:	02. August 2004
Dekan:	Prof. Dr. H. Müther
1. Berichterstatter:	Prof. Dr. G. Huisken
2. Berichterstatter:	Prof. Dr. F. Loose

Für Fabian

Inhaltsverzeichnis

Einleitung **1**

1 Vorbereitungen **8**

1.1 Notation und Konventionen 8

1.2 Gleichungen der extrinsischen Geometrie 8

1.3 Funktionenräume und Normen 9

1.4 Flächen im euklidischen Raum 10

1.5 Eine Fläche — viele Metriken 12

2 Apriori-Abschätzungen I **17**

3 Apriori-Abschätzungen II **24**

4 Die Linearisierung des Operators $\mathcal{H} \pm \mathcal{P}$ **43**

5 Existenz von Flächen mit $H \pm P = \text{const}$ **52**

6 Die Blätterung **58**

7 Spezielle Daten **60**

7.1 Lineares Moment 60

7.2 Drehmoment 67

7.3 Zeitsymmetrische Daten 67

8 Numerische Experimente **69**

8.1 Der Algorithmus 69

8.2 Die Ergebnisse — York-Asymptotik 70

Einleitung

Die Konstruktion von Mannigfaltigkeiten vorgeschriebener Krümmung ist ein zentrales Thema der Differentialgeometrie. Von besonderem Interesse sind neben Mannigfaltigkeiten vorgeschriebener intrinsischer Krümmung auch Untermannigfaltigkeiten mit vorgeschriebener extrinsischer Krümmung. Ein prominentes Beispiel sind Minimalflächen. Die Beobachtung, dass die erste Variation des Oberflächenfunktionals für solche Flächen verschwindet, führt direkt zum Studium von Flächen mit verschwindender mittlerer Krümmung $H = 0$. Eng verwandt mit diesen Flächen sind solche konstanter mittlerer Krümmung $H = \text{const}$. Diese treten als kritische Punkte des isoperimetrischen Problems auf. So verschwindet auf ihnen die erste Variation des Oberflächenfunktionals bei Variation des Flächeninhalts, wenn zusätzlich als Nebenbedingung gefordert wird, dass unter den betrachteten Variationen das eingeschlossene Volumen erhalten bleibt.

Flächen vorgeschriebener mittlerer Krümmung haben auch in der Physik bei der Untersuchung von Anfangsdaten für die Einsteinschen Feldgleichungen in der Allgemeinen Relativitätstheorie große Bedeutung erlangt.

Unter solchen Anfangsdaten versteht man eine dreidimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit M mit einer Riemannschen Metrik g zusammen mit einer symmetrischen Bilinearform K auf M. Durch Lösen der Einsteinschen Feldgleichungen mit diesen Anfangsdaten erhält man eine vierdimensionale Lorentzmannigfaltigkeit (L, h) mit der Lorenzmetrik h, die danach das mathematische Modell für eine relativistische Raumzeit bilden. M ist als raumartige Hyperfläche in L enthalten und repräsentiert dabei einen „Schnitt zur Zeit Null" durch L. Die Daten g und K treten als von h induzierte Metrik beziehungsweise zweite Fundamentalform von M in L auf und müssen daher gewisse Kompatibilitätsbedingungen erfüllen, um eine solche Lösung zu ermöglichen.

Neben kosmologischen Anfangsdaten betrachtet man isolierte gravitierende Systeme, in denen von Materie und Gravitation herrührende Energie in einer kompakten Region von M konzentriert ist und außerhalb dieser kompakten Region Vakuum herrscht. Solche Anfangsdaten zeichnen sich dadurch aus, dass sie asymptotisch flach sind. Dies bedeutet, dass eine kompakte Region existiert, so dass M ausserhalb dieser kompakten Region diffeomorph zu $\mathbf{R}^3$ ohne einen Ball ist. Dieser Diffeomorphismus erlaubt es, g mit der euklidischen Metrik zu vergleichen. Man fordert, dass für wachsenden euklidischen Radius, die Metrik g, zusammen mit ihrem Zusammenhang und ihrer Krümmung, gegen die flache euklidische Metrik konvergiert. Auch für K ergeben sich Abfallbedingungen aus der Forderung, dass M asymptotisch zu einem horizontalen Schnitt durch den Mikowskiraum ist. Diese Bedingungen werden wir später präzisieren.

Nun kann man in solchen isolierten Systemen, analog wie bei der Newtonschen Gravitationstheorie, die Frage nach sinvollen Ausdrücken für die Gesamtmasse, den Gesamtimpuls und das Massenzentrum stellen. Die genaue Kenntnis der Asymptotik der Außenregion ermöglicht zunächst die Definition der physikalischen Größen der ADM-Masse m_{ADM} und des ADM-Impulses p_{ADM} durch Flussintegrale im Unendlichen [ADM61],

$$m_{\mathrm{ADM}} = \frac{1}{16\pi} \lim_{r\to\infty} \int_{S_r} \sum_{i,j} (D_i g_{ij} - D_j g_{ii})\, \nu^j \,\mathrm{d}\mu\,,$$
$$p^i_{\mathrm{ADM}} = \frac{1}{8\pi} \lim_{r\to\infty} \int_{S_r} \sum_{j} (K^i_j \nu^j - (\operatorname{tr} K)\, \nu^i) \,\mathrm{d}\mu\,.$$

Dabei ist S_r die euklidische Sphäre vom Radius r um den Ursprung, ν ihre Normale und $\mathrm{d}\mu$ das von g^e induzierte Maß. Die Komponenten von g und K werden dabei bezüglich eines asymptotisch flachen, rechtwinkligen Koordinatensystems berechnet.

Es ist eine natürliche Fragestellung, ob diese mathematischen Konstrukte Eigenschaften besitzen, die sie für die Beschreibung der physikalischen Begriffe von Masse und Impuls geeignet scheinen lassen. So erwartet man, dass die Masse positiv ist und den Impuls dominiert. Dies ist nach dem Theorem der positiven Masse, beziehungsweise der positiven Energie richtig, die Ungleichungen $m \geq 0$ beziehungsweise $m \geq |p|$ gelten, falls die Daten die Energiebedingung $\mu \geq |J|$ erfüllen [SY81, Wit81]. Die Größen μ und J sind durch die Beziehungen

$$16\pi\mu = \mathrm{Scal} - |K|^2 + (\operatorname{tr} K)^2 \quad \text{und} \quad 8\pi J = \operatorname{div} K - \nabla \operatorname{tr} K$$

gegeben. Dabei ist Scal die Skalarkrümmung von g und Betrag, Spur, Ableitung und Divergenz werden jeweils bezüglich der Metrik g berechnet. Diese Größen μ und J können als Energie- beziehungsweise Impulsdichte interpretiert werden. Daher erwartet man, dass die Energiedichte die Impulsdichte dominiert, also $\mu \geq |J|$, analog zur Beobachtung, dass die Relativitätstheorie keine Geschwindigkeiten zuläßt, die größer als die Lichtgeschwindigkeit sind.

Eine Verschärfung der Aussagen der genannten Theoreme ist die Penrose-Ungleichung [Pen73], die besagt, dass die ADM-Masse, die in der asymptotischen Region gemessen wird, durch den Flächeninhalt eines vorhandenen äußersten Horizonts um ein schwarzes Loch abgeschätzt ist. Im Falle $K \equiv 0$ ist ein solcher Horizont eine Minimalfläche Σ mit $H = 0$ und die Penrose-Ungleichung besagt, dass

$$m_{\mathrm{ADM}} \geq \sqrt{\frac{|\Sigma|}{16\pi}}$$

gilt. Zwei verschiedene Beweise dieser Ungleichung für $K \equiv 0$ verwenden Familien von Flächen vorgeschriebener mittlerer Krümmung. Huisken und Ilmanen [HI97]

benutzen Flächen, die sich entlang des inversen mittleren Krümmungsflusses bewegen, während Bray [Bra97] isoperimetrische Flächen benutzt, die die Gleichung $H = \text{const}$ erfüllen. Beide Beweise beruhen darauf, dass die quasilokale Hawking-Masse einer Fläche Σ,

$$m_{\mathrm{H}} = \frac{|\Sigma|^{1/2}}{(16\pi)^{3/2}} \left(16\pi - \int_{\Sigma} H^2 \,\mathrm{d}\mu\right)$$

monoton ist, einerseits unter dem inversen mittleren Krümmungsfluss und andererseits auf einer Familie von isoperimetrischen Flächen, jeweils für wachsendes eingeschlossenes Volumen. Die Hawkingmasse eines Horizonts ist wegen dessen Eigenschaft $H = 0$ gerade die untere Schranke in der Penrose-Ungleichung. Kann man nun sicherstellen, dass die Hawking-Masse für wachsendes eingeschlossenes Volumen gegen die ADM-Masse konvergiert, erhält man daraus die Aussage der Penrose-Ungleichung. Über eine Verallgemeinerung dieser Aussage für allgemeines $K \not\equiv 0$ ist bisher fast nichts bekannt.

Die Voraussetzung $K \equiv 0$ ist jedoch eine wesentliche Einschränkung für die physikalischen Systeme, die so beschrieben werden können. Anschaulich gesprochen entspricht diese Bedingung der Zeitsymmetrie der Anfangsdaten. So können zum Beispiel keine Systeme modelliert werden, die Objekte mit einer von Null verschidenen Anfangsgeschwindigkeit enthalten.

Eine weitere wichtige Anwendung, die Flächen vorgeschriebener mittlerer Krümmung haben, ist die Beschreibung der asymptotischen Region einer asymptotisch flachen Mannigfaltigkeit, die ein isoliertes gravitierendes System in der Allgemeinen Relativitätstheorie modelliert. Da die Definition der asymptotischen Flachheit bisher nur mit Hilfe von Koordinaten gelingt, ist die Beschreibung der asymptotischen Region mit Hilfe von geometrischen, also koordinatenunabhängigen, Objekten von großem Interesse [SY94]. Von Yau wurde vorgeschlagen, dazu Blätterungen aus Flächen mit jeweils konstanter mittlerer Krümmung zu verwenden. Huisken und Yau [HY96] konnten zeigen, dass eine solche Blätterung existiert, wenn man geeignete Bedingungen an das asymptotische Verhalten der Metrik g stellt. Diese Blätterung entspricht einer geometrischen Radialkoordinate, so dass die Geometrisierung des euklidischen Radius gelingt. Ein alternativer Beweis zur Existenz der $H = \text{const}$ Blätterung, mit entsprechenden Voraussetzungen wie bei Huisken und Yau, stammt von Ye [Ye96].

Die Ergebnisse von Huisken und Yau liefern zusätzlich eine Definition des Massenzentrums eines isolierten gravitierenden Systems mit Hilfe dieser Blätterung. Dazu nutzt man die Beschreibung der asymptotischen Region durch die Geometrie einer Blätterung aus Flächen mit konstanter mittlerer Krümmung. Im euklidischen Raum steht ein klarer Begriff für den Schwerpunkt einer Fläche zur Verfügung, während in der Situation des physikalischen Raumzeitmodells eine solche Begriffs-

bildung nicht möglich ist. Schon im Falle der Schwarzschildmetrik mit $(M, g, K) = (\mathbf{R}^3 \setminus \{0\}, g^S = (1 + \frac{m}{2r})^4, 0)$, die ein einzelnes schwarzes Loch der Masse m im Nullpunkt beschreibt, kann man keinen Punkt in M als Schwerpunkt definieren, da der Nullpunkt nicht in der betrachteten Mannigfaltigkeit liegt. Mit Hilfe des flachen Hintergrundes, der in der asymptotisch flachen Region von M zur Verfügung steht, kann man den euklidischen Schwerpunkt der $H = \text{const}$-Flächen betrachten. Huisken und Yau zeigen unter geeigneten Abfallbedingungen an die Metrik, dass dieser für wachsendes eingeschlossenes Volumen der Flächen gegen einen festen Punkt in $\mathbf{R}^3$ konvergiert. Entsprechend dem Begriff der quasilokalen Masse kann also eine Fläche dieser $H = \text{const}$-Blätterung zur Definition eines quasilokalen Massenzentrums benutzt werden. Da für die Flächen dieser Blätterung die Hawking-Masse für wachsendes eingeschlossenes Volumen positiv und monoton ist, erhält man zusätzlich die quasilokale Masse dieser Blätterung. Die Konstruktion der $H = \text{const}$-Flächen nimmt jedoch keinen Bezug auf K, daher kann etwa der ADM-Impuls der Daten nicht mit Hilfe einer solchen Blätterung beschrieben werden.

In der vorliegenden Arbeit werden wir eine große Klasse von Anfangsdaten mit $K \not\equiv 0$ betrachten, die weiter unten präzisierte asymptotische Bedingungen erfüllen. Solche Daten sind zum Beispiel geeignet, die Kollision zweier Objekte zu beschreiben. Wir konstruieren und untersuchen eine Blätterung der asymptotischen Region aus Flächen auf denen $H + P = \text{const}$ beziehungsweise $H - P = \text{const}$ gilt. Dabei ist entlang einer Fläche Σ mit der Normalen ν die Größe P durch $P = \operatorname{tr} K - K(\nu, \nu)$ gegeben. Im allgemeinen Fall $K \not\equiv 0$ ist ein scheinbarer Horizont eine Fläche auf der die Gleichung $H \pm P = 0$ gilt. Wir betrachen also eine Verallgemeinerung der Gleichung $H = \text{const}$, die scheinbare Horizonte als Lösungen hat. Damit ist die Verbindung zur Penrose-Ungleichung gegeben.

Ergebnisse über $H = \text{const}$-Flächen sind hier im Spezialfall $K \equiv 0$ enthalten. Verschwindet K nicht, so kann man hoffen, aufgrund der zusätzlich verfügbaren Information auch andere als die statischen physikalischen Größen wie Masse und Massenzentrum mit Hilfe der Geometrie dieser Flächen zu beschreiben. In der Tat werden wir bei der Betrachtung der speziellen Daten im vorletzten Kapitel sehen, dass ein vorhandener linearer Impuls in den Daten dazu führt, dass die $H \pm P = \text{const}$-Flächen gegenüber den $H = \text{const}$-Flächen in die Richtung des Impulses verschoben sind. Beschreiben die $H = \text{const}$-Flächen ein quasilokales Massenzentrum, so kann man dies so interpretieren, dass die $H \pm P = \text{const}$-Flächen im Vergleich den quasilokalen Impuls beschreiben.

Eine interessante Fragestellung für zukünftige Projekte wäre, einen der Hawking-Masse entsprechenden Begriff zu finden, für den die für den Beweis eines Analogons zur Penrose-Ungleichung nötigen Eigenschaften gelten. Die Positivität der Hawking-Masse selbst folgt aus unseren Untersuchungen des linearisierten Operators wie bei Christodoulou und Yau [CY86], allerdings nur in der asymptotischen Region.

Wir betrachten hier $M = \mathbf{R}^3 \setminus B_s(0)$ und Daten g und K, die asymptotisch zur konformen Schwarzschildmetrik

$$g^S = \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^4 g^e$$

ist, wobei g^e die euklidische Metrik auf $\mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$ ist. Der Parameter $m > 0$ ist dabei die Masse, die frei gewählt werden kann. Nun betrachen wir solche g, für die ein $m > 0$ existiert, so dass für ein $s > 0$

$$\sup_{\mathbf{R}^3 \setminus B_s(0)} \left(r|g - g^S| + r^2|\nabla^g - \nabla^S| + r^3|\operatorname{Ric}^g - \operatorname{Ric}^S|\right) < \eta\,, \tag{0.1}$$

Dabei sind ∇^g beziehungsweise ∇^S die Levi-Civita Zusammenhänge von g beziehungsweise g^S auf TM, so dass $\nabla^g - \nabla^S$ ein $(1,2)$-Tensor ist. Desweiteren bezeichnen Ric^g und Ric^S die Ricci-Krümmung von g und g^S. Für K fordern wir das asymptotische Verhalten

$$\sup_{\mathbf{R}^3 \setminus B_s(0)} \left(r^2|K| + r^3|\nabla^g K|\right) < \eta\,, \tag{0.2}$$

für $s > 0$. Dabei wird $\eta = \eta(m)$ später im Vergleich zu $m > 0$ klein gewählt werden. Wir betrachten also eine Metrik, die durch eine kleine Störung aus der Schwarzschildmetrik entsteht, zusammen mit kleinem Impuls.

Diese Bedingung ist optimal, in dem Sinne, dass nur Bedingungen an geometrische Größen gestellt werden, nicht wie oft üblich, an partielle Ableitungen von g oder K.

Diese Asymptotik schließt ausserdem wesentlich allgemeinere Daten ein, als vergleichbare Arbeiten. So fordern etwa Huisken und Yau [HY96] ein Abfalllverhalten von $g - g^S$ wie r^{-2} mit entsprechenden Bedingungen an Ableitungen bis zur vierten Ordnung, während wir hier nur Bedingungen an Ableitungen bis zur zweiten Ordnung benötigen. Die Monographie von Christodoulou und Klainerman [CK93] geht ebenfalls von einer Asymptotik aus, in der $g - g^S$ wie $r^{-3/2}$ abfällt und K wie $r^{-5/2}$. Auch dort werden Bedingungen an Ableitungen bis zur vierten Ordnung von g und bis zur dritten Ordnung von K gestellt, so dass wir ebenfalls zwei Differenzierbarkeitsstufen weniger benötigen.

Ein zentrales Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, für solche Daten folgenden Satz zu beweisen.

Theorem 0.1 *Zu jeder gegebenen positiven Masse m existiert ein $\eta_0 > 0$, so dass falls die Daten (M, g, K) die Bedingungen (0.1) und (0.2) mit $\eta < \eta_0$ erfüllen, ein $h_0 = h_0(m, s)$ und eine differenzierbare Abbildung*

$$F : (0, h_0) \times S^2 \to M : (h, p) \mapsto F(h, p)$$

existiert, so dass folgende Aussagen erfüllt sind.

1. *Die Abbildung $F(h,\cdot) : S^2 \to M$ ist eine Einbettung. Die Fläche $\Sigma_h = F(h, S^2)$ erfüllt die Gleichung $H + P = h$ bezüglich den Daten (g, K).*

2. *Es existiert eine kompakte Menge $B \subset M$, so dass $F((0, h_0), S^2) = M \setminus B$.*

3. *Die Flächen $F(h, S^2)$ bilden eine reguläre Blätterung.*

4. *Desweiteren existiert ein $\varepsilon = \varepsilon(\eta)$ mit $\varepsilon(\eta) \to 0$, falls $\eta \to 0$, so dass die Flächen Σ_h die Rundheitsabschätzungen*

$$\int_{\Sigma_h} |\nabla \mathring{A}|^2 \,\mathrm{d}\mu + |\Sigma_h|^{-1} \int_{\Sigma_h} |\mathring{A}|^2 \,\mathrm{d}\mu \leq \varepsilon(\eta) |\Sigma|^{-2}$$

   erfüllen.

5. *Zusätzlich gelten* sup-*Abschätzungen für die geometrischen Größen H, $\mathring{A}$ und G auf den Σ_h, siehe dazu Kapitel 3.*

Ein entsprechendes Theorem gilt für Blätterungen aus Flächen, die die Gleichung $H - P = \text{const}$ erfüllen.

Durch Reskalieren der Daten (M, g, K), kann man die Abhängigkeit, in der η_0 und h_0 von m steht, näher bestimmen. Man betrachte dazu die Abbildung $F_\sigma : x \mapsto \sigma x$ und setzte $g_\sigma := \sigma^{-2} F_\sigma^* g^S$ und $K_\sigma := \sigma^{-1} F_\sigma^* K$. Ist g asymptotisch zur Schwarzschildmetrik mit Masse m, so ist g_m asymptotisch zur Schwarzschildmetrik mit Masse 1. Damit zeigt man, dass $\eta_0(m) = m\eta_0(1)$ und $h_0(s, m) = m h_0(ms, 1)$ ist.

Zur Konstruktion dieser Flächen benutzen wir keinen Krümmungsfluss wie Huisken und Yau in [HY96], sondern nutzen, dass die Gleichung $H \pm P = \text{const}$ eine quasilineare degeneriert elliptische Gleichung für den Positionsvektor ist. Diese lösen wir mit Methoden für quasilineare Gleichungen. Der Existenzbeweis ist auf mehrere Kapitel verteilt, daher geben wir hier einen kurzen Überblick, wie sich die jeweiligen Aussagen zusammmensetzen lassen.

Nach dem vorbereitenden Kapitel 1 werden wir in Kapitel 2 erste Rundheitsabschätzungen für konvexe Flächen beweisen, die fast konstante mittlere Krümmung haben. Diese Rundheitsabschätzungen ermöglichen es uns, ein neueres Theorem von De Lellis und Müller [LM03] anzuwenden, das besagt, dass die betrachteten Flächen in der Tat nahe an euklidischen Sphären liegen.

Dies nutzen wir in Kapitel 3 dazu, unter zusätzlichen Annahmen an die Fläche die Positionsabschätzungen aus Proposition 3.1 zu beweisen. Diese Positionsabschätzungen sind gerade stark genug, um die Geometrie der Schwarzschildmetrik auszunutzen. So können wir in Proposition 3.4 zeigen, dass einige Terme der Rundheitsabschätzungen besser sind, als man zuerst erwarten kann. Damit leiten wir in Proposition 3.5 verbesserte Rundheitsabschätzungen in der $W^{1,2}$-Norm her. Aus diesen

wiederum gewinnen wir in Proposition 3.6 punktweise Krümmungsabschätzungen, mit denen schließlich in Theorem 3.10 die relevanten geometrischen Größen auf der betrachteten Fläche genau bestimmt werden können. Als Korollar 3.11 folgt dann insbesondere, dass die für die Apriori-Abschätzungen gemachten Annahmen mit verbesserten Konstanten gelten.

Die Linearisierung des Operators, der einer Fläche die Funktion $H \pm P$ zuordnet, wird in Kapitel 4 untersucht. Mit Hilfe der Apriori-Abschätzungen können wir dort zeigen, dass diese Linearisierung um eine Fläche mit $H \pm P = \text{const}$ invertierbar ist, falls diese Fläche weit genug in der asymptotischen Region liegt.

Damit können wir in Kapitel 5 mit Hilfe der Kontinuitätsmethode die zentrierten Sphären der Schwarzschildmetrik in $H \pm P = \text{const}$-Flächen deformieren. Um zu sehen, dass alle diese Flächen eine Blätterung bilden, nutzen wir in Kapitel 6 die Abschätzungen an den linearisierten Operator.

In Kapitel 7 untersuchen wir spezielle Daten (g, K), die dann zu einer alternativen Definition des linearen Impulses eines isolierten gravitierenden Systems führen. Schließlich stellen wir im letzten Kapitel 8 einige numerische Experimente vor, die die Ergebnisse aus Kapitel 7 motivieren und veranschaulichen.

An dieser Stelle möchte ich mich bei all denjenigen bedanken, deren Mithilfe es mir ermöglicht hat, diese Arbeit zu erstellen. Zuerst danke ich Professor Huisken für die konstante Betreuung. Bernhard Hein und Bernhard List waren nicht nur so freundlich, meine Arbeit als erste von groben Fehlern zu befreien, sondern haben mich auch während der Entstehungszeit dieser Arbeit immer wieder durch interessante Gespräche inspiriert. Dank gilt auch allen anderen Mitgliedern des Arbeitsbereichs Analysis.

Doch nicht nur auf fachlicher Seite hatte ich Hilfe. So sind auch Robert Kuchar, Christoph Ott, Timo Schairer und Florian Thulmann zu nennen, deren wöchentliche Unterstützung in allen Lebenslagen die Entstehung dieser Arbeit begleitet hat. Nicht mit Worten auszurücken ist, was meine Frau in dieser Zeit für mich getan hat.

1 Vorbereitungen

1.1 Notation und Konventionen

Sei M eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit. Eine Riemannsche Metrik auf M bezeichnen wir mit g und in Koordinaten mit g_{ij}, die Inverse der Metrik mit $g^{-1} = \{g^{ij}\}$. Der Levi-Civita-Zusammenhang von g wird mit ∇^g bezeichnet, der Riemannsche Krümmungstensor von g mit R, der Ricci-Tensor mit Ric und die Skalarkrümmung mit Scal. Die von der Metrik g induzierte Norm auf Tensoren bezeichnen wir mit $|\cdot|^g$.

Von besonderem Interesse werden Hyperflächen in M sein. Diese bezeichnen wir mit Σ. Die von g auf Σ induzierte Metrik bezeichnen wir mit γ^g oder einfach γ, wenn klar ist, welche induzierende Metrik gemeint ist. Die Normale an Σ bezüglich g wird mit ν^g oder ν bezeichnet. Dabei ist nicht wichtig, welche der beiden Normalen gewählt wird. Die zweite Fundamentalform bezeichnen wir mit A^g, ihre Spur, die mittlere Krümmung, mit H^g. Für spätere Verwendung definieren wir noch den spurfreien Anteil $\mathring{A}^g = A^g - \frac{1}{2}H^g\gamma^g$ von A^g. Auch hier lassen wir das Superscript g weg, wenn klar ist, welche Metrik gemeint ist.

Wie schon zu vermuten wäre, laufen Indizes aus lateinischen Buchstaben $i, j, k, \ldots$ zwischen 1 und 3. Indizes aus griechischen Buchstaben $\alpha, \beta, \delta, \ldots$ laufen von 1 bis 2. Wenn nichts anderes angegeben ist, verwenden wir die Einsteinsche Summenkonvention, und summieren implizit über alle Indizes, die in einem Produkt doppelt vorkommen.

Wir nehmen im folgenden an, dass M, g, K und alle betrachteten Flächen von der Klasse C^∞ sind. Um die Aussage von Theorem 0.1 zu beweisen reicht es aber offensichtlich, wenn wir annehmen, dass g von der Klasse C^2 und K von der Klasse C^1 ist. Die Apriori-Abschätzungen aus Kapitel 2 und 3 folgen schon für Flächen der Klasse $W^{3,p}$, falls p groß genug ist.

In den Abschätzungen der folgenden Kapitel bezeichnen wir numerische Konstanten mit c oder C, bei Konstanten, die von bestimmten Parametern abhängen, verdeutlichen wir dies, indem wir die Abängigkeiten in Klammer angeben. Eine Konstante $C(p)$ hängt zum Beispiel von einem vorher gewählten p ab. Wir verwenden jedoch oft die gleiche Bezeichnung für verschiedene Konstanten, etwa dann wenn sich die Konstante in einer Kette von Ungleichungen von Zeile zu Zeile ändert.

1.2 Gleichungen der extrinsischen Geometrie

Ist $\Sigma \subset (M, g)$ eine Hyperfläche mit zweiter Fundamentalform $A_{\alpha\beta}$ und Riemannschem Krümmunstensor $\mathcal{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}$, so gelten zwischen $\mathcal{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ und dem Riemannschen

Krümmungstensor R_{ijkl} von M die Gaußgleichungen

$$\mathcal{R}_{\alpha\beta\delta\varepsilon} = R_{\alpha\beta\delta\varepsilon} + A_{\alpha\delta}A_{\beta\varepsilon} - A_{\alpha\varepsilon}A_{\beta\delta}\,. \tag{1.1}$$

Der Anteil von R_{ijkl} in Richtung der Normalen ν an Σ lässt sich mit Hilfe der Codazzi-Gleichungen ausdrücken:

$$R_{i\alpha\beta\delta}\nu^i = \nabla_\delta A_{\alpha\beta} - \nabla_\beta A_{\alpha\delta}\,. \tag{1.2}$$

Zusammen ergeben beide Gleichungen mit Hilfe der Definition des Riemanntensors durch Vertauschen kovarianter Ableitungen die Simons-Identität [Sim68], [SSY75]

$$\begin{aligned}\Delta^\Sigma A_{\alpha\beta} &= \nabla^\Sigma_\alpha\nabla^\Sigma_\beta H + HA^\delta_\alpha A_{\delta\beta} - |A|^2A_{\alpha\beta} + A^\delta_\alpha R_{\varepsilon\beta\varepsilon\delta} + A^{\delta\varepsilon}R_{\delta\alpha\beta\varepsilon}\\ &\quad +\nabla^\Sigma_\beta(\mathrm{Ric}_{\alpha k}\,\nu^k) + \nabla^{\Sigma\,\delta}(R_{k\alpha\beta\delta}\nu^k)\,.\end{aligned} \tag{1.3}$$

Dabei ist zu beachten, dass wir darauf verzichtet haben, die Terme in der letzten Zeile mit Hilfe der Produktregel auszudifferenzieren. Daher treten einige der Terme aus der üblichen Darstellung der Simons-Identität hier nicht auf.

1.3 Funktionenräume und Normen

Auf einer Hyperfläche $\Sigma \subset M$ wollen wir verschiedene Funktionenräume und zugehörige Normen definieren. Setze zunächst für einen glatten (s,t)-Tensor T und $1 < p < \infty$

$$\|T\|^p_{L^p_{(s,t)}(\Sigma)} = \int_\Sigma |T|^p \,\mathrm{d}\mu\,,$$

und definiere $L^p_{(s,t)}(\Sigma)$ als den Abschluss des Raums der glatten (s,t)-Tensoren bezüglich dieser Norm $\|\cdot\|_{L^p_{(s,t)}(\Sigma)}$.

