Ein Homotopieansatz zur Lösung des inversen mittleren Krümmungsflusses

DISSERTATION

der Fakultät für Mathematik und Physik
der Eberhard-Karls-Universität Tübingen
zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften

vorgelegt von
Bernhard Hein
aus Esslingen

betreut von
Prof. Dr. G. Huisken

Mai 2004

Tag der mündlichen Qualifikation:	2. August 2004
Dekan:	Prof. Dr. H. Müther
1. Berichterstatter:	Prof. Dr. G. Huisken
2. Berichterstatter:	Prof. Dr. K. Ecker

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit entwickeln wir einen schwachen Lösungsbegriff für die quasilineare, degeneriert parabolische partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}u = \mathrm{div}\frac{\nabla u}{|\nabla u|} - |\nabla u|$$

im $\mathbb{R}^n$. Im stationären Fall sind solche Lösungen genau die von Huisken und Ilmanen in [HI01] konstruierten schwachen Lösungen des inversen mittleren Krümmungsflusses. Mit Hilfe der auch von Huisken und Ilmanen verwendeten Methode der $\epsilon-$Regularisierung erhalten wir die Existenz lipschitzstetiger Lösungen von zugehörigen Anfangs- und Randwertproblemen im schwachen Sinne und zeigen deren Eindeutigkeit für eine breite Klasse von Anfangswerten. In dieser Klasse identifizieren wir Anfangswerte, deren zugehörige schwache Lösungen mit der Zeit gegen die schwache Lösung des inversen mittleren Krümmungsflusses konvergieren und zeigen, dass die Flächen $\partial\{x|u(x,t) \leq z\}$ solcher Lösungen in Dimension $n \leq 7$ für $t \longrightarrow \infty$ global im Sinne des Hausdorff-Abstandes und einschichtig lokal gleichmäßig in $C^{1,\alpha}$ für jedes $0 < \alpha < 1/2$ gegen die entsprechenden Flächen der stationären Lösung konvergieren. In beliebiger Dimension erhalten wir die lokal gleichmäßige $C^{1,\alpha}-$Regularität der Flächen $\partial(int\{x|u(x,t) \leq z\})$ und $\partial\{x|u(x,t) < z\}$ auf dem Komplement einer singulären Menge mit Hausdorffdimension $k \leq n-8$. Wir erhalten die oben erwähnte Konvergenz dann unter einer Zusatzbedingung an die stationäre Lösung, die zumindest in dem Fall erfüllt ist, in dem diese klassisch ist.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung **3**

1 Parabolische Regularisierung des Ausgansproblems **11**
1.1 Definitionen und Evolutionen 11
1.2 Apriori-Abschätzungen für das regularisierte Problem 15
1.2.1 Erste Abschätzungen 15
1.2.2 Gradientenschranken am Rand 16
1.3 Der Dimensionstrick 27
1.4 Weitere Regularitätseigenschaften 28
1.4.1 Geometrische Uminterpretation 28
1.4.2 Geometrische Evolutionsgleichungen 29
1.4.3 Abschätzung an $\frac{\partial}{\partial t}u_\epsilon$ mit Hilfe einer H-Schranke 31
1.5 Existenz, Eindeutigkeit und gleichmäßige Abschätzungen 34

2 Schwache Lösungen und ihre Niveaumengen **39**
2.1 Definition und erste Eigenschaften 39
2.1.1 Der schwache Lösungsbegriff 39
2.1.2 Kompaktheit 41
2.1.3 Eindeutigkeit unter einer Vorzeichenbedingung 45
2.2 Existenz schwacher Lösungen auf einem Außengebiet 48
2.3 Regularität und Konvergenz der Niveaumengen 52
2.3.1 Motivation und Notation 52
2.3.2 Alternative schwache Formulierung 54
2.3.3 Regularität der Mengen $\partial^{*\ (+)}E_z^t(u)$ 56
2.3.4 Regularitätseigenschaften in Dimension $n \leq 7$ 64
2.3.5 Konvergenz der Niveaumengen 71
2.3.6 Niveaumengen monoton wachsender Lösungen 78
2.4 Anhang: Ein Maximumprinzip 82

Literaturverzeichnis **87**

Einleitung

Viele interessante geometrische Evolutionsgleichungen sind Vorschriften zur Verformung der Metrik einer Mannigfaltigkeit, die punktweise nur von geometrischen Größen dieser Mannigfaltigkeit selbst abhängen. Eine große Klasse solcher Evolutionsgleichungen betrachtet den Spezialfall einer Mannigfaltigkeit M der Dimension $n-1$, die in Form einer Ein-Parameter-Familie von isometrischen Einbettungen als Hyperflächen

$$F : M \times [0, T) \longrightarrow N : (x, z) \mapsto F(x, z) = F_z(x)$$

in einer umgebenden Mannigfaltigkeit N der Dimension n vorliegt. Die Verformungsvorschrift kann sich in diesem Fall der Größen der äußeren Geometrie von $F_z = F_z(M)$ in N bedienen. Besondere Beachtung fanden in den letzten Jahrzehnten Evolutionen, in denen die Verformungsrichtung an jeder Stelle senkrecht zu der evolvierenden Hyperfläche und die Verformungsgeschwindigkeit eine symmetrische, homogene Funktion der Hauptkrümmungen dieser Fläche ist. Die Motivation für die in dieser Arbeit betrachtete Differentialgleichung besteht in einer solchen geometrischen Evolutionsgleichung, dem inversen mittleren Krümmungsfluss. Genauer besteht die Motivation für die vorliegende Arbeit darin, schwache Lösungen des inversen mittleren Krümmungsflusses auf neue Weise analytisch so zu approximieren, dass sie besser als bisher möglich näherungsweise numerisch berechnet werden können. Dazu kommen in dieser Arbeit neben den Methoden aus der Theorie der geometrischen Evolutionsgleichungen auch solche aus der Theorie quasilinearer partieller Differentialgleichungen, aus der Variationsrechnung und aus der geometrischen Maßtheorie zur Anwendung.

Für den inversen mittleren Krümmungsfluss (im Folgenden kurz IMCF) gibt es neue Anwendungen in der Analysis, wo zum Beispiel Bray und Neves ([BN00]) die Poincaré-Vermutung für Mannigfaltigkeiten mit größerer Yamabe-Invariante als $\mathbb{RP}^3$ beweisen konnten. Erstmals vorgeschlagen wurde der IMCF von Geroch ([Ger93]), um mit Hilfe einer entlang der klassischen Evolution geltenden Monotonieformel die Positivität der ADM-Masse in gewissen Raumzeitmodellen der allgemeinen Relativitätstheorie zeigen zu können. Huisken und Ilmanen, die in [HI01] den schwachen Lösungsbegriff für den IMCF definiert haben, konnten diese Monotonieformel auf den schwachen Lösungsbegriff verallgemeinern und damit erstmals die volle Riemannsche Penrose-Ungleichung auf Zeitschnitten in bestimmten Raumzeitmodellen, sogenannten asymptotisch flachen Enden, beweisen. Eine sehr kurze Zusammenfassung der

Zusammenhänge und Ideen findet man in [Hui98]. Auch in der elektronischen Bildverarbeitung sind Anwendungen des schwachen IMCF denkbar. Da die schwachen Lösungen des inversen mittleren Krümmungsflusses als statische Lösungen unserer Gleichung auftreten, soll der IMCF hier auch mathematisch kurz vorgestellt werden.

Der inverse mittlere Krümmungsfluss

Man sagt, eine Familie $(F_z)_{z\in[0,Z)}$ von glatten, eingebetteten, orientierbaren Hyperflächen mit positiver mittlerer Krümmung H_z gehorche dem IMCF, falls sie sich zu jeder Zeit $z \in (0, Z)$ an jeder Stelle $p \in F_z$ in Richtung des zu H_z gehörigen Einheitsnormalenvektors $\nu_z(p)$ bewegt, und wenn die Geschwindigkeit dieser Bewegung dem Kehrwert $\frac{1}{H_z(p)}$ der mittleren Krümmung an dieser Stelle entspricht. Das heißt

$$\frac{\partial}{\partial z} F_z \;=\; \frac{1}{H_z}\,\nu_z\;. \tag{IMCF.1}$$

Offenbar muss man $H \neq 0$, bei passender Wahl der Normalen also $H > 0$ voraussetzen, damit diese Gleichung definiert ist. Unabhängig voneinander fanden Gerhardt ([Ger90]) und Urbas ([Urb90]) 1990 heraus, dass die richtige Bedingung, die man an eine in den $\mathbb{R}^n$ eingebettete geschlossene Anfangsfläche positiver mittlerer Krümmung stellen muss, um den Erhalt von $H_z > 0$ für alle Zeiten z zu garantieren, in ihrer globalen Sternförmigkeit liegt. Beide Autoren beweisen unter dieser Voraussetzung die Langzeitexistenz für Lösungen des klassischen IMCF.

In der ursprünglichen physikalischen Anwendung besteht allerdings großes Interesse daran, sowohl auf die Bedingung der Sternförmigkeit von Anfangsflächen als auch auf die Bedingung $H > 0$ zu verzichten. Zunächst wäre ein globaler Begriff von Sternförmigkeit in den gekrümmten Räumen der allgemeinen Relativitätstheorie gar nicht auf kanonische Weise definierbar. Zudem sind aus relativistischen Beispielrechnungen Situationen bekannt, in denen sich eine unter dem schwachen IMCF evolvierende Fläche um ein Hindernis herumwölbt, bevor sie es überspringt. Es kann also gar nicht erwartet werden, dass überhaupt ein sinnvoller Begriff von Sternförmigkeit unter dem IMCF erhalten bliebe. Will man weiter zum Beispiel die ADM-Masse eines Zeitschnitts in einer Raumzeit der allgemeinen Relativitätstheorie mit mehreren Horizonten abschätzen, so besteht das mathematische Modell des Zeitschnitts aus einer asymptotisch flachen Mannigfaltigkeit, die eine disjunkte Vereinigung mehrerer Minimalflächen enthält, die diese Horizonte modellieren. Dort hat man schon zu Beginn der Evolution das Problem, dass auf diesen Minimalflächen überall $H = 0$ gilt, so dass diese Flächen gar keine erlaubten Anfangsflächen des klassischen IMCF sind. Der klassische IMCF scheitert zuletzt im flachen Raum im Allgemeinen bei nicht sternförmigen Anfangsbedingungen sogar im Fall $H > 0$. Ein Beispiel ist die in [HI01] dargestellte Evolution zweier disjunkter Sphären im euklidischen Raum. Beide Sphären dehnen sich unabhängig voneinander aus, wobei die Expansionsgeschwindigkeiten stetig wachsen, weil die mittlere Krümmung jeder Sphäre unter der Expansion

fällt. Folglich müssen sie sich nach endlicher Zeit in einem Punkt berühren. An diesem Punkt ist die neue Gesamtfläche nicht mehr glatt genug, um überhaupt eine mittlere Krümmung zu definieren, die Evolution bricht zusammen.

Inspiriert von Evans und Spruck ([ES91]) und Chen, Giga und Goto ([CGG91]) haben Huisken und Ilmanen in [HI01] einen schwachen Lösungsbegriff für den IMCF entwickelt, der dieses Problem bewältigt. Dazu suchen sie für den klassischen IMCF eine reellwertige Funktion u, die auf der umgebenden Mannigfaltigkeit N auf dem Komplement des von der Anfangsfläche eingeschlossenen Volumens definiert ist, und deren Niveaumengen zu beliebigen gegebenen Niveaus z gerade denjenigen Hyperflächen entsprechen, die der IMCF zur Zeit z erreichen würde, das heißt

$$F_z(M) = \partial\{x \in N \mid u(x) < z\} \ .$$

Man kann nachrechnen, dass u Lösung der quasilinearen, degeneriert elliptischen partiellen Differentialgleichung

$$\operatorname{div}\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \ = \ |\nabla u| \qquad \text{(IMCF.2)}$$

ist. Dem Problem $H = 0$ entspricht in dieser Formulierung das Problem $|\nabla u| = 0$. Mit Hilfe eines Variationsansatzes konnten Huisken und Ilmanen dieses Problem umgehen und einen schwachen Lösungsbegriff auch für Flächen mit lediglich nichtnegativer mittlerer Krümmung definieren.

Das Approximationsschema der elliptischen Regularisierung (siehe auch [Vis98] oder [Ilm94]) führt bei Huisken und Ilmanen zur Existenz, tiefe Regularitätstheoreme der geometrischen Maßtheorie zur $C^{1,\alpha}-$Regularität der gesuchten Hyperflächen in Räumen der Dimension $n \leq 7$ beziehungsweise auf dem Komplement einer singulären Menge von Hausdorffdimension $k \geq n - 8$. Wiederum mit Hilfe der elliptischen Regularisierung konnte Heidusch in ihrer Dissertation [Hei] die (optimale) $C^{1,1}-$Regularität dieser Flächen in Raumdimensionen $n \leq 6$ beweisen. Dazu muss sie die $C^{1,\alpha}-$Regularität von approximierenden Lösungen in einer um eine Raumdimension angereicherten Situation betrachten. Huisken und Ilmanen haben in neuester Zeit gezeigt, dass die Flächen der schwachen Lösungen des IMCF für große Niveaus z unabhängig von der Anfangsbedingung sogar global sternförmig mit $H > 0$ werden. Die weitere Evolution ist dann wegen der Ergebnisse in [HI02] klassisch und konvergiert nach passender Reskalierung gegen eine Sphäre.