Sei T ein glatter (s,t)-Tensor auf Σ. Wir definieren für einen Hölderexponenten $0 < \alpha < 1$ die Hölderhalbnorm $[T]_{p,\alpha}$ von T in $p \in \Sigma$. Sei dazu $2d_0$ der Injektivitätsradius von Σ und sei $q \in \Sigma$ mit $\mathrm{dist}(p,q) < d_0$. Betrachte die kürzeste Geodäte c_q zwischen p und q, und sei P_q die Parallelverschiebung eines Tensors in q entlang c_q nach p. Setze

$$[T]_{p,\alpha} := \sup_{\mathrm{dist}(p,q)<d_0} \frac{|P_qT(q) - T(p)|}{\mathrm{dist}(p,q)^\alpha}$$

und definiere die Höldernorm $\|T\|_{C^{k,\alpha}_{(s,t)}(\Sigma)}$ eines Tensors entlang Σ als

$$\|T\|_{C^{k,\alpha}_{(s,t)}(\Sigma)} := \sup_\Sigma |T| + \sup_\Sigma |\nabla T| + \cdots + \sup_\Sigma |\nabla^k T| + \sup_{p\in\Sigma}[\nabla^k T]_{p,\alpha}\,.$$

Dabei bezeichne $\nabla^k T$ die k-fache kovariante Ableitung von T. Der Raum $C^{k,\alpha}_{(s,t)}(\Sigma)$ ist dann als Abschluss der glatten (s,t)-Tensoren bezüglich dieser Norm definiert.

Desweiteren werden wir die Sobolevräume $W^{k,p}_{(s,t)}(\Sigma)$ benötigen. Wir definieren zunächst wieder die zugehörigen Normen. Sei dazu T ein beliebiger glatter (s,t)-Tensor. Dann sei

$$\|T\|^p_{W^{0,p}_{(s,t)}(\Sigma)} := \|T\|^p_{L^p_{(s,t)}(\Sigma)}$$

beziehungsweise

$$\|T\|^p_{W^{k,p}(\Sigma)} := \|T\|^p_{W^{k-1,p}_{(s,t)}(\Sigma)} + \int_\Sigma |\nabla^k T|^p \,\mathrm{d}\mu\,.$$

Die zugehörigen Räume entstehen durch Vervollständigen des Raums der glatten Tensoren bezüglich der entsprechenden Norm.

Wir verzichten später auf das Subscript (s,t) bei der Bezeichung der Normen und Funktionenräumen, da im Einzelfall klar ist, welche Norm, beziehungsweise welcher Raum gemeint ist.

An dieser Stelle sollen noch die Einbettungssätze für die Sobolevräume erwähnt werden. Diese Einbettungssätze gelten für alle kompakten Mannigfaltigkeiten, allerdings hängt die benötigte Konstante von der Geometrie der Mannigfaltigkeit ab. Wir sind jedoch in der glücklichen Lage, diese Einbettungssätze nur auf der Standardsphäre $(S^2, \gamma^{\mathrm{Std}})$ im euklidischen Raum zu benötigen, kommen also mit einer festen Konstanten aus.

Theorem 1.1 *Der Raum $W^{1,2}_{(s,t)}(S^2)$ ist enthalten in allen $L^p_{(s,t)}(S^2)$ für $p \geq 1$, die kanonische Einbettung ist stetig und kompakt, also existiert ein $c(p)$, so dass für alle glatten (s,t)-Tensoren T gilt, dass*

$$\|T\|_{L^p(S^2)} \leq c(p)\|T\|_{W^{1,2}(S^2)}\,.$$

Der Raum $W^{2,2}_{(s,t)}(S^2)$ ist enthalten in $C^{0,\alpha}_{(s,t)}(S^2)$ für alle $0 < \alpha < 1$, und die kanonische Einbettung ist stetig und kompakt, also existiert ein c, so dass für alle glatten (s,t)-Tensoren T gilt, dass

$$\|T\|_{C^{0,\alpha}(S^2)} \leq c\,\|T\|_{W^{2,2}(S^2)}\,.$$

1.4 Flächen im euklidischen Raum

Sei nun für diesen Abschnitt $M = \mathbf{R}^3$ versehen mit der euklidischen Metrik $g = g^e$. Wir werden später folgendes Ergebnis von De Lellis und Müller [LM03] benutzen,

um Positionsabschätzungen für die zu konstruierenden Flächen zu bekommen. Die Sphäre in $\mathbf{R}^3$ mit Radius R und Zentrum a bezeichnen wir mit $S_R(a) = \{x \in \mathbf{R}^3 : |x - a| = R\}$.

Theorem 1.2 *Es existiert C, so dass für alle glatten, kompakten und zusammenhängenden Flächen $\Sigma \subset \mathbf{R}^3$ ohne Rand mit $|\Sigma| = 4\pi$ gilt, dass*

$$\|A - \mathrm{Id}\,\|_{L^2(\Sigma)} \leq C\|\mathring{A}\|_{L^2(\Sigma)}\,. \tag{1.4}$$

Ist außerdem $\|\mathring{A}\|_{L^2(\Sigma)} \leq 8\pi$, dann existiert ein Vektor a_Σ und eine konforme Parametrisierung $\psi : S^2 \to \Sigma$, so dass

$$\|\psi - (a_\Sigma + \mathrm{id})\|_{W^{2,2}(S^2)} \leq C\|\mathring{A}\|_{L^2(\Sigma)}\,. \tag{1.5}$$

Dabei ist $\mathrm{id} : S^2 \to \mathbf{R}^3$ *die Standard-Einbettung von S^2 auf $S_1(0)$.* □

Bemerkung: De Lellis und Müller zeigen neben den oben genannten Ungleichungen auch die folgenden, für unsere Zwecke wesentlichen, Abschätzungen. Für den konformen Faktor h^2 der Abbildung ψ und die Normale ν an Σ. Sei dazu γ^S die Metrik auf S^2 und γ die induzierte Metrik auf Σ. Dann gilt $\psi^*\gamma = h^2\, g^S$, und h erfüllt die Abschätzungen [LM03, 3 und 6.1]

$$\begin{aligned} &C^{-1} \leq h \leq C\,, \text{ und} \\ &\|h - 1\|_{W^{1,2}(S^2)} \leq C\|\mathring{A}\|_{L^2(\Sigma)}\,. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Die Differenz der Normalen ν an Σ und der Normalen N an die Sphäre $S_1(a_\Sigma)$ erfüllt folgende Abschätzung [LM03, 6.3]

$$\|N - \nu \circ \psi\|_{W^{1,2}(S^2)} \leq C\|\mathring{A}\|_{L^2(\Sigma)}\,. \tag{1.7}$$

Zudem folgt aus der Art und Weise wie der Vektor a_Σ konstruiert wird, dass man für a_Σ den Schwerpunkt von Σ wählen kann [LM03, 6.3],

$$a_\Sigma = \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma \mathrm{id}_\Sigma \,\mathrm{d}\mu\,. \qquad \square$$

Bemerkung: Wir werden diese Ungleichungen in skalierungsinvarianter Form benötigen, da in unserem Fall nicht notwendigerweise $|\Sigma| = 4\pi$ gilt. Wir gehen wie De Lellis und Müller vor und definieren den *euklidischen Flächenradius* R_e als $R_e(\Sigma) := \sqrt{|\Sigma|/4\pi}$. Dann skalieren wir eine beliebige Fläche Σ zu $\Sigma' := R_e^{-1}\Sigma$ und verwenden das Theorem von De Lellis und Müller für Σ'. Unter Beachtung der Skalierungseigenschaften der verwendeten Normen bekommt man dann aus den Abschätzungen von Theorem 1.2 für Σ' die folgenden Abschätzungen für Σ.

Sei $\Sigma \subset \mathbf{R}^3$ eine glatte, kompakte und zusammenhängende Fläche ohne Rand mit beliebigem R_e. Dann ergibt (1.4) für Σ die skalierungsinvariante Abschätzung

$$\left\| A - \frac{1}{R_e} \operatorname{Id} \right\|_{L^2(\Sigma)} \leq C \|\mathring{A}\|_{L^2(\Sigma)} \,. \tag{1.8}$$

Spurbildung ergibt

$$\left\| H - \frac{2}{R_e} \right\|_{L^2(\Sigma)} \leq C \|\mathring{A}\|_{L^2(\Sigma)} \,. \tag{1.9}$$

Ist außerdem $\|\mathring{A}\|_{L^2(\Sigma)} \leq 8\pi$, so existiert wegen des zweiten Teils von Theorem 1.2 ein Vektor a_Σ und eine konforme Abbildung $\psi : S_{R_e}(a_\Sigma) \to \Sigma$, für die nach (1.5) und der Soboleveinbettung $W^{2,2}(S^2) \hookrightarrow C^0(S^2)$ die folgende, skalierungsinvariante sup-Abschätzung gilt:

$$\sup_{S^2} \left| \psi - \operatorname{id}_{S_{R_e}(a_\Sigma)} \right| \leq C R_e \|\mathring{A}\|_{L^2(\Sigma)} \,. \tag{1.10}$$

Hierbei ist $\operatorname{id}_{S_{R_e}(a_\Sigma)} : S_{R_e}(a_\Sigma) \hookrightarrow \mathbf{R}^3$ die Standard-Einbettung. Für den konformen Faktor h^2 von ψ gilt wegen (1.6) und der Soboleveinbettung $W^{1,2}(S^2) \hookrightarrow L^p(S^2)$ für alle $1 \leq p < \infty$ die Abschätzung

$$\|h^2 - 1\|_{L^p(S^2)} \leq C(p) R_e^{2/p} \|\mathring{A}\|_{L^2(\Sigma)} \,. \tag{1.11}$$

Vergleicht man die Normalen N von $S_{R_e}(a_\Sigma)$ und ν von Σ, so liefert die Abschätzung (1.7) und die Soboleveinbettung, dass

$$\|N \circ \operatorname{id}_{S_{R_e}(a_\Sigma)} - \nu \circ \psi\|_{L^p(S_{R_e}(a))} \leq C(p) R_e^{2/p} \|\mathring{A}\|_{L^2(\Sigma)} \tag{1.12}$$

für alle $1 \leq p < \infty$. □

1.5 Eine Fläche — viele Metriken

Sei g^S die Schwarzschildmetrik auf $\mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$, in rechtwinkligen Koordinaten gelte also für eine Konstante m

$$g^S_{ij} = \phi^4 \delta_{ij} \qquad \text{mit} \qquad \phi = 1 + \frac{m}{2r} \,,$$

wobei δ das Kroneckersymbol und r der euklidische Radius auf $\mathbf{R}^3$ ist. Dann gilt

Lemma 1.3 *Die Ricci-Krümmung* Ric^S_{ij} *von* g^S *ist gegeben durch*

$$\mathrm{Ric}^S_{ij} = \frac{m}{r^3}\phi^{-2}\left(\delta_{ij} - 3\rho_i\rho_j\right) ,$$

wobei ρ *das Radialvektorfeld des* $\mathbf{R}^3$ *ist, d.h.* $\rho(x) = \frac{x}{|x|}$. *Damit gilt für die Skalarkrümmung* Scal^S *von* g^S

$$\mathrm{Scal}^S = 0 . \qquad \square$$

Betrachte nun eine asymptotisch flache Mannigfaltigkeit (M, g), es existiere also eine kompakte Menge $B \subset M$, ein $R > 0$ und ein Diffeomorphismus $x : M \setminus B \to \mathbf{R}^3 \setminus B_s(0)$, so dass in diesen Koordinaten die Metrik g asymptotisch zu einer Schwarzschildmetrik g^S mit Masse m ist. Um diese Asymptotik zu formulieren definiere für $\delta \geq 0$ die gewichtete Norm,

$$\|g - g^S\|_{C^2_{-1-\delta}(\mathbf{R}^3\setminus B_s(0))} := \sup_{M\setminus B}(r^{1+\delta}|g - g^S| + r^{2+\delta}|\nabla^g - \nabla^S| + r^{3+\delta}|\,\mathrm{Ric}^g - \mathrm{Ric}^S\,|) . \tag{1.13}$$

Dabei ist $r = |x|$ der euklidische Radius, ∇^g und ∇^S sind die Levi-Civita-Zusammenhänge von g beziehungsweise g^S auf TM und Ric^g und Ric^S die Ricci-Krümmung von g beziehungsweise g^S. Wir fordern zunächst, dass $\|g - g^S\|_{C^2_{-1-\delta}(\mathbf{R}^3\setminus B_s(0))} < \infty$. Dabei schließen wir $\delta = 0$ nicht aus.

Da uns nur das asymptotisch flache Ende $M \setminus B$ interessiert, werden wir im folgenden die Notation missbrauchen und M an Stelle von $M \setminus B$ schreiben.

Bezeichne $O(\|g - g^S\|_{C^2_{-1-\delta}})$ eine Konstante, für die $O(\|g - g^S\|_{C^2_{-1-\delta}}) \leq C\|g - g^S\|_{C^2_{-1-\delta}(\mathbf{R}^3\setminus B_s(0))}$ gilt, falls $\|g - g^S\|_{C^2_{-1-\delta}(\mathbf{R}^3\setminus B_s(0))}$ beschränkt ist. Damit erhält man folgende Abschätzungen.

Lemma 1.4 *Für das Volumenelement* $\mathrm{d\,vol}$ *die Skalarkrümmung* Scal *von* g *gilt*

$$\begin{aligned} \mathrm{d\,vol} - \mathrm{d\,vol}^S = h\,\mathrm{d\,vol} \quad & \textit{mit} \quad |h| \leq O(\|g - g^S\|_{C^2_{-1-\delta}})r^{-1-\delta} , \\ |\,\mathrm{Scal}\,| \quad & \leq \quad O(\|g - g^S\|_{C^2_{-1-\delta}})r^{-3-\delta} . \end{aligned}$$

Beweis: Diese Ungleichungen folgen direkt aus (1.13) und der Definition von $\mathrm{d\,vol}$ beziegungsweise $\mathrm{Scal}^g = \mathrm{tr}\,\mathrm{Ric}^g$ mit $\mathrm{Scal}^S = 0$. $\square$

Sei nun $\Sigma \subset M = \mathbf{R}^3 \setminus B_s(0)$ eine Hyperfläche. Seien γ^e, γ^S und γ die von g^e, g^S beziehungsweise g dort induzierten Metriken. Seien weiterhin A^e, A^S und A die zugehörigen zweiten Fundamentalformen. Bezeichne H^e, H^S und H die mittlere Krümmung von Σ in den jeweiligen Metriken, sowie $\mathring{A}^e$, $\mathring{A}^S$ und $\mathring{A}$ die spurfreien Anteile der zweiten Fundamentalformen. Man erhält folgende Beziehungen zwischen diesen geometrischen Größen.

Lemma 1.5 *Für die Normalen ν^e, ν^S und ν von Σ bezüglich g^e, g^S und g gilt*

$$\begin{aligned}
&\nu^S = \phi^{-2}\nu^e\,,\\
&|\nu^S - \nu| \le O(\|g - g^S\|_{C^2_{-1-\delta}})r^{-1-\delta}\,,\\
&|\nabla^g\nu^S - \nabla^g\nu| \le O(\|g - g^S\|_{C^2_{-1-\delta}})r^{-2-\delta}\,.
\end{aligned}$$

Damit gilt für die Flächenelemente $\mathrm{d}\mu^e$, $\mathrm{d}\mu^S$ und $\mathrm{d}\mu$, dass

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}\mu^S = \phi^4\mathrm{d}\mu^e \text{ und}\\
&\mathrm{d}\mu - \mathrm{d}\mu^S = h\,\mathrm{d}\mu \quad \text{mit} \quad |h| \le O(\|g - g^S\|_{C^2_{-1-\delta}})r^{-1-\delta}\,.
\end{aligned}$$

Für die spurfreien Anteile $\mathring{A}^e, \mathring{A}^S, \mathring{A}$ der zweiten Fundamentalformen gilt, dass

$$\begin{aligned}
&\mathring{A}^S = \phi^{-2}\mathring{A}^e\,,\\
&|\mathring{A} - \mathring{A}^S| \le O(\|g - g^S\|_{C^2_{-1-\delta}})r^{-2-\delta}\,.
\end{aligned}$$

Die mittleren Krümmungen H^e, H^S und H erfüllen

$$\begin{aligned}
&H^S = \phi^{-2}H^e + 4\phi^{-3}\partial_\nu\phi \text{ und}\\
&|H - H^S| \le O(\|g - g^S\|_{C^2_{-1-\delta}})r^{-2-\delta}\,.
\end{aligned}$$

Beweis: Im Beweis nutzt man zunächst das wohlbekannte Transformationsverhalten der geometrischen Größen ν, $\mathrm{d}\mu$ und A unter konformen Änderungen der umgebenden Metrik, um die der euklidischen Metrik zugehörigen Größen mit denjenigen der Schwarzschildmetrik zu vergleichen.

Der Vergleich der geometrischen Größen bezüglich g^S und g ergibt sich aus den Abschätzungen an die Normalen. Diese erhalten wir, indem wir $\nu = \nu^S + X$ ausdrücken und X aus den Gleichungen

$$g(X, e_\alpha) = 0 \quad \text{und} \quad g(X + \nu^S, X + \nu^S) = 1$$

berechnen. Dabei ist $\{e_\alpha\}$ eine lokale ON-Basis von $T\Sigma$ bezüglich g. Die Abschätzungen an $\nu - \nu^S$ und $\nabla^g(\nu - \nu^S)$ folgen dann leicht, wenn man das durch die obigen Gleichungen gegebene Gleichungssystem für die Komponenten von X in der Basis $\{e_1, e_2, \nu\}$ löst. Man beachte, dass alle partiellen Ableitungen von $g - g^S$ durch das Abfallverhalten von $\nabla^g - \nabla^S$ kontrolliert sind.

Die restlichen Beziehungen erhält man dann direkt aus der Definition der zweiten Fundamentalform und dem Abfallverhalten von $g - g^S$ und $\nabla^g - \nabla^S$. □

Um gute Integralabschätzungen zu bekommen, zitieren wir folgendes Lemma aus [HY96, Lemma 5.2].

Lemma 1.6 *Sei g eine Metrik mit Asymptotik wie oben und sei $p_0 > 2$ gegeben. Dann existiert $c(p_0)$ und $r_0 = r_0(m, \|g - g^S\|_{C^2_{-1}}, s)$, so dass für jede Hyperfläche $\Sigma \subset \mathbf{R} \setminus B_{r_{\min}}(0)$ mit $r_{\min} > r_0$ und jedes $p > p_0$ gilt*

$$\int_\Sigma r^{-p} \mathrm{d}\mu \leq c(p_0) r_{\min}^{2-p} \int_\Sigma H^2 \mathrm{d}\mu \,.$$

Integration und mittlere Krümmung beziehen sich dabei auf g und r ist der euklidische Radius.

Beweis: Der Beweis aus [HY96, Lemma 5.2] geht von Flächen Σ mit konstanter mittlerer Krümmung H aus. Er bleibt jedoch für beliebiges H korrekt, wenn man $H^2|\Sigma|$ im Beweis dort durch $\int_\Sigma H^2 \,\mathrm{d}\mu$ ersetzt. □

Kombiniert man dies mit Lemma 1.5, so erhält man

Lemma 1.7 *Sei g eine Metrik mit Asymptotik wie oben, dann existiert $r_1 = r_1(\|g - g^S\|_{C^2_{-1}}, s)$, so dass für alle Flächen $\Sigma \subset \mathbf{R}^3 \setminus B_{r_{\min}}(0)$ mit $r_{\min} > r_1$ gilt*

$$\begin{aligned}
&\left| \|\mathring{A}^e\|^2_{L^2(\Sigma, g^e)} - \|\mathring{A}\|^2_{L^2(\Sigma, g)} \right| \\
&\quad \leq \; O(\|g - g^S\|_{C^2_{-1-\delta}}) r_{\min}^{-1-\delta} \left(\|\mathring{A}\|^2_{L^2(\Sigma,g)} + \|H\|_{L^2(\Sigma)} \|\mathring{A}\|_{L^2(\Sigma)} + r_{\min}^{-1-\delta} \|H\|^2_{L^2(\Sigma)} \right) .
\end{aligned}$$

Beweis: Für die Norm der Differenz der induzierten Metriken γ und γ^S bezüglich γ gilt

$$|\gamma - \gamma^S|_\gamma \leq O(\|g - g^S\|_{C^2_{-1-\delta}}) r^{-1-\delta}$$

und damit für einen beliebigen Tensor T auf Σ

$$\left| |T|^2_\gamma - |T|^2_{\gamma^S} \right| \leq O(\|g - g^S\|_{C^2_{-1-\delta}}) r^{-1-\delta} |T|^2_\gamma \,.$$

Außerdem gilt für zwei Tensoren S, T gleichen Typs

$$\int_\Sigma \left| |T|^2 - |S|^2 \right| \mathrm{d}\mu \leq \left(\int_\Sigma |T - S|^2 \mathrm{d}\mu \right)^{1/2} \left(2 \int_\Sigma |T|^2 + |S|^2 \mathrm{d}\mu \right)^{1/2} .$$

Zusammen mit Lemma 1.6 erhält man

$$\begin{aligned}
&\left| \int_\Sigma |\mathring{A}|^2_\gamma \mathrm{d}\mu - \int_\Sigma |\mathring{A}^S|^2_{\gamma^S} \mathrm{d}\mu^S \right| \\
&\quad \leq \; \int_\Sigma \left| |\mathring{A}|^2_\gamma - |\mathring{A}|^2_{\gamma^S} \right| \mathrm{d}\mu + \int_\Sigma \left| |\mathring{A}|^2_{\gamma^S} - |\mathring{A}^S|^2_{\gamma^S} \right| \mathrm{d}\mu + \int_\Sigma |\mathring{A}^S|^2_{\gamma^S} |\mathrm{d}\mu - \mathrm{d}\mu^S| \mathrm{d}\mu \\
&\quad \leq \; 2 \left(\int_\Sigma |\mathring{A}|^2_{\gamma^S} + |\mathring{A}^S|^2_{\gamma^S} \mathrm{d}\mu \right)^{1/2} \left(\int_\Sigma |\mathring{A} - \mathring{A}^S|^2 \mathrm{d}\mu \right)^{1/2} \\
&\qquad + O(\|g - g^S\|_{C^2_{-1-\delta}}) r_{\min}^{-1-\delta} \left(\int_\Sigma |\mathring{A}|^2 \mathrm{d}\mu + \int_\Sigma |\mathring{A}^S|^2_{\gamma^S} \mathrm{d}\mu \right) .
\end{aligned}$$

Wählt man $r_1 = r_1(\|g - g^S\|_{C^2_{-1-\delta}})$ so groß, dass für alle 2-Tensoren T gilt, dass $|T|_{\gamma^S} \leq 2|T|_\gamma$, so erhält man

$$|\mathring{A}^S|^2_{\gamma^S} \leq 4|\mathring{A}^S|^2 \leq 8|\mathring{A}|^2 + 8|\mathring{A}^S - \mathring{A}|^2 \leq 8|\mathring{A}|^2 + O(\|g - g^S\|_{C^2_{-1-\delta}})r^{-4-2\delta}\,.$$

Damit ergibt sich zusammen mit Lemma 1.6

$$\begin{aligned}
&\left|\int_\Sigma |\mathring{A}|^2_\gamma \mathrm{d}\mu - \int_\Sigma |\mathring{A}^S|^2_{\gamma^S} \mathrm{d}\mu^S\right| \\
&\quad\leq\ O(\|g - g^S\|_{C^2_{-1-\delta}}) \left(r_{\min}^{-1-\delta} \int_\Sigma |\mathring{A}|^2 \,\mathrm{d}\mu + r_{\min}^{-2-2\delta} \int_\Sigma H^2 \,\mathrm{d}\mu\right) \\
&\qquad +O(\|g - g^S\|_{C^2_{-1-\delta}}) r_{\min}^{-1-\delta} \left(\int_\Sigma H^2 \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/2} \left(\int_\Sigma |\mathring{A}|^2 \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/2}\,.
\end{aligned}$$

Wegen Lemma 1.5 gilt außerdem

$$\int_\Sigma |\mathring{A}^S|^2 \,\mathrm{d}\mu^S = \int_\Sigma |\mathring{A}^e|^2 \,\mathrm{d}\mu^e\,.$$

Damit folgt die Behauptung. □

Korollar 1.8 *Sind g, r_1 und Σ wie im vorigem Lemma gewählt, so gilt*

$$\|\mathring{A}^e\|_{L^2(\Sigma)} \leq C(r_1)\|\mathring{A}\|_{L^2(\Sigma,g)} + C(r_1, C_0)O(\|g - g^S\|_{C^2_{-1-\delta}})r_{\min}^{-1-\delta}\|H\|_{L^2(\Sigma)}\,. \quad \square$$

Zur späteren Verwendung zitieren wir an dieser Stelle noch eine Sobolev-Ungleichung für asymptotisch flache Mannigfaltigkeiten, die etwa in [HY96, Proposition 5.4] zu finden ist, und auf der wohlbekannten Michaels-Simon-Sobolev Ungleichung im euklidischen Raum beruht [MS73].

Proposition 1.9 *Es existiert ein $r_0 = r_0(m, \|g - g^S\|_{C^2_{-1}}, s)$ und eine absolute Konstante C_{sob}, so dass für alle Flächen $\Sigma \subset M \setminus B_{r_0}(0)$ und alle lipschitzstetigen Funktionen f auf Σ gilt, dass*

$$\left(\int_\Sigma |f|^2 \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/2} \leq C_{\mathrm{sob}} \int_\Sigma |\nabla f| + |Hf| \,\mathrm{d}\mu\,.$$

Mit Hilfe der Hölder-Ungleichung erhält man daraus

$$\left(\int_\Sigma |f|^{2p} \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p} \leq C_{\mathrm{sob}}\, p^2\, |\mathrm{supp} f|^{1/p} \int_\Sigma |\nabla f|^2 + H^2 f^2 \,\mathrm{d}\mu$$

für alle $p \geq 1$. □

2 Apriori-Abschätzungen I

In diesem Abschnitt beweisen wir Krümmungsabschätzungen für Flächen, die eine der beiden quasilinearen Gleichungen

$$H \pm P = \text{const} \tag{2.1}$$

erfüllen. Dabei ist $P = \gamma^{\alpha\beta} K_{\alpha\beta}$ die Spur von K über Σ und K ist ein 2-Tensor auf M. Wir wollen die Asymptotik von K beschreiben, indem wir für $\delta \geq 0$ die gewichtete Norm

$$\|K\|_{C^1_{-2-\delta}(\mathbf{R}^3 \setminus B_s(0))} := \sup_{\mathbf{R}^3 \setminus B_s(0)} (r^{2+\delta}|K| + r^{3+\delta}|\nabla^g K|) \tag{2.2}$$

einführen, und zunächst fordern, dass $\|K\|_{C^1_{-2}} < \infty$, für ein $s > 0$ gilt. In späteren Kapiteln werden wir diese Forderung dahingehend verstärken, dass wir nur noch $\|K\|_{C^1_{-2}} \leq \eta$ erlauben, wobei η eine kleine Konstante ist, beziehungsweise fordern, dass $\|K\|_{C^1_{-2-\delta}} < \infty$ für $\delta > 0$ gilt.

Wir definieren den minimalen Radius $r_{\min} := \min_\Sigma r$, wobei r der euklidische Radius ist. Der Flächenradius von Σ wurde als $R(\Sigma) = \sqrt{|\Sigma|/4\pi}$ definiert. Wir nehmen an, dass Σ folgender Annahme genügt:

$$\int_\Sigma u\,|A|^2 \,\mathrm{d}\mu \leq C_0^B \int_\Sigma u \,\det A \,\mathrm{d}\mu \qquad \text{für alle} \qquad 0 \leq u \in C^\infty(\Sigma)\,, \tag{A}$$

mit einer später noch festzulegenden Konstanten $C_0^B > 0$. In diesem Paragraphen bezeichnen wir mit C^B eine Konstante, die nur von C_0^B und anderen, rein numerischen Konstanten abhängt. Im folgenden betrachten wir nur solche Σ für die $r_{\min} > s$ gilt, alls anderen unteren Schranken, die wir an $r_{\min}$ fordern, hängen aus diesem Grunde von s ab.

Bemerkung: Flächen, die diese Annahme erfüllen, sind konvex. Für C^2-Flächen folgt daraus, dass sogar die punktweise Ungleichung $|A|^2 \leq C_0^B \det A$ gilt, wir benötigen aber, dass die Bedingung unter $W^{2,p}$-Konvergenz erhalten ist, und formulieren sie daher entsprechend.

Die Annahme folgt insbesondere, wenn der kleinste Eigenwert λ_1 der zweiten Fundamentalform gleichmäßig vergleichbar zur mittleren Krümmung ist, also eine Abschätzung der Form $0 < H \leq C\lambda_1$ gilt. Es handelt sich hierbei um eine technische Bedingung, die in diesem Abschnitt zu Krümmungsabschätzungen führt. In Huisken-Yau [HY96] wird diese Bedingung durch die Stabilität ersetzt. Eine ähnliche Prozedur würde auch in unserer Situation funktionieren, allerdings ist nicht klar, welche natürliche Stabilitätsbedingung für Flächen mit $H \pm P = \text{const}$ sinnvoll ist.

Vom technischen Standpunkt betrachtet ist Bedingung (2.1) stärker als für den Beweis von Proposition 2.2 nötig wäre. Man käme ebenso mit der schwächeren Bedingung

$$\int_\Sigma |\nabla H|^2 \,\mathrm{d}\mu \leq C \left(r_{\min}^{-4} \int_\Sigma |A|^2 \,\mathrm{d}\mu + r_{\min}^{-6} \right)$$

aus, die von (2.1) und (A) impliziert wird.

Das nächste Lemma zeigt, dass wegen des Satzes von Gauß-Bonnet auch topologische Informationen in dieser Annahme enthalten sind.

Lemma 2.1 *Ist Σ eine kompakte, geschlossene Fläche, die (A) erfüllt, so ist, für $r_{\min} > r_0(m, \|g - g^S\|_{C^2_{-1}}, s)$ groß genug, Σ diffeomorph zu S^2, und es gilt*

$$\int_\Sigma H^2 \,\mathrm{d}\mu \leq C^B \,. \tag{A'}$$

Beweis: Die Gauss-Krümmung von Σ ist gegeben durch

$$G = \det A + \mathrm{Ric}(\nu, \nu) - \frac{1}{2} \mathrm{Scal} \,.$$

Also ergibt sich aus (A) mit der Testfunktion $u \equiv 1$ und den Lemmas 1.4 und 1.6, dass

$$\int_\Sigma H^2 \,\mathrm{d}\mu \leq C_3^B \int_\Sigma G \,\mathrm{d}\mu + C_3^B \int_\Sigma |\,\mathrm{Ric}\,| \,\mathrm{d}\mu \leq C_3^B (2 - 2g) + C_3^B r_{\min}^{-1} \int_\Sigma H^2 \,\mathrm{d}\mu \,,$$

falls $r_{\min}$ groß genug ist. Dabei ist g das Geschlecht von Σ. Für großes $r_{\min}$ gilt also

$$0 \leq \int_\Sigma H^2 \,\mathrm{d}\mu \leq C^B (1 - g) \,,$$

woraus sofort $g \leq 1$ folgt.

Angenommen es gälte $g = 1$, so folgte $\int_\Sigma H^2 \,\mathrm{d}\mu = 0$ und damit aus (A), dass $\int_\Sigma |\mathring{A}|^2 \,\mathrm{d}\mu = 0$ gälte. Korollar 1.8 implizierte dann mit Theorem 1.2, dass $g = 0$ gälte, was ein Widerspruch ist. □

Proposition 2.2 *Sei (M, g) und K wie in (1.13) bzw. (2.2). Dann existiert ein $r_0 = r_0(m, C^B, \|g - g^S\|_{C^2_{-1}}, \|K\|_{C^1_{-2}}, s)$, so dass, für eine kompakte, geschlossene Fläche Σ, die $r_{\min} \geq r_0$, (2.1) und (A) erfüllt, gilt*

$$\int_\Sigma \left| \nabla |\mathring{A}| \right|^2 + H^2 |\mathring{A}|^2 \,\mathrm{d}\mu \leq C(m, C^B, \|g - g^S\|_{C^2_{-1}}, \|K\|_{C^1_{-2}}) r_{\min}^{-4} \,.$$

Beweis: Wir beginnen damit, aus der Simons-Identität eine Integralabschätzung für $\mathring{A}$ herzuleiten, indem wir zunächst

$$\Delta \mathring{A}_{\alpha\beta} = \Delta A_{\alpha\beta} + \gamma_{\alpha\beta}\Delta H$$

berechnen. Kontraktion mit $\mathring{A}^{\alpha\beta}$ ergibt wegen der Spurfreiheit von $\mathring{A}$

$$\mathring{A}^{\alpha\beta}\Delta \mathring{A}_{\alpha\beta} = \mathring{A}^{\alpha\beta}\Delta A_{\alpha\beta}$$

und wegen

$$2|\mathring{A}|\Delta|\mathring{A}| + 2|\nabla|\mathring{A}||^2 = \Delta|\mathring{A}|^2 = 2\mathring{A}^{\alpha\beta}\Delta\mathring{A}_{\alpha\beta} + 2|\nabla\mathring{A}|^2$$

gilt daher

$$|\mathring{A}|\Delta|\mathring{A}| = \mathring{A}^{\alpha\beta}\Delta A_{\alpha\beta} + |\nabla\mathring{A}|^2 - |\nabla|\mathring{A}||^2\,.$$

Außerdem hat man

$$|\nabla\mathring{A}|^2 - |\nabla|\mathring{A}||^2 \geq 0\,, \tag{2.3}$$

also gilt zusammen mit der Simons-Identität (1.3), dass

$$\begin{aligned} |\mathring{A}|\Delta|\mathring{A}| \geq \quad & \mathring{A}^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta H + H\mathring{A}^{\alpha\beta}A^\delta_\alpha A_{\beta\delta} - |A|^2\mathring{A}^{\alpha\beta}A_{\alpha\beta} \\ & + \mathring{A}^{\alpha\beta}A^\delta_\alpha R_{\varepsilon\beta\varepsilon\delta} + \mathring{A}^{\alpha\beta}A^{\delta\varepsilon}R_{\delta\alpha\beta\varepsilon} \\ & + \mathring{A}^{\alpha\beta}\nabla_\beta\left(\mathrm{Ric}_{\alpha k}\,\nu^k\right) + \mathring{A}^{\alpha\beta}\nabla^\delta\left(R_{k\alpha\beta\delta}\nu^k\right)\,. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Integration und partielle Integration des Term $|\mathring{A}|\Delta|\mathring{A}|$ liefert

$$\begin{aligned} & \int_\Sigma |\nabla|\mathring{A}||^2\,\mathrm{d}\mu \\ \leq \quad & \int_\Sigma -\mathring{A}^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta H + |A|^2\mathring{A}^{\alpha\beta}A_{\alpha\beta} - H\mathring{A}^{\alpha\beta}A^\delta_\alpha A_{\beta\delta}\,\mathrm{d}\mu \\ & - \int_\Sigma \mathring{A}^{\alpha\beta}A^\delta_\alpha R_{\varepsilon\beta\varepsilon\delta} + \mathring{A}^{\alpha\beta}A^{\delta\varepsilon}R_{\delta\alpha\beta\varepsilon}\,\mathrm{d}\mu \\ & - \int_\Sigma \mathring{A}^{\alpha\beta}\left(\nabla_\beta\,\mathrm{Ric}_{\alpha k}\,\nu^k\right) + \mathring{A}^{\alpha\beta}\nabla^\delta\left(R_{k\alpha\beta\delta}\nu^k\right)\,\mathrm{d}\mu\,. \end{aligned}$$

In der zweiten Zeile berechnet man wie folgt und schätzt dann mit der Konvexitätsannahme aus (A) ab:

$$\begin{aligned} \int_\Sigma |A|^2\mathring{A}^{\alpha\beta}A_{\alpha\beta} - H\mathring{A}^{\alpha\beta}A^\gamma_\alpha A_{\beta\gamma}\,\mathrm{d}\mu \quad &= \quad \int_\Sigma |A|^4 - H\,\mathrm{tr}\,A^3\,\mathrm{d}\mu \\ &= \quad -2\int_\Sigma |\mathring{A}|^2\det A\,\mathrm{d}\mu \\ &\leq \quad -\frac{2}{C_0^B}\int_\Sigma |\mathring{A}|^2|A|^2\,\mathrm{d}\mu\,. \end{aligned}$$

Um die dritte Zeile zu behandeln, nutzt man die Tatsache, dass in drei Dimensionen der Riemann-Tensor durch den Ricci-Tensor ausgedrückt werden kann:

$$R_{ijkl} = \mathrm{Ric}_{ik}\, g_{jl} - \mathrm{Ric}_{il}\, g_{jk} - \mathrm{Ric}_{jk}\, g_{il} + \mathrm{Ric}_{jl}\, g_{ik} - \frac{1}{2}\,\mathrm{Scal}\,(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}) \quad (2.5)$$

und erhält dann für den ersten Term der dritten Zeile

$$\begin{aligned} \mathring{A}^{\alpha\beta} A^{\delta}_{\alpha} R_{\varepsilon\beta\varepsilon\delta} &= \mathring{A}^{\alpha\beta} A_{\alpha\beta}\,(\mathrm{Scal} - \mathrm{Ric}(\nu,\nu)) - \frac{1}{2}\mathring{A}^{\alpha\beta} A_{\alpha\beta}\,\mathrm{Scal} \\ &= |\mathring{A}|^2 \left(\frac{1}{2}\,\mathrm{Scal} - \mathrm{Ric}(\nu,\nu)\right), \end{aligned}$$

da $\mathring{A}$ orthogonal zum Spuranteil von A ist. Der zweite Term wird zu

$$\begin{aligned} \mathring{A}^{\alpha\beta} A^{\delta\varepsilon} R_{\delta\alpha\beta\varepsilon} &= \mathring{A}^{\alpha\beta} \left(2A^{\delta}_{\alpha}\,\mathrm{Ric}_{\beta\delta} - H\,\mathrm{Ric}_{\alpha\beta}\right) - \frac{1}{2}\,\mathrm{Scal}\,|\mathring{A}|^2 \\ &= 2\mathring{A}^{\alpha\beta}\mathring{A}^{\delta}_{\alpha}\,\mathrm{Ric}_{\beta\delta} - \frac{1}{2}\,\mathrm{Scal}\,|\mathring{A}|^2 . \end{aligned}$$

Setzt man $\omega := \mathrm{Ric}(\nu,\cdot)^T$ und integriert partiell, so erhält man aus den Codazzi-Gleichungen (1.2) mit Hilfe von (2.5) für den ersten Term

$$-\int_\Sigma \mathring{A}^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta H\,\mathrm{d}\mu = \int_\Sigma \left(\frac{1}{2}|\nabla H|^2 + \omega(\nabla H)\right)\mathrm{d}\mu .$$

Der letzte Term ergibt mit partieller Integration, wegen Gleichung (2.5) und wegen der Codazzi-Gleichungen

$$\int_\Sigma \left(\mathring{A}^{\alpha\beta}\nabla_\beta\left(\mathrm{Ric}_{\alpha k}\,\nu^k\right) + \mathring{A}^{\alpha\beta}\nabla^\delta\left(R_{k\alpha\beta\delta}\nu^k\right)\right)\mathrm{d}\mu = -\int_\Sigma 2|\omega|^2 + \omega(\nabla H)\,\mathrm{d}\mu .$$

Zusammen gilt dann

$$\begin{aligned} &\int |\nabla|\mathring{A}||^2 + \frac{2}{C_0^B}|A|^2|\mathring{A}|^2\,\mathrm{d}\mu \qquad (2.6)\\ &\leq \int_\Sigma \left(\frac{1}{2}|\nabla H|^2 + 2\omega(\nabla H) + 2|\omega|^2 + |\mathring{A}|^2\,\mathrm{Ric}(\nu,\nu) - \mathring{A}^{\alpha\beta}\mathring{A}^{\delta}_{\alpha}\,\mathrm{Ric}_{\beta\delta}\right)\mathrm{d}\mu . \end{aligned}$$

Wegen der Asymptotik der Metrik g gilt, dass $|\,\mathrm{Ric}\,| \leq C(m, \|g - g^S\|_{C^2_{-1}})r^{-3}$ und somit auch $|\omega| \leq C(m, \|g - g^S\|_{C^2_{-1}})r^{-3}$.

Aus $H = \mathrm{const} \mp P$ folgt $\nabla H = \mp\nabla P$, und da $P = \gamma^{\alpha\beta}K_{\alpha\beta} = \mathrm{tr}\,K - K(\nu,\nu)$ ist, gilt

$$\nabla P = (\nabla^g P)^T = \left(\nabla^g\,\mathrm{tr}\,K - \nabla^g K(\nu,\nu) - 2K\left(A\left(\cdot\right),\nu\right)\right)^T ,$$

wobei ∇^g die kovariante Ableitung in der umgebenden Mannigfaltigkeit M und $(\cdot)^T$ die tangentiale Projektion auf Σ bezeichnet. Also ist

$$|\nabla H|^2 \leq C(|\nabla^g K|^2 + |A|^2|K|^2) \leq \|K\|^2_{C^1_{-2}}(r^{-4}|A|^2 + r^{-6})$$

und

$$|\omega(\nabla H)| \leq 2|\omega|^2 + 2|\nabla H|^2 \leq C(m, \|g - g^S\|_{C^2_{-1}})r^{-6} + 2|\nabla H|^2 \,.$$

In (2.6) eingesetzt liefert dies, dass

$$\begin{aligned} &\int |\nabla|\mathring{A}||^2 + \frac{2}{C_0^B}|A|^2|\mathring{A}|^2 \,\mathrm{d}\mu \\ &\quad \leq \quad C(m, \|g - g^S\|_{C^2_{-1}}, \|K\|_{C^1_{-2}}) \int_\Sigma \left(r^{-4}|A|^2 + r^{-6} + r^{-3}|\mathring{A}|^2\right) \mathrm{d}\mu \,. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Der erste Integrand rechts kann wegen $|A|^2 = |\mathring{A}|^2 + \frac{1}{2}H^2$ und (A') folgendermaßen abgeschätzt werden,

$$\int_\Sigma r^{-4}|A|^2 \,\mathrm{d}\mu \leq C(C^B, \|K\|_{C^1_{-2}})r^{-4}_{\min} + \int_\Sigma r^{-4}|\mathring{A}|^2 \,\mathrm{d}\mu \,.$$

Den dritten Integranden der rechten Seite von (2.7) schätzt man nun mit dem gerade erhaltenen Term gemeinsam ab, indem man die Schwarzsche Ungleichung mit Lemma 1.6 kombiniert,

$$\begin{aligned} \int_\Sigma r^{-3}|\mathring{A}|^2 \,\mathrm{d}\mu \quad &\leq \quad \frac{2}{C_0^B}\int_\Sigma |\mathring{A}|^4 \,\mathrm{d}\mu + \frac{C_0^B}{4}\int_\Sigma r^{-6} \,\mathrm{d}\mu \\ &\leq \quad \frac{2}{C_0^B}\int_\Sigma |\mathring{A}|^4 \,\mathrm{d}\mu + C(m, C^B, \|g - g^S\|_{C^2_{-1}})r^{-4}_{\min} \,. \end{aligned}$$

Der erste Term auf der rechten Seite kann nun in (2.7) auf der linken Seite absorbiert werden.

Setzt man nun alle Abschätzungen in (2.7) ein, erhält man

$$\int_\Sigma |\nabla|\mathring{A}||^2 + \frac{2}{C_0^B}H^2|\mathring{A}|^2 \,\mathrm{d}\mu \leq C(m, C^B, \|g - g^S\|_{C^2_{-1}}, \|K\|_{C^1_{-2}})r^{-4}_{\min} \,,$$

und das ist die Behauptung. □

Korollar 2.3 *Unter der zusätzlichen Annahme*

$$(C_1^B)^{-1}R(\Sigma)^{-1} \leq |H|$$

bekommt man aus dieser Proposition eine Abschätzung an die L^2-Norm von $\mathring{A}$,

$$\|\mathring{A}\|_{L^2(\Sigma)} \leq C(m, C^B, \|g - g^S\|_{C^2_{-1}}, \|K\|_{C^1_{-2}})R(\Sigma)r^{-2}_{\min}$$ □

Korollar 2.4 *Man bekommt aus der Rechnung in obigem Beweis eine Abschätzung an die L^2-Norm von $\nabla \mathring{A}$, es gilt*

$$\|\nabla \mathring{A}\|_{L^2(\Sigma)} + \|H\mathring{A}\|_{L^2(\Sigma)} \leq C(m, C^B, \|g - g^S\|_{C^2_{-1}}, \|K\|_{C^1_{-2}}) r_{\min}^{-2} .$$

Beweis: Man ersetzt in obigem Beweis die Ungleichung (2.3) durch Ungleichung 2.8. Diese wurde in anderer Form schon in Schoen und Yau [SY81] für den Tensor A anstelle von $\mathring{A}$ und in Huisken und Yau [HY96] im Fall $H = \text{const}$ benutzt, in dem $\nabla A = \nabla \mathring{A}$ gilt. Man setzt $T := |\nabla \mathring{A}|^2 - |\nabla |\mathring{A}||^2$ und rechnet in einer lokalen ON-Basis $\{e_1, e_2\}$ für $T\Sigma$ um einem Punkt $p \in \Sigma$. In der folgenden Rechnung wird auf die Einsteinsche Summenkonvention verzichtet.

$$\begin{aligned}
|\mathring{A}|^2 T &= |\mathring{A}|^2 |\nabla \mathring{A}|^2 - \frac{1}{4} |\nabla |\mathring{A}|^2|^2 \\
&= \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\epsilon} (\mathring{A}_{\alpha\beta} \nabla_\gamma \mathring{A}_{\delta\epsilon})^2 - \sum_\gamma \Big(\sum_{\alpha,\beta} \mathring{A}_{\alpha\beta} \nabla_\gamma \mathring{A}_{\alpha\beta} \Big)^2 \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\epsilon} (\mathring{A}_{\alpha\beta} \nabla_\gamma \mathring{A}_{\delta\epsilon} - \mathring{A}_{\delta\epsilon} \nabla_\gamma \mathring{A}_{\alpha\beta})^2 .
\end{aligned}$$

Betrachtet man nur diejenigen Summanden in denen $\gamma = \alpha$ und $\epsilon = \beta$ gilt, so erhält man

$$|\mathring{A}|^2 T \geq \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta,\delta} (\mathring{A}_{\alpha\beta} \nabla_\alpha \mathring{A}_{\delta\beta} - \mathring{A}_{\delta\beta} \nabla_\alpha \mathring{A}_{\alpha\beta})^2 \geq \frac{1}{8} \sum_\delta \Big(\sum_{\alpha\beta} \mathring{A}_{\alpha\beta} \nabla_\alpha \mathring{A}_{\delta\beta} - \mathring{A}_{\delta\beta} \nabla_\alpha \mathring{A}_{\alpha\beta} \Big)^2 .$$

Benutzt man nun die Codazzi-Gleichung (1.2) in der Form

$$\nabla_\delta \mathring{A}_{\alpha\beta} = \nabla_\beta \mathring{A}_{\alpha\delta} + R_{3\alpha\beta\delta} + \frac{1}{2} (\gamma_{\alpha\delta} \nabla_\beta H - \gamma_{\alpha\beta} \nabla_\delta H) ,$$

so erhält man

$$\mathring{A}_{\alpha\beta} \nabla_\alpha \mathring{A}_{\delta\beta} = \mathring{A}_{\alpha\beta} \nabla_\delta \mathring{A}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \mathring{A}_{\alpha\beta} \gamma_{\delta\beta} \nabla_\alpha H$$

sowie

$$\mathring{A}_{\delta\beta} \nabla_\alpha \mathring{A}_{\alpha\beta} = \mathring{A}_{\delta\beta} R_{3\alpha\beta\alpha} + \mathring{A}_{\delta\beta} \gamma_{\alpha\alpha} \nabla_\beta H - \frac{1}{2} \mathring{A}_{\delta\beta} \gamma_{\alpha\beta} \nabla_\alpha H .$$

Also gilt wegen $(a-b)^2 \geq \frac{1}{2} a^2 - b^2$, dass

$$\begin{aligned}
|\mathring{A}|^2 T &\geq \frac{1}{8} \sum_\delta \Big(\sum_{\alpha,\beta} \mathring{A}_{\alpha\beta} \nabla_\delta \mathring{A}_{\alpha\beta} - \sum_\alpha \Big(\mathring{A}_{\alpha\delta} \nabla_\alpha H + \mathring{A}_{\alpha\delta} \omega_\alpha \Big) \Big)^2 \\
&\geq \frac{1}{16} \sum_\delta \Big(\sum_{\alpha,\beta} \mathring{A}_{\alpha\beta} \nabla_\delta \mathring{A}_{\alpha\beta} \Big)^2 - |\mathring{A}|^2 (|\nabla H|^2 + |\omega|^2) \\
&\geq \frac{1}{16} |\mathring{A}|^2 |\nabla |\mathring{A}||^2 - |\mathring{A}|^2 (|\nabla H|^2 + |\omega|^2) .
\end{aligned}$$

Daraus bekommt man

$$|\nabla A|^2 \geq \frac{17}{16}|\nabla|\mathring{A}||^2 - (|\nabla H|^2 + |\omega|^2)$$

und insgesamt

$$|\nabla \mathring{A}|^2 - |\nabla|\mathring{A}||^2 \geq \frac{1}{17}|\nabla \mathring{A}|^2 - \frac{16}{17}(|\omega|^2 + |\nabla H|^2)\,. \tag{2.8}$$

Daher erhält man ein positives Vielfaches des Terms $|\nabla \mathring{A}|^2$ in der restlichen Rechnung im Beweis von Proposition 2.2 auf der linken Seite, ohne signifikante neue Störterme auf der rechten Seite zu bekommen. Wegen der zusätzlichen Annahme gilt $H^2 \geq \frac{1}{4\pi}|\Sigma|^{-1}$ für genügend großes $r_{\min}$. Damit ist die $W^{1,2}$-Norm von $\mathring{A}$ abgeschätzt. □

Korollar 2.5 *Unter den Annahmen von Proposition 2.2 und Korollar 2.3 ist neben $\mathring{A}$ auch H in der $W^{1,2}$-Norm kontrolliert. Es gelten also folgende gleichmäßigen Abschätzungen an die $W^{1,2}$-Norm der vollen zweiten Fundamentalform A,*

$$\|A\|_{L^2(\Sigma)} \leq C(m, C^B, \|g - g^S\|_{C^2_{-1}}, \|K\|_{C^1_{-2}}) \left(1 + r_{\min}^{-2} R(\Sigma)\right)$$

sowie

$$\|\nabla A\|_{L^2(\Sigma)} \leq C(m, C^B, \|g - g^S\|_{C^2_{-1}}, \|K\|_{C^1_{-2}}) r_{\min}^{-2}\,.$$

3 Apriori-Abschätzungen II

In diesem Abschnitt sollen aus den Krümmungsabschätzungen des vorigen Kapitels Positionsabschätzungen gewonnen werden. Wir erinnern uns dazu an die Definition der gewichteten Normen

$$\|g-g^S\|_{C^2_{-1-\delta}(\mathbf{R}^3\setminus B_s(0))} := \sup_{\mathbf{R}^3\setminus B_s(0)} \left(r^{1+\delta}|g-g^S| + r^{2+\delta}|\nabla^g - \nabla^S| + r^{3+\delta}|\operatorname{Ric}^g - \operatorname{Ric}^S|\right)$$

beziehungsweise

$$\|K\|_{C^1_{-2-\delta}(\mathbf{R}^3\setminus B_s(0))} := \sup_{\mathbf{R}^3\setminus B_s(0)} \left(r^{2+\delta}|K| + r^{3+\delta}|\nabla^g K|\right).$$

Es sollen im Folgenden nur noch solche g und K betrachtet werden, für die

$$\|g-g^S\|_{C^2_{-1-\delta}(\mathbf{R}^3\setminus B_s(0))} + \|K\|_{C^1_{-2-\delta}(\mathbf{R}^3\setminus B_s(0))} < \infty \tag{3.1}$$

gilt, falls $\delta > 0$ ist, oder die die Forderung

$$\|g-g^S\|_{C^2_{-1}(\mathbf{R}^3\setminus B_s(0))} + \|K\|_{C^1_{-2}(\mathbf{R}^3\setminus B_s(0))} < \eta \tag{3.2}$$

für ein $s > 0$ erfüllen. Dabei ist $\eta < 1$ eine Konstante, die später sehr klein gewählt werden wird.

In diesem Abschnitt soll außerdem angenommen werden, dass alle Flächen folgende Annahmen und zusätzlich Gleichung (2.1) erfüllen.

$$R(\Sigma) \le C_1^B r_{\min}^q \qquad q < \frac{3}{2} \text{ für } \delta > 0 \quad \text{oder} \quad q = 1 \text{ für } \delta = 0\,, \tag{B1}$$

$$(C_2^B)^{-1} R(\Sigma)^{-1} \le H \pm P\,, \tag{B2}$$

$$\int_\Sigma u\,|A|^2\,\mathrm{d}\mu \le C_3^B \int_\Sigma u\,\det A\,\mathrm{d}\mu \qquad \text{für alle} \qquad 0 \le u \in C^\infty(\Sigma)\,, \tag{B3}$$

$$\frac{1}{4\pi R_e(\Sigma)^2}\left|\int_\Sigma \mathrm{id}_\Sigma\,\mathrm{d}\mu^e\right| \le R_e\,. \tag{B4}$$

Mit C^B bezeichen wir im Folgenden numerische Konstanten, die nur von C_1^B, C_2^B und C_3^B abhängen. Mit $o(1)$ bezeichnen wir Konstanten, die von m und C^B abhängen können. Für diese Konstanten gilt, falls wir (3.1) annehmen, dass $o(1) \to 0$ für $s < r_{\min} \to \infty$, hier kann $o(1)$ zusätzlich von δ abhängen. Unter der Annahme (3.2) bezeichnen $o(1)$ Konstanten, für die gilt, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein η_0 und ein r_0 existiert, so dass $|o(1)| < \varepsilon$, falls $\eta < \eta_0$ und $r_{\min} > r_0$. Für festes m und beschränktes C^B können r_0 und η_0 unabhängig von C^B gewählt werden.

Bemerkung: Die ersten beiden Annahmen erlauben es, die verschiedenen Radiusbegriffe, also den euklidischen Radius r, den geometrischen Radius $R(\Sigma)$ und den durch die Krümmung gegebenen Radius H^{-1} miteinander zu vergleichen. Dies ist notwendig, da einerseits die Krümmungsabschätzungen des vorigen Kapitels genau dann besser werden, wenn $r_{\min}$ groß ist, die Abschätzungen von De Lellis und Müller beinhalten andererseits aufgrund der Skalierung Potenzen von $R(\Sigma)$. Um diese beiden Terme gegeneinander auszuspielen, benutzt man (B1). Die Annahme (B2) dient dazu aus den Abschätzungen an $\int_\Sigma H^2|\mathring{A}|^2 \,\mathrm{d}\mu$ aus vorigem Kapitel L^2-Abschätzungen an $\mathring{A}$ zu erhalten.

Die vierte Annahme (B4) besagt, dass Σ zentriert ist, in dem Sinne, dass der euklidische Schwerpunkt so nahe am Nullpunkt liegt, dass im Beweis der nächsten Proposition der euklidische Nullpunkt innerhalb der Sphäre liegt, die Σ approximiert.

Im Falle $\delta = 0$ in der Asymptotik von g und K muss in (B1) die Potenz $q = 1$ gewählt werden, da für einige Integralabschätzungen, die zum Beweis von Proposition 3.1 nötig sind, Lemma 1.6 nicht mehr zur Verfügung steht. □

Unter diesen Annahmen sind wir in der Lage, aus den ersten Apriori-Abschätzungen mit Hilfe von Abschnitt 1.4 eine Positionsabschätzung zu gewinnen. Dabei impliziert (B3) die Abschätzungen aus Proposition 2.2. Insbesondere erhält man wegen (B2) aus Korollar 2.3 mit Hilfe von Korollar 1.8 folgende Rundheitsabschätzung für die Geometrie von Σ, bezüglich der euklidischen Metrik als umgebender Metrik

$$\|\mathring{A}^e\|_{L^2(\Sigma,g^e)} \leq C(m, C^B) R_e r_{\min}^{-2} \,. \tag{3.3}$$

Falls $r_{\min} > r_0(m, C^B, s)$ groß genug ist, existiert daher wegen Theorem 1.2 ein Vektor $a \subset \mathbf{R}^3$ und eine konforme Parametrisierung $\psi : S_{R_e}(a) \to (\Sigma, \gamma^e)$, so dass

$$\begin{aligned} \sup_{S_{R_e}(a)} |\psi - \mathrm{id}_{S_{R_e}(a)}| &\leq C(m, C^B) R_e^2 r_{\min}^{-2} \,, \\ \|h^2 - 1\|_{L^2(S_{R_e}(a))} &\leq C(m, C^B) R_e^2 r_{\min}^{-2} \,, \\ \|N \circ \mathrm{id}_{S_{R_e}(a)} - \nu \circ \psi\|_{L^2(S_{R_e}(a))} &\leq C(m, C^B) R_e^2 r_{\min}^{-2} \,. \end{aligned} \tag{3.4}$$

gelten. Die Bemerkungen zu Theorem 1.2 besagen, dass a als der euklidische Schwerpunkt von Σ gewählt werden kann. Die folgende Abschätzung liefert nun eine sehr viel stärkere Aussage, als was in (B4) gefordert wird.

Proposition 3.1 *Sind (g, K) wie in (3.1) oder (3.2) mit $m > 0$ und Σ erfülle (B1) – (B4), so gilt dass*

$$|a|/R_e \leq o(1) \,.$$

Dabei ist $o(1)$ wie am Beginn des Abschnitts erklärt.

Beweis: Lemma 1.5 liefert, dass $R_e \leq 2R(\Sigma)$, falls $r_{\min}$ groß genug ist. Wegen (B1) gilt dann, dass $R_e r_{\min}^{-1} \leq r_{\min}^{q-1}$. Damit liefert die sup-Abschätzung von (3.4) für die Position, dass

$$|\operatorname{id}_{S_{R_e}(a)}| \geq |\psi| - C(m, C^B) r_{\min}^{2q-2} \geq r - \frac{1}{2} r_{\min} \geq \frac{1}{2} r \geq \frac{1}{2} r_{\min} ,$$

falls $r_{\min}$ groß genug ist. Außerdem gilt auch für jede Konvexkombination mit $0 \leq \lambda \leq 1$, dass

$$|\lambda \operatorname{id}_{S_{R_e}(a)} + (1-\lambda)\psi| \geq \frac{1}{2} r . \tag{3.5}$$

In Anlehnung an [HY96, 5] betrachten wir für einen festen Vektor $b \in \mathbf{R}^3$ mit $|b|^e = 1$ folgende, von (2.1) implizierte Identität

$$0 = (H \pm P) \int_\Sigma g^e(b, \nu^e) \mathrm{d}\mu^e = \int_\Sigma H g^e(b, \nu^e) \mathrm{d}\mu^e \pm \int_\Sigma P g^e(b, \nu^e) \mathrm{d}\mu^e . \tag{3.6}$$

Jetzt schätzen wir mit Hilfe von (B1) ab,

$$\left| \int_\Sigma P g^e(b, \nu^e) \mathrm{d}\mu^e \right| \leq o(1) \int_\Sigma r^{-2-\delta} g^e(b, \nu^e) \mathrm{d}\mu^e \leq o(1) .$$

Diese Abschätzung folgt aus Lemma 1.5 und Lemma 1.6 für $\delta > 0$ und im Fall $\delta = 0$ mit Hilfe von (B1).