Nachdem Existenz und Regularität des schwachen IMCF der elliptischen Regularisierung des Niveauflächenansatzes zu verdanken sind, lag es für Pasch ([Pas]) nahe, seinen numerischen Ansatz ebenfalls dort zu suchen. Mit einer Finiten Volumen Diskretisierung der regularisierten Gleichung gelangen Pasch Berechnungen, deren Ergebnisse auf bekannten Modellproblemen beeindruckende Genauigkeit erzielen (Filme von Beispielrechnungen siehe `http://na.uni-tuebingen.de/sfb/B5/imcf.html`).

Pasch gelang der Nachweis lokaler Konsistenz seines Algorithmus, aber kein Konvergenzbeweis. Dies mag darin begründet sein, dass das Verfahren der finiten Volumen wesentlich lokal ist. Die Flächen des schwachen IMCF sind aber gerade dort, wo

sie sich von denen des klassischen unterscheiden, wesentlich von einer nicht lokalen Eigenschaft charakterisiert, der "minimizing hull property"([HI01]). Im obigen Beispiel der Expansion zweier Sphären *springt* insbesondere die schwache Evolution zu einer Fläche, die die beiden Sphären mit einem Katenoid verbindet, sobald dadurch bei gleichem Oberflächeninhalt mehr Volumen umschlossen werden kann. Das beim Sprung überstrichene Gebiet hat im Allgemeinen positives, $n-$dimensionales Volumen. Informationsausbreitung ist eine Eigenschaft, die bei numerischen Verfahren für parabolische Probleme wesentlich besser zum Tragen kommt. Dabei möchte man numerisch ein parabolisches Problem modellieren, für das einerseits leicht Anfangswerte zu generieren sind und das insbesondere als Anfangswerte zum Beispiel die Ergebnisse eines anderen numerischen Verfahrens akzeptiert und verbessern kann. Beides wird von unserem Ansatz im $\mathbb{R}^n$ erreicht.

Problemstellung und Ergebnisse dieser Arbeit

Wir betrachten in unserer Arbeit die natürliche parabolische Verallgemeinerung der Niveauflächengleichung für den klassischen IMCF, die quasilineare, degeneriert parabolische partielle Differentialgleichung zweiten Grades

$$(\star) \qquad \frac{\partial}{\partial t}u \;=\; \operatorname{div}\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \;-\; |\nabla u|$$

für eine reellwertige Funktion u. Wir bezeichnen dabei stets den Zeitparameter dieser parabolischen Gleichung mit t, die Werte von u mit z. Diese Wahl soll daran erinnern, dass jede statische Lösung von $(\star)$ auch die Gleichung (IMCF.2) löst und dass ihr Niveauparameter z gerade dem Zeitparameter des IMCF entspricht. Wir definieren in Kapitel 2 eine schwache Lösung dieser Gleichung auf einem aus der Situation des IMCF übernommenen Außengebiet der Form $\Omega = \mathbb{R}^n \backslash E_0$. Dabei fordern wir E_0 als Kompaktum mit C^2-Rand und verlangen, dass die mittlere Krümmung von ∂E_0 nichtnegativ bezüglich der äußeren Normalen von E_0 ist. Um $\partial E_0 = \partial\Omega$ als Anfangsfläche für den IMCF auffassen zu können, schreiben wir die Dirichlet-Randbedingung $u = 0$ auf ∂E_0 vor. Zur Definition der schwachen Lösungen verwenden wir ein Variationsprinzip. Präziser gesagt vergleichen wir eine prospektive Lösung u des beschriebenen Anfangs- und Randwertproblems mit bestimmten Vergleichsfunktionen v, die auf passende Weise dieselben Randbedingungen wie u erfüllen. Indem wir die obige PDGL mit $u-v$ multiplizieren und im Raum partiell integrieren, sehen wir, dass eine klassische Lösung u zu jeder Zeit $t > 0$ das Funktional

$$\mathcal{J}\!P_u^{K,t}(v) := \int\limits_{K\times\{t\}} |\nabla v| + v\big(|\nabla u| + \dot{u}\big)$$

in der Klasse ihrer Vergleichsfunktionen minimiert. Dabei ist K ein beliebiges Kompaktum mit glattem Rand, das zur Zeit t die Menge aller Punkte des Gebiets Ω

enthält, auf denen v und u sich unterscheiden. Wir erheben diese Minimierungseigenschaft zur Definition und sagen, u sei eine schwache Lösung, Sub- oder Superlösung, wenn $I\!P_u^{K,t}(u) \leq I\!P_u^{K,t}(v)$ für alle solche Vergleichsfunktionen v, beziehungsweise für alle solche Vergleichsfunktionen mit $v \leq u$ oder $v \geq u$ noch zu fast allen Zeiten $t > 0$ gilt. Im Fall stationärer Lösungen (also $\frac{\partial}{\partial t}u \equiv 0$) geht dieses Funktional in das von Huisken und Ilmanen benutzte über, so dass dort derselbe Lösungsbegriff entsteht. Wir erhalten mit Hilfe der Technik der $\epsilon-$Regularisierung in Theorem 2.9 die Langzeitexistenz solcher schwacher Lösungen für beliebige lipschitzstetige Anfangswerte $f \geq 0$, die stetig angenommen werden. Für diese Lösungen zeigen wir eine globale Gradientenschranke, die für eine breite Klasse von Anfangswerten scharf ist und nur noch von der Dimension des Raumes und der Geometrie von ∂E_0 abhängt. Weiter zeigen wir, dass die Zeitableitung $\dot{u}$ ihrer L_∞-Norm nach bis auf eine additive Konstante durch $c/\sqrt{t}$ beschränkt ist, und dass diese Schranke wiederum nur von der Dimension, von ∂E_0 und von den Anfangswerten f abhängt.

Wir beweisen die Eindeutigkeit von Lösungen des schwachen Anfangs- und Randwertproblems zur PDGL $(\star)$ unter der Bedingung, dass $(|\nabla u| + \dot{u}) \geq 0$. Im Fall klassischer Lösungen entspricht dies der Eigenschaft, dass die Subniveauflächen $E_z^t = \{x|u(x,t) < z\}$ für alle Zeiten $t > 0$ und alle Niveaus $z > 0$ von außen minimierend für die Oberfläche sind. Das heißt, dass der Rand jeder Vergleichsmenge F, die E_z^t enthält, auch mindestens so großes $(n-1)-$dimensionales Hausdorffmaß wie der Rand von E_z^t hat. Weil damit insbesondere zeitlich monoton wachsende Lösungen eindeutig sind, erhalten wir aus dem Existenzprogramm durch elliptische Regularisierung in Lemma 2.23 eine scharfe Abschätzung an die L^∞-Norm von deren schwacher mittlerer Krümmung zu jeder Zeit.

Indem wir in Abschnitt 2.3.2 wie [HI01] ein Variationsprinzip für die Subniveaumengen selbst einführen, können wir mit Theoremen aus der geometrischen Maßtheorie in Proposition 2.22 sicherstellen, dass die Ränder der Mengen E_z^t und ${}^+E_z^t = int\{x|u(x,t) \leq z\}$ zu allen Zeiten bis auf eine singuläre Menge der Hausdorffdimension $k \leq n-8$ von der Klasse $C^{1,\alpha}$ für jedes $\alpha \in (0, 1/2]$ sind. In Dimension $n \leq 7$ können wir zeigen, dass die im Existenztheorem 2.9 konstruierten Lösungen zu jeder Zeit t für fast alle Niveaus z sogar die Eigenschaft $\partial E_z^t = \{x|u(x,t) = z\}$ haben. Wir verfeinern zum Beweis genau die Approximationstechnik, mit deren Hilfe Heidusch die bereits erwähnte $C^{1,1}-$Regularität zeigen konnte. Unter einer vom IMCF her naheliegenden Wachstumsbedingung an die Anfangswerte f für $|x| \longrightarrow \infty$ beweisen wir dann in Dimension $n \leq 7$ für monoton wachsende oder fallende Lösungen unter $t \longrightarrow \infty$ die Konvergenz $\mathcal{L}^1$-fast aller Niveaumengen gegen die Niveaumengen der schwachen Lösung des IMCF im Sinne des Hausdorff-Abstandes. Wir zeigen in beliebiger Dimension in Theorem 2.33, dass unter der Voraussetzung der Konvergenz im Hausdorff-Abstand die Konvergenz dort bereits lokal gleichmäßig in der $C^{1,\alpha}-$Norm ist, wo die Grenzfläche der stationären Lösung lokal selbst regulär ist. Für monoton wachsende Lösungen folgern wir mit Proposition 2.36, dass diese Konvergenz (in dort präzisiertem Sinne) einschichtig ist. Theorem 2.37 fasst die wichtigsten

Ergebnisse in Dimension $n \leq 7$ zusammen, wo die betrachteten Niveaumengen keine singuläre Menge haben.

Eine mögliche Fortführung der analytischen Arbeit könnte in der Verallgemeinerung der $C^{1,1}-$Regularität von Heidusch auf unseren Fluss und auf Raumdimensionen $n \leq 7$ liegen. Dringlicher und einfacher wäre allerdings der Übergang von der Situation im euklidischen Raum auf asymptotisch flache Mannigfaltigkeiten. Besonders im Hinblick auf eine numerische Umsetzung wären außerdem Aussagen über eine Konvergenzrate wünschenswert.

Gliederung der Arbeit

Der Existenzbeweis für die schwachen Lösungen stützt sich auf die parabolische Regularisierung der PDGL $(\star)$, für die zu Beginn des ersten Kapitels das Anfangs- und Randwertproblem formuliert wird, um das sich diese Arbeit dreht. Wir studieren danach im ersten Kapitel für kleines $\epsilon > 0$ Anfangs- und Randwertprobleme für die Familie von parabolisch regularisierten Gleichungen

$$(\star_\epsilon) \qquad \frac{\partial}{\partial t} u_\epsilon \;=\; \operatorname{div} \frac{\nabla u_\epsilon}{\sqrt{|\nabla u_\epsilon|^2 + \epsilon^2}} \;-\; \sqrt{|\nabla u_\epsilon|^2 + \epsilon^2}$$

auf beschränkten Gebieten der Form $\Omega = B \backslash E_0$, wo B konvex ist. Nachdem in Abschnitt 1.1 die Evolutionsgleichungen der relevanten Größen ausgerechnet sind, werden in 1.2 am Anfang globale C^0-Schranken und erste Abschätzungen von Ableitungstermen hergeleitet. In Abschnitt 1.2.2 werden Gradientenschranken am Gebietsrand mit Hilfe von Barrieren gesichert. Die Tatsache, dass die Gleichung nur wenige Sublösungen bietet, führt in Lemma 1.5 zu deutlichen aber notwendigen Einschränkungen bei der Wahl der Anfangs- und Randwerte. Wir legen allerdings Wert auf die Feststellung, dass sich diese Einschränkungen in keinster Weise limitierend auf die letztlich gewünschte schwache Situation auswirken. Insbesondere stehen Anfangs- und Randwerte zur Verfügung, die es erlauben, jede bisher betrachtete Anwendung des IMCF sowohl in der schwachen Situation als auch in der regularisierten Situation auf den bisher betrachteten Gebietstypen zu approximieren. Im Anschluss stellen wir in Abschnitt 1.3 dar, wie sich aus der Familie $(u_\epsilon)_{\epsilon>0}$ eine Familie von klassischen, translatierenden Lösungen des Problems $(\star)$ auf dem Gebiet $\Omega \times \mathbb{R} \times [0, \infty)$ konstruieren lässt. Diese Konstruktion und damit der ganze Existenzbeweis für schwache Lösungen hängt wesentlich davon ab, dass in der PDGL $(\star)$ keine Terme nullter Ordnung vorkommen, und deswegen für beliebige Konstanten c die Funktion $u + c$ genau dann die PDGL $(\star)$ löst, wenn u sie löst.

In Abschnitt 1.4.1 interpretieren wir $(\star_\epsilon)$ als geometrische Evolutionsgleichung und zeigen in 1.4.3 mit Hilfe der Gradientenschranke eine zeitlich innere H-Schranke. Aus ihr folgt auch die volle, in ϵ gleichmäßige C^1-Regularität von Lösungen zu glatten Anfangswerten in Raum und Zeit. Die $H-$Schranke ermöglicht zudem die Lösbarkeit von $(\star_\epsilon)$ mit lediglich lipschitzstetigen Anfangswerten und letztlich die

$C^{1,\alpha}-$Regularität der Niveauflächen schwacher Lösungen. Wir beenden das erste Kapitel in Abschnitt 1.5 mit zusammenfassenden Existenzsätzen und einem Nichtexistenzsatz, der die Schärfe der geforderten Bedingungen an die Daten von $(\star_\epsilon)$ zeigt. Es folgt eine zusätzliche innere Abschätzung der Funktionswerte der Lösungen.

Im zweiten Kapitel entwickeln wir Eigenschaften schwacher Lösungen. Dazu definieren wir zunächst in Abschnitt 2.1 den schwachen Lösungsbegriff und zeigen, dass klassische Lösungen auch schwache Lösungen sind. Noch vor dem bereits erwähnten Eindeutigkeitssatz verallgemeinern wir den Kompaktheitssatz aus [HI01] auf unsere Lösungen, so dass wir schließlich aus den Lösungen der Probleme $(\star_\epsilon)$ des ersten Kapitels mit Hilfe des Dimensionstricks von Abschnitt 1.3 in Abschnitt 2.2 die bereits dargestellte Existenz schwacher Lösungen erhalten. Es folgen die Abschnitte, in denen das Variationsprinzip für die Subniveaumengen, deren Regularität, ihre besonderen Eigenschaften in Dimension $n \leq 7$ und schließlich die Konvergenzeigenschaften für $t \longrightarrow \infty$ bewiesen werden.