Im ersten Term von (3.6) ersetzen wir H durch H^e und können den Fehler mit Hilfe von Lemma 1.5 beschränken

$$|H - \phi^{-2} H^e - 4\phi^{-3} \partial_{\nu^e} \phi| \leq \|Q\|_{C^2_{-1-\delta}} r^{-2-\delta}$$

und wie eben abschätzen, ϕ bezeichnet dabei wie vorhin den konformen Faktor der Schwarzschildmetrik. In (3.6) eingesetzt erhält man

$$\left| \int_\Sigma \left(H^e \phi^{-2} + 4\phi^{-3} \partial_{\nu^e} \phi \right) g^e(b, \nu^e) \, \mathrm{d}\mu^e \right| \leq o(1) . \tag{3.7}$$

Benutzt man nun wie in [HY96] die erste Variationsformel bezüglich der euklidischen Metrik, so ergibt sich

$$\int_\Sigma H^e \phi^{-2} g^e(b, \nu^e) \mathrm{d}\mu^e = \int_\Sigma \operatorname{div}^e_\Sigma (\phi^{-2} b) \, \mathrm{d}\mu^e = -2 \int_\Sigma \phi^{-3} g^e(b, \nabla^e \phi) \, \mathrm{d}\mu^e .$$

Mit Hilfe von $g^e(\nabla^e \phi, b) = g^e(D\phi, b) - g^e(b, \nu^e) \partial_{\nu^e} \phi$ und $|D\phi| \leq C(m) r^{-2}$ folgt

$$\left| \int_\Sigma 6 g^e(b, \nu^e) \partial_{\nu^e} \phi \, \mathrm{d}\mu^e - \int_\Sigma 2 g^e(b, D\phi) \, \mathrm{d}\mu^e \right| \leq o(1) . \tag{3.8}$$

Nun wollen wir ausnutzen, dass Σ nahe bei einer Sphäre liegt, wie in (3.4) quantitativ beschrieben, und die Integrale in (3.8) durch Integrale über $S_{R_e}(a)$ ersetzen. Dazu schätzen wir ab

$$\begin{aligned}
&\left|\int_\Sigma g^e(b, D\phi)\,\mathrm{d}\mu^e - \int_{S_{R^e}(a)} g^e(b, D\phi)\,\mathrm{d}\mu^e\right| \\
&\quad\leq \left|\int_{S_{R_e}(a)} (h^2-1) g^e(b, D\phi\circ\psi)\,\mathrm{d}\mu^e\right| + \left|\int_{S_{R_e}(a)} g^e(b, (D\phi)\circ\psi - D\phi)\,\mathrm{d}\mu^e\right| .
\end{aligned}$$

Die Fehlerterme lassen sich mit Hilfe von (3.4) und (3.5) abschätzen. Wir benutzen außerdem $|D\phi| \leq C(m) r^{-2}$ und $|D^2\phi| \leq C(m) R^{-3}$ zusammen mit Lemma 1.6.

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{S_{R_e}(a)} (h^2-1) g^e(b, D\phi\circ\psi)\,\mathrm{d}\mu^e\right| \\
&\quad\leq \|h^2-1\|_{L^2(S_{R_e}(a))}\, \|g^e(b, D\phi\circ\psi)\|_{L^2(S_{R_e}(a))} \\
&\quad\leq C\|\mathring{A}^e\|_{L^2(\Sigma)} R_e r_{\min}^{-1} ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{S_{R_e}(a)} g^e(b, (D\phi)\circ\psi - D\phi)\,\mathrm{d}\mu^e\right| \\
&\quad\leq \sup|\psi - \mathrm{id}\,| \int_{S_{R_e}(a)} \left(\max_{\lambda\in[0,1]} \left|D^2\phi\,(\lambda\,\mathrm{id} + (1-\lambda)\psi)\right|\right) \mathrm{d}\mu \\
&\quad\leq C\|\mathring{A}^e\|_{L^2(\Sigma)} R_e r_{\min}^{-1} .
\end{aligned}$$

Das zweite Integral lässt sich ebenso ersetzen,

$$\begin{aligned}
&\left|\int_\Sigma g^e(b, \nu^e)\partial_{\nu^e}\phi\,\mathrm{d}\mu^e - \int_{S_{R_e}(a)} g^e(b, N)\partial_N\phi\,\mathrm{d}\mu^e\right| \\
&\quad\leq \left|\int_{S_{R_e}(a)} (h^2-1) g^e(b, \nu^e\circ\psi)(\partial_{\nu^e\circ\psi}\phi)\circ\psi\,\mathrm{d}\mu^e\right| \\
&\qquad + \left|\int_{S_{R_e}(a)} g^e(b, \nu^e\circ\psi - N)(\partial_{\nu^e\circ\psi}\phi)\circ\psi\,\mathrm{d}\mu^e\right| \\
&\qquad + \left|\int_{S_{R_e}(a)} g^e(b, N)(\partial_{\nu^e\circ\psi - N}\phi)\circ\psi\,\mathrm{d}\mu^e\right| \\
&\qquad + \left|\int_{S_{R_e}(a)} g^e(b, N)(\partial_N\phi\circ\psi - \partial_N\phi)\,\mathrm{d}\mu^e\right| .
\end{aligned}$$

Wie oben schätzt man die Fehlerterme ab

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{S_{R_e}(a)} (h^2-1) g^e(b,\nu^e\circ\psi)(\partial_{\nu^e\circ\psi}\phi)\circ\psi \,\mathrm{d}\mu^e\right| \\
&\quad\leq \|h^2-1\|_{L^2(S_{R_e}(a))}\|(\partial_{\nu^e\circ\psi}\phi)\circ\psi\|_{L^2(S_{R_e}(a))} \\
&\quad\leq C\|\mathring{A}^e\|_{L^2(\Sigma)} R_e r_{\min}^{-1}\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{S_{R_e}(a)} g^e(b,\nu^e\circ\psi - N)(\partial_{\nu^e\circ\psi}\phi)\circ\psi \,\mathrm{d}\mu^e\right| \\
&\quad\leq \|\nu^e\circ\psi - N\|_{L^2(S_{R_e}(a))}\|D\phi\circ\psi\|_{L^2(S_{R_e}(a))} \\
&\quad\leq C\|\mathring{A}^e\|_{L^2(\Sigma)} R_e r_{\min}^{-1}\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{S_{R_e}(a)} g^e(b,N)(\partial_{\nu^e\circ\psi - N}\phi)\circ\psi \,\mathrm{d}\mu^e\right| \\
&\quad\leq \|\nu^e\circ\psi - N\|_{L^2(S_{R_e}(a))}\|D\phi\circ\psi\|_{L^2(S_{R_e}(a))} \\
&\quad\leq C\|\mathring{A}^e\|_{L^2(\Sigma)} R_e r_{\min}^{-1}\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{S_{R^e}(a)} g^e(b,N)(\partial_N\phi\circ\psi - \partial_N\phi)\,\mathrm{d}\mu^e\right| \\
&\quad\leq \sup|\psi-\mathrm{id}\,|\int_{S_{R_e}(a)}\left(\max_{\lambda\in[0,1]}\left|D^2\phi\,(\lambda\,\mathrm{id}+(1-\lambda)\psi)\right|\right)\mathrm{d}\mu \\
&\quad\leq C\|\mathring{A}^e\|_{L^2(\Sigma)} R_e r_{\min}^{-1}\,.
\end{aligned}$$

Insgesamt werden die Fehlerterme wegen (3.3) durch $C(m,C^B)R_e^2 r_{\min}^{-3}$ kontrolliert. Aus (B1) erhält man, dass $R_e^2 \leq r_{\min}^{2q}$ gilt. Also folgt insgesamt mit (3.8)

$$\left|\int_{S_{R_e}(a)} 6g^e(b,N)\partial_N\phi\,\mathrm{d}\mu^e - \int_{S_{R_e}(a)} 2g^e(b,D\phi)\,\mathrm{d}\mu^e\right| \leq o(1)\,.$$

Setzt man hier $b = a/|a|$ und wählt Koordinaten φ und ϑ auf $S_{R_e}(a)$, so dass $g^e(b,N) = \cos\varphi$, so berechnet man

$$D\phi = -\frac{m}{2r^2}\rho\,,\quad N = R_e^{-1}(x-a)\,,\quad g^e(N,\rho) = R_e r^{-1} + r^{-1}|a|\cos\varphi\,,$$

wobei $\rho = x/r$ die Radialrichtung des $\mathbf{R}^3$ ist. Dies in die linke Seite der letzten Integralabschätzung eingesetzt, ergibt

$$\left| m \int_{S_{R_e}(a)} 3|a| r^{-3} \cos^2 \varphi + 2R_e r^{-3} \cos\varphi - |a| r^{-3} \, \mathrm{d}\mu^e \right| \leq o(1) \,. \tag{3.9}$$

Aus Annahme (B4) erhält man, dass für den euklidischen Schwerpunkt c_Σ von Σ gilt, dass $|c_\Sigma| \leq R_e$ und da wegen der Bemerkung nach Theorem 1.2 der Vektor $a = c_\Sigma$ gewählt werden kann, gilt auch $|a| \leq R_e$. Mit Hilfe der einfach herzuleitenden Formel

$$\int_{S_{R_e}(a)} r^{-k} \cos^l \varphi \, \mathrm{d}\mu^e = \frac{\pi R_e}{|a|} (2R_e|a|)^{-l} \int_{R_e-|a|}^{R_e+|a|} r^{1-k} (r^2 - R_e^2 - |a|^2)^l \, \mathrm{d}r \,,$$

kann man nun die Integrale aus (3.9) berechnen. Man erhält

$$8\pi m|a|/R_e \leq o(1) \,. \tag{3.10}$$

Mit $m > 0$ folgt daraus das Ergebnis. □

Korollar 3.2 *Für beliebiges aber festes $\varepsilon > 0$ kann die Abschätzung aus Annahme (B1) durch die verbesserte Abschätzung*

$$(1+\varepsilon)^{-1} R(\Sigma) \leq r_{\min} \leq (1+\varepsilon) R(\Sigma) \tag{3.11}$$

ersetzt werden, falls $\eta < \eta_0$ und $r_{\min} > r_0$ ist. Auch Annahme (B4) gilt mit besseren Konstanten

$$\frac{1}{4\pi R_e^2} \left| \int_\Sigma \mathrm{id} \, \mathrm{d}\mu^e \right| \leq \varepsilon R_e \,, \tag{3.12}$$

falls $\eta < \eta_0$ und $r_{\min} > r_0$ ist.

Beweis: Wähle η_0 und r_0 so, dass der $o(1)$-Term in Proposition 3.1 kleiner als ε wird. Dann liefert die Positionsabschätzung aus (3.4) für alle $p \in S_{R_e}(a)$

$$(1-\varepsilon) R_e \leq R_e - |a| \leq |\,\mathrm{id}_{S_{R_e}(a)}(p)| \leq |\psi(p)| + C(m, C^B) R_e^2 r_{\min}^{-2}$$

gilt. Da die linke Seite unabhängig von p ist, gilt

$$(1-\varepsilon) R_e \leq r_{\min} + C(m, C^B) R_e^2 r_{\min}^{-2}$$

Daraus folgt, falls $r_{\min} > r_0$ groß genug ist, mit Hilfe von (B1) die untere Abschätzung aus (3.11). Die obere Abschätzung aus (3.11) und Abschätzung (3.12) ergeben sich durch eine ähnliche Rechnung. □

Korollar 3.3 *Man hat in der Annahme (B2) verbesserte Konstanten und zusätzlich die obere Abschätzung*

$$(1+\varepsilon)^{-1}R(\Sigma)^{-1} \leq \frac{H}{2} \leq (1+\varepsilon)R(\Sigma)^{-1}\,, \tag{B2'}$$

falls $\eta < \eta_0$ *und* $r_{\min} > r_0$ *ist.*

Beweis: Aus Theorem 1.2 und Proposition 2.2 folgt mit vorigem Korollar die Abschätzung

$$\int_\Sigma |H^e - 2/R_e|^2 \,\mathrm{d}\mu^e \leq C(m, C^B) r_{\min}^{-2}\,.$$

Lemma 1.5 liefert entlang Σ, dass

$$|H - H^e| \leq C r^{-2}$$

woraus dann auch die Abschätzung

$$\int_\Sigma |H - 2/R_e|^2 \,\mathrm{d}\mu \leq C(m, C^B) r_{\min}^{-2}$$

folgt. Nun ist wegen Gleichung (2.1)

$$\begin{aligned}(H \pm P - 2/R_e)^2|\Sigma| &= \int_\Sigma (H \pm P - 2/R_e)^2 \,\mathrm{d}\mu \\ &\leq 2\int_\Sigma (H - 2/R_e)^2 \,\mathrm{d}\mu + 2\int_\Sigma P^2 \,\mathrm{d}\mu \leq C(m, C^B) r_{\min}^{-2}\,.\end{aligned}$$

Also bekommt man, da $|P| \leq C(\|K\|_{C^1_{-2}}) r^{-2}$, dass

$$|H - 2/R_e| \leq C r_{\min}^{-2}$$

was die Behauptung impliziert. □

Die Positionsabschätzung aus Proposition 3.1 kann dazu benutzt werden, die in Proposition 2.2 gezeigte Schranke an die $W^{1,2}$-Norm von $\mathring{A}$ zu verbessern, falls die Verschiebung $|a|/R_e$ klein genug ist. Wir untersuchen dazu die störenden Terme aus (2.6) genauer.

In der Schwarzschildmetrik g^S gilt auf einer zentrierten Sphäre $S_r(0)$ wegen Lemma 1.3, dass $\omega^S = 0$, $(\mathrm{Ric}^S)^T = mr^{-3}\phi^{-6}\gamma^S \geq 0$, sowie $\mathrm{Ric}^S(\nu,\nu) = -2mr^{-3}\phi^{-6} \leq 0$. Wenn wir nun die Positionsabschätzungen mit den Rundheitsabschätzungen kombinieren, erhalten wir Abschätzungen an die analogen Größen auf Σ bezüglich der Metrik g, die besagen, dass letztere zumindest kleiner sind als zunächst erwartet.

Proposition 3.4 *Ist Σ wie in Proposition 3.1, so gilt, für $r_{\min} > r_0(m, C^B, s)$ groß genug, dass*

$$\begin{aligned}
\int_\Sigma |\nu - \phi^{-2}\rho|_g^2 \,\mathrm{d}\mu &\leq o(1) r_{\min}^2 + C(m, C^B)\,, \\
\int_\Sigma |\omega|^2 \,\mathrm{d}\mu &\leq o(1) r_{\min}^{-4} + C(m, C^B) r_{\min}^{-6}\,, \\
\int_\Sigma |\,\mathrm{Ric}^T - P^S_{\phi^{-2}\rho}\,\mathrm{Ric}^S\,|^2 \,\mathrm{d}\mu &\leq o(1) r_{\min}^{-4} + C(m, C^B) r_{\min}^{-6}\,, \\
\int_\Sigma |\,\mathrm{Ric}(\nu,\nu) - \phi^{-4}\,\mathrm{Ric}^S(\rho,\rho)|^2 \,\mathrm{d}\mu &\leq o(1) r_{\min}^{-4} + C(m, C^B) r_{\min}^{-6}\,,
\end{aligned}$$

wobei $\rho = x/r$ die Radialrichtung des $\mathbf{R}^3$ auf Σ ist, $P^S_{\phi^{-2}\rho}\,\mathrm{Ric}^S$ die g^S-orthogonale Projektion des Ricci-Tensors von g^S auf den zu $\phi^{-2}\rho$ orthogonalen Teilraum des Tangentialraums von M, und $o(1)$ so ist, wie am Anfang des Kapitels erklärt.

Beweis: Zunächst liefert Lemma 1.5

$$|\nu - \phi^{-2}\rho| \leq |\nu - \nu^S| + |\phi^{-2}|\,|\nu^e - \rho| \leq o(1) r_{\min}^{-1} + 2|\nu^e - \rho|$$

sowie, dass für eine beliebige Funktion $f \in C(\Sigma)$ gilt

$$\left| \int_\Sigma f \,\mathrm{d}\mu - \int_\Sigma f \,\mathrm{d}\mu^e \right| \leq o(1) r_{\min}^{-1} \int_\Sigma |f| \,\mathrm{d}\mu\,.$$

Also gilt

$$\int_\Sigma |\nu - \phi^{-2}\rho|_g^2 \,\mathrm{d}\mu \leq c \int_\Sigma |\nu^e - \rho|^2 \,\mathrm{d}\mu^e + o(1)\,.$$

Jetzt benutze Theorem 1.2 und erhalte zusammen mit Proposition 2.2 und Korollar 3.2 eine konforme Abbildung $\psi : S = S_{R^e}(a) \to \Sigma$, so dass folgende Abschätzungen gelten

$$\begin{aligned}
&\sup_S |\psi - \mathrm{id}_S\,|_{g^e} \leq C(m, C^B) r_{\min} \|\mathring{A}^e\|_{L^2(\Sigma, g^e)}\,, \\
&\|\nu^e \circ \psi - N\|_{L^2(S, g^e)} \leq C(m, C^B) r_{\min} \|\mathring{A}^e\|_{L^2(\Sigma, g^e)}\,, \\
&C^{-1} \leq h^2 \leq C\,.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Dabei ist h^2 der konforme Faktor von ψ. Aus den Positionsabschätzungen von Proposition 3.1 folgt für die Differenz der euklidischen Normalenrichtung $N = (x-a)/R^e$ an S und der Radialrichtung $\rho = x/r$, dass

$$|N - \rho|_{g^e} \leq (|R^e - r|_{g^e} + |a|)/R^e \leq 2|a|/R^e \leq o(1)\,. \tag{3.14}$$

Mit Hilfe von (3) erhält man

$$\begin{aligned} |\rho\circ\psi(x)-\rho(x)|_{g^e} &\leq \left(\sup_{\lambda\in[0,1]}|D\rho(\lambda x-(1-\lambda)\psi(x)|_{g^e}\right)|\psi(x)-x|_{g^e} \\ &\leq C^B\|\mathring{A}^e\|_{L^2(\Sigma,g^e)} \end{aligned} \tag{3.15}$$

und

$$\begin{aligned} \int_\Sigma |\nu^e-\rho|^2_{g^e}\,\mathrm{d}\mu^e &= \int_S h^{-2}|\nu^e\circ\psi-\rho\circ\psi|^2_{g^e}\mathrm{d}\mu^e \\ &\leq C\int_S |\nu^e\circ\psi-\rho\circ\psi|^2_{g^e}\mathrm{d}\mu^e\,. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Weiter errechnet man

$$|\nu^e\circ\psi-\rho\circ\psi|\leq|\nu^e\circ\psi-N|+|N-\rho|+|\rho-\rho\circ\psi|\,,$$

und erhält mit Hilfe von (3), (3.14) und (3.15)

$$\begin{aligned} \int_S |\nu^e\circ\psi-\rho\circ\psi|^2_{g^e}\mathrm{d}\mu^e &\leq 4\int_S |\nu^e\circ\psi-N|^2_{g^e}+|N-\rho|^2_{g^e}+|\rho-\rho\circ\psi|^2_{g^e}\mathrm{d}\mu^e \\ &\leq C^B r^2_{\min}\|\mathring{A}^e\|^2+o(1)r^2_{\min} \\ &\leq o(1)r^2_{\min}+C(m,C^B)\,. \end{aligned}$$

Dies ergibt die erste Ungleichung. Die zweite folgt dann leicht, denn

$$\begin{aligned} \int_\Sigma |\omega|^2_g\mathrm{d}\mu &\leq \int_\Sigma |\operatorname{Ric}(\nu,\cdot)-\operatorname{Ric}^S(\phi^{-2}\rho,\cdot)|^2_g\mathrm{d}\mu \\ &\leq \|\operatorname{Ric}-\operatorname{Ric}^S\|^2_{L^2(\Sigma)}+\sup_S|\operatorname{Ric}^S|^2\,\|\nu-\phi^{-2}\rho\|^2_{L^2(\Sigma)} \\ &\leq C(m,C^B)r^{-6}_{\min}(1+\|\nu-\phi^{-2}\rho\|^2_{L^2(\Sigma)})\,. \end{aligned}$$

Sei nun X ein Vektorfeld entlang Σ und T ein beliebiger symmetrischer 2-Tensor auf M. Betrachte die orthogonale Projektion $P^g_X T$ von T auf das orthogonale Komplement zu X bezüglich g. Für zwei Vektoren u,v ist dann

$$\begin{aligned} P^g_X T(u,v) &= T(u,v)-g(X,X)^{-1}\left(g(X,u)T(X,v)+g(X,v)T(X,u)\right) \\ &\quad +g(X,X)^{-2}g(X,u)g(X,v)T(X,X)\,. \end{aligned}$$

Für zwei beliebige Tensoren S,T, zwei Vektorfelder X,Y und zwei Metriken g,h gilt, falls $g(X,X)=1$ und $h(Y,Y)=1$,

$$\begin{aligned} |P^g_X T-P^h_Y S|_g &\leq c\left(|T-S|_g(1+|Y|_g)+(1+|h|_g)|Y|^2_g|S|_g|g-h|_g\right. \\ &\quad \left.+c\left(|T|_g+|S|_g|Y|_g+|S|_g+|h|^2_g|Y|^2_g|S|_g+|h|^2_g|Y|^3_g|S|_g\right)|X-Y|_g\,. \end{aligned}$$

Setzt man jetzt $T = \mathrm{Ric}$, $S = \mathrm{Ric}^S$, $h = g^S$, $X = \nu$ und $Y = \phi^{-2}\rho$, so folgt wegen

$$|g^S|_g + |\phi^{-2}\rho|_g \leq c \quad \text{und}$$
$$|\,\mathrm{Ric}\,|_g + |\,\mathrm{Ric}^S\,|_g \leq C(m)r^{-3}$$

sowie wegen

$$|g - g^S|_g \leq o(1)r^{-1} \quad \text{und}$$
$$|\,\mathrm{Ric} - \mathrm{Ric}^S\,|_g \leq o(1)r^{-3}\,,$$

dass

$$|\,\mathrm{Ric}^T - P^S_{\phi^{-2}\rho}\,\mathrm{Ric}^S\,| \leq o(1)r^{-3} + C(m)r^{-3}|\nu - \phi^{-2}\rho|\,.$$

Man erhält daraus nach Integration

$$\int_\Sigma |\,\mathrm{Ric}^T - P^S_{\phi^{-2}\rho}\,\mathrm{Ric}^S\,|^2\,\mathrm{d}\mu \leq o(1)r_{\min}^{-4} + C(m)r_{\min}^{-6}\int_\Sigma |\nu - \phi^{-2}\rho|^2\,\mathrm{d}\mu\,.$$

Daraus folgt mit Hilfe der ersten Ungleichung die dritte der behaupteten Ungleichungen. Die letzte ergibt sich aus einer ähnlichen Rechnung wie die zweite. □

Nun kann man wie angekündigt die Rundheitsabschätzung aus Proposition 2.2 verbessern.

Proposition 3.5 *Seien (g, K) wie in (3.1) oder (3.2). Dann gibt es ein $r_0 = r_0(m, C^B, s)$ und eine Konstante $C(m, C^B)$, so dass für alle Flächen Σ mit $H \pm P =$* const *und $r_{\min}(\Sigma) \geq r_0$, die (B1) – (B4) erfüllen, gilt, dass*

$$\int_\Sigma |\nabla|\mathring{A}||^2 + H^2|\mathring{A}|^2\,\mathrm{d}\mu \leq o(1)r_{\min}^{-4} + C(m, C^B)r_{\min}^{-6}\,.$$

Beweis: Wir betrachten wiederum die Simons-Identität in der Form (2.6),

$$\begin{aligned}&\int_\Sigma |\nabla|\mathring{A}||^2 + 2/C_0^B H^2|\mathring{A}|^2\,\mathrm{d}\mu\\ &\quad\leq \int_\Sigma \left(\frac{1}{2}|\nabla H|^2 + 2\omega(\nabla H) + 2|\omega|^2 + |\mathring{A}|^2\,\mathrm{Ric}(\nu,\nu) - \mathring{A}^{\alpha\beta}\mathring{A}^{\delta}_{\alpha}\,\mathrm{Ric}_{\beta\,\delta}\right)\mathrm{d}\mu\,.\end{aligned}$$

und benutzen Proposition 3.4, um die einzelnen Terme abzuschätzen. Es gilt wie im Beweis zu Proposition 2.2

$$|\omega(\nabla H)| \leq 2|\omega|^2 + 2|\nabla H|^2$$

und

$$|\nabla H|^2 \leq o(1)(r^{-4}|A|^2 + r^{-6})\,.$$

Die resultierenden Terme behandelt man mit Hilfe von Lemma 1.6, Proposition 3.4 und Kenntnis der entsprechenden Terme bezüglich der Schwarzschildmetrik. Da $\mathrm{Ric}^S(\rho,\rho) \leq 0$ ist, gilt etwa

$$\begin{aligned}
&\int_\Sigma |\mathring{A}|^2 \,\mathrm{Ric}(\nu,\nu)\,\mathrm{d}\mu \\
&= \int_\Sigma |\mathring{A}|^2 \phi^{-4}\,\mathrm{Ric}^S(\rho,\rho),\mathrm{d}\mu + \int_\Sigma |\mathring{A}|^2 \left(\mathrm{Ric}(\nu,\nu) - \phi^{-4}\,\mathrm{Ric}^S(\rho,\rho)\right)\,\mathrm{d}\mu \\
&\leq \left(\int_\Sigma |\mathring{A}|^4\,\mathrm{d}\mu\right)^{1/2} \left(\int_\Sigma \left|\mathrm{Ric}(\nu,\nu) - \phi^{-4}\,\mathrm{Ric}^S(\rho,\rho)\right|^2\,\mathrm{d}\mu\right)^{1/2} \\
&\leq o(1) r_{\min}^{-5} + C(m,C^B) r_{\min}^{-6}\,.
\end{aligned}$$

Dabei wurde die Sobolevungleichung aus Proposition 1.9 zusammen mit Proposition 2.2 und Korollar 3.2 benutzt, um die L^4-Norm von $\mathring{A}$ abzuschätzen

$$\int_\Sigma |\mathring{A}|^4\,\mathrm{d}\mu \leq C(m,C^B)|\Sigma| r_{\min}^{-8} \leq C(m,C^B) r_{\min}^{-6}\,.$$

Da der tangentiale Anteil des Ricci-Tensors in der Schwarzschildmetrik auf zentrierten Sphären positiv ist, erhält man auf ähnliche Weise, dass

$$\begin{aligned}
&\int_\Sigma \mathring{A}^{\alpha\beta}\mathring{A}^{\delta}_{\alpha}\,\mathrm{Ric}_{\beta\delta}\;\mathrm{d}\mu = \int_\Sigma \mathrm{tr}\left(\mathrm{Ric}^T(\mathring{A}(\cdot),\mathring{A}(\cdot))\right)\,\mathrm{d}\mu \\
&\geq \int_\Sigma 2mr^{-3}\phi^{-6}|\mathring{A}|^2\,\mathrm{d}\mu - o(1) r_{\min}^{-5} - C(m,C^B) r_{\min}^{-6}\,,
\end{aligned}$$

und zuletzt

$$\int_\Sigma |\omega|^2\,\mathrm{d}\mu \leq o(1) r_{\min}^{-4} + C(m,C^B) r_{\min}^{-6}\,,$$

was die Behauptung liefert. □

Wir sind nun in der Lage mit der $W^{1,2}$-Abschätzung aus der vorigen Proposition eine sup-Abschätzung an $\mathring{A}$ zu beweisen. Dazu nutzen wir die Stampaccia-Iterationstechnik.