Anmerkungen im Hinblick auf eine numerische Umsetzung

Die naheliegendste Möglichkeit, eine schwache Lösung des Problems $(\star)$ zu approximieren, ist eine Diskretisierung von $(\star_\epsilon)$ für ϵ nahe bei der Maschinengenauigkeit. Man muss dafür ein endliches Gebiet $\Omega = B \backslash E_0$ wählen. Dazu ist anzumerken, dass die Barrieren, die wir für die Gradientenschranken am Gebietsrand im ersten Kapitel konstruieren, ausreichen, wenn B als Quader gewählt wird. Arbeitet man nicht mit finiten Differenzen sondern wie Pasch in ([Pas]) mit finiten Volumen, würde es sich anbieten, sphärische Gebiete zu betrachten. Man wird versuchen, die Randwerte entlang ∂B so hoch wie möglich und nichtkonstant zu wählen. Eine natürliche Wahl sind die Werte, die die schwache Lösung der unter dem IMCF expandierenden Um-Sphäre von E_0 dort annimmt. Dadurch werden unnötige Gebiete vermieden, in denen $|\nabla u_\epsilon|$ nahezu verschwindet. Zudem ist bekannt, dass die Lösungen des IMCF für große Niveauparameter z Sphären approximieren. Für weitere Diskussionen zum Phänomen fast verschwindender Gradienten aus numerischer Sicht verweisen wir auf die Textabschnitte nach den Lemmata 1.4 und 1.5.

Wegen des Dimensionstricks aus Abschnitt 1.3 sind die Funktionen $U_\epsilon = u_\epsilon - \epsilon z$ klassische Lösungen von $(\star)$, falls u_ϵ klassische Lösung von $(\star_\epsilon)$ ist. Daher kann man die Niveaumengen von Lösungen der PDGL $(\star_\epsilon)$ stets als ebene Schnitte durch Niveaumengen passender, sogar klassischer Lösungen in einem um eine Dimension größeren Raum ansehen. Insbesondere ist für eine sehr große, im Laufe dieser Arbeit identifizierte Klasse von Anfangswerten die Konvergenz der Funktionen $u_{\epsilon_i}(x, t_i)$ entlang von Folgen $\epsilon_i \longrightarrow 0$ und $t_i \longrightarrow \infty$ stets von mindestens derselben Güte, wie die Konvergenz schwacher Lösungen unter $t \longrightarrow \infty$, in Dimension $n \leq 7$ geschieht sie mithin in exakter Rechnung stets lokal gleichmäßig in $C^{1,\alpha}$.

Danksagung

Ich danke an dieser Stelle Herrn Prof. Dr. Gerhard Huisken für die Überlassung des Themas, die hervorragende Betreuung und Unterstützung, das mir entgegengebrachte Vertrauen und die mir bei der Arbeit inhaltlich und organisatorisch gewährte große Freiheit. Herrn Prof. Dr. Klaus Ecker von der Freien Universität Berlin danke ich herzlich für interessante mathematische Diskussionen. Zudem möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. Reiner Schätzle für die in der Diskussion mit ihm angestoßenen Denkprozesse und für die Möglichkeit bedanken, über meine Arbeit vorzutragen.

Weiter gebührt mein Dank meinem Kollegen und Freund Dr. Felix Schulze für eine erste Lektüre dieser Arbeit sowie für die vielen inspirierenden Diskussionen über Analysis, Maßtheorie und gänzlich andere Themen. Schließlich bin ich meinem Büro-Mitinsassen Jan Metzger für unsere überaus ernsten Gespräche über die Kunst mathematischen Formulierens tief verbunden. Durch ihre langjährige persönliche und finanzielle Unterstützung im und vor dem Studium und unter anderem für die Vermittlung naturwissenschaftlicher und mathematischer Denkansätze gebührt meinem Vater und meiner Mutter mehr Dank als hier ausgesprochen werden kann. Meinem Bruder Wolfgang sowie Herrn J. M. Geier und den Herren A. Krieg, J. Herth, M. Hahn, P. Demand und R. Stübs danke ich dafür, dass ich während all der Zeit einen gewissen Kontakt zu außermathematischen Realitäten nicht verloren habe. Meine wundervolle Ehefrau Charlotte weiß, dass ich sie hier nicht erwähnen kann, weil sie alle anderen in den Schatten stellen würde. Ihr ist diese Arbeit gewidmet.

Kapitel 1

Parabolische Regularisierung des Ausgansproblems

1.1 Definitionen und Evolutionen

Sei $E_0 \subset \mathbb{R}^n$ eine offene und beschränkte Menge. Für den Verlauf dieser Arbeit sei zudem stets ∂E_0 von der Klasse C^2 und habe nichtnegative mittlere Krümmung bezüglich der äußeren Einheitsnormalen an E_0. Wir bezeichnen das Außengebiet $\mathbb{R}^n \backslash E_0$ mit Ω und definieren das Ausgangsproblem der vorliegenden Arbeit als das Anfangs- und Randwertproblem

$$(\star) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} u = \operatorname{div} \dfrac{\nabla u}{|\nabla u|} - |\nabla u| & \text{auf } \Omega \times (0, \infty) \ , \\ u = 0 & \text{auf } \partial E_0 \times [0, \infty) \ , \\ u = f & \text{auf } \Omega \times \{0\} \ . \end{cases}$$

Zu Beginn des zweiten Kapitels wird hierfür ein schwacher Lösungbegriff gegeben. Grundsätzlich verlangen wir dazu lediglich, dass $0 \leq f \in C^{0,1}(\bar{\Omega})$ die Kompatibilitätsbedingung $f = 0$ auf ∂E_0 erfüllt. Im Hinblick auf eine numerische Umsetzung werden wir im Verlauf dieser Arbeit immer wieder auch auf den Fall beschränkter Gebiete $\Omega = B \backslash E_0$ eingehen, in dem B strikt konvex ist. In diesem Fall fordern wir von den Anfangswerten f zusätzlich, dass sie die auf ∂B gegebenen Randwerte g treffen. Deren Wahl, wie auch die der Anfangswerte, wird im Fall beschränkter Gebiete, und nur in diesem Fall, durch die Existenz gewisser Sublösungen technisch eingeschränkt, was im Anschluss an die Lemmata 1.4 und 1.5 diskutiert wird.

Wir bezeichnen in der Regel Punkte eines Gebiets $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit x, den Zeitparameter unserer parabolischen Probleme mit t und die Werte der Funktionen u und u_ϵ mit z. Die $z-$Variable entspricht bei statischen Lösungen von $(\star)$ dem Zeitparameter des IMCF. ∇u bezeichnet den räumlichen Gradienten von u und $\frac{\partial}{\partial t} u$ oder $\dot{u}$ die partielle Ableitung in der Zeit. Falls u nur lipschitzstetig ist, verstehen wir partielle

Ableitungen im Sinne des Limes superior über die entsprechenden Differenzenquotienten, den Gradienten entsprechend.

Wie in der Einleitung angedeutet, erhält man schwache Lösungen des Problems $(\star)$ als Limiten der nun zu definierenden Familie $(\star_\epsilon)$ von klassischen, quasilinearen, strikt parabolischen Anfangs- und Randwertproblemen. Man arbeitet dazu auf beschränkten Gebieten der Form $\Omega = B \backslash E_0 \subset \mathbb{R}^n$. Dabei sei B strikt konvex in dem Sinne, dass ein endlicher Radius R existiert, so dass jeder Punkt $x \in \partial B$ von einer Kugeloberfläche $\partial B_R(y)$ berührt wird, wo $y \in \mathbb{R}^n$ passend gewählt ist und $\Omega \subseteq B_R(y)$. Wir setzen

$$(\star_\epsilon) \qquad \begin{cases} \dot{u} = \operatorname{div} \dfrac{\nabla u}{\sqrt{|\nabla u|^2 + \epsilon^2}} - \sqrt{|\nabla u|^2 + \epsilon^2} & \text{auf } \Omega \times [0,T] \\ \\ u = 0 & \text{auf } \partial E_0 \times [0,\infty) \\ u = g & \text{auf } \partial B \times [0,\infty) \\ u = f & \text{auf } \Omega \times \{0\} \end{cases}$$

Hier bezeichnet f im Allgemeinen nicht die selbe Funktion wie in der Definition von $(\star)$. Der Zusammenhang zwischen den Anfangswertefunktionen von $(\star)$ und $(\star_\epsilon)$ wird im Beweis des Existenztheorems für schwache Lösungen, Theorem 2.9 entwickelt. In der Formulierung von $(\star_\epsilon)$ sei $f = 0$ auf ∂E_0 und $f = g$ auf ∂B stets vorausgesetzt. Auch hier unterliegen f und g gewissen Einschränkungen, die von der Struktur der verfügbaren Sublösungen der Gleichung herrühren. Für eine Diskussion dieser Tatsache verweisen wir nochmals auf die Lemmata 1.4 und 1.5. In obigem Problem wird $0 < \epsilon \leq \epsilon(n, \Omega)$ angenommen und es genügt, zunächst $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$ zu verlangen. Diese Approximationsmethode wird als parabolische Regularisierung oder als $\epsilon-$Regularisierung (im statischen Fall auch als elliptische Regularisierung) bezeichnet, ist von [ES91] inspiriert und wurde in [HI01] benutzt, um die Niveauflächenformulierung des IMCF schwach zu lösen.

Die Lösbarkeit von $(\star_\epsilon)$ entspringt parabolischer Standardtheorie und basiert auf einer Anwendung des Schauderschen Fixpunktsatzes (siehe z.B. [Lie96] Kapitel 8 - 12). Die passenden Banachräume sind die parabolischen Hölderräume $H^{1+\alpha}(\Omega \times [0,\infty))$. Die notwendigen Aprioriabschätzungen in der $H^{1+\alpha}$-Norm folgen mit einem DeGiorgi-Nash-artigen Theorem aus C^1-Schranken. Insbesondere folgt in unserem Fall die Langzeitexistenz einer Lösung u_ϵ von $(\star_\epsilon)$, sobald a priori gilt:

$$\sup_{\Omega \times [0,\infty)} |u_\epsilon|, |\nabla u_\epsilon|, |\frac{\partial}{\partial t} u| \leq M = M(\Omega, \epsilon, n, g, f) \ ,$$

All diese Schranken erhalten wir in den folgenden Abschnitten aus passenden Versionen des parabolischen Maximumprinzips, wobei das Ziel ist, die Abhängigkeit vom Parameter ϵ zu eliminieren. Da die Lösungen aus dem erwähnten Fixpunktsatz der linearen Existenztheorie entstammen, sind sie bereits klassisch und wegen eines oft

zitierten Iterationsarguments, das die quasilineare Struktur der Gleichung nutzt, sogar glatt im Inneren von $\Omega \times [0,\infty)$ (zum Beispiel [Kry87] 8.12). Insbesondere darf man deswegen stets partielle Ableitungen beliebig hoher Ordnung bilden. Bevor wir die nötigen Evolutions(un)gleichungen ausrechnen, definieren wir für den Rest dieser Arbeit für einen Vektor $p \in \mathbb{R}^n$ die Koeffizientenmatrix

$$A_\epsilon^{ij}(p) := \frac{1}{\sqrt{|p|^2+\epsilon^2}} \left(\delta_{ij} - \frac{p_i p_j}{|p|^2+\epsilon^2} \right)$$

und meinen, wo nicht anders bezeichnet,

$$A_\epsilon^{ij} := A_\epsilon^{ij}(\nabla u_\epsilon(x,t)) \ .$$

Weiter seien für glatte Funktionen f die quasilinearen elliptischen Operatoren

$$Q_\epsilon(f) := A_\epsilon^{ij}(\nabla f(x,t)) \nabla_{ij} f - \sqrt{|\nabla f|^2+\epsilon^2}$$

definiert.

Lemma 1.1 *Sei $\epsilon > 0$ fest und $u = u_\epsilon$ Lösung der PDGL von $(\star_\epsilon)$. Dann gilt*

$$\frac{\partial}{\partial t} u = A_\epsilon^{ij} \nabla_{ij} u - \sqrt{|\nabla u|^2+\epsilon^2} \ . \tag{1.1}$$

Für den kleinsten bzw. größten Eigenwert der Koeffizientenmatrix A_ϵ^{ij} gilt

$$\lambda_\epsilon(x,t) = \frac{\epsilon^2}{(\sqrt{|\nabla u|^2+\epsilon^2})^3}(x,t), \quad \Lambda_\epsilon(x,t) = \frac{1}{\sqrt{|\nabla u|^2+\epsilon^2}}(x,t) \ . \tag{1.2}$$

Falls $\nabla |\nabla u|^2(x,t) = 0$ für ein bestimmtes (x,t) ist, so gilt dort

$$\frac{\partial}{\partial t} |\nabla u|^2 \leq A_\epsilon^{ij} \nabla_{ij} |\nabla u|^2 \ . \tag{1.3}$$

Falls $\nabla \dot{u}(x,t) = 0$ für ein bestimmtes (x,t) ist, so gilt dort

$$\frac{\partial}{\partial t} \dot{u} = A_\epsilon^{ij} \nabla_{ij} (\frac{\partial}{\partial t} u) \ . \tag{1.4}$$

Beweis: Offenbar ist wegen der Kettenregel

$$A_\epsilon^{ij} = \frac{1}{\sqrt{|\nabla u|^2+\epsilon^2}} \left(\delta_{ij} - \frac{\nabla_i u \nabla_j u}{|\nabla u|^2+\epsilon^2} \right) = \mathrm{div} \frac{\nabla u}{\sqrt{|\nabla u|^2+\epsilon^2}} \ ,$$

was die erste Behauptung beweist. Den kleinsten beziehungsweise größten Eigenwert λ_ϵ beziehungsweise Λ_ϵ von A_ϵ^{ij} erhält man durch Einsetzen eines Einheitsvektors ξ

parallel bzw. orthogonal zu ∇u in den Ausdruck $A_\epsilon^{ij}\xi_i\xi_j$, was die zweite Aussage beweist. Für die dritte Aussage beachte man, dass

$$\nabla_i|\nabla u|^2 = 2\nabla_l u\nabla_{il}u \quad \text{bzw.} \quad 2\nabla_l u\nabla_{il}u\nabla_i u = \nabla_i u\nabla_i|\nabla u|^2 \ , \tag{1.5}$$

daher auch

$$2\nabla_l u\nabla_l\sqrt{|\nabla u|^2+\epsilon^2} = 2\nabla_l u\frac{\nabla_i u\nabla_{il}u}{\sqrt{|\nabla u|^2+\epsilon^2}} = \frac{\nabla_i u}{\sqrt{|\nabla u|^2+\epsilon^2}}\nabla_i|\nabla u|^2 \ . \tag{1.6}$$

Weiterhin ist

$$\nabla_{ij}|\nabla u|^2 = 2\nabla_{il}u\nabla_{jl}u + \nabla_l u\nabla_{ij}\nabla_l u \ . \tag{1.7}$$

Wegen dieser drei Gleichungen gilt, dass

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}|\nabla u|^2 &= 2\nabla_l u\frac{\partial}{\partial t}\nabla_l u = 2\nabla_l u\nabla_l(A_\epsilon^{ij}\nabla_{ij}u - \sqrt{|\nabla u|^2+\epsilon^2}) \\ &= 2\nabla_l u A_\epsilon^{ij}\nabla_{ij}(\nabla_l u) + 2\nabla_l u(\nabla_l A_\epsilon^{ij})\nabla_{ij}u - 2\nabla_l u\nabla_l\sqrt{|\nabla u|^2+\epsilon^2} \\ &= A_\epsilon^{ij}\nabla_{ij}|\nabla u|^2 - 2\nabla_{il}u A_\epsilon^{ij}\nabla_{jl}u + 2\nabla_l u(\nabla_l A_\epsilon^{ij})\nabla_{ij}u - \frac{\nabla_i u}{\sqrt{|\nabla u|^2+\epsilon^2}}\nabla_i|\nabla u|^2 \ .\end{aligned}$$

Aber wieder mit Hilfe von (1.6) und (1.5) ist

$$\begin{aligned}2\nabla_l u\nabla_l A_\epsilon^{ij} =& -\frac{2\nabla_l u}{2(\sqrt{|\nabla u|^2+\epsilon^2})^3}\nabla_l\sqrt{|\nabla u|^2+\epsilon^2}\left(\delta_{ij} - \frac{\nabla_i u\nabla_j u}{|\nabla u|^2+\epsilon^2}\right) \\ &+ \frac{2\nabla_l u}{\sqrt{|\nabla u|^2+\epsilon^2)}}\left(\frac{\nabla_{il}u\nabla_j u + \nabla_i u\nabla_{jl}u}{|\nabla u|^2+\epsilon^2} - \nabla_i u\nabla_j u\frac{2\nabla_{kl}u\nabla_k u}{(|\nabla u|^2+\epsilon^2)^2}\right) \\ =& -\frac{\nabla_l u}{2(\sqrt{|\nabla u|^2+\epsilon^2})^3}\nabla_l|\nabla u|^2 A_\epsilon^{ij} + \frac{\nabla_j u\nabla_j|\nabla u|^2 + \nabla_i u\nabla_j|\nabla u|^2}{(\sqrt{|\nabla u|^2+\epsilon^2})^3} \\ &- 2\frac{\nabla_i u\nabla_j u\nabla_l|\nabla u|^2}{(\sqrt{|\nabla u|^2+\epsilon^2})^5} \ ,\end{aligned}$$

so dass dieser Term an den Punkten verschwindet, wo auch $\nabla|\nabla u|^2 = 0$ ist. Es verbleibt dort

$$\frac{\partial}{\partial t}|\nabla u|^2 = A_\epsilon^{ij}\nabla_{ij}|\nabla u|^2 - 2\nabla_{il}u A_\epsilon^{ij}\nabla_{jl}u \ .$$

Nun folgt die dritte Behauptung aus der Tatsache, dass die Matrix A_ϵ^{ij} überall positiv definit ist und dass daher mit $\xi = \nabla(\nabla_l u)$ gilt, dass

$$-2\nabla_{il}u A_\epsilon^{ij}\nabla_{jl}u \le -2A_\epsilon^{ij}\xi_i\xi_j \le -2\lambda_\epsilon|\xi|^2 \le 0 \ .$$

Für die letzte Behauptung berechnet man

$$\frac{\partial}{\partial t}\dot{u} = A_\epsilon^{ij}\nabla_{ij}(\frac{\partial}{\partial t}u) + (\frac{\partial}{\partial t}A_\epsilon^{ij})\nabla_{ij}u - \frac{1}{2\sqrt{|\nabla u|^2+\epsilon^2}}\frac{\partial}{\partial t}|\nabla u|^2 \ .$$

Ähnlich wie oben sieht man nun, dass einerseits

$$\frac{\partial}{\partial t}|\nabla u|^2 = 2\nabla_k u \nabla_k \dot{u}$$

und andererseits

$$\frac{\partial}{\partial t}A_\epsilon^{ij} = -\frac{\nabla_k \dot{u}}{|\nabla u|^2+\epsilon^2}\left[A_\epsilon^{ij}\nabla_k u + A_\epsilon^{ik}\nabla_j u + A_\epsilon^{kj}\nabla_i u\right] \ ,$$

so dass beide Terme verschwinden, wo $\nabla \dot{u} = 0$ ist.

□

1.2 Apriori-Abschätzungen in C^1 für Lösungen des regularisierten Problems

1.2.1 Erste Abschätzungen

Im Folgenden gelte stets die Konvention

$$\text{für } x\in\partial B \text{ sei } \frac{\partial}{\partial \nu}u(x,t) := \lim_{h\searrow 0}\frac{u(x,t)-u(x-h\nu,t)}{h} \ , \ \nu \text{ äußere Normale an } \partial B \ ,$$
$$\text{für } x\in\partial E_0 \text{ sei } \frac{\partial}{\partial \nu}u(x,t) := \lim_{h\searrow 0}\frac{u(x+h\nu,t)-u(x,t)}{h} \ , \ \nu \text{ äußere Normale an } \partial E_0 \ .$$

Falls $\Omega = B_R(0)\backslash B_r(0)$ für $0 < r < R$ ist, so entspricht die oben gewählte Richtungsableitung immer derjenigen in die gewöhnliche Radialrichtung des $\mathbb{R}^n$ in Polarkoordinaten. Wegen der konstanten Randwerte in $(\star_\epsilon)$ ist auf $\partial\Omega$ stets $|\nabla u|(x,t) = |\frac{\partial}{\partial\nu}u|(x,t)$. Aus Lemma 1.1 folgt sofort

Lemma 1.2 *Sei $u = u_\epsilon$ eine Lösung von $(\star_\epsilon)$ zu Anfangswerten f. Dann gilt*

$$\inf_\Omega f - \epsilon t \le u(x,t) \le \sup_\Omega f \ . \tag{1.8}$$

Sei $t_0 > 0$, dann gilt weiterhin für alle $t \ge t_0$

$$\inf_\Omega Q_\epsilon(f) \le \inf_{\Omega\times\{t_0\}} \dot{u} \le \dot{u}(x,t) \le \sup_{\Omega\times\{t_0\}} \dot{u} \le \sup_\Omega Q_\epsilon(f) \ . \tag{1.9}$$

Falls $|\nabla u| \le \tilde{c}$ auf $\partial\Omega\times[0,\infty)$, so ist außerdem

$$|\nabla u| \le \max\{\tilde{c}, \sup_{\bar{\Omega}}|\nabla f|\} \ . \tag{1.10}$$

Beweis: Sei $\delta > 0$ beliebig aber fest. Würde zu einer Zeit t erstmalig $u(x,t) \geq (\sup_\Omega f) + \delta$ an einer Stelle x im Inneren von Ω, so gälte dort $\nabla u = 0$ bei negativ semidefiniter Hessematrix. Folglich wäre $\Delta u \leq 0$ und man hätte dort wegen der Evolutionsgleichung (1.1) aus dem vorangegangenen Lemma den Widerspruch

$$0 \leq \frac{\partial}{\partial t} u = \frac{\Delta u}{\epsilon} - \epsilon < 0 \ .$$

Nehme nun an, für ein $\delta_1 > 0$ gälte in (x,t) erstmals $u(x,t) + \epsilon t + \delta_1 t < (\inf_\Omega f) - \delta$. Dann wäre dort $\nabla u = 0$ mit $\Delta u \geq 0$, also hätte man für alle $\delta, \delta_1 > 0$ den Widerspruch

$$0 \geq \frac{\partial}{\partial t}(u + \epsilon t + \delta_1 t) = \frac{\Delta u}{\epsilon} - \epsilon + \epsilon + \delta_1 \geq \delta_1 \ .$$

Folglich muss (1.8) richtig sein. Analog gälte für beliebiges $\delta_1 > 0$ in einem neuen inneren Minimum beziehungsweise Maximum von $\dot{u} + \delta_1 t$ bzw. $\dot{u} - \delta_1 t$

$$\begin{aligned} 0 &\geq \frac{\partial}{\partial t}(u + \delta_1 t) = A_\epsilon^{ij} \nabla_{ij} \dot{u} + \delta_1 \geq \delta_1 \ , \\ 0 &\leq \frac{\partial}{\partial t}(u - \delta_1 t) = A_\epsilon^{ij} \nabla_{ij} \dot{u} - \delta_1 \leq -\delta_1 \ , \end{aligned}$$

wo die jeweils letzte Ungleichung aus den Definitheiten von A_ϵ^{ij} und $\nabla_{ij} u$ folgt. Somit ist auch (1.9) bewiesen. (1.10) folgt mit dem selben Argument bei Anwendung auf die Evolution (1.3), da $|\nabla u|^2$ in einem neuen inneren Maximum dieselbe Differentialungleichung erfüllt wie $\dot{u}$.

□

1.2.2 Gradientenschranken am Rand

Für den IMCF können Huisken und Ilmanen nutzen, dass die Evolution der mittleren Krümmung selbst unter dem IMCF von der Evolution geometrischer Entsprechungen eines Gradiententerms unabhängig ist, wogegen die Niveauflächenformulierung des IMCF einen direkten Zusammenhang zwischen H und $|\nabla u|$ herstellt. Ein Maximumprinzip für $\frac{1}{H}$ aus der geometrischen Evolution führt bei ihnen so, unabhängig von Wissen über $|\nabla u|$, zu einer räumlich inneren $H-$ Schranke, die dann mit Hilfe der Niveauflächenformulierung eine räumlich innere Gradientenschranke für u_ϵ bringt. Dadurch ist Huisken und Ilmanen das Lösen des elliptischen Problems auf Gebieten mit nur lipschitzstetigem Rand möglich. Wegen des $\frac{\partial}{\partial t} u_\epsilon$-Terms ist in unserer analogen geometrischen Interpretation die Evolutionsgleichung für H aber nicht unabhängig von Ableitungstermen erster Ordnung, so dass wir nur unter der Voraussetzung einer Gradientenschranke eine Aussage über H erhalten. Das Fehlen einer inneren Gradientenschranke legt uns auf Gebiete fest, bei denen ∂E_0 von der Klasse C^2 ist. Eine nur unwesentliche Verallgemeinerung besteht darin, dass wir offenbar auch Gebiete behandeln können, die von Gebieten mit C^2-Rändern approximiert werden können,

so lange unter dieser Approximation eine gleichmäßige H-Schranke erhalten bleibt. Gegenbeispiele für eine innere Gradientenschranke sind nicht bekannt.

Die Gradientenschranken auf $\partial\Omega$ werden mit Hilfe von Barrieren etabliert. Da $\dot{u}_\epsilon = 0$ auf $\partial\Omega$ und da stationäre Lösungen von (1.1) für gewisse Randwerte existieren, arbeiten wir für die Gradientenschranken mit zeitlich konstanten Barrieren, die auch für die Behandlung des elliptischen Problems geeignet wären.

Die Tatsache, dass der Operator Q_ϵ keine der Strukturbedingungen erfüllt, unter denen z.B. in [GT83] lokale Barrieren konstruiert werden, wirkt sich darin aus, dass die unteren Barrieren in beiden Fällen als globale Barrieren konstruiert werden müssen und so die Wahl der möglichen Rand- und Anfangswerte einschränken. Dass diese Einschränkungen wesentlich sind, zeigt der von uns auf Seite 35 gegebene Nichtexistenzsatz, Proposition 1.15.