Proposition 3.6 *Ist Σ wie in Proposition 3.1, dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Konstante $C(\varepsilon, m, C^B)$, so dass für $r_{\min} \geq r_0(m, C^B)$ gilt:*

$$\sup_\Sigma |\mathring{A}| \leq C(\varepsilon,m,C^B)(o(1) r_{\min}^{-2} + r_{\min}^{-3+\varepsilon})\,.$$

Beweis: Setze im Folgenden $u := |\mathring{A}|$ sowie $u_k := \max(u-k,0)$ für alle $k \geq 0$. Sei außerdem $A(k) := \{x \in \Sigma : u_k > 0\}$. Multipliziere Gleichung (2.4) mit u_k^p für ein $p > 1$ und integriere. Mit Hilfe von partieller Integration und einem Vorgehen wie im Beweis von Proposition 2.2, erhält man

$$\begin{aligned}
&\int_{A(k)} p u_k^{p-1} u|\nabla u|^2 + u_k^p |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}\mu \\
&\leq \int_{A(k)} p u_k^{p-1} \nabla_\alpha u \mathring{A}^{\alpha\beta} \nabla_\beta H + u_k^p \left(\frac{1}{2}|\nabla H|^2 + \omega(\nabla H)\right) \mathrm{d}\mu \\
&\quad + \int_{A(k)} -2u_k^p u^2 \det A + u_k^p u^2 \operatorname{Ric}(\nu,\nu) - u_k^p \mathring{A}^{\alpha\beta}\mathring{A}_\alpha^\delta \operatorname{Ric}_{\beta\delta} \,\mathrm{d}\mu \\
&\quad + \int_{A(k)} u_k^p \left(\omega(\nabla H) + 2|\omega|^2\right) + p u_k^{p-1} \left(\mathring{A}^{\alpha\beta}(\omega_\alpha \nabla_\beta u + \omega_\beta \nabla_\alpha u\right) \mathrm{d}\mu\,.
\end{aligned}$$

Benutzt man die Schwarzschen Ungleichung und absorbiert diejenigen Terme, die ∇u enthalten, auf der linken Seite und nutzt Annahme (B3) aus, dann ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\int_{A(k)} p u_k^{p-1} u|\nabla u|^2 + u_k^p |\nabla u|^2 + C_3^B u_k^p u^2 H^2 \,\mathrm{d}\mu \qquad (3.17)\\
&\leq c(p) \int_{A(k)} u_k^{p-1} u|\nabla H|^2 + u_k^p |\nabla H|^2 + u_k^p |\omega|^2 \,\mathrm{d}\mu \\
&\quad + c(p) \int_{A(k)} u_k^p u^2 |\operatorname{Ric}| + u_k^{p-1} u|\omega|^2 \,\mathrm{d}\mu\,.
\end{aligned}$$

(3.18)

Es gelten die Schranken $|\operatorname{Ric}| \leq C(m) r^{-3}$, $|\omega|^2 \leq C(m) r^{-6}$ und mit Hilfe der sup-Schranke an H aus Korollar 3.2 und 3.3 folgt

$$|\nabla H|^2 \leq o(1)(r^{-4}|A|^2 + r^{-6}) \leq o(1)(r^{-6} + r^{-4}u^2)\,.$$

Damit impliziert (3.17), dass

$$\begin{aligned}
&\int_{A(k)} p u_k^{p-1} u|\nabla u|^2 + u_k^p |\nabla u|^2 + C_3^B u_k^p u^2 H^2 \,\mathrm{d}\mu \qquad (3.19)\\
&\leq C(m, C^B) \int_{A(k)} u_k^p r^{-6} + u_k^{p-1} u r^{-6} + u_k^p u^2 r^{-3} \,\mathrm{d}\mu\,.
\end{aligned}$$

Jetzt kann man die Sobolevungleichung aus Proposition 1.9 benutzen und erhält mit Hilfe von Proposition 3.5, dass

$$\begin{aligned}
\int_{A(k)} u^q \mathrm{d}\mu &\leq c(q)|A(k)| \left(\int_\Sigma |\nabla u|^2 + H^2 u^2 \mathrm{d}\mu\right)^{q/2} \\
&\leq C(q, m, C^B)|A(k)|(o(1) r_{\min}^{-2q} + r_{\min}^{-3q})
\end{aligned}$$

Damit lässt sich die rechte Seite von (3.19) abschätzen. Man erhält, da $\nabla u_k = \nabla u$ und $u_k \leq u$ auf $A(k)$, dass

$$\int_{A(k)} u_k^p + u_k^{p-1} u \,\mathrm{d}\mu \leq C(p,m,C^B)|A(k)|(o(1)r_{\min}^{-2p} + r_{\min}^{-3p}) \,,$$
$$\int_{A(k)} u_k^p u^2 \,\mathrm{d}\mu \leq C(p,m,C^B)|A(k)|(o(1)r_{\min}^{-2p-4} + r_{\min}^{-3p-6}) \,.$$

Zusammengefasst ergibt sich

$$\begin{aligned}&\int_{A(k)} p u_k^{p-1} u|\nabla u|^2 + u_k^p|\nabla u|^2 + C_3^B u_k^p u^2 H^2 \,\mathrm{d}\mu \\ &\quad\leq\quad C(p,m,C^B)|A(k)|(o(1)r_{\min}^{-2p-6} + r_{\min}^{-3p-6}) \,.\end{aligned}$$

Mit $f := u_k^{p/2+1}$ zeigt diese Ungleichung, dass

$$\int_{A(k)} |\nabla f|^2 + H^2 f^2 \,\mathrm{d}\mu \leq C(p,m,C^B)|A(k)|(o(1)r_{\min}^{-2p-6} + r_{\min}^{-3p-6}) \,.$$

Mit Hilfe der Sobolevungleichung aus Proposition 1.9, erhält man

$$\int_{A(k)} f^2 \,\mathrm{d}\mu \leq C(p,m,C^B)|A(k)|^2(o(1)r_{\min}^{-2p-6} + r_{\min}^{-3p-6}) \,.$$

Da $f^2 = u_k^{p+2}$ ist, ergibt dies für $h \geq k$ die Iterationsungleichung

$$\begin{aligned}|h-k|^{p+2}|A(h)| \quad&\leq\quad \int_{A(h)} u_k^{p+2} \,\mathrm{d}\mu \leq \int_{A(k)} u_k^{p+2} \,\mathrm{d}\mu \\ &\leq\quad C(p,m,C^B)|A(k)|^2(o(1)r_{\min}^{-2p-6} + r_{\min}^{-3p-6}) \,.\end{aligned}$$

Nach Stampaccia [Sta66, Lemma 4.1] impliziert diese Iterationsungleichung, dass $|A(d)| = 0$ für

$$d^{p+2} \leq C(p,m,C^B)(o(1)r_{\min}^{-2p-6} + r_{\min}^{-3p-6})|A(0)| \,.$$

Es ist $|A(0)| \leq |\Sigma| = 4\pi R(\Sigma)^2$ und aus Korollar 3.2 folgt, dass $R/r_{\min} \leq C(m,C^B)$. Also ist

$$\sup_\Sigma |\mathring{A}| \leq C(p,m,C^B)(o(1)r_{\min}^{-2} + r_{\min}^{-3+2/(p+2)})$$

und das liefert die Behauptung, falls p im Vergleich zu ε groß genug ist. □

Um nun die folgende entscheidende sup-Abschätzung für die Abweichung der Normalen von der Radialrichtung zu bekommen, benutzen wir die erste Ungleichung aus Proposition 3.4 und kombinieren diese mit den sup-Abschätzungen an die Krümmung, die uns mit Hilfe von Korollar 3.2, der Annahme (B2) und der vorigen Abschätzung zur Verfügung stehen.

Proposition 3.7 *Ist $\Sigma \subset M \setminus B_{r_0}(0)$ wie oben, gilt also insbesondere die Abschätzung aus Proposition 3.4*

$$\|\nu - \phi^{-2}\rho\|_{L^2(\Sigma)} \leq \varepsilon r_{\min} + C_1$$

mit $\varepsilon = o(1)$, sowie die Abschätzung

$$|A| \leq C_2 r_{\min}^{-1}\,,$$

die aus Proposition 3.6 und Korollar 3.3 folgt, so erhält man die sup*-Abschätzung*

$$\sup|\nu - \phi^{-2}\rho| \leq c(C_1, C_2)(\varepsilon + r_{\min}^{-1})^{2/3}$$

mit einer von ε und $r_{\min}$ unabhängigen Konstanten $c(C_1, C_2)$, falls $\varepsilon < \varepsilon_0$ klein genug und $r_{\min} > r_0$ groß genug ist.

Beweis: Mit $f := |\nu - \phi^{-2}\rho|^2$ folgt aus den obigen Annahmen, dass

$$|\nabla(\nu - \phi^{-2}\rho)| \leq (C_2 + c) r_{\min}^{-1}$$

und damit

$$|\nabla f| = \left|g(\nabla(\nu - \phi^{-2}\rho), \nu - \phi^{-2}\rho)\right| \leq 3(C_2 + c) r_{\min}^{-1},$$

falls r_0 groß genug ist. Angenommen an einem Punkt $p_0 \in \Sigma$ gelte nun für ein $M > 0$, dass

$$f(p_0) \geq 2M(\varepsilon + r_{\min}^{-1})^{2/3}\,,$$

dann gilt für alle p mit $\operatorname{dist}(p_0, p) \leq M(\varepsilon + r_{\min}^{-1})^{2/3}(3(C_2 + c))^{-1} r_{\min}$, dass

$$f(p) \geq f(p_0) - \sup|\nabla f| \operatorname{dist}(p_0, p) \geq M(\varepsilon + r_{\min}^{-1})^{2/3}\,.$$

Daraus erhält man mit $B := \{p \in \Sigma : |p - p_0| \leq M(\varepsilon + r_{\min}^{-1})^{2/3}(3(C_2 + c))^{-1} r_{\min}\}$, dass

$$\int_\Sigma f \,\mathrm{d}\mu \geq \int_B f \mathrm{d}\mu \geq C \frac{M^3}{9(C_2 + c)^2}(\varepsilon r_{\min} + 1)^2\,,$$

wobei benutzt wurde, dass $|B| \geq CM^2(\varepsilon + r_{\min}^{-1})^{4/3}(3(C_2+c))^{-2}r_{\min}^2$ gilt. Dies folgt aus der Abschätzung $h \geq C^{-1}$ an den konformen Faktor der Abbildung $\psi : S_{R^e}(a) \to \Sigma$ aus Theorem 1.2 für kleine Werte von $(\varepsilon + r_{\min}^{-1})$. Ist M groß genug, erhält man daraus einen Widerspruch zur Annahme

$$\|\nu - \phi^{-2}\rho\|_{L^2(\Sigma)} \leq C_1(\varepsilon r_{\min} + 1)\,.$$

□

Korollar 3.8 *Man erhält auf gleiche Weise auch die* sup*-Abschätzung*

$$\sup_\Sigma |\nu^e - \rho| \leq o(1) + C(m, C^B)r_{\min}^{-2/3}$$

und damit

$$\inf_\Sigma g^e(\nu^e, \rho) \geq \frac{1}{2}$$

gilt, falls η und $r_{\min}^{-1}$ klein genug sind. Daher lässt sich Σ global als Graph über S^2 darstellen, es existiert also eine Funktion $u \in C^\infty(S^2)$ mit

$$\Sigma = \{u(p)p : p \in S^2 \subset \mathbf{R}^3\}\,.$$

Die vorige Abschätzung an ν kann benutzt werden, um eine sup-Abschätzung an $\mathrm{Ric}(\nu,\nu)$ herzuleiten.

Korollar 3.9 *Für Flächen Σ wie in Proposition 3.1 gilt*

$$|\,\mathrm{Ric}(\nu,\nu) + 2mr^{-3}| \leq o(1)r_{\min}^{-3} + C(m, C^g, C^B)r_{\min}^{-3-2/3}\,.$$

Beweis: Man nutzt die Positionsabschätzungen, die Tatsache dass $|\,\mathrm{Ric} - \mathrm{Ric}^S\,| \leq o(1)r_{\min}^{-3}$ sowie die sup-Abschätzung für die Abweichung der Normalen von der Radialrichtung, um mit einer ähnlichen Rechnung wie im Beweis der letzten Abschätzung von Proposition 3.4 vorzugehen. □

Nun sind wir in der Lage, die mittlere Krümmung H und die Gauß-Krümmung G von Σ genau zu berechnen. Dazu benutzt man die Rundheitsabschätzungen in der L^2- beziehungsweise sup-Norm aus den Propositionen 3.5 und 3.6, sowie die Positionsabschätzungen und Theorem 1.2.

Theorem 3.10 *Sei Σ eine Fläche wie in Proposition 3.1. Sei R_e der euklidische Flächenradius von Σ, es gelte also $R_e = \sqrt{|\Sigma|^e/4\pi}$. Sei weiter*

$$\bar{\phi} = 1 + \frac{m}{2R_e} \qquad \textit{und} \qquad \bar{H} = \bar{\phi}^{-2}\,\frac{2}{R_e} - \bar{\phi}^{-3}\,\frac{2m}{(R^e)^2}\,.$$

Dann existiert ein $r_0 = r_0(m, C^B, s)$ und eine Konstante $C(m, C^B)$, so dass für $r_{\min} > r_0$ gilt, dass

$$\sup_\Sigma |H - \bar{H}| \leq o(1) r_{\min}^{-2} + C(m, C^B) r_{\min}^{-2-2/3}$$

und

$$\sup_\Sigma \left| \det A - \frac{1}{4}\bar{H}^2 \right| \leq o(1) r_{\min}^{-3} + C(m, C^B) r_{\min}^{-3-2/3}\,.$$

Die Gausskrümmung $G = \det A - \mathrm{Ric}(\nu,\nu) + \frac{1}{2}\,\mathrm{Scal}$ erfüllt dann

$$\sup_\Sigma \left| G - \frac{1}{4}\bar{H}^2 - \frac{2m}{R_e^3} \right| \leq o(1) r_{\min}^{-3} + C(m, C^B) r_{\min}^{-3-2/3}\,.$$

Beweis: Wir benutzen wieder Theorem 1.2, Korollar 1.8 und die Rundheitsabschätzungen aus Proposition 3.5, und finden so einen Vektor $a \in \mathbf{R}^3$, eine Sphäre $S_{R^e}(a)$ und eine konforme Abbildung $\psi : S_{R^e}(a) \to \Sigma$, so dass

$$\int_\Sigma |H^e - 2/R^e|^2 \,\mathrm{d}\mu \leq o(1) r_{\min}^{-2} + C(m, C^B) r_{\min}^{-4} \tag{3.20}$$

sowie

$$\sup_{S_{R^e}(a)} |\psi - \mathrm{id}_{S_{R^e}(a)}| \leq o(1) + C(m, C^B) r_{\min}^{-1} \tag{3.21}$$

erfüllt ist. Nun definiere $S := S_{R^e}(0)$ als die zentrierte Vergleichssphäre und setze $\tau : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3 : x \mapsto x + a$. Definiere damit die Abbildung $\xi : S \to \Sigma : x \to \psi(\tau(x))$. Dies ist eine konforme Abbildung bezüglich der Metriken auf S und Σ, die durch die euklidische Metrik induziert sind. Der konforme Faktor von ξ ist dann durch $h^2 \circ \tau$ gegeben.

Aus den obigen Abschätzungen, zusammen mit der Positionsabschätzung an $|a|$ aus Proposition 3.1, erhält man dass

$$\sup_S |\xi - \mathrm{id}_S| \leq o(1) r_{\min} + C(m, C^B)$$

und damit

$$\sup_\Sigma |r - R^e| = \sup_S ||\xi(x)| - |x|| \leq o(1) r_{\min} + C(m, C^B) \,.$$

Hieraus folgt insbesondere, dass

$$|r_{\min} - R^e| \leq o(1) r_{\min} + C(m, C^B) \,.$$

Nun schätzt man ab

$$\sup_\Sigma |\bar\phi - \phi| \leq \sup_{r \geq r_{\min}/2} \left| \frac{d\phi}{dr} \right| \sup_\Sigma |r - R^e| \leq o(1) r_{\min}^{-1} + C(m, C^B) r_{\min}^{-2} \,.$$

Damit gilt auch

$$\sup_\Sigma |\bar\phi^{-2} - \phi^{-2}| + \sup_\Sigma |\bar\phi^{-3} - \phi^{-3}| \leq o(1) r_{\min}^{-1} + C(m, C^B) r_{\min}^{-2} \,.$$

Sei nun $x \in S$ und ν^e die euklidische Normale an Σ. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&|D_\rho \phi(x) - D_{\nu^e(\xi(x))} \phi(\xi(x))| \\
&\quad \leq |D_{\rho(x)} \phi(x) - D_{\rho(x)} \phi(\xi(x))| + |D_{\rho(x)} \phi(\xi(x)) - D_{\rho(\xi(x))} \phi(\xi(x))| \\
&\qquad + |D_{\rho(\xi(x))} \phi(\xi(x)) - D_{\nu^e(\xi(x))} \phi(\xi(x))| \\
&\quad \leq |D\phi| |x - \xi(x)| + |D\phi| |D\rho| |x - \xi(x)| + |D\phi| |\rho \circ \xi - \nu^e \circ \xi| \\
&\quad \leq o(1) r_{\min}^{-2} + C(m, C^B) r_{\min}^{-2-2/3} \,.
\end{aligned}$$

Die L^2-Norm von $H - \bar H$ schätzen wir ab, indem wir Lemma 1.5 benutzen, um H durch H^e zu ersetzen und indem wir die L^2-Abschätzung an H^e wie folgt einsetzen. Dabei gehen wir vorsichtiger vor als im Beweis von Korollar 3.3.

$$\begin{aligned}
&\int_\Sigma |H - \bar H|^2 \, \mathrm{d}\mu^e \\
&\quad \leq \int_\Sigma |\phi^{-2} H^e + 4\phi^{-3} D_{\nu^e} \phi - \bar\phi^{-2} \, 2/R_e + 2\bar\phi^{-3} \, m/R_e^2|^2 \, \mathrm{d}\mu^e + o(1) r_{\min}^{-3} \\
&\quad \leq c \int_\Sigma |\phi^{-3}|^2 |4 D_{\nu^e} \phi + 2m/R_e^2|^2 + |2m/R_e|^2 |\phi^{-3} - \bar\phi^{-3}|^2 \, \mathrm{d}\mu \\
&\qquad + c \int_\Sigma |\phi^{-2}|^2 |H^e - 2/R_e|^2 + |\phi^{-2} - \bar\phi^{-2}|^2 |2/R_e|^2 \, \mathrm{d}\mu + o(1) r_{\min}^{-3} \\
&\quad \leq c \int_\Sigma |H^e - 2/R_e|^2 \, \mathrm{d}\mu + o(1) r_{\min}^{-3} + C(m, C^B) r_{\min}^{-3-2/3} \\
&\quad \leq o(1) r_{\min}^{-2} + C(m, C^B) r_{\min}^{-2-4/3} \,.
\end{aligned}$$

Da auf Σ die Gleichung $H \pm P = \text{const}$ gilt, folgt

$$\begin{aligned}(H \pm P - \bar{H})^2 |\Sigma|^e &= \int_\Sigma (H \pm P - \bar{H})^2 \, \mathrm{d}\mu^e \\ &\leq 2 \int_\Sigma (H - \bar{H})^2 \mathrm{d}\mu^e + 2 \int_\Sigma P^2 \, \mathrm{d}\mu^e \\ &\leq o(1) r_{\min}^{-2} + C(m, C^B) r_{\min}^{-2-4/3} .\end{aligned}$$

Weil die Asymptotik von K impliziert, dass $|P| \leq o(1) r_{\min}^{-2}$ ist, gilt

$$\sup_\Sigma |H - \bar{H}| \leq o(1) r_{\min}^{-2} + C(m, C^B) r_{\min}^{-2-2/3} .$$

Benutzen wir die Rundheitsabschätzungen aus Proposition 3.6, so erhalten wir für die zweite Fundamentalform auf Σ

$$\begin{aligned}\left| A - \frac{1}{2} \bar{H} \operatorname{Id} \right| &\leq \left| A - \frac{1}{2} H \operatorname{Id} \right| + |H - \bar{H}| \\ &\leq o(1) r_{\min}^{-2} + C(m, C^g, C^B) r_{\min}^{-2-2/3}\end{aligned}$$

und damit

$$\left| \det A - \frac{1}{4} \bar{H}^2 \right| \leq |A| \left| A - \frac{1}{2} \bar{H} \operatorname{Id} \right| \leq o(1) r_{\min}^{-3} + C(m, C^B) r_{\min}^{-3-2/3} .$$

Die Gauss-Krümmung G auf Σ ist durch $G = \det A - \operatorname{Ric}(\nu, \nu) + \frac{1}{2} \operatorname{Scal}$ gegeben. Aus Korollar 3.9 folgt, dass

$$\left| \operatorname{Ric}(\nu, \nu) + \frac{2m}{R_e^3} \right| \leq o(1) r_{\min}^{-3} + C(m, C^g, C^B) r_{\min}^{-3-2/3} ,$$

was wegen $|\operatorname{Scal}| \leq o(1) r_{\min}^{-3}$ und den obigen Abschätzungen impliziert, dass

$$\left| G - \frac{1}{4} \bar{H}^2 - \frac{2m}{R_e^2} \right| \leq o(1) r_{\min}^{-3} + C(m, C^B) r_{\min}^{-3-2/3} .$$

□

Wir fassen die Ergebnisse dieses Abschnitts zuletzt zu einem Korollar zusammen.

Korollar 3.11 *Ist $m > 0$ fest und (M, g, K) wie in (3.1). Zu gegebenen Daten $\varepsilon > 0, C^B$ existiert ein $r_0 = r_0(\varepsilon, m, C^B, s)$, so dass folgende Aussage gilt.*

Ist Σ eine Fläche, die (2.1), die Annahmen (B1)–(B4) und $r_{\min} > r_0$ erfüllt, so gelten folgende Abschätzungen

$$\begin{aligned} \sup_\Sigma |H - \bar{H}| &\leq \varepsilon r_{\min}^{-2}, \\ \sup_\Sigma \left| \det A - \frac{1}{4}\bar{H}^2 \right| &\leq \varepsilon r_{\min}^{-2}, \\ \sup_\Sigma \left| G - \frac{1}{4}\bar{H}^2 - 2mR_e^{-3} \right| &\leq \varepsilon r_{\min}^{-3}. \end{aligned}$$

Desweiteren gelten die Annahmen (B1) – (B4) mit verbesserten Konstanten.

$$\begin{aligned} &(1+\varepsilon)^{-1} R(\Sigma) \leq r_{\min} \leq (1+\varepsilon) r_{\min} \\ &(1+\varepsilon)^{-1} R(\Sigma)^{-1} \leq \frac{H \pm P}{2} \leq (1+\varepsilon) R(\Sigma)^{-1} \\ &|A|^2 \leq (1+\varepsilon) 2 \det A \\ &\frac{1}{|\Sigma|^e} \int_\Sigma \mathrm{id}_\Sigma \, \mathrm{d}\mu^e \leq \varepsilon R(\Sigma) \end{aligned}$$

Sind (M, g, K) mit $m > 0$ wie in (3.2), so existiert zu gegebenen Daten $\varepsilon > 0, C^B$ ein $r_0 = r_0(\varepsilon, m, C^B, s)$ und ein $\eta_0 = \eta_0(\varepsilon, m, C^B)$, so dass falls in (3.2) die Bedingung $\eta < \eta_0$ gilt, die obigen Aussagen ebenfalls richtig sind.

4 Die Linearisierung des Operators $\mathcal{H} \pm \mathcal{P}$

Wir wollen in diesem Kapitel die Linearisierung des Operators $\mathcal{H} \pm \mathcal{P}$ untersuchen, der einer Fläche die Funktion $H \pm P$ zuordnet. Im nächsten Kapitel werden wir dann den Satz über implizite Funktionen benutzen, um die Existenz der $H \pm P = \text{const}$-Flächen zu zeigen. Wir beginnen mit der Berechnung des linearisierten Operators. Sei dazu eine kompakte, geschlossene Fläche $\Sigma \subset M$ gegeben. Betrachte um Σ Gaußsche Normalkoordinaten $y : \Sigma \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, so dass

$$y(\cdot, 0) = \mathrm{id}_\Sigma \quad \text{und} \quad \frac{\partial y}{\partial t} = \nu_{\Sigma_t}$$

wobei $\Sigma_t = y(\Sigma, t)$.

Definiere nun für eine Funktion $f \in C^\infty(\Sigma)$ mit $|f| \leq \varepsilon$ den Graphen von f über Σ als

$$\mathrm{graph}(f) := \{y(p, f(p)) : p \in \Sigma\}\,.$$

Weiter definiere den Operator $\mathcal{H} : C^\infty(\Sigma) \to C^\infty(\Sigma)$ als den Operator, der einer Funktion f die mittlere Krümmung $\mathcal{H}(f)$ des Graphen von f über Σ zuordnet. Sei außerdem $\mathcal{P} : C^\infty(\Sigma) \to C^\infty(\Sigma)$ derjenige Operator, der einer Funktion f die Größe $P = \mathrm{tr}^{\mathrm{graph}(f)}\, K$, ausgewertet auf dem Graphen von f, zuordnet.

Wir berechnen nun die Linearisierungen von $\mathcal{H}$ und $\mathcal{P}$ um $f = 0$. Dazu benötigen wir folgendes Lemma:

Lemma 4.1 *Sei $\Sigma \subset M$ eine Hyperfläche und $F : \Sigma \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ eine Variation von Σ, mit $F(\cdot, 0) = \mathrm{id}_\Sigma$. Ist F normal an Σ, gilt also $\frac{\partial F}{\partial t}\big|_{t=0} = f\nu$ für eine Funktion $f \in C^\infty(\Sigma)$, so gilt*

$$\begin{aligned}
\left.\frac{dH}{dt}\right|_{t=0} &= -\Delta^\Sigma f - f\left(|A|^2 + \mathrm{Ric}(\nu, \nu)\right)\,, \\
\left.\frac{d\nu}{dt}\right|_{t=0} &= -\nabla^\Sigma f\,, \\
\left.\frac{dP}{dt}\right|_{t=0} &= f\left(\nabla^M_\nu \,\mathrm{tr}^M\, K - \nabla^M_\nu K(\nu, \nu)\right) + 2K(\nabla^\Sigma f, \nu)
\end{aligned}$$

Dabei ist A die zweite Fundamentalform, H die mittlere Krümmung und ν die Normale von Σ. Die kovariante Ableitung der umgebenden Mannigfaltigkeit wird mit ∇^M bezeichnet, die kovariante Ableitung auf Σ mit ∇^Σ oder einfach ∇.

Beweis: Die ersten beiden Gleichungen sind wohlbekannt und werden zum Beispiel in [Bra97, Appendix A] bewiesen. Die letzte Evolutionsgleichung ergibt sich dann

sofort aus

$$\frac{dP}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\operatorname{tr} K - K(\nu,\nu)\right) . \qquad \square$$

Damit sind die Linearisierungen $L^{\mathcal{H}}$ und $L^{\mathcal{P}}$ gegeben durch

$$\begin{aligned} L^{\mathcal{H}} f &= -\Delta f - f\left(|A|^2 + \operatorname{Ric}(\nu,\nu)\right) \\ L^{\mathcal{P}} f &= f\left(\nabla^M_\nu \operatorname{tr} K - \nabla^M_\nu K(\nu,\nu)\right) + 2K(\nabla^\Sigma f, \nu) . \end{aligned}$$

Für die Linearisierung des Operators $\mathcal{H} \pm \mathcal{P}$ erhält man dann

$$L^{\mathcal{H}\pm\mathcal{P}} f = -\Delta f - f\left(|A|^2 + \operatorname{Ric}(\nu,\nu) \pm \nabla^M_\nu K(\nu,\nu) \mp \nabla^M_\nu \operatorname{tr} K\right) \pm 2K(\nabla^\Sigma f, \nu) . \quad (4.1)$$

Um den Operator $L^{\mathcal{H}\pm\mathcal{P}}$ genauer zu untersuchen, multiplizieren wir (4.1) mit f und integrieren partiell.

Proposition 4.2 *Ist $f \in C^\infty(\Sigma)$, so gilt*

$$\begin{aligned} \int_\Sigma f L^{\mathcal{H}\pm\mathcal{P}} f \, \mathrm{d}\mu &= \int_\Sigma |\nabla f|^2 - f^2 \left(8\pi\left(\mu \pm J(\nu)\right) + \frac{1}{2}\left|(K^T)^\circ \pm \mathring{A}\right|^2\right) \qquad (4.2) \\ &\quad - f^2\left(\frac{1}{4}(H \pm P)^2 + \frac{1}{2}\left(H \mp K(\nu,\nu)\right)^2 - \frac{1}{2}(\operatorname{tr} K)^2 - G\right) \mathrm{d}\mu . \end{aligned}$$

Dabei ist sind die Größen μ und J durch die Constraint-Gleichungen

$$16\pi\mu = \operatorname{Scal} - |K|^2_g + (\operatorname{tr} K)^2$$

und

$$8\pi J = \nabla^M \operatorname{tr} K - \operatorname{div}^M K$$

gegeben und $(K^T)^\circ$ bezeichnet den spurfreien Anteil der tangentialen Projektion von K auf Σ, d.h. $(K^T)^\circ_{\alpha\beta} = K_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\gamma^{\varepsilon\delta} K_{\varepsilon\delta}\gamma_{\alpha\beta}$. Desweiteren bezeichnet G die Gaußkrümmung von Σ.

Beweis: Sei $p \in \Sigma$ ein fester Punkt. Rechne im Folgenden in einer lokalen, an Σ angepassten ON-Basis $\{e_1, e_2, e_3 = \nu\}$ von TM um p, die so gewählt ist, dass in p die Gleichung $\nabla^M_{e_\alpha} e_\beta = -A_{\alpha\beta}\nu$ gilt. Wir beginnen mit der Gauss-Gleichung (1.1)

$$\mathcal{R}_{\alpha\beta\delta\epsilon} = R_{\alpha\beta\delta\epsilon} + A_{\alpha\delta}A_{\beta\epsilon} - A_{\alpha\epsilon}A_{\beta\delta}$$

und bilden die Spur zunächst über α und δ und dann über β und ϵ. Wir erhalten

$$\gamma^{\alpha\delta}\mathcal{R}_{\alpha\beta\delta\epsilon} = \operatorname{Ric}_{\beta\epsilon} - R_{3\beta3\epsilon} + H A_{\beta\epsilon} - A^\alpha_\beta A_{\alpha\epsilon}$$

und dann

$$2G = \mathrm{Scal} - 2\,\mathrm{Ric}(\nu,\nu) + H^2 - |A|^2\,.$$

Also ist

$$|A|^2 + \mathrm{Ric}(\nu,\nu) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{Scal} + H^2 + |A|^2\right) - G\,.$$

Mit der Definition von μ erhält man

$$|A|^2 + \mathrm{Ric}(\nu,\nu) = 8\pi\mu + \frac{1}{2}\left(|K|_M^2 - (\operatorname{tr} K)^2 + H^2 + |A|^2\right) - G\,. \tag{4.3}$$

Betrachtet man jetzt den Term $2\int_\Sigma fK(\nabla^\Sigma f,\nu)\,\mathrm{d}\mu$, so erhält man mit Hilfe partieller Integration

$$\begin{aligned}
&2\int_\Sigma fK(\nabla^\Sigma f,\nu)\,\mathrm{d}\mu \\
&= \int_\Sigma \nabla^\Sigma_{e_\alpha}(f^2)K(e_\alpha,\nu)\,\mathrm{d}\mu \qquad (4.4)\\
&= -\int_\Sigma f^2\left(\nabla_{e_\alpha}K(e_\alpha,\nu) + K(\nabla_{e_\alpha}e_\alpha,\nu) + K(e_\alpha,\nabla_{e_\alpha}\nu)\right)\mathrm{d}\mu \\
&= -\int_\Sigma f^2\left(\nabla_{e_\alpha}K(e_\alpha,\nu) - HK(\nu,\nu) + K^T\cdot A\right)\mathrm{d}\mu \\
&= -\int_\Sigma f^2\left(\mathrm{div}^M K(\nu) - \nabla^M_\nu K(\nu,\nu) - HK(\nu,\nu) + K^T\cdot A\right)\mathrm{d}\mu \\
&= -\int_\Sigma f^2(-8\pi J(\nu) + \nabla^M_\nu \operatorname{tr} K - \nabla^M_\nu K(\nu,\nu) - HK(\nu,\nu) + K^T\cdot A)\,\mathrm{d}\mu\,.
\end{aligned}$$

Kombiniert man Gleichungen (4.1) mit (4.2) und setzt dies in die Gleichung

$$\begin{aligned}
&\int_\Sigma fL^{\mathcal{H}\pm\mathcal{P}}f\,\mathrm{d}\mu \\
&= \int_\Sigma |\nabla f|^2 - f^2\left(|A|^2 + \mathrm{Ric}(\nu,\nu) \mp \nabla_\nu \operatorname{tr} K \pm \nabla_\nu K(\nu,\nu)\right) \pm 2fK(\nabla^\Sigma f,\nu)\,\mathrm{d}\mu
\end{aligned}$$

ein, erhält man die Behauptung. □

Nun kann man mit Hilfe der Apriori-Abschätzungen aus dem vorigen Kapitel eine erste Aussage über die Positivität des Operators $L^{\mathcal{H}\pm\mathcal{P}}$ machen.

Proposition 4.3 *Ist $m > 0$ gegeben und (M, g, K) wie in (3.1), so existiert ein $r_0 = r_0(m, C^B, s)$ und ein $\mu_1 > 0$, so dass für alle Flächen Σ, die (2.1) und die Annahmen (B1) – (B4) sowie $r_{\min} > r_0$ erfüllen und für alle $f \in C^\infty(\Sigma)$ mit $\int_\Sigma f \,\mathrm{d}\mu = 0$ gilt, dass*

$$\mu_1 \int_\Sigma f^2 \,\mathrm{d}\mu \leq \int_\Sigma f L^{\mathcal{H}\pm\mathcal{P}} f \,\mathrm{d}\mu \,.$$

Ist $m > 0$ gegeben und (M, g, K) wie in (3.2), so existiert ein $\eta_0 = \eta_0(m, C^B)$, ein $r_0 = r_0(m, C^B, s)$ und ein $\mu_1 > 0$, so dass, falls (3.2) mit $\eta < \eta_0$ gilt, für alle Flächen Σ, die (2.1) und die Annahmen (B1) – (B3) sowie $r_{\min} > r_0$ erfüllen und alle $f \in C^\infty(\Sigma)$ mit $\int_\Sigma f \,\mathrm{d}\mu = 0$ gilt, dass

$$\mu_1 \int_\Sigma f^2 \,\mathrm{d}\mu \leq \int_\Sigma f L^{\mathcal{H}\pm\mathcal{P}} f \,\mathrm{d}\mu \,.$$

In beiden Fällen genügt μ_1 der Abschätzung

$$\mu_1 \geq \frac{6m}{R_e^3} - o(1) R_e^{-3} + C(m, C^B) R_e^{-3-2/3} \,,$$

wobei $o(1)$ wie am Anfang von Kapitel 3 erklärt ist.

Beweis: Es ist wohlbekannt, dass eine untere Schranke an die Gaußkrümmung $G \geq C$ auf einer Fläche zu einer unteren Schranke $\lambda_1 \geq 2C$ für den ersten Eigenwert des Laplace-Beltrami-Operators Δ führt, siehe dazu zum Beispiel [Sak96, Chapter VI, Theorem 4.1]. Es gilt daher

$$\lambda_1 \int_\Sigma f^2 \,\mathrm{d}\mu \leq \int_\Sigma |\nabla f|^2 \,\mathrm{d}\mu \qquad \text{für alle } f \text{ mit} \qquad \int_\Sigma f \,\mathrm{d}\mu = 0 \,.$$

Theorem 3.10 liefert diese Schranke, so dass

$$\lambda_1 \geq \frac{1}{2}\bar{H}^2 + \frac{4m}{R_e^3} - o(1) R_e^{-3} + C(m, C^B) R_e^{-3-2/3} \,.$$

Also erhält man aus der Asymptotik von K und Proposition 4.2, dass

$$\begin{aligned}
&\int_\Sigma f L^{\mathcal{H}\pm\mathcal{P}} f \,\mathrm{d}\mu \\
&\quad \geq \int_\Sigma (\lambda_1 - |\mathring{A}|^2 - \frac{3}{4}H^2 + G - o(1) R_e^{-3}) f^2 \,\mathrm{d}\mu \\
&\quad \geq \left(\frac{1}{2}\bar{H}^2 + 4m R_e^{-3} - o(1) R_e^{-3} - C(m, C^B) R_e^{-3-2/3}\right) \int_\Sigma f^2 \,\mathrm{d}\mu \\
&\qquad + \left(2m R_e^{-3} - \frac{1}{2}\bar{H}^2 - o(1) R_e^{-3} - C(m, C^B) R_e^{-3-2/3}\right) \int_\Sigma f^2 \,\mathrm{d}\mu \\
&\quad \geq \left(6m R_e^{-3} - o(1) R_e^{-3} - C(m, C^B) R_e^{-3-2/3}\right) \int_\Sigma f^2 \,\mathrm{d}\mu \,.
\end{aligned}$$

Ist $o(1)$ klein genug und R_e groß genug, so ist

$$o(1)R_e^{-3} + C(m, C^B)R_e^{-3-2/3} < 6mR_e^{-3}\,,$$

und die Behauptung folgt. □

Nun kann man die Lösungen u von $L^{\mathcal{H}\pm\mathcal{P}}u = \text{const}$ genauer untersuchen und zeigen, dass diese Funktionen fast konstant sind.

Proposition 4.4 *Seien die Voraussetzungen von Proposition 4.3 erfüllt. Sei weiter u eine Lösung der linearen Gleichung $L^{\mathcal{H}\pm\mathcal{P}}u = f$ und es gelte*

$$\int_\Sigma (f - \bar{f})^2 \,\mathrm{d}\mu \leq \frac{\mu_1^2}{4}\bar{u}^2$$

mit der Konstanten μ_1 aus Proposition 4.3 und dem Mittelwert $\bar{f} = |\Sigma|^{-1}\int_\Sigma f \,\mathrm{d}\mu$ von f und $\bar{u}$ von u. Dann gilt

$$\sup_\Sigma |u - \bar{u}| \leq \left(o(1) + C(m, C^B)R_e^{-2/3}\right)\bar{u}\,.$$

Beweis: Sei ohne Einschränkung u so normalisiert, dass $\bar{u} = 1$. Dann ist zunächst

$$L^{\mathcal{H}\pm\mathcal{P}}(u-1) = f + \left(|A|^2 + \mathrm{Ric}(\nu,\nu) \pm \nabla^M_\nu K(\nu,\nu) \mp \nabla^M_\nu \operatorname{tr} K\right)\,.$$

Multipliziert man dies mit $(u-1)$ und integriert, erhält man wegen Proposition 4.3

$$\begin{aligned}
\mu_1 \int_\Sigma (u-1)^2 \,\mathrm{d}\mu &\leq \int_\Sigma (u-1) L^{\mathcal{H}\pm\mathcal{P}}(u-1)\,\mathrm{d}\mu \\
&= \int_\Sigma (u-1) f \,\mathrm{d}\mu \\
&\quad + \int_\Sigma (u-1)\left(|A|^2 + \mathrm{Ric}(\nu,\nu) \pm \nabla^M_\nu K(\nu,\nu) \mp \nabla^M_\nu \operatorname{tr} K\right)\,\mathrm{d}\mu\,.
\end{aligned}$$

Der erste Term lässt sich mit Hilfe der Voraussetzungen abschätzen

$$\begin{aligned}
\int_\Sigma (u-1) f \,\mathrm{d}\mu &= \int_\Sigma (u-1)(f - \bar{f})\,\mathrm{d}\mu \\
&\leq \left(\int_\Sigma (u-1)^2\,\mathrm{d}\mu\right)^{1/2}\left(\int_\Sigma (f-\bar{f})^2\,\mathrm{d}\mu\right)^{1/2} \\
&\leq \frac{\mu_1}{2}\left(\int_\Sigma (u-1)^2\,\mathrm{d}\mu\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Nun ist wegen Theorem 3.10

$$\begin{aligned} &|\mathring{A}|^2 + \frac{1}{2}|H^2 - \bar{H}^2| + |\operatorname{Ric}(\nu,\nu) + 2mR_e^{-3}| \\ &\quad\leq\ o(1)R_e^{-3} + C(m, C^B)R_e^{-3-2/3}\,, \end{aligned}$$

wobei R_e und $\bar{H}$ definiert sind wie in Theorem 3.10. Dies liefert zusammen mit

$$\int_\Sigma (u-1)\bar{H}^2 \,\mathrm{d}\mu = 0$$

und der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$\begin{aligned} &\left|\int_\Sigma (u-1)\left(|A|^2 + \operatorname{Ric}(\nu,\nu) \pm \nabla^M_\nu K(\nu,\nu) \mp \nabla^M_\nu \operatorname{tr} K\right) \mathrm{d}\mu\right| \\ &\quad\leq\ \int_\Sigma |u-1||\mathring{A}|^2 \,\mathrm{d}\mu + \frac{1}{2}\int_\Sigma |u-1|\,|H^2 - \bar{H}^2|\,\mathrm{d}\mu \\ &\qquad + \int_\Sigma |u-1|\,|\operatorname{Ric}(\nu,\nu) + 2mR_e^{-3}|\,\mathrm{d}\mu + \int_\Sigma |u-1||\nabla^M K|\,\mathrm{d}\mu \\ &\quad\leq\ \left(o(1)R_e^{-2} + C(m,C^B)R_e^{-2-2/3}\right)\left(\int_\Sigma (u-1)^2\,\mathrm{d}\mu\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Setzt man beides in die obige Ungleichung ein, ergibt sich

$$\int_\Sigma (u-1)^2\,\mathrm{d}\mu \leq \mu_1^{-2}\left(o(1)R_e^{-4} + C(m,C^g)R_e^{-4-4/3}\right).$$

Standard-Abschätzungen aus der Theorie linearer, elliptischer partieller Differentialgleichungen [GT98] liefern daher

$$\sup_\Sigma |u-1| \leq \mu_1^{-1}\left(o(1)R_e^{-3} + C(m,C^B)R_e^{-3-2/3}\right),$$

und mit Hilfe der Abschätzung an μ_1 aus Proposition 4.3 folgt die Behauptung. □

Korollar 4.5 *Ist $o(1)$ klein genug und f wie in der vorigen Proposition, so wechselt eine Lösung von $Lu = f$ ihr Vorzeichen nicht.*

Korollar 4.6 *Sei u eine Lösung der linearen Gleichung $L^{\mathcal{H}\pm\mathcal{P}}u = f$, und gelte*

$$\int_\Sigma (u-\bar{u})f\,\mathrm{d}\mu \leq \frac{\mu_1}{2}\left(\int_\Sigma (u-\bar{u})^2\,\mathrm{d}\mu\right)^{1/2}$$

mit der Konstanten μ_1 aus Proposition 4.3. Dann gilt

$$\sup_\Sigma |u-\bar{u}| \leq o(1) + C(m,C^B)R_e^{-2/3}\bar{u}\,.$$

Eine Folge aus diesem Korollar ist die Invertierbarkeit des Operators $L^{\mathcal{H}\pm\mathcal{P}}$ in geeigneten Banachräumen mit einer unteren Schranke an die Inverse.

Proposition 4.7 *Ist $r_{\min} > r_0(m, C^B, s)$ groß genug und $\eta_0 = \eta_0(m, C^B)$ klein genug, so hat der Operator $L^{\mathcal{H}\pm\mathcal{P}}$ keinen C^∞-Kern und ist damit als Operator*

$$L^{\mathcal{H}\pm\mathcal{P}} : C^{2,\alpha}(\Sigma) \to C^{0,\alpha}(\Sigma)$$

invertierbar. Der inverse Operator

$$K^{\mathcal{H}\pm\mathcal{P}} : C^{0,\alpha}(\Sigma) \to C^{2,\alpha}(\Sigma)$$

existiert und ist stetig. Es gilt die Schranke

$$\|K^{\mathcal{H}\pm\mathcal{P}} f\|_{L^2(\Sigma)} \leq \frac{R_e^3}{3m} \|f\|_{L^2(\Sigma)} .$$

Beweis: Wir nehmen an, es gäbe eine Funktion u mit $\|u\|_{L^2(\Sigma)} = 1$ und

$$\sup_{\|v\|_{L^2(\Sigma)}=1} \left| \int_\Sigma vLu \, \mathrm{d}\mu \right| \leq \frac{3m}{R_e^3} . \tag{4.5}$$

Aus Proposition 4.3 folgt, dass $\bar{u} \neq 0$ gelten müsste. Wir gehen daher ohne Einschränkung von $\bar{u} > 0$ aus. Wähle zunächst in (4.5) $v = u - \bar{u}$. Dies ergibt

$$\left| \int_\Sigma (u - \bar{u}) Lu \, \mathrm{d}\mu \right| \leq \frac{3m}{R_e^3} \left(\int_\Sigma (u - \bar{u})^2 \, \mathrm{d}\mu \right)^{1/2} .$$

Damit sind die Voraussetzungen von Korollar 4.6 erfüllt. Falls $o(1)$ klein genug ist, erhält man, dass

$$\frac{1}{2}\bar{u} \leq u \leq 2\bar{u} . \tag{4.6}$$

Aus der Bedingung $\|u\|_{L^2(\Sigma)} = 1$ folgt dann $\bar{u} \geq \frac{1}{2}|\Sigma|^{-1/2}$, und aus der Hölder-Ungleichung folgt $\bar{u} \leq |\Sigma|^{-1/2}$. Benutzt man jetzt in (4.5) die Testfunktion $v = 1$, erhält man

$$\left| \int_\Sigma Lu \, \mathrm{d}\mu \right| \leq \frac{3m}{R_e^3} |\Sigma| \leq C(m, C^B) R_e^{-1} . \tag{4.7}$$

Andererseits berechnet man

$$\int_\Sigma Lu \, \mathrm{d}\mu = - \int_\Sigma u \left(|A|^2 + \mathrm{Ric}(\nu, \nu) \pm \nabla_\nu^M K(\nu, \nu) \mp \nabla_\nu^M \operatorname{tr} K \right) \mp 2K(\nabla u, \nu) \, \mathrm{d}\mu .$$

(4.8)

Integriert man den letzten Term partiell und rechnet in einer lokalen ON-Basis $\{e_1, e_2\}$ von $T\Sigma$ mit $\nabla^M_{e_\alpha} e_\beta = -A_{\alpha\beta}\nu$, so ergibt sich

$$\begin{aligned}\int_\Sigma K(\nabla u, \nu)\,\mathrm{d}\mu &= \int_\Sigma (\nabla_{e_\alpha} u) K(e_\alpha, \nu)\,\mathrm{d}\mu \\ &= -\int_\Sigma u(\nabla^M_{e_\alpha} K(e_\alpha, \nu) - HK(\nu,\nu) + K^T \cdot A)\,\mathrm{d}\mu\,.\end{aligned}$$

In (4.8) eingesetzt ergibt sich zusammen mit (4.6) und (4.7)

$$\begin{aligned}\left|\int_\Sigma u|A|^2\,\mathrm{d}\mu\right| &\leq \left|\int_\Sigma Lu\,\mathrm{d}\mu\right| + C(m)R_e^{-3}|\Sigma|\bar{u} \\ &\leq \frac{3m}{R_e^3}|\Sigma|\bar{u} + C(m)R_e^{-3}|\Sigma|\bar{u} \\ &\leq C(m)R_e^{-1}\bar{u}\,.\end{aligned}$$

Zusammen mit (4.6) berechnet man weiter

$$\int_\Sigma H^2\,\mathrm{d}\mu \leq 2\int_\Sigma |A|^2\,\mathrm{d}\mu \leq 4\int_\Sigma \frac{u}{\bar{u}}|A|^2\,\mathrm{d}\mu \leq C(m)R_e^{-1}$$

und das ist für großes R_e ein Widerspruch zu (B2). Also ist der Operator $L^{\mathcal{H}\pm\mathcal{P}}$ als Abbildung von $C^{2,\alpha}(\Sigma) \to C^{0,\alpha}(\Sigma)$ injektiv und, da es sich um einen linearen elliptischen Operator handelt, nach der Fredholm-Alternative auch surjektiv. Somit existiert eine stetige Inverse $K : C^{0,\alpha}(\Sigma) \to C^{2,\alpha}(\Sigma)$ [GT98, Kapitel 5] mit den angegebenen Schranken. □

Insgesamt erhält man folgendes Theorem.

Theorem 4.8 *Ist $m > 0$ und (M, g, K) wie in (3.1), so existiert $r_0 = r_0(m, C^B, s)$ so dass folgende Aussage gilt.*

Ist Σ eine Fläche, für die (2.1), die Bedingungen (B1)–(B4) und $r_{\min}(\Sigma) > r_0$ erfüllt sind, so ist die Linearisierung $L^{\mathcal{H}\pm\mathcal{P}}$ des Operators $\mathcal{H} \pm \mathcal{P}$ als Operator

$$L^{\mathcal{H}\pm\mathcal{P}} : C^{2,\alpha}(\Sigma) \to C^{0,\alpha}(\Sigma)$$

für jedes $0 < \alpha < 1$ invertierbar. Der inverse Operator

$$L^{\mathcal{H}\pm\mathcal{P}}{}_{inv} : C^{0,\alpha}(\Sigma) \to C^{2,\alpha}(\Sigma)$$

ist stetig und erfüllt für beliebiges $0 < \alpha < 1$ *die Abschätzung*

$$\|L^{\mathcal{H}\pm\mathcal{P}}{}_{inv} f\|_{C^{2,\alpha}(\Sigma)} \leq C(\alpha, \Sigma) \frac{R_e^3}{3m} \|f\|_{C^{2,\alpha}(\Sigma)} .$$

Ist $m > 0$ *und* (M, g, K) *wie in (3.2), so existiert ein* $r_0 = r_0(m, C^B, s)$ *und ein* $\eta_0 = \eta_0(m, C^B)$*, so dass, falls in (3.2)* $\eta < \eta_0$ *ist, die vorige Aussage ebenfalls richtig ist.*

Beweis: Die Abschätzung in der Hölder-Norm $C^{2,\alpha}(\Sigma)$ folgt aus Standardabschätzungen der Theorie linearer elliptischer Operatoren wegen der L^2-Abschätzung aus Proposition 4.7, da mit Hilfe der Apriori-Abschätzungen aus Korollar 3.11 die Gauss-Krümmung G und damit der Injektivitätsradius in der richtig skalierenden Weise kontrolliert sind. □

Bemerkung: Die Konstante $C(\alpha, \Sigma)$ könnte noch von der Fläche Σ abhängen. Die Schauderabschätzngen liefern jedoch, sofern man geeignete Koordinaten wählt, dass $C(\alpha, \Sigma)$ in der Tat gleichmäßig für alle Σ gewählt werden kann.

Entsprechende Abschätzungen in den Räumen $W^{2,p}(\Sigma)$ findet man zum Beispiel in [CK93, Chapter 2].

$$\|L^{\mathcal{H}\pm\mathcal{P}}{}_{\mathrm{inv}} f\|_{W^{2,p}(\Sigma\ )} \leq C(2, p) \frac{R_e^3}{3m} \|f\|_{L^p(\Sigma\ )} .$$

Die dort vorkommenden Konstanten hängen nur von $k_{\min} := |\Sigma|^{-1} \min_\Sigma G$ und $k_{\max} := |\Sigma|^{-1} \max_\Sigma G$ ab. Diese beiden Größen sind aber durch Korollar 3.11 offensichtlich kontrolliert. Die Konstante $C(2, p)$ aus obiger Abschätzung ist daher für festes p gleichmäßig für alle Flächen, die unsere Annahmen erfüllen.

5 Existenz von Flächen mit $H \pm P = \text{const}$

Nun werden wir mit Hilfe der vorigen Kapitel die Existenz von Flächen mit $H \pm P = \text{const}$ zeigen.

Wir verfolgen dazu folgende Strategie. Für festes $m > 0$ setze

$$g_\sigma := (1-\sigma)g^S + \sigma g \qquad \text{und} \qquad K^\sigma := \sigma K\,.$$

Die Daten (g, K) werden also mit den Referenzdaten $(g^S, 0)$ verbunden. Dann erfüllen g_σ und K_σ die gleichen Abschätzungen (3.1) oder (3.2) wie g und K. Insbesondere gelten die Theoreme 3.10 und 4.8 mit den gleichen Konstanten auch für (M, g_σ, K_σ). Beginnend bei $\sigma = 0$, also mit $g_0 = g^S$ und $K_0 = 0$, lösen wir für eine vorgegebene Konstante h die Gleichung

$$H \pm P = h\,.$$

Dies ist ohne Probleme möglich, da in der Schwarzschildmetrik g^S eine zentrierte Sphäre mit dem Radius r die konstante mittlere Krümmung

$$H_S(r) = \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^{-3} \left(\frac{2}{r} - \frac{m}{r^2}\right)$$

hat und diese Funktion für $r > r_1(m)$ invertierbar ist. Wegen $K_0 = 0$ ist $P = 0$. Es existiert also ein $h_1(m)$, so dass für $h < h_1$ das Problem für $\sigma = 0$ lösbar ist.

Um diese Lösung der Gleichung so zu deformieren, dass man für alle $\sigma \in [0,1]$ eine Fläche mit $H \pm P = h$ bekommt, definieren wir zunächst zwei Klassen von Flächen. Dazu benötigen wir die Apriori-Abschätzungen und Überlegungen aus den vorigen Kapiteln.

Sei $m > 0$ fest gewählt, also eine feste Hintergrundmetrik $g^S = g_0$ gegeben. Wähle in den Annahmen (B1)–(B4) die Konstanten so, dass

$$R(\Sigma) \le 8 r_{\min}\,, \tag{C1}$$

$$\frac{1}{8} R(\Sigma)^{-1} \le H \pm P\,, \tag{C2}$$

$$\int_\Sigma u\,|A|^2\,\mathrm{d}\mu \le 8 \int_\Sigma u\,\det A\,\mathrm{d}\mu \qquad \text{für alle} \qquad 0 \le u \in C^\infty(\Sigma)\,, \tag{C3}$$

$$\frac{1}{|\Sigma|^e} \int_\Sigma \mathrm{id}_\Sigma\,\mathrm{d}\mu^e \le \left(1 - \frac{1}{8}\right) R_e \tag{C4}$$

und bestimme dann die Größen r_0 so groß und η_0 so klein, dass aus Korollar 3.11

folgt, dass die Annahmen (C1)–(C4) schon mit besseren Konstanten gelten:

$$R(\Sigma) \leq 4r_{\min}\,, \tag{D1}$$

$$\frac{1}{4}R(\Sigma)^{-1} \leq H \pm P\,, \tag{D2}$$

$$\int_\Sigma u\,|A|^2\,\mathrm{d}\mu \leq 4\int_\Sigma u\,\det A\,\mathrm{d}\mu \qquad \text{für alle} \qquad 0 \leq u \in C^\infty(\Sigma)\,. \tag{D3}$$

$$\frac{1}{|\Sigma|^e}\int_\Sigma \mathrm{id}_\Sigma\,\mathrm{d}\mu^e \leq \left(1-\frac{1}{4}\right)R_e \tag{D4}$$

Wähle ausserdem r_0 so groß und η_0 so klein, dass unter den Annahmen (D1) – (D4) Theorem 4.8 gilt und der linearisierte Operator $\mathcal{H} \pm \mathcal{P}$ aus Kapitel 4 auf $H \pm P = \text{const}$-Flächen invertierbar ist. Sei ferner r_0 und η_0 so, dass unter den Annahmen (D1)–(D4) aus Korollar 3.8 folgt, dass Σ ein Graph über S^2 ist und $g^e(\nu^e, \rho) > \frac{1}{2}$ auf Σ gilt. Schließlich seien r_0 und η_0 so, dass Korollar 3.11 für Flächen, die (C1) – (C4) erfüllen, liefert, dass

$$\frac{1}{4}r_{\min} \leq (H \pm P)^{-1} \leq 4\,r_{\min}\,. \tag{5.1}$$

Seien (M, g, K) Daten mit

$$\|g - g^S\|_{C^2_{-1}} + \|K\|_{C^1_{-2}} < \eta_0\,.$$

Nun definiere die erste Klasse von Flächen:

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_1(\sigma) := \{\Sigma \subset M : \Sigma \text{ ist diffeomorph zu } S^2,\\ \text{erfüllt (C1)–(C4) bezüglich } g_\sigma\\ \text{und } r_{\min} > r_0\}\,.\end{aligned}$$

Die zweite Klasse ist die etwas kleinere Menge

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_2(\sigma) := \{\Sigma \subset M : \Sigma \text{ ist diffeomorph zu } S^2,\\ \text{erfüllt (D1)–(D4) bezüglich } g_\sigma\\ \text{und } r_{\min} > 2r_0\}\,.\end{aligned}$$

Wähle $0 < h_2 \leq h_1$, so dass die zentrierten Sphären $S_r(h)(0)$ mit mittlerer Krümmung $H = h < h_2$ in $\mathcal{S}_2(0)$ liegen. Wähle $h_0 < \min\{h_1, h_2, \frac{1}{8}r_0^{-1}\}$. Sei

$$\kappa : [0,1] \to (0, h_0) \times [0,1] : t \mapsto (h(t), \sigma(t))$$

eine stetige, stückweise glatte Kurve, wobei $\sigma(0) = 0$. Wir definieren $I_\kappa \subset [0,1]$ als

$$I_\kappa := \{t \in [0,1] : \exists\,\Sigma(t) \in \mathcal{S}_2(\sigma(t)) \text{ mit } H \pm P = h(t) \text{ bezüglich } \left(g_{\sigma(t)}, K_{\sigma(t)}\right)\}$$

Nach der Wahl von h_0 ist I_κ nicht leer, da $0 \in I_\kappa$ ist.

Proposition 5.1 *I_κ ist offen.*

Beweis: Ohne Einschränkung sei κ glatt. Sei $t_0 \in I_\kappa$. Dann existiert eine Fläche $\Sigma := \Sigma(t_0)$ mit $\Sigma \in \mathcal{S}_2(\sigma(t_0))$ und $H \pm P = h(t_0)$ bezüglich der Daten $(g_{\sigma(t_0)}, K_{\sigma(t_0)})$. Zu zeigen ist, dass es ein kleines Intervall $(t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subset I$ gibt. Betrachte dazu um Σ Gaußsche Normalkoordinaten $y : \Sigma \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$. Sei

$$B := \{f \in C^{2,\alpha}(\Sigma) : \sup_\Sigma |f| \leq \varepsilon\}$$

die Menge der zulässigen Funktionen. Der Graph einer Funktion $f \in B$ ist wie in Kapitel 4 definiert als

$$\text{graph}(f) := \{y(p, f(p)) : p \in \Sigma\}\,.$$

Definiere den Operator

$$\mathcal{L} : B \times [0,1] \to C^{0,\alpha}(\Sigma) : (f,t) \mapsto \mathcal{H} \pm \mathcal{P}(f,t) - h(t)\,,$$

so dass $\mathcal{H} \pm \mathcal{P}(f,t)$ die Größe $H \pm P$ ausgewertet auf $\text{graph}(f)$ bezüglich der Daten $(M, g_{\sigma(t)}, K_{\sigma(t)})$ ist. Dieser Operator ist differenzierbar und nach Voraussetzung gilt $\mathcal{L}(0, t_0) = 0$.

Das Differential von $\mathcal{L}$ bezüglich der ersten Variable ist der Operator $L^{\mathcal{H}\pm\mathcal{P}}$ aus Kapitel 4 und nach Theorem 4.8 und den Voraussetzungen dieses Kapitels invertierbar. Der Satz über implizite Funktionen liefert daher ein Intervall $(t - \delta, t + \delta)$ und eine differenzierbare Funktion $\xi : (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \to C^{2,\alpha}(\Sigma)$, so dass $\mathcal{L}(\xi(t), t) = 0$ für alle t mit $|t - t_0| < \delta$.

Zu jedem solchen t existiert also eine Fläche $\Sigma(t)$ mit $H \pm P = h(t)$ bezüglich der Daten $(g_\sigma(t), K_\sigma(t))$. Da $\Sigma(t_0) \in \mathcal{S}_2(\sigma(t_0))$ war, kann aus Stetigkeitsgründen $\delta > 0$ gegebenenfalls so verkleinert werden, dass für $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ die Flächen $\Sigma(t)$ in $\mathcal{S}_1(\sigma(t))$ liegen. Dann folgt aus den Annahmen (C1)–(C4) und der Wahl von r_0 und η_0, dass (D1)–(D4) gelten. Außerdem erhält man nach Wahl von h_0

$$r_{\min} > \frac{1}{4}(H \pm P)^{-1} > \frac{1}{4}h_0^{-1} > 2r_0\,.$$

Also gilt $\Sigma(t) \in \mathcal{S}_2(\sigma(t))$ für alle $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$. □

Proposition 5.2 *I_κ ist abgeschlossen.*

Beweis: Sei wieder ohne Einschränkung κ glatt. Sei $\{t_n\}$ eine Folge in I_κ, so dass $\lim_{n\to\infty} t_n = t$. Dann exisitiert zu jedem t_n eine Fläche $\Sigma(t_n)$, auf der $H \pm P = h(t_n)$ bezüglich der Daten $(g_{\sigma(t_n)}, K_{\sigma(t_n)})$ gilt. Nun benutzen wir die Abschätzung an

$g^e(\nu, \rho)$ aus Korollar 3.8 um zu schließen, dass die Flächen $\Sigma(t_n)$ global als Graphen über der Sphäre $S^2 \subset \mathbf{R}^3$ dargestellt werden können,

$$\Sigma(t_n) = \{u_n(p)p : p \in S^2\}.$$

Die Positionsabschätzungen aus Proposition 3.1, die gleichmäßigen Abschätzungen an $g^e(\nu, \rho)$ aus Korollar 3.8 und die gleichmäßigen Krümmungsabschätzungen aus Proposition 3.6 liefern gleichmäßige C^2-Abschätzungen an die Funktionenfolge (u_n). Aus den $W^{1,2}$-Abschätzungen an die Krümmung erhält man mit Hilfe der C^2-Abschätzungen außerdem gleichmäßige $W^{3,2}$-Abschätzungen für die (u_n).