Barrieren werden skalare Funktionen des Abstandes $d = \mathrm{dist}(x, \Sigma)$, $x \in \bar{\Omega}$ sein, wo Σ eine geeignete Vergleichs-Hyperfläche für $\partial\Omega$ ist. Bei uns wird stets gelten, dass

- $\Sigma = \partial E_0$, oder
- $\Sigma = \partial B_r(y)$, wo $B_r(y) \subseteq E_0$ und $\partial E_0 \cap \partial B_r(y) \neq \emptyset$, oder
- $\Sigma = \partial B_R(y)$, wo $\Omega \subset B_R(y)$ und $\partial B_R(y) \cap \partial B \neq \emptyset$.

Dabei interessieren und die Berührungen von Σ mit $\partial\Omega$ jeweils in Punkten $x_0 \in \partial\Omega$, bei denen lokale Barrieren zur Gewinnung von Gradientenschranken auf $\partial\Omega$ konstruiert werden sollen. Die folgenden Aussagen zitieren wir aus [GT83], Kapitel 14.6, von wo wir auch die Bezeichnungen übernehmen. Wir behalten die Notation für den Rest des Kapitels bei. Für $x_0 \in \Sigma \cap \partial\Omega$ bezeichne $\kappa_i(x_0)$ die $i-$te Hauptkrümmung von Σ in x_0 bezüglich der inneren Normalen von Ω, bezüglich der vom umliegenden $\mathbb{R}^n$ induzierten Metrik und in einem lokalen Hauptkrümmungskoordinatensystem ([GT83]: principal coordinate system). Da $\partial\Omega$ kompakt ist, gilt $\min_{i=1,\dots,n-1} \inf_{x_0\in\partial\Omega} \kappa_i(x_0) := \kappa > -\infty$. Die Distanzfunktion d ist dann ebenfalls zweimal stetig differenzierbar auf $S = \{x \in \Omega : d(x) < \frac{1}{|\kappa|}\}$, falls $\kappa < 0$ und auf $S = \Omega$, falls Σ sogar konvex ist. Für $x \in \Omega$, $x_0 \in \Sigma$, so dass $|x - x_0| = d(x)$ gilt dann, falls d in x zweimal stetig differenzierbar ist

$$\begin{aligned}
\Delta d(x) &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\kappa_i}{1+\kappa_i d(x)} = \ H(x_0) \ - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\kappa_i^2 d}{1+\kappa_i d} \leq \ H(x_0) \qquad \text{falls } x_0 \in \partial E_0, \\
\Delta d(x) &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{-\kappa_i}{1-\kappa_i d(x)} = -H(x_0) - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\kappa_i^2 d}{1-\kappa_i d} \leq -H(x_0) \qquad \text{falls } x_0 \in \partial B.
\end{aligned} \tag{1.11}$$

Dabei bezeichnet $H(x_0)$ die mittlere Krümmung von Σ in x_0. Wir setzen

$$H_{\max} := \max_{x\in\partial E_0} H(x_0) \ .$$

Sei nun $\phi : [0, a) \longrightarrow \mathbb{R}$ glatt, $a > 0$ noch zu wählen. Wir betrachten als Barrierenkandidaten die Funktion $\phi \circ d : S \longrightarrow \mathbb{R}$ und bezeichnen im Folgenden

$$\nabla_i \phi = \frac{\partial}{\partial x^i}(\phi \circ d)(x), \ |\nabla \phi|^2 = \sum_i (\nabla_i \phi)^2 \ .$$

Es gilt dann $\nabla_i \phi = \phi'(d(x))\nabla_i d(x) = \phi' \nabla_i d$, und wir erhalten ein erstes technisches

Lemma 1.3 *Sei d zweimal stetig differenzierbar in x, dann gilt*

$$Q_\epsilon(\phi(d(x))) = \frac{1}{\sqrt{(\phi')^2 + \epsilon^2}} \left[\frac{\epsilon^2}{(\phi')^2 + \epsilon^2} \left(\phi'' - (\phi')^2 - \epsilon^2 \right) + \phi'(\Delta d - \phi') \right] \ . \quad (1.12)$$

Beweis: Wir nutzen zunächst, dass $|\nabla d| = 1$ und sehen

$$|\nabla \phi|^2 = (\phi')^2 |\nabla d|^2 = (\phi')^2 \ \text{ und } \ \nabla_{ij} \phi = \phi'' \nabla_i d \nabla_j d + \phi' \nabla_{ij} d \ .$$

Deswegen ist

$$\begin{aligned} Q_\epsilon(\phi) &= \frac{1}{\sqrt{(\phi')^2 + \epsilon^2}} \left(\delta^{ij} - \frac{(\phi')^2 \nabla_i d \nabla_j d}{(\phi')^2 + \epsilon^2} \right) (\phi'' \nabla_i d \nabla_j d + \phi' \nabla_{ij} d) - \sqrt{(\phi')^2 + \epsilon^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(\phi')^2 + \epsilon^2}} \left(\phi'' + \phi' \Delta d - \frac{(\phi')^2 \phi''}{(\phi')^2 + \epsilon^2} - \frac{(\phi')^3 \nabla_i d \nabla_j d \nabla_{ij} d}{(\phi')^2 + \epsilon^2} \right) - \sqrt{(\phi')^2 + \epsilon^2} \ . \end{aligned}$$

Aber $2\nabla_i d \nabla_j d \nabla_{ij} d = \nabla_i d \nabla_i (|\nabla d|^2) = 0$, weil $|\nabla d|^2 \equiv 1$, also

$$Q_\epsilon(\phi) = \frac{1}{\sqrt{(\phi')^2 + \epsilon^2}} \left[\frac{\phi'' \epsilon^2}{(\phi')^2 + \epsilon^2} + \phi' \Delta d - (\phi')^2 - \epsilon^2 \right] \ ,$$

und die Behauptung folgt durch Umarrangieren.

□

An Stellen, wo d nicht zweimal stetig differenzierbar ist, bleiben unsere späteren Barrieren dennoch wirksam. Dies folgt aus der Theorie der Viskositätslösungen (siehe etwa [CIL92]) oder elementar mit dem Lemma 3.4 und seinem Korollar 3.5 aus dem Anhang dieser Arbeit ab Seite 82.

Gradientenschranken am inneren Gebietsrand, ∂E_0

An einem beliebigen Punkt $x_0 \in \partial E_0$ konstruieren zunächst eine lokale **obere Barriere** für Lösungen des Problems $(\star_\epsilon)$ durch Vergleich mit dem IMCF. Mit Hilfe dieser Barriere werden wir Anfangswerte zulassen können, die von ∂E_0 aus beliebig steil wachsen. Sei dazu $x_0 \in \partial E_0$ fest gewählt. Da ∂E_0 eine innere Kugelbedingung erfüllt, existiert ein $r = r(\partial E_0) > 0$, so dass die Oberfläche einer Kugel $B_r \subseteq E_0$ um einen geeigneten Punkt (o.B.d.A. den Ursprung $0 \in E_0$) die Eigenschaft hat, dass

$\Sigma := \partial B_r(0) \cap \partial E_0 = x_0$ und $\Sigma \backslash x_0 \subset E_0$. Σ expandiert unter dem IMCF glatt und radialsymmetrisch. Man erhält für die Niveauflächenformulierung dieser Expansion nach Multiplikation mit einer Konstanten $c \geq 1$ die Funktion $\phi_1(d(x), t) = \phi_1(d(x))$ mit

$$\phi_1(d) = c(n-1)\log\left(\frac{d}{r}+1\right), \quad \phi_1'(d) = \frac{c(n-1)}{d+r}, \quad \phi_1''(d) = -\frac{c(n-1)}{(d+r)^2},$$

wo $d(x) = \operatorname{dist}(x, \Sigma)$ ist. Seien nun glatte Anfangswerte f gegeben. Man wählt $c = c(f, |\nabla f|) \geq 1$, so dass auf ganz Ω gilt $f \leq \phi_1$. Zum Beispiel genügt die Wahl

$$c := \max\left\{1, \frac{\sup(f)}{(n-1)\log\left(\frac{\sup(f)}{r(\partial E_0)\sup|\nabla f|}+1\right)}\right\}.$$

Wegen $\{x : d(x) = \delta\} = \partial B_{r+\delta}(0)$ folgt aus (1.11), dass $\Delta d = H_{\partial B_{r+d}} = \frac{1}{c}\phi_1'(d)$. Die Gleichung (1.12) zeigt dann

$$Q_\epsilon(\phi_1(d)) = \frac{1}{\sqrt{(\phi')^2+\epsilon^2}}\left[\frac{\epsilon^2}{(\phi')^2+\epsilon^2}\left(-c\frac{n-1}{(d+r)^2} - c^2\frac{(n-1)^2}{(d+r)^2} - \epsilon^2\right) + (1-c)\frac{(n-1)^2}{(d+r)^2}\right].$$

Somit ist $Q_\epsilon(\phi_1(d(x))) < 0 = \frac{\partial}{\partial t}\phi_1(d(x))$ und daher $\phi_1(d)$ eine Superlösung der PDGL aus $(\star_\epsilon)$. Zugleich ist $\phi_1(d(x)) > f(x)$ in ganz Ω und auf $\partial\Omega \times [0,\infty)$ gilt $\phi_1(d(x_0)) = 0 = u(x_0, t)$ und $\phi_1(d(x)) > u(x,t)$ für $x \neq x_0$. Daher folgt aus dem parabolischen Maximumprinzip, dass $u \leq \phi_1$ auf ganz $\Omega \times [0,\infty)$ erhalten bleibt. Durch elementaren Verleich der einseitigen Differenzenquotienten und weil u zu allen Zeiten konstant auf ∂E_0 verschwindet, erhält man daraus im Sinne des limes superior die Aussage $\frac{\partial}{\partial \nu}u(x_0) \leq \phi_1'(0) \leq c(n-1)/r \leq c(n-1)|\kappa|$. Da x_0 beliebig und die Konstruktion von x_0 unabhängig war, erhält man diese Abschätzung auf ganz ∂E_0.

Die folgende **alternative obere Barriere** entlang ∂E_0 liefert für genügend großen Abstand $\operatorname{dist}(\partial E_0, \partial B)$ eine bessere Abschätzung an $\frac{\partial}{\partial \nu}u$ (siehe das Ende der Diskussion im Anschluss an Lemma 1.4). Sei dazu $\Sigma = \partial E_0$ und $a \leq \operatorname{dist}(\partial E_0, \partial B)$. Betrachte $\phi_2(d(x), t) = \phi_2(d(x))$, nun mit $d(x) = \operatorname{dist}(x, \partial E_0)$,

$$\phi_2(d) = c\log\frac{a}{a-d}, \quad \phi_2'(d) = \frac{c}{a-d}, \quad \phi_2''(d) = \frac{c}{(a-d)^2}, \quad d \in [0,a). \tag{1.13}$$

Offenbar ist $\phi_2 = u \equiv 0$ auf ∂E_0, und man hat $u < \phi \longrightarrow \infty$ für $d \longrightarrow a$. Wegen (1.12) ist

$$Q_\epsilon(\phi_2) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon^2+(\phi_2')^2}}\left[\frac{\epsilon^2}{\epsilon^2+(\phi_2')^2}\left(\frac{c}{(a-d)^2} - \frac{c^2}{(a-d)^2} - \epsilon^2\right) + \left(\Delta d - \frac{c}{a-d}\right)\frac{c}{a-d}\right].$$

Multiplikation der eckigen Klammer mit $(\epsilon^2 + (\phi')^2)(a-d)^4$ zeigt, dass $Q_\epsilon(\phi_2) \leq 0$ genau dann, wenn

$$-\epsilon^4(a-d)^4 + \epsilon^2 c(a-d)^2\left(1 - 2c + (a-d)\Delta d\right) + c^3\left((a-d)\Delta d - c\right) \leq 0.$$

Die Abschätzungen (1.11) an Δd liefern dazu die hinreichende Bedingung

$$-\epsilon^4(a-d)^4+\epsilon^2(a-d)^2(1-2c+aH_{\max})+c^3(aH_{\max}-c)\leq 0\ .$$

Wählt man $c=aH_{\max}$, $H_{\max}$ die maximale mittlere Krümmung von ∂E_0, so reicht

$$-\epsilon^2(a-d)^2+1-aH_{\max}\leq 0 \quad \text{d.h.} \quad 1\leq aH_{\max}\ .$$

Um dies zu erreichen muss $a\geq\frac{1}{H_{\max}}$ gewählt werden können, also braucht man $\operatorname{dist}(\partial E_0,\partial B)\geq\frac{1}{H_{\max}}$. Damit ist erreicht, dass $Q_\epsilon(\phi_2(d(x)))\leq 0=\frac{\partial}{\partial t}\phi_2(d(x))$, mithin, dass ϕ_2 eine Superlösung für die PDGL aus $(\star_\epsilon)$ ist. Für Anfangswerte f mit $f\leq\phi_2$ auf $\{x\in\Omega: d(x)\leq\frac{1}{H_{\max}}\}$ gilt daher wieder die Abschätzung $u(x,0)\leq\phi_2$ auf dem Definitionsbereich von ϕ_2, wobei Gleichheit nur auf ∂E_0 herrscht. Ersetzt man das übliche parabolische Maximumprinzip durch Lemma 3.4, so sieht man, dass diese Abschätzung in identischer Form für alle Zeiten $t\geq 0$ erhalten ist. Der Vergleich der entsprechenden Differenzenquotienten liefert also im Sinne des limes superior, dass $\frac{\partial}{\partial\nu}u\leq\phi_2'(0)=\frac{c}{a}=H_{\max}$ auf ∂E_0 ist.