Daher können wir ohne Einschränkung annehmen, dass die Folge der (u_n) im Raum $W^{2,p}(S^2)$ für ein beliebiges $1 < p$ gegen eine Funktion $u \in W^{2,p}$ konvergiert. Außerdem können wir weiter annehmen, dass die (u_n) in $C^{1,\alpha}(S^2)$ für ein $0 < \alpha < 1$ gegen u konvergieren.

Da $(g_{\sigma(t_n)}, K_{\sigma(t_n)})$ in jedem $C^k(M)$, $k \geq 0$ gegen $(g_{\sigma(t)}, K_{\sigma(t)})$ konvergieren, gilt auf dem Graphen Σ von u eine schwache Form der quasilinearen elliptischen Gleichung

$$H \pm P = h(t)$$

bezüglich der Daten $(g_{\sigma(t)}, K_{\sigma(t)})$. Die Koeffizienten dieser Gleichung sind hölderstetig, da $u \in C^{1,\alpha}$ ist.

Die Regularitätstheorie für lineare elliptische Gleichungen mit $C^{0,\alpha}$-Koeffizienten [GT98, Kapitel 8] liefert dann, dass u und damit Σ glatt ist. Außerdem gelten auf Σ aus Stetigkeitsgründen die Annahmen (D1) und (D4) wegen der Konvergenz in $C^{1,\alpha}(S^2)$ und die Annahmen (D2) und (D3) wegen der zusätzlichen Konvergenz in $W^{2,p}(S^2)$, falls p groß genug ist.

Damit ist Σ die klassische Lösung von $H \pm P = h(t)$ für die Daten $(g_{\sigma(t)}, K_{\sigma(t)})$ und liegt in $\mathcal{S}_2(\sigma(t))$. Also ist $t \in I$. □

Nun folgt, dass $I_\kappa = [0, 1]$ ist und insgesamt folgender Existenzsatz gilt:

Theorem 5.3 *Sei eine asymptotisch flache Mannigfaltigkeit (M, g^S) mit $m > 0$ gegeben. Erfüllen die Daten (g, K) die Bedingung (3.1), so existiert ein $h_0 = h_0(m, s)$, so dass zu jeder Kurve $\kappa : [0, 1] \to (0, h_0) \times [0, 1]$ eine glatte Familie von Flächen $\Sigma_\kappa(t)$ existiert. Die Flächen $\Sigma_\kappa(t)$ erfüllen die Gleichung $H \pm P = \text{const}$ bezüglich der Daten $(g_{\sigma(t)}, K_{\sigma(t)})$. Alle diese Flächen $\Sigma_\kappa(t)$ lassen sich als Graphen von Funktionen $u_\kappa(t)$ über der Sphäre S^2 darstellen. Für $\alpha > 0$ ist die Abbildung $u_\kappa : [0, 1] \to C^{2,\alpha}(S^2) : t \mapsto u_\kappa(t)$ stetig.*

Erfüllen die Daten (g, K) nur die Bedingung (3.2), so existiert ein $h_0 = h_0(m, s)$ und ein $\eta_0 = \eta_0(m)$, so dass obige Aussage ebenfalls richtig ist, falls in (3.2) $\eta < \eta_0$ gilt.

Für spätere Verwendung zeigen wir noch ein Eindeutigkeitsresultat.

Theorem 5.4 *Sei (M, g^S) mit $m > 0$ gegeben. Dann existiert $r_0 = r_0(m, s)$, $h_0 = h_0(m, s)$ und wie im vorigen Theorem gegebenenfalls ein $\eta_0 = \eta_0(m)$ so, dass falls für die Daten (g, K) die Asymptotik (3.1) oder die Asymptotik (3.2) mit $\eta < \eta_0$ gilt, folgende Aussage richtig ist.*

Seien $\kappa_0, \kappa_1 : [0, 1] \to (0, h_0) \times [0, 1]$ zwei stückweise glatte Kurven mit gleichem Anfangs- und Endpunkt $\kappa_0(0) = \kappa_1(0)$ und $\kappa_0(1) = \kappa_1(1)$. Dann sind die in Theorem 5.3 konstruierten Flächen $\Sigma_{\kappa_0}(1)$ und $\Sigma_{\kappa_1}(1)$ gleich.

Beweis: Der Beweis ist ein Standardargument, das die lokale Eindeutigkeit aus dem Satz über implizite Funktionen mit der Tatsache kombiniert, dass $(0, h_0) \times [0, 1]$ einfach zusammenhängend ist. Daher können zwei verschiedene Wege mit gleichen Anfangs- und Endpunkten stetig ineinander deformiert werden. Der Vollständigkeit halber führen wir den Beweis hier trotzdem.

Betrachte dazu die Homotopie

$$\kappa : [0, 1] \times [0, 1] \to (0, h_0) \times [0, 1] : (s, t) \mapsto (1 - s)\kappa_0(t) + s\kappa_1(t)$$

zwischen $\kappa(0, \cdot) = \kappa_0$ und $\kappa(1, \cdot) = \kappa_1$ in $(0, h_0) \times [0, 1]$. Bezeichne $\kappa_s = \kappa(s, \cdot)$ und die Komponenten von κ_s mit $\kappa_s(t) = (h_s(t), \sigma_s(t))$. Aus Theorem 5.3 folgt, dass entlang jeder Kurve κ_s eine Familie von Flächen $\Sigma_s(t) := \Sigma_{\kappa(s,\cdot)}(t)$ existiert, so dass auf $\Sigma_s(t)$ die Gleichung $H \pm P = h_s(t)$ bezüglich der Daten $(g_{\sigma_s(t)}, K_{\sigma_s(t)})$ gilt, wobei die $\Sigma_s(t)$ die Graphen glatter Funktionen $u_s(t) \in C^\infty(S^2)$ sind.

Indem man wie im Beweis von Theorem 5.3 den Satz über implizite Funktionen um einen Punkt $\kappa(\bar{s}, \bar{t}) \in (0, h_0) \times [0, t]$ und um die Fläche $\Sigma_{\bar{s}}(\bar{t})$ anwendet, erhält man eine Umgebung $U_{\bar{s},\bar{t}} \subset (0, h_0) \times [0, 1]$ von $\kappa(\bar{s}, \bar{t})$, eine Umgebung $V_{\bar{s},\bar{t}} \subset C^2(S^2)$ von $u_{\bar{s},\bar{t}}$ und eine stetige Abbildung $\xi_{\bar{s},\bar{t}} : U_{\bar{s},\bar{t}} \to V_{\bar{s},\bar{t}}$, so dass der Graph von $\xi_{\bar{s},\bar{t}}(h, \sigma)$ bezüglich der Daten (g_σ, K_σ) die Gleichung $H \pm P = h$ erfüllt, falls $(h, \sigma) \in U_{\bar{s},\bar{t}}$. Jede Funktion $v \in V_{\bar{s},\bar{t}}$, die diese Gleichung erfüllt, ist von dieser Gestalt.

Wir zeigen nun, dass zu jedem festen $\bar{s} \in [0, 1]$ ein $\delta = \delta(\bar{s})$ existiert, so dass für $|s - \bar{s}| < \delta$ die Fläche $\Sigma_s(1)$ unabhängig von s ist, also $\Sigma_s(1) = \Sigma_{\bar{s}}(1)$. Da endlich viele solche δ-Umgebungen das ganze Intervall $[0, 1]$ überdecken, folgt daraus schon $\Sigma_0(1) = \Sigma_1(1)$.

Um die Behauptung zu beweisen, wählen wir endlich viele Umgebungen $U_{\bar{s},t_i}$ mit $i = 1, \ldots, N$, die $\kappa_{\bar{s}}([0, 1])$ überdecken. Ohne Einschränkung sei $t_1 < t_2 < \ldots < t_N$. Nun können wir Parameter τ_i, $i = 0, \ldots N$ wählen, so dass $\tau_0 = 0 \in U_{\bar{s},t_1}$ und $\tau_i \in U_{\bar{s},t_i} \cap U_{\bar{s},t_{i+1}}$, $i = 1, \ldots, N - 1$ und $\tau_N = 1$. Da die Kurven $\kappa_s(\cdot)$ für $s \to \bar{s}$ gleichmäßig gegen $\kappa_{\bar{s}}(\cdot)$ konvergieren, existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle $|s - \bar{s}| < \delta$ gilt, dass $\kappa_s([\tau_{i-1}, \tau_i]) \subset U_{\bar{s},t_i}$, $i = 1, \ldots, N$.

Sei s fest gewählt mit $|s - \bar{s}| < \delta$. Definiere für $i = 0, \ldots, N$ die Wege

$$\beta_i : [0,1] \to (0,h_0)\times[0,1] : t \mapsto \begin{cases} \kappa_{\bar{s}}(2t) & 0 \le t \le \frac{\tau_i}{2} \\ (1-2t+\tau_i)\kappa_{\bar{s}}(\tau_i) + (2t-\tau_i)\kappa_s(\tau_i) & \frac{\tau_i}{2} \le t \le \frac{\tau_i+1}{2} \\ \kappa_s(2t-1) & \frac{\tau_i+1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

Der Weg β_i läuft also entlang $\kappa_{\bar{s}}$ bis zur Stelle $\kappa_{\bar{s}}(\tau_i)$, dann auf der konvexen Verbindung zu $\kappa_s(\tau_i)$ und von dort entlang κ_s bis zum gemeinsamen Endpunkt. Bezeichne $\Sigma_i(t)$ diejenige Familie von Flächen, die man durch Anwendung des Existenzsatzes auf β_i erhält.

Da die Wege β_i und β_{i-1} auf dem Intervall $\left[0, \frac{\tau_{i-1}}{2}\right]$ übereinstimmen, ist offenbar $\Sigma_i(\frac{\tau_{i-1}}{2}) = \Sigma_{i-1}(\frac{\tau_{i-1}}{2})$. Nun liegen die beiden Kurvenstücke $\beta_{i-1}\,|_{\left[\frac{\tau_{i-1}}{2}, \frac{\tau_i+1}{2}\right]}$ und $\beta_i\,|_{\left[\frac{\tau_{i-1}}{2}, \frac{\tau_i+1}{2}\right]}$ nach Konstruktion ganz in $U_{\bar{s},t_i}$ und haben gleichen Anfangs- und Endpunkt. Auf den zugehörigen Flächen $\Sigma_{i-1}(\frac{\tau_i+1}{2})$ beziehungsweise $\Sigma_i(\frac{\tau_i+1}{2})$ gilt daher $H \pm P = h_s(\tau_i)$ bezüglich der Daten $(g_{\sigma_s(\tau_i)}, K_{\sigma_s(\tau_i)})$. Die Eindeutigkeitsaussage im Satz über implizite Funktionen impliziert daher, dass diese beiden Flächen gleich sind. Da β_{i-1} und β_i auf dem restlichen Intervall $\left[\frac{\tau_i+1}{2}, 1\right]$ ebenfalls übereinstimmen, gilt $\Sigma_i(1) = \Sigma_{i-1}(1)$. Also folgt die Behauptung induktiv, da bis auf Umparametrisierung $\beta_0 = \kappa_{\bar{s}}$ und $\beta_N = \kappa_s$ gilt. □

6 Die Blätterung

In diesem kurzen Kapitel soll gezeigt werden, dass die vorhin konstruierten $H \pm P = \text{const}$- Flächen eine Blätterung bilden, die die gesamte asymptotische Region $M \setminus B$ außerhalb eines kompakten Bereichs B blättern. Dazu benutzen wir die Eindeutigkeitsaussage für verschiedene Pfade im Parametergebiet zusammen mit den Abschätzungen an den linearisierten Operator $L^{\mathcal{H}\pm\mathcal{P}}$ aus Kapitel 4.

Theorem 6.1 *Sei $m > 0$ gegeben und η_0 und h_0 wie im vorigen Kapitel, so dass für Daten (M, g, K) mit der Asymptotik (3.2) mit $\eta < \eta_0$ der Existenzsatz Theorem 5.3 und der Eindeutigkeitsatz 5.4 gilt. Verkleinere h_0 und eventuell η_0 bei Bedarf so, dass auch Korollar 4.5 gilt. Dann bilden die Flächen Σ mit $H \pm P = \text{const}$, die im vorigen Kapitel konstruiert wurden, eine Blätterung. Für kleines $H \pm P$ haben diese Flächen beliebig großen Radius.*

Desweiteren existiert eine differenzierbare Abbildung

$$\mathcal{F} : S^2 \times (0, h_0) \times [0, 1] \to M$$

mit $\mathcal{F}(S^2, h, \sigma) = \Sigma_{h,\sigma}$, so dass die Flächen $\Sigma_{h,\sigma}$ bezüglich den Daten (g_σ, K_σ) die Gleichung $H \pm P = h$ erfüllen. Diese Blätterung entsteht also durch Deformation eines Stücks der $H = \text{const}$ Blätterung von $(\mathbf{R}^3 \setminus \{0\}, g^S)$ durch zentrierte Sphären.

Beweis: Sei $0 < h < h_0$ und $\kappa_h : [0, 1] \to (0, h_0) \times [0, 1]$ definiert als $\kappa_h(t) = (h, t)$, dann bekommt man durch Deformation der zentrierten Sphäre, die bezüglich g^S die konstante mittlere Krümmung h besitzt entlang κ_h, eine Familie von Flächen $\Sigma_{h,t}$ mit $H \pm P = h$. Wegen der Positionsabschätzungen aus vorigem Kapitel, insbesondere der Abschätzung (5.1)

$$h^{-1} \leq 4 r_{\min}(\Sigma_{h,t}) \,,$$

erhält man Flächen mit beliebig großem $r_{\min}$. Aus dieser Konstruktion bekommt man die Abbildung $\mathcal{F}$, indem man $\mathcal{F}(S^2, h, \sigma) = \Sigma_{h,\sigma}$ setzt, wobei die Parameterisierung der $\Sigma_{h,\sigma}$ als Graphen über der S^2 realisiert wird wie in Kapitel 5 beschrieben. Dies impliziert, dass $\mathcal{F}$ bezüglich der Variablen $p \in S^2$ und $\sigma \in [0, 1]$ differenzierbar ist.

Um zu zeigen, dass diese Flächen eine Blätterung bilden, wählen wir eine andere Kurve zu einem bestimmten Parameter $(h, 1)$. Sei dazu $h_1 \in (0, h_0)$ fest. Die Kurve κ_{h_1} ergibt eine feste Referenzfläche Σ_{h_1}. Nun betrachte für $h_2 < h_1$ die Kurven $\lambda_{h_2} : [0, 1] \to (0, h_0) \times [0, 1]$ mit $\lambda_h(t) = ((1 - t)h_1 + th_2, 1)$. Die Konkatenation von κ_{h_1} mit λ_{h_2} liefert eine Familie von Flächen $\Sigma'_{h,1}$ mit $h \in [h_2, h_1]$ sowie eine differenzierbare Abbildung

$$F : S^2 \times [h_2, h_1] \to M : (p, t) \mapsto F(p, t) \,,$$

so dass $F(S^2, h) = \Sigma'_{h,1}$. Aus Theorem 5.4 folgt, dass $\Sigma'_{h,1} = \Sigma_{h,1} =: \Sigma_h$. Mit dieser Argumentation folgt dann die Differenzierbarkeit von $\mathcal{F}$ in der Variablen $h \in (0, h_0)$.

Ist ν_h die Normale an Σ_h, so ist die Lapse-Funktion α_h der Familie F definiert als $\alpha_h := g\left(\nu_h, \frac{dF}{dh}\right)$. Da $H \pm P = \text{const}$ entlang Σ_h ist und daher der tangentiale Anteil von $\frac{dF}{dh}$ für die Evolution von $H \pm P$ entlang der Familie keine Rolle spielt, gilt

$$h_1 - h_2 = \frac{d}{dh}(H \pm P) = L^{\mathcal{H}\pm\mathcal{P}}\alpha_h$$

mit dem Operator $L^{\mathcal{H}\pm\mathcal{P}}$ aus Kapitel 4. Korollar 4.5 liefert dann, dass die Funktionen α_h keine Nullstellen haben. Für beliebige h_1 und h_2 haben die Flächen Σ_{h_1} und Σ_{h_2} also positiven Abstand voneinander. Die Familie der Σ_h bildet daher eine Blätterung. □

7 Spezielle Daten

In diesem Abschnitt wollen wir die $H \pm P = \text{const}$ Flächen für spezielle Daten g und K genauer untersuchen. Dazu bedienen wir uns bestimmter asymptotischer Entwicklungen aus York [Yor78] sowie Corvino und Schoen [CS03].

7.1 Lineares Moment

Entsprechend den vorherigen Konventionen sei g^S die konform flache Schwarzschild-Metrik und ρ die Radialrichtung des flachen $\mathbf{R}^3$. Sei außerdem ein fester Vektor $p \in \mathbf{R}^3$ gegeben. Definiere

$$g = g^S \quad \text{und} \quad K^{\text{York}} = \frac{3}{2r^2} \left(\rho \otimes p + p \otimes \rho - 2\langle p, \rho \rangle (g^e - \rho \otimes \rho) \right) .$$

Dabei ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das euklidische Skalarprodukt. Der so definierte Tensor K^{York} ist bezüglich g^e und g^S spurfrei. Außerdem ist der ADM-Impuls [ADM61], der definiert ist als

$$p_{\text{ADM}}(e) = \lim_{r \to \infty} \frac{1}{8\pi} \int_{S_r} \left(K(e, \nu) - \operatorname{tr} K \langle e, \nu \rangle \right) \mathrm{d}\mu^e ,$$

gerade durch p gegeben.

Die von York vorgeschlagene Asymptotik für Daten (g, K) mit Masse m und Impuls p ist nun gerade

$$g = g^S + O(r^{-2}) \quad \text{und} \quad K = K^{\text{York}} + O(r^{-3}) ,$$

so dass für die folgenden Rechnungen g und K bis auf Terme niederer Ordnung durch g^S und K^{York} gegeben sind.

Man beachte, dass die Daten $(M, g^S, K^{\text{York}})$ keine physikalischen Anfangsdaten für die Evolution der Einstein-Gleichungen sind. In der ersten Constraint-Gleichung

$$8\pi\mu = R - |K|^2 + (\operatorname{tr} K)^2$$

ist dann nämlich $\mu < 0$, was jeder physikalisch sinnvollen Energiebedingung widerspricht. Es existieren jedoch Lösungen (g, K) der Constraint-Gleichungen mit dieser Asymptotik.

Diese explizite Darstellung der Daten (g^S, K^{York}) ermöglicht es, die Positionsabschätzungen aus Kapitel 3 zu verfeinern. Man erhält

Proposition 7.1 *Ist $|p| << m$ klein genug und Σ eine Fläche, auf der $H \pm P =$ const, die Annahmen (B1) – (B4) und $r_{\min} > r_0$ gilt, so existiert ein Vektor $a \in \mathbf{R}^3$ und eine Sphäre $S := S_{R^e}(a)$ sowie eine bezüglich den von der euklidischen Metrik induzierten Metriken auf S und Σ konforme Abbildung $\psi : S \to \Sigma$, so dass folgende Abschätzungen gelten*

$$\begin{aligned} \left| a/R_e \mp \frac{1-\sqrt{1-\mathcal{V}^2}}{\mathcal{V}} p \right| &\leq C R_e^{-1}\,, \\ \sup_S |\phi - \mathrm{id}_S\,| &\leq C R_e^{-1}\,, \\ \sup_\Sigma |\nu^e - R_e^{-1}(r\rho - a)| &\leq C R_e^{-1} \end{aligned}$$

mit $\mathcal{V} = |p|/m$. Für $0 \leq \mathcal{V} \leq 1$ ist dabei

$$0 \leq \frac{1-\sqrt{1-\mathcal{V}^2}}{\mathcal{V}} \leq 1$$

sowie

$$\frac{1-\sqrt{1-\mathcal{V}^2}}{\mathcal{V}} = \frac{1}{2}\mathcal{V} + O(\mathcal{V}^3) \qquad \textit{für} \qquad \mathcal{V} \to 0\,.$$

Bemerkung: In dieser Situation sind für kleines p offensichtlich alle Voraussetzungen erfüllt, die für den Existenzbeweis aus Kapitel 5 notwendig sind. Man erhält also außerhalb eines gewissen Radius eine Blätterung aus Flächen mit $H \pm P =$ const. Die obigen Abschätzungen zeigen, dass diese Flächen bezüglich des Massezentrums verschobene Sphären sind. Daher ist klar, dass die Abschätzungen an die Normale, die zur Kontrolle des linearisierten Operator $L^{\mathcal{H}\pm\mathcal{P}}$ notwendig sind, nicht prinzipiell verbessert werden können.

Ferner sieht man, dass eine Kleinheitsbedingung an K notwendig ist, um eine Blätterung zu bekommen, da die Verschiebung der Sphären sonst zu groß wird. □

Beweis: Zunächst geht man wie in Kapitel 2 vor, um die Rundheitsabschätzungen

$$\|\mathring{A}^e\|_{L^2(\Sigma)} \leq C R^{-1}$$

zu erhalten. Dies liefert wie im Beweis von Proposition 3.1 eine Sphäre $S := S_{R^e}(a)$ und eine konforme Abbildung $\psi : S \to \Sigma$, die folgenden Abschätzungen genügt

$$\begin{aligned} \sup |\psi - \mathrm{id}_S\,| &\leq C\,, \\ \|\nu^e \circ \psi - N\|_{L^2(\Sigma)} &\leq C\,, \\ \|h^2 - 1\|_{L^2(\Sigma)} &\leq C\,, \end{aligned} \tag{7.1}$$

mit den Bezeichnungen aus dem Beweis von Proposition 3.1, ν^e bezeichnet also die euklidische Normale an Σ, N die euklidische Normale an S und h den konformen Faktor von ψ.

Man berechnet wie im Beweis von Proposition 3.1

$$0 = \int_\Sigma H\langle b, \nu^e\rangle \,\mathrm{d}\mu^e \pm \int_\Sigma P\langle b, \nu^e\rangle \,\mathrm{d}\mu^e \tag{7.2}$$

für einen festen Vektor $b \in \mathbf{R}^3$ mit $|b| = 1$. Nun zerlegt man p in zwei Komponenten, eine davon in Richtung von a und die andere orthogonal dazu,

$$p = \langle p, \bar{a}\rangle \bar{a} + \langle p, \bar{q}\rangle \bar{q}$$

mit $\bar{a} = \frac{a}{|a|}$ und $\bar{q} \perp \bar{a}$ sowie $|\bar{q}| = 1$. Nun wählen wir als Testvektoren die beiden normierten Komponenten von p. Berechne zunächst mit $b = \bar{a}$ wie in Proposition 3.1, dass

$$\left| \int_\Sigma H\langle \bar{a}, \nu^e\rangle \,\mathrm{d}\mu^e + 8\pi m \frac{|a|}{R_e} \right| \leq C R_e^{-1} \,.$$

Nun untersuche den Term

$$\int_\Sigma P\langle \bar{a}, \nu^e\rangle \,\mathrm{d}\mu \,. \tag{7.3}$$

Zunächst ersetzt man P durch $-K^{\mathrm{York}}(\nu, \nu)$ und erhält aus den Abschätzungen 7.1 und aus Lemma 1.5 wie im Beweis von Proposition 3.1, dass

$$\left| \int_\Sigma K^{\mathrm{York}}(\nu, \nu)\langle b, \nu^e\rangle \,\mathrm{d}\mu^e - \int_S K^{\mathrm{lin}}(N, N)\langle \bar{a}, N\rangle \,\mathrm{d}\mu^e \right| \leq C R_e^{-1} \,.$$

Nun berechnet man für das einfachere Integral über S zunächst, dass

$$\begin{aligned} K^{\mathrm{York}}(N, N) &= \frac{3}{2r^2}\left(2\langle p, N\rangle\langle N, \rho\rangle - \langle p, \rho\rangle(1 - \langle N, \rho\rangle)^2\right) \\ &= \frac{3}{2r^2}\langle p, N\rangle\left(\frac{R_e}{r} + \frac{2}{r}\langle a, N\rangle + \frac{R_e^3}{r^3} + \frac{2R_e^2}{r^3}\langle a, N\rangle + \frac{R_e}{r^3}\langle a, N\rangle^2\right) \\ &\quad + \frac{3}{2r^2}\langle p, a\rangle\left(\frac{R_e^2}{r^3} - \frac{1}{r} + \frac{2R_e}{r^3}\langle a, N\rangle + \frac{1}{r^3}\langle a, N\rangle^2\right) \,. \end{aligned}$$

Wählt man jetzt Kugelkoordinaten $\varphi \in (0, \pi/2)$ und $\vartheta \in [0, 2\pi]$ so, dass $\cos\varphi =$

$\langle \bar{a}, N\rangle$ und $\sin\varphi\sin\vartheta = \langle \bar{q}, N\rangle$, erhält man daraus

$$\begin{aligned} & K^{\text{York}}(N,N) \\ = \quad & \langle p,\bar{a}\rangle \left(\frac{3R_e\cos\varphi}{2r^3} + \frac{3|a|\cos^2\varphi}{r^3} + \frac{3|a|R_e^2}{2r^5} - \frac{3|a|}{2r^3} + \frac{3R_e^3\cos\varphi}{2r^5} \right. \\ & \qquad \left. + \frac{3|a|^2R_e\cos\varphi}{r^5} + \frac{3|a|^2R_e\cos^3\varphi}{2r^5} + \frac{3|a|R_e^2\cos^2\varphi}{r^5} + \frac{3|a|^3\cos^2\varphi}{r^5} \right) \\ & + \langle p,\bar{q}\rangle \left(\frac{3|a|^2R_e\cos^2\varphi\sin\varphi\sin\vartheta}{r^5} + \frac{3|a|R_e^2\cos\varphi\sin\varphi\sin\vartheta}{r^5} \right. \\ & \qquad \left. + \frac{3R_e\sin\varphi\sin\vartheta}{2r^3} + \frac{3|a|\cos\varphi\sin\varphi\sin\vartheta}{r^3} + \frac{3R_e^3\sin\varphi\sin\vartheta}{r^5} \right) . \end{aligned} \tag{7.4}$$

Da in (7.3) oben mit $\langle \bar{a}, N\rangle = \cos\varphi$ multipliziert wird, berechnet man

$$\begin{aligned} & \int_S K^{\text{York}}(N,N)\langle \bar{a}, N\rangle \,\mathrm{d}\mu^e \\ = \quad & \langle p,\bar{a}\rangle \int_S \left(\frac{3R_e\cos^2\varphi}{2r^3} + \frac{3|a|\cos^3\varphi}{r^3} + \frac{3|a|R_e^2}{2r^5} - \frac{3|a|}{2r^3} + \frac{3R_e^3\cos^2\varphi}{2r^5} \right. \\ & \qquad \left. + \frac{3|a|^2R_e\cos^2\varphi}{r^5} + \frac{3|a|^2R_e\cos^4\varphi}{2r^5} + \frac{3|a|R_e^2\cos^3\varphi}{r^5} + \frac{3|a|^3\cos^3\varphi}{r^5} \right) \mathrm{d}\mu^e . \end{aligned}$$

Der zweite Term aus (7.4) mit Vorfaktor $\langle p, \bar{q}\rangle$ kommt mit dieser Testfunktion nicht vor, da die Funktion $\sin\vartheta$ auf S L^2-orthogonal zu allen Funktionen ist, die nur von φ abhängen. Dann kann man das Integral mit der in Proposition 3.1 angegebenen Formel berechnen und erhält

$$\int_S K^{\text{York}}(N,N)\langle \bar{a}, N\rangle \,\mathrm{d}\mu^e = 4\pi\langle p,\bar{a}\rangle \frac{|a|^2 + R_e^2}{R_e^2} ,$$

also insgesamt für den Testvektor $b = \bar{a}$ in (7.2)

$$\left| -8\pi m\frac{|a|}{R_e} \mp 4\pi \left\langle p, \frac{a}{|a|}\right\rangle \frac{|a|^2 + R_e^2}{R_e^2} \right| \le CR_e^{-1} . \tag{7.5}$$

Benutzt man nun als Testvektor $b = \bar{q}$, erhält man zunächst

$$\left| \int_\Sigma H\langle \bar{q}, N\rangle \,\mathrm{d}\mu^e \right| \le CR_e^{-1} ,$$

da auch hier die Funktion $\sin\vartheta$ als Faktor auftritt. Doch nun ist der erste Term in

(7.4) orthogonal zur Testfunktion, und der zweite Term liefert einen Beitrag

$$\begin{aligned}
&\int_S K^{\mathrm{York}}(N,N)\langle \bar{q}, N\rangle \,\mathrm{d}\mu^e \\
&= \langle p, \bar{q}\rangle \int_S \left(\frac{3|a|^2 R_e \cos^2\varphi \sin^2\varphi \sin^2\vartheta}{r^5} + \frac{3|a|R_e^2 \cos\varphi \sin^2\varphi \sin^2\vartheta}{r^5} \right. \\
&\qquad \left. + \frac{3R_e \sin^2\varphi \sin^2\vartheta}{2r^3} + \frac{3|a|\cos\varphi \sin^2\varphi \sin^2\vartheta}{r^3} + \frac{3R_e^3 \sin^2\varphi \sin^2\vartheta}{r^5} \right) \mathrm{d}\mu^e \,.
\end{aligned}$$

Berechnet man nun diese Integrale in den gegebenen Kugelkoordinaten mit Hilfe der Formel

$$\begin{aligned}
&\int_{S_{R_e}(a)} r^{-k} \sin^2\varphi \sin^2\vartheta \cos^l\varphi \,\mathrm{d}\mu^e \\
&= \frac{\pi R_e}{|a|} (2|a|R_e)^{-l} \int_{R_e-|a|}^{R_e+|a|} \left(\frac{(r^2 - R_e^2 - |a|^2)^{l+2}}{(2|a|R_e)^2\, r^{k-1}} - \frac{(r^2 - R_e^2 - |a|^2)^l}{r^{k-1}} \right) \mathrm{d}r \,,
\end{aligned}$$

die in unserem Falle $|a| < R_e$ gilt, so findet man, dass

$$\int_S K^{\mathrm{York}}(N,N)\langle \bar{a}, N\rangle \,\mathrm{d}\mu^e = -\langle p, \bar{q}\rangle \frac{4\pi}{5} \frac{5R_e^3 - 2|a|^2 R_e - 3|a|^2}{R_e^3} \,.$$