Die **untere Barriere** am inneren Gebietsrand übernehmen wir von [HI01]. Der Ansatz lautet für $c>0$, $\phi_3(d(x),t)=\phi_3(d(x))$, wo wieder $d(x)=\operatorname{dist}(x,\partial E_0)$ bezeichnet,

$$\phi_3(d)=\frac{\epsilon}{c}\left(e^{-cd}-1\right),\quad \phi_3'(d)=-\epsilon e^{-cd},\quad \phi_3''(d)=c\epsilon e^{-cd}\ , \tag{1.14}$$

so dass ϕ'' für hinreichend großes c die übrigen Terme in

$$Q_\epsilon(\phi_3)=\frac{1}{\sqrt{\epsilon^2+(\phi_3')^2}}\left[\frac{\epsilon^2}{\epsilon^2+(\phi_3')^2}\left(c\epsilon e^{-cd}-\epsilon^2e^{-2cd}-\epsilon^2\right)-\left(\Delta d+\epsilon e^{-cd}\right)\epsilon e^{-cd}\right]$$

dominiert. Man erhält die Sublösungseigenschaft für $\phi_3(d)$ an regulären Stellen der Distanzfunktion, namentlich $Q_\epsilon(\phi_3)\geq 0=\frac{\partial}{\partial t}\phi_3$, falls der Term in der eckigen Klammer nichtnegativ ist. Dies gilt genau dann, wenn

$$c\geq\epsilon e^{cd}\left(1+e^{-2cd}\right)^2+\Delta d\left(1+e^{-2cd}\right)\ .$$

Daher es reicht wegen (1.11) für $\epsilon\leq\epsilon(\Omega)=e^{-cd_{\max}}$, wo $d_{\max}=\max_{x\in\partial E_0}\operatorname{dist}(x,\partial B)$, dass $c\geq 4+2H_{\max}$. Wir erhalten mit Korollar 3.5, dass für solches $\epsilon\leq\epsilon(d_{\max})$ die Funktion $\phi_3(d(x))$ auf ganz Ω eine geeignete Sublösung ist. Glatt ist $\phi_3(d(x))$ auf $\{x\in\Omega: d(x)<\frac{1}{|\kappa|}\}$. Wählt man die Anfangswerte f nichtnegativ, so bringen diese Eigenschaften den Erhalt der Abschätzung $u(x,t)\geq\phi_3(d(x))$ auf ganz $\Omega\times[0,\infty)$, so dass durch Vergleich der Differenzenquotienten im Sinne des limes inferior $\frac{\partial}{\partial\nu}u\geq\phi_3'(0)=-\epsilon\geq-e^{-(4+2H_{\max})d_{\max}}$ entlang ∂E_0 gilt. Weil jede glatte Anfangswertefunktion $f\geq 0$ auch die Voraussetzungen für mindestens eine der beiden oberen Barrieren erfüllt, existieren die betrachteten Limiten dann im eigentlichen Sinne.

Gradientenschranken am äußeren Gebietsrand, ∂B

Sei zunächst $B = B_R(0)$. Für die **untere Barriere** setzt man $\phi_4(d(x),t) = \phi_4(d(x))$ mit $d(x) = \mathrm{dist}(x, \partial B_R(0))$ als

$$\phi_4(d) = s(n-1)\log\frac{R-d}{R-d_0}, \quad \phi_4'(d) = -\frac{s(n-1)}{R-d}, \quad \phi_4''(d) = -\frac{s(n-1)}{(R-d)^2}\ , \tag{1.15}$$

an, wo $d_0 = \mathrm{dist}(\partial B_R, \partial E_0)$, so dass $\phi_4 \leq 0$ auf ganz ∂E_0. Weil Distanzsphären zu ∂B_R wieder Sphären sind (vergleiche ϕ_1), ist $\Delta d = -\frac{n-1}{R-d}$. Es gilt mit (1.12)

$$\begin{aligned} Q_\epsilon(\phi_4(d)) \ &= \ \frac{1}{\sqrt{\epsilon^2+(\phi_4')^2}}\Bigg[\frac{\epsilon^2}{\epsilon^2+(\phi_4')^2}\left(-\frac{s(n-1)}{(R-d)^2} - \frac{s^2(n-1)^2}{(R-d)^2} - \epsilon^2\right) \\ &\quad - \left(-\frac{n-1}{R-d} + \frac{s(n-1)}{R-d}\right)\frac{s(n-1)}{R-d}\Bigg] \\ &= \ \frac{1}{(\epsilon^2+(\phi_4')^2)^{3/2}(R-d)^4}\Big[-\epsilon^4(R-d)^4 \\ &- \ \epsilon^2(R-d)^2 s(n-1)\big(1+2s(n-1)-(n-1)\big) + (n-1)^4(s^3-s^4)\Big]\ , \end{aligned} \tag{1.16}$$

so dass die Ungleichung für $s \geq 1$ offenbar nicht zu erfüllen ist. Die notwendige und hinreichende Bedingung für $Q_\epsilon(\phi_4) > 0$ ist, dass der letzte Term in eckigen Klammern positiv ist. Dazu reicht es wiederum wegen des mittleren Summanden, diesen Term für $s \geq 1/2$ zu betrachten, und unter dieser Bedingung reicht die Betrachtung bei $d = 0$ aus, so dass letztlich

$$-\epsilon^4 R^4 - \epsilon^2 R^2 s(n-1)\big(1+2s(n-1)-(n-1)\big) + (n-1)^4(s^3-s^4) \ > \ 0$$

genügt. Fassen wir dies als quadratische Ungleichung in der Variablen $\epsilon^2 R^2$ auf, so sehen wir, dass die Bedingung für jedes feste $s < 1$ mit $0 < \epsilon < \epsilon_0(R,s,n)$,

$$\epsilon_0 = \frac{1}{R}\left(\frac{s(n-1)(1+(2s-1)(n-1)) - \sqrt{(s(n-1)(1+(2s-1)(n-1)))^2 + 4(n-1)^4(s^3-s^4)}}{-2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.17}$$

erfüllt ist. Falls nun B nur noch strikt konvex aber nicht mehr notwendig selbst eine Kugel ist, so können wir ϕ_4 wie folgt trotzdem verwenden. Sei

$$R := R(B) = \min\left\{R \in \mathbb{R} \ \middle|\ \forall\ x \in \partial B\ \exists\ y \in \mathbb{R}^n\ :\ \Omega \subseteq B_R(y), x \in \partial B \cap \partial B_R(y)\right\}\ .$$

Falls ∂B von der Klasse C^2 ist, so ist $R = R(B) := (\min_{x\in\partial B}\min_i \kappa_i(x))^{-1}$. Für x_0 in ∂B ist dann mit dem $y \in \mathbb{R}^n$ aus der obigen Definition von $R(B)$ die Sphäre $B_R(y) =: \Sigma$ die gesuchte Vergleichsfläche. $\phi_4(d(x))$, $d(x) = \mathrm{dist}(x,\Sigma)$ ist dann für $s < 1$ und $\epsilon < \epsilon_0(S,n,R)$ eine Sublösung der PDGL aus $(\star_\epsilon)$. Wählt man $d_0 = \mathrm{dist}(\partial B_R(y), \partial E_0)$, so gilt zudem $\phi_4 \leq 0$ auf ∂E_0.

Da im Wesentlichen keine anderen geeigneten Sublösungen der PDGL aus $(\star_\epsilon)$ bekannt sind, wird ϕ_4 nur dann von der Sublösung zur Barriere für Lösungen von $(\star_\epsilon)$, wenn wir die Wahl der Randwerte und der Anfangswerte nach ϕ_4 richten. Namentlich werden wir entweder ein $y_0 \in \mathbb{R}^n$ fixieren, $\phi_4 = \phi_4(\mathrm{dist}(x, \partial B_R(y_0))$ betrachten und die Randwerte durch $g = \phi_4$ auf ∂B festsetzen, oder wir werden die Randwerte konstant als $g \equiv c(\Omega) = s(n-1)\log(\frac{R(B)}{R(B)-d_0})$ festsetzen und auf die beschriebene Weise ϕ_4 als lokale Barriere verwenden. In beiden Fällen müssen wir von den Anfangswerten verlangen, dass sie die Sublösungen ϕ_4 als Barrieren akzeptieren, also $f(x) \geq s(n-1)\frac{R-\mathrm{dist}(x,\partial B)}{R-d_0}$ auf ganz Ω, falls $g = c(\Omega)$ beziehungsweise $f(x) \geq \phi_4(\mathrm{dist}(x, \partial B_R(y_0)))$, falls $g = \phi_4(\mathrm{dist}(x, \partial B_R(y_0)))$. Unter diesen Voraussetzungen gilt wieder wegen des Maximumprinzips und eines Vergleichs von einseitigen Differenzenquotienten im Sinne des limes superior, dass $\frac{\partial}{\partial \nu} u_\epsilon \leq |\phi_4'(0)| = s\frac{n-1}{R}$.

In Raum und Zeit konstante Funktionen sind offenbar Superlösungen für die PDGL aus $(\star_\epsilon)$. Falls daher die gewählten Anfangswerte f ihr Maximum auf ∂B annehmen und $f(x) \equiv g(x,t) \equiv c(\Omega)$ auf Rand B gilt, so ist $\phi_5(d(x), t) \equiv c(\Omega)$ bereits eine **obere Barriere**. Daher folgt mit dem Maximumprinzip und durch Vergleich der Differenzenquotienten $\frac{\partial}{\partial \nu} u(x,t) \geq 0$ für beliebige $(x,t) \in (\partial B \times [0,\infty))$. Da für obere Barrieren aus der Konstruktion von ϕ_1 bekannt ist, dass eine äußere Kugelbedingung an den Gebietsrand ausreicht, können wir aber wegen der Konvexität von ∂B sowohl auf die Bedingung verzichten, dass f sein Maximum auf ∂B annimmt, als auch die Einschränkung der räumlichen Konstantheit $f(x) \equiv g(x) \equiv c(\Omega)$ auf ∂B wegfallen lassen. Die Details dieser Konstuktion sind mühsam, aber völlig analog zur Konstruktion von ϕ_1 und sollen daher hier weggelassen werden. Der einzige Unterschied besteht darin, dass bei fest gewähltem endlichem Radius r der Vergleichsfläche $\Sigma = \partial B_r(y)$ die Konstante c zusätzlich von den zweiten Ableitungen von $f(x) = g(x)$ tangential an ∂B abhängt. In jeden Fall erhalten wir auf die übliche Weise, dass $\frac{\partial}{\partial \nu} u \leq c(\partial B, \sup_\Omega f, \sup_\Omega |\nabla f|, \sup_{\partial B} |D^2 f|)$.

Wir fassen die Ergebnisse am inneren Gebietsrand wie folgt zusammen:

Lemma 1.4 *Sei u_ϵ glatte Lösung von $(\star_\epsilon)$. Dabei sei $\Omega = B \backslash E_0$ und wir bezeichnen $d_{\max} := \max_{x \in \partial E_0} \mathrm{dist}(x, \partial B)$ sowie $H_{\max} := \max_{x \in \partial E_0} H(x)$, H die mittlere Krümmung von ∂E_0. Ferner bezeichne κ den kleinsten Wert, der von einer Hauptkrümmung von ∂E_0 angenommen wird.*

i) Falls dann ∂E_0 von der Klasse C^2 und $\epsilon \leq e^{-(4+2H_{\max})d_{\max}}$ ist, und falls für die Anfangswerte f gilt, dass f glatt und $f(x) \geq \frac{\epsilon}{4+2H_{\max}}(e^{-(4+2H_{\max})\,\mathrm{dist}(x,\partial E_0)} - 1)$ ist, so existiert die einseitige Ableitung von u_ϵ bezüglich der äußeren Einheitsnormalen von E_0 auf ganz ∂E_0 und es gilt dort

$$-\epsilon \;\leq\; \frac{\partial}{\partial \nu} u_\epsilon \;\leq\; c(n-1)|\kappa| \;, \quad wo$$

$$c = \max\left\{1, \frac{\sup(f)_+}{(n-1)\log\left(\frac{\sup(f)_+}{\sup|\nabla f|}|\kappa|+1\right)}\right\} .$$

ii) Falls zusätzlich gilt, dass $f(x) \leq |\log(1 - H_{\max}\operatorname{dist}(x, \partial E_0)|$*, wo immer die letztere Funktion definiert ist, so gilt auf ganz* ∂E_0 *sogar*

$$-\epsilon \;\leq\; \frac{\partial}{\partial\nu}u_\epsilon \;\leq\; H_{\max} .$$

□

Diskussion des Lemmas Das Interesse dieser Arbeit liegt in der Nutzung von Lösungen zu Problemen der Form $(\star_\epsilon)$, um damit schwache Lösungen des Problems $(\star)$ auf $\mathbb{R}^n\backslash E_0$ zu finden. Da an diesen schwachen Lösungen die Niveauflächen interessieren und als Fluss gedeutet werden sollen, wird jedes begründete Interesse letztlich ausschließlich bei nichtnegativen Lösungen liegen, so dass die Anforderung an die Anfangswerte $\tilde{f} \geq 0$ für $(\star)$ natürlich und sinnvoll ist. Die zur Approximation später konstruierten Anfangswerte $f = f_\epsilon$ werden ebenfalls nichtnegativ sein und daher automatisch die Voraussetzungen des Lemmas erfüllen. Bei der Bedingung an ϵ interessiert in diesem Zusammenhang ausschließlich die offenbar garantierte Tatsache, dass für beliebige behandelte Gebiete Ω ein $\epsilon_0(\Omega)$ existiert, so dass alle $\epsilon \leq \epsilon_0$ die Voraussetzungen des Lemmas erfüllt sind. Keine der oben gemachten Voraussetzungen stellt daher irgendeine Einschränkung für die Lösbarkeit des Problems $(\star)$ auf $\mathbb{R}^n\backslash E_0$ dar.

Eine etwas andere Situation besteht, wenn man eine schwache Lösung von $(\star)$ auf einem endlichen Gebiet $\Omega = B\backslash E_0$ numerisch näherungsweise durch Lösungen von $(\star_\epsilon)$ auf dem selben Gebiet errechnen will. Die Bedingung $\epsilon \leq e^{-(4+2H_{\max})d_{\max}}$ stellt dann eine Einschränkung für $d_{\max}$ dar, weil für zu große maximale Abstände von ∂B und ∂E_0 möglicherweise ϵ in die Nähe der Maschinengenauigkeit rückt, so dass der Nenner des Divergenzterms aus der PDGL von $(\star_\epsilon)$ nicht mehr korrekt von 0 unterschieden wird. Nun wird man eine solche Berechnung nur auf Gebieten und mit Anfangsdaten durchführen, für die auch das folgende Lemma Gradientenschranken am äußeren Gebietsrand garantiert. Aus den vorangegangenen Überlegungen folgt ebenso, dass die der betrachteten Bedingung zugrundeliegende Barriere ϕ_3 nicht bis zum äußeren Gebietsrand, sondern nur bis dahin benötigt wird, wo die Barriere am äußeren Gebietsrand übernimmt. Es ist aber dennoch nicht möglich, ϵ rein in Abhängigkeit von ∂E_0 zu wählen, wie im folgenden Lemma gezeigt wird.

Wir werden im Anschluss an Korollar 2.12 begründen, warum die Abschätzung $|\frac{\partial}{\partial\nu}u| \leq H_{\max}$ aus dem Lemma auf den schwachen Lösungen von $(\star)$ nach Grenzübergang $\epsilon \longrightarrow 0$ scharf ist. Es ist also keine bessere, von ϵ unabhängige globale obere Abschätzung an $|\frac{\partial}{\partial\nu}u_\epsilon|$ entlang ∂E_0 richtig.

Wir trennen bei der Formulierung des Lemmas über die Gradientenschranken am äußeren Gebietsrand zwischen den beiden in der vorangegangenen Diskussion schon

unterschiedenen Situationen. Teil *i)* ist auf die Anwendung im Existenzbeweis für schwache Lösungen von $(\star)$ auf $\mathbb{R}^n \backslash E_0$ gemünzt, Teil *ii)* geht stärker auf das ein, was für eine numerische Umsetzung wünschenswert scheint.

Lemma 1.5 *Sei u_ϵ glatte Lösung von $(\star_\epsilon)$. i) Sei $\Omega = B \backslash E_0$ mit einem konvexen Gebiet B ist. Wir bezeichnen*

$$R := R(B) = \min \left\{ R \in \mathbb{R} \;\middle|\; \forall\, x \in \partial B \;\exists\, y \in \mathbb{R}^n \;:\; \Omega \subseteq B_R(y), x \in \partial B \cap \partial B_R(y) \right\} .$$

Seien für festes $s < 1$ die Randwerte $g(x) \equiv c(\Omega) = s(n-1)\log(\frac{R(B)}{R(B)-\mathrm{dist}(\partial E_0, \partial B)})$ und gelte für die Anfangswerte $f = g$ auf ∂B sowie $f \geq s(n-1)\log(\frac{R(B)-\mathrm{dist}(x,\partial B)}{R(B)-\mathrm{dist}(\partial E_0,\partial B)})$. Dann existiert die einseitige Ableitung $\frac{\partial}{\partial \nu} u_\epsilon$ bezüglich der äußeren Normalen von B wie zu Beginn von Abschnitt 1.2 erklärt auf ganz ∂B, falls $\epsilon < \epsilon_0(s, n, R)$ mit dem ϵ_0 aus (1.17). Es gilt dann

$$c(\sup_\Omega f, \sup_\Omega |\nabla f|, \sup_{\partial B} |D^2 f|, \partial B) \;\leq\; \frac{\partial}{\partial \nu} u_\epsilon \;\leq\; s\,\frac{(n-1)}{R(B)} \;.$$

ii) Sei B ein beschränktes Gebiet, das eine äußere Kugelbedingung erfüllt, zum Beispiel ein Quader. Weiter sei y_0 der Mittelpunkt der Kugel von minimalem Radius r mit $E_0 \subseteq B_r(y_0)$, und R so groß, dass $B \subseteq B_R(y_0)$. Für ein festes $s < 1$ setze

$$\phi(x) = s(n-1)\log\frac{R - \mathrm{dist}(x, \partial B_R(y_0))}{r} \qquad x \in \Omega$$

Falls dann für die Randwerte $g(x) = \phi(x)$ auf ∂B und für die Anfangswerte $f(x) \geq \phi(x)$ und $f(x) = g(x)$ auf ∂B gilt, so existiert die einseitige Ableitung $\frac{\partial}{\partial \nu} u_\epsilon$ auf ∂B bezüglich der äußeren Normalen von B wie zu Beginn von Abschnitt 1.2 erklärt, wo immer diese Normale existiert und in jede auswärts zeigende Richtung sonst, falls $\epsilon < \epsilon_0(s, n, R)$ mit dem ϵ_0 aus (1.17). Es gilt dann

$$c(\sup_\Omega f, \sup_\Omega |\nabla f|, \sup_{\partial B} |D^2 f|, \partial B) \;\leq\; \frac{\partial}{\partial \nu} u_\epsilon \;\leq\; s\,\frac{(n-1)}{r} \;.$$

Zur Erleichterung des Umgangs mit den beiden technischen Lemmata führen wir die folgende Sprechweise ein.

Definition 1.6 *Wir sagen, $(\star_\epsilon)$ erfülle die Gradientenbedingung für konstante äußere Randwerte, falls die Daten B, E_0, ϵ, f und g die Bedingungen von i) aus Lemma 1.4 und die Bedinungen von Teil i) aus Lemma 1.5 erfüllen. Wir sagen, $(\star_\epsilon)$ erfülle eine IMCF-sphärische Gradientenbedingung, wenn statt der Bedingung für Teil i) die Bedingungen für Teil ii) von Lemma 1.5 erfüllt sind.*

Diskussion des Lemmas: Zunächst muss an dieser Stelle darauf hingewiesen werden, dass die technisch und detailreich wirkenden Anforderungen an die Anfangs- und Randwerte in Lemma 1.5 wesentlicher Natur sind und nicht etwa auf ungünstiger Wahl der Barriere beruhen. Wir geben in Proposition 1.15 einen Nichtexistenzsatz, der besagt, dass in Teil i) die Lösbarkeit des Problems im Allgemeinen verloren geht, wenn man $s \geq 1$ zulässt oder auch nur punktweise die Bedingung $g \leq (n-1)\log(\ldots)$ verletzt. Ein analoges Resultat gilt für die Randwerte in ii).

Nun ist aber wie bereits in der Diskussion zum letzten Lemma gesagt, die Aufgabe der Lösungen von $(\star_\epsilon)$ lediglich die Approximation schwacher Lösungen von $(\star)$. Will man $(\star)$ schwach auf $\mathbb{R}^n \backslash E_0$ lösen, so stellt sich also nicht die Frage, ob die Probleme $(\star_\epsilon)$ für sehr allgemeine Daten f, g, B, ϵ lösbar sind. Auch in Lemma 1.5 ist wegen (1.17) klar, dass für beliebig große Gebiete B ein ϵ_0 existiert, so dass Lösungen für passende Daten f, g existieren. Die entscheidende Frage ist, ob man aus sehr allgemeinen Anfangswerten $\tilde{f}$ für $(\star)$ auf geeignet gewählten Gebieten B Rand- und Anfangswerte $g(B), f(B)$ konstruieren *kann*, so dass zum Beispiel die Gradientenbedingung für konstante äußere Randwerte erfüllt wird. Die Antwort auf diese Frage lautet ja und die Konstruktion geschieht im Beweis des Existenzsatzes für schwache Lösungen, Theorem 2.9. Die Lösbarkeit für alle sinnvollen denkbaren Anfangsdaten f ist daher gegeben, das heißt, wie im erwähnten Existenzsatz gezeigt, für beliebige lipschitzstetige nichtnegative Anfangswerte mit $f \equiv 0$ auf ∂E_0.

Im Fall beschränkter Gebiete folgt aus der Betrachtung der Energie, die den schwachen Lösungsbegriff in [HI01] definiert (siehe dort die Diskussion zur Eindeutigkeit), dass schwache Lösungen des IMCF auf beschränkten Gebieten $B\backslash E_0$ mit konstanten Randwerten c, falls sie existieren, bis zu ihrer Niveaufläche zum Niveau c genau den schwachen Lösungen auf unbeschränktem Gebiet $\mathbb{R}^n \backslash E_0$ entsprechen und auf dem Rest des Gebiets B konstant den Wert c annehmen. Zudem ist wegen des Vermeidungsprinzips für den IMCF klar, dass die schwache Lösung von $(\star)$ zu einer gegebenen Fläche ∂E_0 stets größer oder gleich der klassischen Lösung von $(\star)$ für die kleinste, E_0 umschließende Sphäre sein muss. Will man daher die schwache Lösung des IMCF für eine Anfangsfläche E_0 bis zu einer Flusszeit (hier: einem Niveau) z_0 haben, so kann dies stets geschehen, indem man nach einer statischen Lösung von $(\star)$ auf dem Gebiet $B_R(y_0)\backslash E_0$ sucht, wo $R = re^{z/(s(n-1))}$ und wo y_0 der Umsphärenmittelpunkt von E_0 und r der Radius dieser Umsphäre ist. Dabei ist s das s aus dem letzten Lemma und muss als $0 < s < 1$ gewählt werden. Selbstverständlich ist auch jede bequemer zu bestimmende Sphäre $B_r(y_0)$ für beliebiges y_0 geeignet, für die $E_0 \subseteq B_r(y_0)$ gilt. Generell gilt für die Suche nach stationären Lösungen, dass Freiheit von den Auflagen an die Anfangswerte durch Gebietsvergrößerung erkauft werden kann.

Besteht Interesse an einer numerischen Lösung von $(\star_\epsilon)$, so ist wegen der später gezeigten gleichmäßigen Konvergenz beziehungsweise sogar der Konvergenz der Niveauflächen von Lösungen von $(\star_\epsilon)$ gegen die von Lösungen von $(\star)$ das selbe Verhalten im Rahmen gewisser Toleranzen zu erwarten. Hat man keine Vorinformationen

über die stationäre schwache Lösung von $(\star)$ auf einem beschränkten Gebiet, so wird man genau die Anfangswerte wählen wollen, die in Lemma 2.12 vorgeschlagen werden, und für die sehr gute Konvergenzeigenschaften im Rest der Arbeit bewiesen werden. Da exakte Lösungen für diese Anfangswerte in Problem $(\star)$ monoton wachsend sind, bildet der Graph einer exakten schwachen Lösung u zu jeder festen Zeit t_0 eine geeignete globale Barriere. Bildet sich in einer Umgebung von Stellen aus ∂B daher ein Gebiet G mit $u =$const aus, so kann fortan statt auf $B\backslash E_0$ auf $(B\backslash G)\backslash E_0$ gelöst werden, wobei $u(x,t_0)$ geeignete Anfangswerte sind, und sich selbst als Barriere dienen. In näherungsweiser Rechnung für Problem $(\star_\epsilon)$ wird man dieses Kriterium mit geeigneten Toleranzen versehen zur Implementation eines sich autoadaptiv verkleinernden Gitters benutzen können.

Hat man bereits Vorinformationen, etwa in Form einer groben Näherung an eine Lösung oder in Form des Ergebnisses aus einer früheren näherungsweisen Berechnung einer Lösung $\hat{u}$ auf einem Gebiet $B\backslash E_0$ des IMCF, so ist die Funktion $u_{\text{start}} = \min(\hat{u}_+, \min_{\partial B} \hat{u})$ geeignete Anfangswertefunktion für $(\star_\epsilon)$ auf jedem Gebiet $\tilde{B}\backslash E_0$, wo $B \subseteq \tilde{B}$ und wo u_{start} die Bedingungen aus dem zweiten Teil des Lemmas erfüllt.

Wegen der besseren Zitierbarkeit fassen wir den analytischen Ertrag der letzten beiden Lemmata nochmals in der Form zusammen, die wir später brauchen.

Lemma 1.7 *Sei u_ϵ glatte Lösung von $(\star_\epsilon)$, wo die Daten Ω, f, g und ϵ die Gradientenbedingung für konstante äußere Randwerte oder die IMCF-sphärische Gradientenbedingung aus Definition 1.6 erfüllen, und bezeichne $H_{\max} := \max_{x\in\partial E_0} H_{\partial E_0}$.*

$$|\nabla u_\epsilon| \leq \tilde{c}(n,\Omega,f) \text{ auf } \partial\Omega$$

Falls Ω zusätzlich so groß ist, dass $\operatorname{dist}(\partial E_0, \partial B) \geq \frac{1}{H_{\max}}$ *und falls* $f(x) \leq -\log(1 - H_{\max} d(x))$ *für* $d(x) < \frac{1}{H_{\max}}$*, so gilt*

$$|\frac{\partial}{\partial\nu}| u \leq H_{\max} \quad \text{auf } \partial E_0 \ .$$

□

Korollar 1.8 *Sei u_ϵ eine glatte Lösung von $(\star_\epsilon)$, wo das Problem $(\star_\epsilon)$ eine der Gradientenbedingungen erfüllt. Dann gilt*

$$\forall x \in \Omega,\ \forall t \in [0,\infty), \quad u_\epsilon(x,t) \geq -\frac{\epsilon}{4 + 2H_{\max}} \ .$$

Beweis: Wir benutzen die unteren Barrieren ϕ_3 von Seite 20 und ϕ_4 von Seite 21. Es ist $u_\epsilon \geq \max\{\phi_3, \phi_4\} \geq \phi_3 \geq \frac{\epsilon}{c}(e^{-cd} - 1)$, also folgt die Behauptung, weil $c \geq 4 + 2H_{\max}$ gewählt wurde.