Damit erhält man die Ungleichung

$$|\langle p, \bar{q}\rangle| \left| \frac{4\pi}{5} \frac{5R_e^3 - 2|a|^2 R_e - 3|a|^2}{R_e^3} \right| \leq C R_e^{-1} \,. \tag{7.6}$$

Nun wissen wir, dass $\tau := |a|/R_e < 1$, falls p klein genug ist. Damit folgt aus (7.6), dass $|\langle p, \bar{q}\rangle| \leq C R_e^{-1}$. Da

$$|\langle p, \bar{a}\rangle - |p|| = |\langle p, \bar{q}\rangle| \leq C R_e^{-1}$$

ergibt sich mit Hilfe von (7.5)

$$\left| -2m\tau \mp |p|(1+\tau^2) \right| \leq C R^{-1} \tag{7.7}$$

und damit die behauptete Abschätzung

$$\left| \tau \mp \frac{1 - \sqrt{1-\mathcal{V}^2}}{\mathcal{V}} \right| \leq C(m^{-1}) R_e^{-1} \,. \qquad \square$$

Bemerkung: Mit Hilfe dieser fortgesetzten Verschiebung der Flächen $\Sigma(h)$ bei abnehmendem $H \pm P = h$ lässt sich umgekehrt der Impuls p ermitteln, indem man in den asymptotisch flachen Koordinaten den Schwerpunkt zuerst mit Hilfe der flachen Metrik g^e und dann mit der Metrik g^S ermittelt. Man erhält nach einer Rechnung ähnlich der vorigen mit

$$C^e(h) = |\Sigma^e|^{-1} \int_{\Sigma(h)} x \, \mathrm{d}\mu^e \quad \text{und}$$
$$C(h) = |\Sigma|^{-1} \int_{\Sigma(h)} x \, \mathrm{d}\mu \,,$$

dass

$$\lim_{h\to 0} C^e(h) - C(h) = \frac{2}{3} m\bar{\tau}\bar{q} \,.$$

Dabei ist $\bar{\tau}$ der Betrag des Verschiebungsvektors und $\bar{q} \in \mathbf{R}^3$ ein Einheitsvektor der die Verschiebungsrichtung beschreibt. Die Konvergenzrate ist dabei

$$\left| C^e(h) - C(h) - \frac{2}{3} m\bar{\tau}\bar{q} \right| \leq -Ch \ln h \,.$$

Der lineare Impuls p lässt sich dann aus $\bar{\tau}$ und $\bar{q}$ berechnen, indem man in (7.7) beobachtet, dass

$$\pm p = \frac{2m\bar{\tau}}{1+\bar{\tau}^2} \, \bar{q} \,.$$

Welches Vorzeichen in dieser Beziehung gilt, entspricht dem Vorzeichen in der Gleichung $H \pm P = \text{const}$, die die Blätterung bestimmt auf der man rechnet. □

Bemerkung: Corvino und Schoen [CS03] beschreiben asymptotisch flache Anfangsdaten (M, g, K) mit Hilfe der Form

$$\bar{g} = u^4 g^e \qquad \text{und} \qquad \pi = u^2(\mathcal{L}X) \,. \tag{7.8}$$

Dabei ist $\mathcal{L}X$ der Operator

$$\mathcal{L}X = L_X g^e - \mathrm{div}^e(X)\, g^e$$

mit der Lie-Ableitung $L_X g^e$ der flachen Metrik g^e. Der Tensor π wird mit Hilfe der Formel $\pi = K - (\mathrm{tr}\, K)g$ aus K gebildet. Die skalare Funktion u und das Vektorfeld X genügen dann in asymptotisch flachen Koordinaten der Asymptotik

$$u(x) = 1 + \frac{m}{2r} + O(r^{-2}) \qquad \text{und} \qquad X^i = \frac{-2P^i}{r} + O(r^{-2}) \tag{7.9}$$

Errechnet man daraus die Gestalt von π in höchster Ordnung, bekommt man

$$\pi = \frac{2}{r^2}\left(p \otimes \rho + \rho \otimes p - \langle p, \rho\rangle g^e\right) + O(r^{-3})$$

Dabei ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das euklidische Skalarprodukt und ρ wie in den vorigen Kapiteln die Radialrichtung $\rho = x/r$. Die ADM-Masse ist durch den Parameter m gegeben, der ADM-Impuls durch p. Für den Tensor K erhält man die Form

$$K^{\mathrm{CS}} = \frac{2}{r^2}\left(p \otimes \rho + \rho \otimes p - \langle p, \rho\rangle g^e\right) .$$

Im Gegensatz zur York-Form ist dies nicht spurfrei.

Diese Daten liegen in der Menge der Lösungen $(\bar{g}, \bar{K})$ der Constraint-Gleichungen mit der Asymptotik

$$\bar{g} = g^e + O(r^{-1}) \quad \text{und} \quad \bar{K} = O(r^{-2})$$

bezüglich geeigneten gewichteten Sobolev-Normen dicht, so dass diese Asymptotik eine gewisse Universalität besitzt [CS03, Theorem 1]. Auch mit diesen Daten kann man eine Rechnung wie oben durchführen. Man erhält mit den Bezeichungen aus Proposition 7.1 eine Verschiebung

$$\left| a/R_e \mp \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{16}{15}\mathcal{V}^2}}{\frac{8}{5}\mathcal{V}} p \right| \leq C R^{-1}$$

Die Asymtotik dieses Ausdrucks ist

$$\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{16}{15}\mathcal{V}^2}}{\frac{8}{5}\mathcal{V}} = \frac{1}{3}\mathcal{V} + O(\mathcal{V}^3) \quad \text{für} \quad \mathcal{V} \to 0 \qquad\qquad ,.$$

Wir können daran ebenfalls den linearen Impuls p ablesen und eine entsprechende Formel wie in voriger Bemerkung angeben,

$$\pm p = \frac{15 m \bar{\tau}}{5 - 12\bar{\tau}^2}\,\bar{q}\,,$$

wobei wir die Bezeichungen von dort verwenden.

Diese Asymptotische Verschiebung ist aus zweierlei Gründen nicht zufriedenstellend. Einerseits stimmt sie nicht mit der Asymptotik von York für spurfreie Daten überein. Andererseits sind nur Daten mit $0 < \mathcal{V} < \frac{15}{16}$ zugelassen, wohingegen aus physikalischen Gründen der zulässige Bereich zumindest das Intervall $\mathcal{V} \in [0, 1]$ umfassen sollte. □

Bemerkung: Sowohl die von Corvino und Schoen vorgeschlagene Asymptotik als auch die von York vorgeschlagene Asymptitotik erlauben Beispiele von Daten mit der jeweiligen Asymptotik, die die Vakuum-Constraint-Gleichungen erfüllen.

Daraus folgt, dass die Norm, in der Corvino und Schoen die Dichtheit der Daten mit deren Asymptotik beweisen können, zwar ausreichend ist, ADM-Masse und ADM-Impuls zu erhalten, jedoch nicht stark genug ist, die Feinstruktur der $H \pm P = \text{const}$ Blätterung zu reproduzieren. □

7.2 Drehmoment

Für Daten (M, g, K), die Drehmoment enthalten, wurde von York die Asymptotik

$$K^{\text{ang}} = \frac{3}{r^3} \left(J(\rho, \cdot) \otimes \rho + \rho \otimes J(\rho, \cdot) \right)$$

vorgeschlagen. Die antisymmetrische 2-Form J ist dabei die Drehmoment-2-Form. Die Rate, mit der dieser Tensor abfällt, ist um eine Potenz höher als bei linearem Moment.

Für eine zentrierte Sphäre $S_r(0)$ gilt unabhängig von J, wegen seiner Antisymmetrie, dass $P = \operatorname{tr} K^{\text{ang}} - \phi^{-4} K^{\text{ang}}(\rho, \rho) = 0$, also sind die zentrierten Sphären bezüglich (g^S, K^{ang}) Lösungen der Gleichung $H \pm P = \text{const}$.

Mit der Schwarzschildmetrik als Hintergrundmetrik ist die so konstruierte Blätterung also unabhängig vom Drehmomentparameter J in K^{ang}. Man bekommt daher keinen Ausdruck für das Drehmoment allein aus der Geometrie der Blätterung, wenn man nur die von uns gestellten Bedingungen an die Asymptotik der Metrik hat.

Wieder ist jedoch die Bemerkung angebracht, dass diese Daten (g^S, K^{ang}) zwar keiner Energiebedingung genügen, trotzdem aber Lösungen der Constraint-Gleichungen mit dieser Asymptotik existieren.

7.3 Zeitsymmetrische Daten

Löst man für eine Metrik g die Gleichung $H = \text{const}$, so entspricht dies formal zeitsymmetrischen Daten mit $K = 0$. Zunächst ergeben die vorigen Existenzaussagen, dass unter der Bedingung

$$\|g - g^S\|_{C^2_{-1}} < \eta$$

eine Blätterung aus Flächen konstanter mittlerer Krümmung des asymptotischen Bereichs existiert, falls η klein genug ist. Hat man darüberhinaus die bessere Asymptotik

$$\|g - g^S\|_{C^2_{-2-\delta}} < \infty$$

für $\delta > 0$, so erhält man, dass die Translation $|a|/R_e$ asymptotisch verschwindet. Für $\delta = 1$ ergibt sich, wie Huisken und Yau in [HY96], aus den Positionsabschätzungen, dass diese Flächen asymptotisch zentriert sein müssen, also eine gleichmäßige Abschätzung $|a| < C(m)$. Diese Tatsachen folgen aus den Apriori-Abschätzungen aus Kapitel 3 sogar für den allgemeineren Fall, dass die Daten (g, K), den asymptotischen Bedingungen (3.1) für $\delta > 0$ beziehungsweise $\delta = 1$ genügen.

Trotzdem verallgemeinert diese Arbeit nicht die Eindeutigkeitsaussage von Huisken und Yau [HY96, Kapitel 5], da dort die Eindeutigkeit von stabilen CMC-Flächen gezeigt wird, deren mittlere Krümmung $H^{-p} > r_{\min}$ mit $p > \frac{1}{2}$ erfüllt. Dies entspräche in der Bedingung (B1) einer Potenz $q < 2$. Dagegen können wir diese Eindeutigkeitsaussage nur unter der Bedingung (3.1) und (3.2) mit $p > \frac{2}{3}$ beweisen und brauchen zusätzlich Bedingung (B4). Dagegen benötigen wir nur erste und zweite Ableitungen der Metrik, nicht jedoch Ableitungen bis zu vierter Ordnung, wie sie in [HY96] nötig sind.

Stabilität bedeutet dabei, dass der Operator $L^{\mathcal{H}}$ positiv ist für Funktionen $f \in C^\infty(\Sigma)$ mit $\int_\Sigma f \, \mathrm{d}\mu = 0$ und führt zur Stabilitätsungleichung

$$\int_\Sigma f^2 \left(|A|^2 + \mathrm{Ric}(\nu, \nu) \right) \, \mathrm{d}\mu \leq \int_\Sigma |\nabla f|^2 \, \mathrm{d}\mu \,.$$

Die Beweisidee ist, die Abschätzungen an $\mathring{A}$, die in [HY96, Kapitel 5] aus der Stabilität gewonnen werden, genauso nachzumachen. Dies führt, ohne jedoch Bedingung (A) zu benutzen, auf dieselbe Abschätzung, die wir in Proposition 2.2 gezeigt haben. Dann kann man wie in Kapitel 3 das Theorem von De Lellis und Müller verwenden, womit unter den Annahmen $H^{-q} > r_{\min}$ mit $q > \frac{2}{3}$ Positionsabschätzungen folgen.

8 Numerische Experimente

In diesem Abschnitt werden Resultate aus numerischen Rechnungen vorgestellt. Sie sollen zur Veranschaulichung der Blätterung dienen, falls die Daten ein Schwarzes Loch mit linearem Impuls beschreiben, wie sie am Anfang des vorigen Kapitels behandelt wurden. Wir müssen leider den Beweis schuldig bleiben, dass das verwendete Verfahren konvergiert und mit der Tatsache argumentieren, dass bei den gerechneten Beispielen in der Tat Konvergenz gegen Flächen vorliegt, die die Abschätzungen aus vorigem Kapitel erfüllen.

8.1 Der Algorithmus

Der verwendete Algorithmus beruht auf einer Modifikation des Programms des Autors, das in [Met04] vorgestellt wird. Der Algorithmus nutzt die Tatsache, dass Flächen $\Sigma = \partial\Omega$, die ein Gebiet $\Omega \subset M$ beranden und vorgeschriebene mittlere Krümmung $H + H_0 = \lambda$ haben, ein Variationsproblem lösen. Dabei ist $H_0 : M \to \mathbf{R}$ eine skalare Funktion, die nur vom Ort abhängt. Eine Fläche Σ ist dann kritischer Punkt des Funktionals

$$J(\Sigma) = \int_\Sigma 1 \,\mathrm{d}\mu + \int_\Omega H_0 \,\mathrm{d}\,\mathrm{vol}\,, \tag{8.1}$$

wenn nur solche Variationen von Σ zugelassen werden, die das eingeschlossene Volumen $\int_\Omega \mathrm{d}\,\mathrm{vol}$ erhalten.

In unserem Fall hängt die vorgeschriebene mittlere Krümmung P zusätzlich vom Tangentialraum von Σ beziehungsweise von der Normalen an Σ ab. Um dieses Problem zu behandeln, nutzen wir eine einfache Fixpunktiteration. Dazu starten wir mit einer Fläche Σ_0, berechnen ν und verschieben ν entlang eines vorgegebenen, transversalen Vektorfeldes ρ parallel und erhalten ein lokal um Σ_0 definiertes, festes Vektorfeld ν_0. Damit berechnen wir die Funktion $P_0 := \operatorname{tr} K - K(\nu_0, \nu_0)$, die nun ebenfalls um Σ_0 definiert ist und nur vom Ort abhängt. Um Σ_0 betrachtet man die Graphen skalerer Funktionen, die durch Verschiebung von Punkten auf Σ_0 entlang der gegebenen Richtung ρ entstehen. Man löst dann das Variationsproblem (8.1) in der Klasse der Graphen über Σ_0 unter der Nebenbedingung, dass das eingeschlossene Volumen konstant bleibt, mit der Funktion $H_0 = P_0$ und erhält eine Fläche Σ_1. Durch Wiederholung der Prozedur ergibt sich eine Folge von Flächen $\Sigma_0, \Sigma_1, \ldots$, die hoffentlich gegen die gewünschte Lösung Σ_∞ mit $H + P = \lambda$ konvergiert. Die resultierende Fläche Σ_∞ zusammen mit dem zugehörigen $H \pm P = \lambda$ sind durch das anfangs von Σ_0 eingeschlossene Volumen bestimmt.

Die auftretenden Variationsprobleme mit Nebenbedingungen werden mit Hilfe einer finite Element Diskretisierung [Cia87], einer penalisierten Lagrange-Methode

[Fle80, Fle81] und dem Verfahren der konjugierten Gradienten gelöst. Um die Konvergenz des letzteren Verfahrens zu beschleunigen, haben wir uns zudem der Vorkonditionierung mit Hilfe hierarchischer Basen bedient [BDY88, Yse86, Yse92], da es sich bei obigem Problem um eine quasilineare elliptischen Gleichung handelt.

8.2 Die Ergebnisse — York-Asymptotik

Betrachte die Daten $(\mathbf{R}^3 \setminus \{0\}, g, K)$ mit

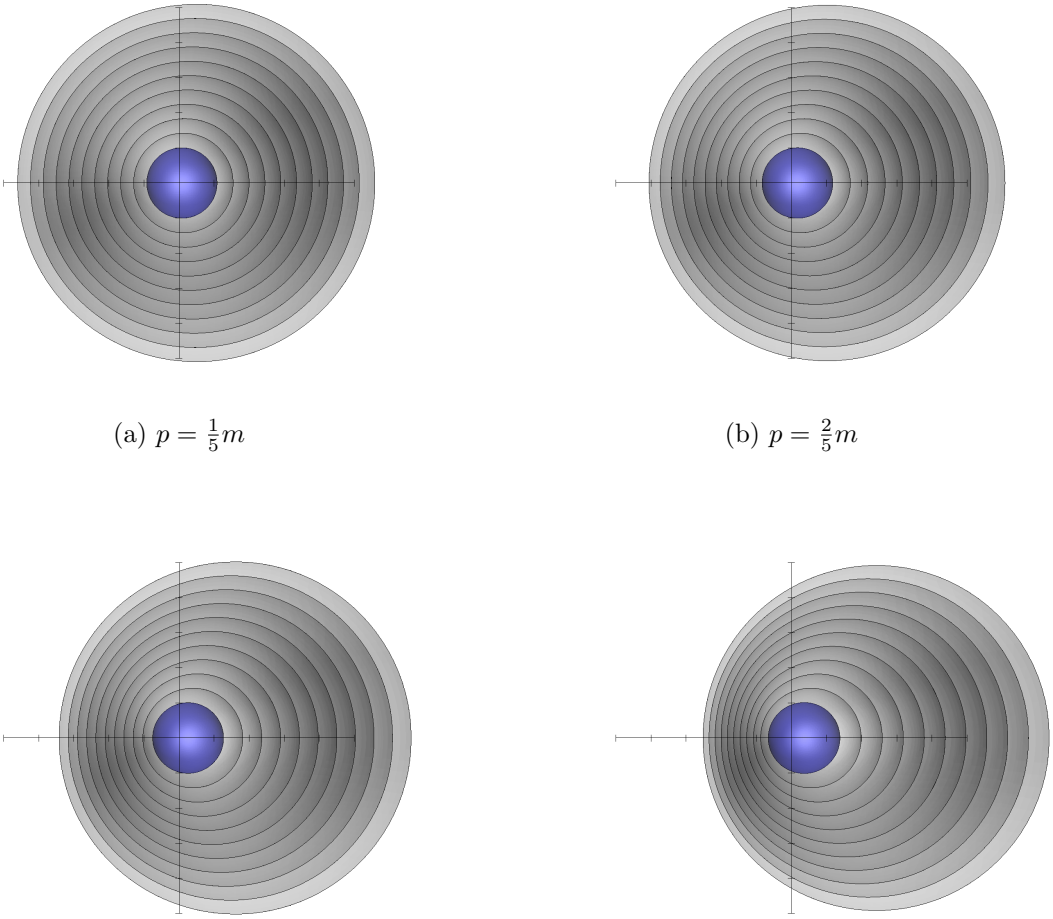
$$g_{ij} = \left(1 + \frac{1}{2r}\right)^4 \delta_{ij}$$
$$K_{ij} = \frac{3}{2r^2}\left(p_i\rho_j + p_j\rho_i - 2\langle p, \rho\rangle(\delta_{ij} - \rho_i\rho_j)\right)$$

also die Schwarschildmetrik mit Masse $m = 1$ zusammen mit dem Yorkschen Impulstensor mit Impuls p. Die folgenden Resultate beziehen sich auf Impulse der Form $p^k = \frac{k}{10} m e_1$, mit $k = 0, \ldots, 10$ und dem Vektor e_1 der Standardbasis des $\mathbf{R}^3$.

In jedem Fall haben wir die Iteration mit einer zentrierten euklidischen Sphäre mit Radius 5 gestartet und den oben beschriebenen Algorithmus durchgeführt. Der Radius der berechneten Flächen wurde pro Schritt um $\frac{2}{5}$ erhöht. In Abbildung 1 ist jeder zehnte der berechneten Flächen für die Werte $k = 2, 4, 6$ und 8 dargestellt, und zwar entlang der x_1x_2-Ebene aufgeschnitten. Die verwendete Triangulierung hatte 4098 Punkte. Der geometrische Radius der gezeigten Flächen bezüglich der euklidischen Metrik ist in Tabelle 1 festgehalten.

Ein interessantes Experiment ist es, die asymptotische Verschiebung der Flächen a/R_e zu berechnen, die in vorigem Kapitel theoretisch ermittelt wurde. Dazu berechnen wir $\tau = |a|/R_e$ auf den jeweils äußersten Flächen, die mit dem numerischen Verfahren ermittelt wurden. Für den Wert a benutzen wir eine numerisch ermittelte Version des euklidischen Schwerpunkts der Fläche und für R_e eine numerisch ermittelte Version des geometrischen Radius. Die resultierenden Werte von τ sind für verschidene Auflösungen der Diskretisierung zusammen mit der aus vorigem Kapitel ermittelten Kurve in Abbildung 2 eingezeichnet, auf der x-Achse der Graphik sind die Werte $\frac{k}{10}m$ abgetragen. Die verwendeten Auflösungen sind dabei 258, 1026 beziehungsweise 4098 Punkte auf der Fläche. Der Graphik entnimmt man, dass man auch bei geringen Radien $R_e \approx 25m$ die Verschiebung relativ genau ermitteln kann.

Die Ausreisser bei $p = \frac{9}{10} m e_1$ und $p = m e_1$ erklären sich durch die sehr große Verschiebung der Flächen, die dazu führt, dass die Flächen nahe an das Zentrum reichen. Daher führt die Darstellung der diskreten Flächen als Graphen über der zentrierten Sphäre zu sehr großen Auflösungsunterschieden in der Triangulierung, wie es Abbildung 3 verdeutlicht. Da das Verfahren in beiden Fällen abbricht, bevor ein Radius von etwa 25 erreicht wird, diese beiden Werte kleineren Radien ≈ 10.



(a) $p = \frac{1}{5}m$ (b) $p = \frac{2}{5}m$

(c) $p = \frac{3}{5}m$ (d) $p = \frac{4}{5}m$

Abbildung 1: Die Blätterung aus verschobenen Flächen für verschiedene lineare Impulse in der York-Asymptotik, die innerste Fläche entsteht durch Start des Algorithmus mit einer euklidischen Sphäre von Radius 5.

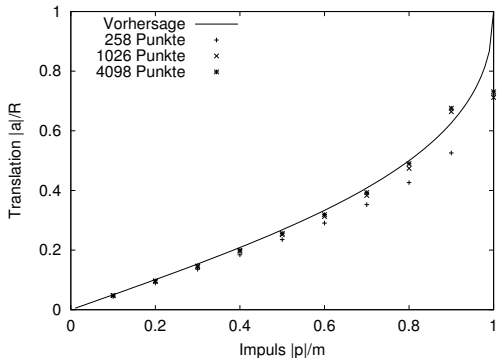


Abbildung 2: Die Verschiebung der $H + P =$ const-Flächen bezüglich des Zentrums für die York-Asymptotik für den Krümmungstensor K.

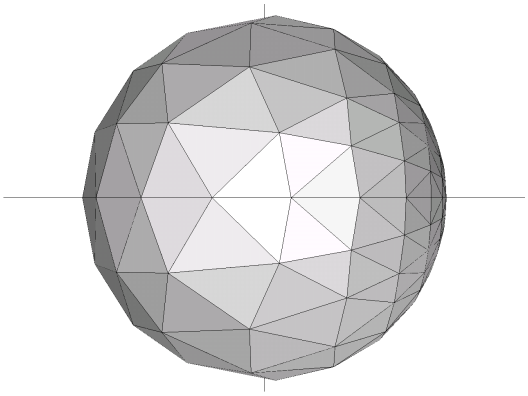


Abbildung 3: Die maximale Auflösung einer diskretisierten Fläche reduziert sich bei Verschiebung.

Tabelle 1: Die geometrischen Radien der gezeigten $H + P =$ const-Flächen in der York-Asymptotik bezüglich der euklidischen Metrik.

Impuls	$0.2m$	$0.4m$	$0.6m$	$0.8m$
Radius	5.0109	5.0207	5.0383	5.0661
	7.0957	7.0994	7.1063	7.1189
	9.1657	9.1599	9.1496	9.1341
	11.225	11.207	11.175	11.122
	13.275	13.244	13.187	13.087
	15.319	15.274	15.188	15.036
	17.357	17.297	17.181	16.970
	19.391	19.315	19.168	18.892
	21.422	21.329	21.149	20.803
	23.450	23.340	23.125	22.706
	25.475	25.348	25.098	24.601

Literatur

[ADM61] R. Arnowitt, S. Deser, and C. Misner, *Coordinate invariance and energy expressions in general relativity*, Phys. Rev. **122** (1961), 997–1006.

[BDY88] R. E. Bank, T. Dupont, and H. Yserentant, *The hierarchical bases multigrid method*, Numer. Math. **52** (1988), 427–458.

[Bra97] H. Bray, *The penrose inequality in general relativity and volume comparison theorems involving scalar curvature*, Ph.D. thesis, Stanford University, 1997.

[Cia87] P. G. Ciarlet, *The finite element method for elliptic problems*, Amsterdam: North-Holland, 1987, Second priniting.

[CK93] D. Christodoulou and S. Klainerman, *The global nonlinear stability of the minkowski space*, Princeton Mathematical Series, no. 41, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1993.

[CS03] J. Corvino and R. Schoen, *On the Asymptotics for the Vacuum Einstein Constraint Equations*, arXiv: gr-qc/0301071 (2003).

[CY86] D. Christodoulou and S.-T. Yau, *Some remarks on the quasi-local mass*, Mathematics and general relativity (Santa Cruz, CA, 1986), Contemp. Math., vol. 71, 1986, pp. 9–14.

[Fle80] R. Fletcher, *Practical methods of optimization, Vol. 1*, Chicester, New York, Brisbane, Toronto: John Wiley & Sons, 1980.

[Fle81] ———, *Practical methods of optimization, Vol. 2*, Chicester, New York, Brisbane, Toronto: John Wiley & Sons, 1981.

[GT98] D. Gilbarg and N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Rev. 3. printing. Second ed., Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, no. 224, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 1998.

[HI97] G. Huisken and T. Ilmanen, *The Riemannian Penrose inequality*, Internat. Math. Res. Notices **20** (1997), 1045–1058.

[HY96] G. Huisken and S.-T. Yau, *Definition of center of mass for isolated physical systems and unique foliations by stable spheres with constant mean curvature*, Invent. Math. **124** (1996), 281–311.

[LM03] C. De Lellis and S. Müller, *Optimal rigidity estimates for nearly umbilical surfaces*, Preprint available at `http://www.mis.mpg.de/preprints/2003/index.html`, 2003.

[Met04] J. Metzger, *Numerical computation of constant mean curvature surfaces using finite elements*, Preprint available at `http://www.mathematik.uni-tuebingen.de/~jan/preprints`, 2004.

[MS73] J. H. Micheals and L. M. Simon, *Sobolev and mean value inequalities on generalized submanifolds of* $\mathbf{R}^3$, Comm. Pure Appl. Math. **26** (1973), 361–379.

[Pen73] R. Penrose, *Naked Singularities*, Ann. New York Acad. Sci. **224** (1973), 125–134.

[Sak96] T. Sakai, *Riemannian geometry*, Translations of mathematical Monographs, no. 149, American Mathematical Society, 1996.

[Sim68] J. Simons, *Minimal varieties in Riemannian manifolds*, Ann. of Math. **88** (1968), 62–105.

[SSY75] R. Schoen, L. Simon, and S.-T. Yau, *Curvature estimates for minimal hypersurfaces*, Acta Math. **134** (1975), 275–288.

[Sta66] G. Stampaccia, *Équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus*, Montréal: Les Presses de l'Université, 1966.

[SY81] R. Schoen and S.-T. Yau, *Proof of the positive mass theorem II*, Comm. Math. Phys. **79** (1981), 231–260.

[SY94] ———, *Lectures on Differential Geometry*, Conference Proceedings and Lecture Notes in Geometry and Topology, vol. I, ch. VII: Problem Section, International Press, Camebridge MA, 1994.

[Wit81] E. Witten, *A New Proof of the Positive Energy Theorem*, Comm. Math. Phys. **80** (1981), 381–402.

[Ye96] R. Ye, *Foliation by constant mean curvature spheres on asymptotically flat manifolds*, Geometric analysis and the calculus of variations, International Press, Camebridge MA, 1996, pp. 369–383.

[Yor78] J. W. York, *Kinematics and dynamics of general relativity*, Sources of Gravitational Radiation (L. Smarr, ed.), Seattle, Cambridge University Press, 1978, pp. 83–126.

[Yse86] H. Yserentant, *On the multilevel splitting of finite element spaces*, Numer. Math. **49** (1986), 379–412.

[Yse92] ———, *Hierarchical bases*, ICIAM 91 (R. E. O'Malley, ed.), SIAM, 1992.

Lebenslauf

27.12.1976	Geboren in Albstadt-Ebingen als Sohn von Norbert Metzger und Silvia Metzger, geborene Eppler.
Sept. 1983 – Juli 1987	Besuch der Schillerschule in Albstadt-Onstmettingen.
Sept. 1987 – Juli 1993	Besuch des Progymnasiums in Albstadt-Tailfingen.
Sept. 1993 – Juni 1996	Besuch des Gymnasiums in Albstadt-Ebingen, Abschluß mit Abitur.
Okt. 1996 – Okt. 1997	Zivildienst am Sonderschulkindergarten der KBF Neckar-Alb e.V. in Albstadt-Truchtelfingen.
Okt. 1997 – Nov. 2002	Studium der Mathematik mit Nebenfach Informatik an der Eberhard-Karls-Universität Tübingen.
April 1999	Vordiplom in Mathematik.
November 2002	Abschluss des Studiums mit Erhalt des Diploms in Mathematik.
seit Dezember 2002	Im Rahmen der Promotion beschäftigt als Wissenschaftlicher Angestellter des Sonderforschungsbereichs 382 an der Eberhard-Karls-Universität Tübingen.