□

Bemerkung: Unter den Voraussetzungen je einer der Gradientenbedingungen erhält man aus den jetzt bekannten Abschätzungen die Existenz glatter Lösungen von $(\star_\epsilon)$. Da die Abschätzungen aus dem nächsten Abschnitt diese Existenz auch bei Anfangswerten $f \in C^{0,1}(\bar{\Omega})$ ermöglichen, verschieben wir die Formulierung des Resultats auf Proposition 1.14 auf Seite 34. Wo im Folgenden nicht gesondert auf die Randwerte auf ∂B eingegangen wird oder im Singular von der Gradientenbedingung gesprochen wird, sind stets konstante äußere Randwerte wie in Teil $i)$ von Lemma 1.5 gemeint.

1.3 Der Dimensionstrick

Der folgende Trick, der bei [ES91] und [CGG91] entwickelt und auch von [HI01] benutzt wird, ermöglicht es uns, aus den Lösungen der Familie von Gleichungen $(\star_\epsilon)$ eine Familie von translatierenden, klassischen Lösungen zu verschiedenen Anfangs- und Randwerten der einen Gleichung $(\star)$ zu gewinnen. Sei dazu u_ϵ eine glatte Lösung von $(\star_\epsilon)$ und

$$U_\epsilon : \Omega \times \mathbb{R} \times [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R} : (x,z,t) \longrightarrow u_\epsilon(x,t) - \epsilon z \ . \tag{1.18}$$

Es ist $|DU_\epsilon| := |\nabla_{x,z} U_\epsilon| = \sqrt{|\nabla u_\epsilon|^2 + \epsilon^2}$, mithin $|DU| \neq 0$. Die Niveaumenge mit Niveau γ zur Zeit t, $N^\gamma_{\epsilon,t} := \{U_\epsilon(\cdot,\cdot,t) = \gamma\}$ ist also für festes t eine reguläre, n-dimensionale Hyperfläche im $\mathbb{R}^{n+1}$ und ist der translatierte Graph der Funktion $\frac{u_\epsilon}{\epsilon}$, präziser

$$N^\gamma_{\epsilon,t} = \left\{ z = \frac{u_\epsilon(\cdot,t)}{\epsilon} - \frac{\gamma}{\epsilon} \right\} = \left\{ (\text{graph}\, \frac{u_\epsilon}{\epsilon}) - \frac{\gamma}{\epsilon} \right\} \ . \tag{1.19}$$

Wie man sofort nachprüft, erfüllt U_ϵ auf $\Omega \times \mathbb{R}$ nun die PDGL aus Problem $(\star)$ im klassischen Sinne, genauer das Anfangs- und Randwertproblem

$(\star\star_\epsilon)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} U_\epsilon \ = \operatorname{div}_{x,z} \dfrac{DU_\epsilon}{|DU_\epsilon|} - |DU_\epsilon| & \text{auf } \Omega \times \mathbb{R} \times (0,\infty) \ , \\ U_\epsilon = g_\epsilon(z) := -\epsilon z & \text{auf } \partial E_0 \times \mathbb{R} \times [0,\infty) \ , \\ U_\epsilon = g_\epsilon(z) := c(\Omega) - \epsilon z & \text{auf } \partial B \times \mathbb{R} \times [0,\infty) \ , \\ U_\epsilon = \tilde{f}_\epsilon(x,z) := f(x) - \epsilon z & \text{auf } \Omega \times \mathbb{R} \times \{0\} \ . \end{cases}$$

Bemerkung: Falls u_{ϵ_i} glatte Lösungen einer Folge von Problemen $(\star_{\epsilon_i})$, $\epsilon_i \longrightarrow 0$ ist und U_{ϵ_i} wie in (1.18) sind, so gilt: Falls $u_{\epsilon_i} \longrightarrow u$ lokal gleichmäßig für eine passende Grenzfunktion u, so auch $U_{\epsilon_i} \longrightarrow U$ lokal gleichmäßig auf $\Omega \times \mathbb{R} \times (0,\infty)$ mit $U(x,z,t) = u(x,t)$. Offenbar hindert es die Konstruktion nicht, wenn man für u_ϵ von äußeren Randwerten $c(\Omega)$ auf die Randwerte $g(x)$ aus dem zweiten Teil von Lemma 1.5 übergeht.

1.4 Weitere Regularitätseigenschaften

1.4.1 Geometrische Uminterpretation

Für festes $\epsilon > 0$ sei $u = u_\epsilon$ eine glatte Lösung von $(\star_\epsilon)$ und $U = U_\epsilon$ wie oben in (1.18) definiert. Mit e_z bezeichnen wir im Folgenden das Standard-Basisvektorfeld des $\mathbb{R}^{n+1}$ in Richtung der $z-$Variablen aus (1.18). Die Funktion U können wir nutzen, um geometrische Größen ihrer Niveauflächen, der translatierten Graphen von $\frac{u_\epsilon}{\epsilon}$ zu studieren. Insbesondere erhalten wir so eine in ϵ gleichmäßige, zeitlich innere Schranke an die mittleren Krümmungen dieser Graphen, und daraus wiederum eine entsprechende Abschätzung für $\dot{u}_\epsilon$. Wir fixieren dazu ein γ_0 und betrachten $N_t = N_{\epsilon,t}^{\gamma_0}$ aus (1.19). Sei $F = F_t = F_{\epsilon,t}^{\gamma_0}$ eine Familie von Parametrisierungen von N_t. Da F in der Zeit t der Niveaumenge N_t von U folgt, ist

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} U(F_t(x), t) = DU \cdot \frac{dF_t}{dt} + \frac{\partial}{\partial t} U \ ,$$

also

$$\frac{\partial}{\partial t} U = -|DU| \frac{DU}{|DU|} \cdot \frac{dF}{dt} \ .$$

Notiert man mit $\nu = -\frac{DU}{|DU|}$ die obere Einheitsnormale an N_t, so gehorchen insbesondere alle ihre Parametrisierungen F der geometrischen Evolutionsgleichung

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} F_t \right)^\perp = -\nu f \tag{1.20}$$

genau dann, wenn

$$\frac{\partial}{\partial t} U = -|DU| f \ .$$

In eben dieser Situation befinden wir uns, weil die PDGL aus $(\star\star_\epsilon)$ äquivalent ist zu

$$\frac{\partial}{\partial t} U = -|DU| \left(\frac{1}{|DU|} \mathrm{div}_{x,z} \frac{-DU}{|DU|} + 1 \right) \ .$$

Weil die $N_{\epsilon,t}^\gamma$ für verschiedene Werte von γ alles Translate von $\mathrm{graph}(\frac{u_\epsilon}{\epsilon})$ sind, kann man nun die Geschwindigkeit

$$f = \frac{1}{|DU|} \mathrm{div}_{x,z} \frac{-DU}{|DU|} + 1$$

der Evolution mit geometrischen Größen dieses Graphen beschreiben. Man hat

$$\begin{aligned} \nu \ := \ \nu_\epsilon \ &= \ \frac{(-\nabla u, \epsilon)}{\sqrt{|\nabla u|^2 + \epsilon^2}} = -\frac{DU}{|DU|} \ , \\ v \ := \ v_\epsilon \ &:= \ \langle \nu, \, e_z \rangle^{-1} = \frac{1}{\epsilon} \sqrt{|\nabla u|^2 + \epsilon^2} = \frac{|DU|}{\epsilon} \ , \\ H_\nu \ = \ H_{\nu,\epsilon} \ &= \ \mathrm{div} \frac{-\nabla u}{\sqrt{|\nabla u|^2 + \epsilon^2}} = \mathrm{div}_{x,z} \frac{-DU}{|DU|} \ , \end{aligned} \tag{1.21}$$

wo H_ν die mittlere Krümmung von graph($\frac{u_\epsilon}{\epsilon}$) bezüglich seiner oberen Normalen ν meint. Mithin gilt das folgende

Lemma 1.9 *Sei u_ϵ glatte Lösung von ($\star_\epsilon$) und gelte auf ganz $\Omega \times [0,\infty)$, dass*

$$|\nabla u_\epsilon| \leq \tilde{c} \ .$$

Wir betrachten $M_t = \text{graph}(\frac{u_\epsilon(\cdot,t)}{\epsilon})$ als Familie eingebetteter Hyperflächen in $\Omega \times \mathbb{R}$. Es existiert eine Familie von Parametrisierungen $F_{\epsilon,t}(x) = F_\epsilon(x,t) : \Omega \times [0,\infty) \longrightarrow M_t \subset \Omega \times \mathbb{R}$ mit

$$\frac{d}{dt}F_{\epsilon,t} = -\nu\left(\frac{H_\nu}{\epsilon v} + 1\right) \ .$$

Dabei gilt $0 < \epsilon \leq \epsilon v \leq \tilde{c} + \epsilon$.

Beweis: Es ist bekannt, dass man F mit $(\frac{d}{dt}F)^\perp = \frac{d}{dt}F$ wählen kann, z.B. $F(x,t) = (x(t), u(x(t),t))$ für passendes $x(t)$. Siehe z.B. [HE91] .

□

Bemerkung: Die hier getroffene Vorzeichenwahl für ν hat $v > 0$ zum Ziel und entspricht dem, was im Kontext geometrischer Evolutionsgleichungen für die Behandlung von Graphen üblich ist. Leider ist deswegen in diesem Kapitel der Arbeit (und nur in diesem Kapitel) auch für die mittlere Krümmung H_ν von graph($\frac{u_\epsilon}{\epsilon}$) das Vorzeichen dem von der IMCF-Situation her naheliegenden und gewohnten entgegengesetzt. Die durchgehende, Indizierung mit tiefgestelltem ν soll diese Vorzeichenwahl verdeutlichen.

1.4.2 Geometrische Evolutionsgleichungen

Wo im Folgenden mit Funktionen gearbeitet wird, die auf M_t definiert sind, bezeichne ∇ die Kovariante Ableitung auf M_t bezüglich der vom umliegenden $\mathbb{R}^{n+1}$ induzierten Metrik und Δ den Laplace-Beltrami Operator von M_t.

Lemma 1.10 *Sei $\epsilon > 0$ fest und $F = F_{\epsilon,t}$ die Parametrisierung von $M_t = \text{graph}\,\frac{u_\epsilon(\cdot,t)}{\epsilon}$ aus Lemma 1.9. Dann gelten in Normalkoordinaten um einen Punkt $p \in M_t$ die Evolutionsgleichungen*

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}v &= \frac{1}{\epsilon v}\Delta v - \frac{2}{\epsilon v^2}|\nabla v|^2 + \frac{H_\nu}{\epsilon}\langle \nabla v,\, e_z\rangle - \frac{1}{\epsilon}|A|^2 \quad \textit{und} \\ \frac{\partial}{\partial t}H_\nu &= \frac{1}{\epsilon v}\Delta H_\nu - \frac{2}{\epsilon v^2}\langle \nabla H_\nu,\, \nabla v\rangle + \frac{H_\nu}{\epsilon}\langle \nabla H_\nu,\, e_z\rangle + |A|^2 \ . \end{aligned} \tag{1.22}$$

Zum Beweis des Lemmas rufen wir zunächst die folgenden wohlbekannten Zusammenhänge in Erinnerung.

Lemma 1.11 *In der Situation von Lemma 1.9 gilt mit* $f = \frac{H_\nu}{\epsilon v} + 1$, *dass*

i) $\frac{\partial}{\partial t}\nu = \nabla f$,

ii) $\frac{\partial}{\partial t}H_\nu = \Delta f + |A|^2 f$,

iii) $\Delta v = |A|^2 v + 2v^{-1}|\nabla v|^2 - v^2\langle \nabla H_\nu,\, e_z\rangle$.

Beweis: Die beiden Evolutionen *i)* und *ii)* gelten viel allgemeiner für Familien F_t von Immersionen, die ein Anfangswertproblem der Form

$$\frac{\partial}{\partial t}F_t = -\nu f, \quad F_0 = M$$

für eine Hyperfläche M lösen und bei denen die Geschwindigkeit f von den Hauptkrümmungen der Fläche F_t und Termen niederer Ordnung abhängt. Siehe dafür zum Beispiel [And94]. Da bei uns F_t sogar global einen Graphen beschreibt, ist $v > 0$ erhalten, so dass die Terme in *iii)* wohldefiniert sind. Für die Gleichung selbst zitieren wir [HE89].

□

Beweis von Lemma 1.10: Wegen $v = \langle \nu,\, e_z\rangle^{-1}$ und *i)* gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}v &= -v^2\langle \frac{\partial}{\partial t}\nu,\, e_z\rangle = -v^2\langle \nabla f,\, e_z\rangle = -v^2\langle \nabla \frac{H_\nu}{\epsilon v},\, e_z\rangle \\ &= -\frac{v}{\epsilon}\langle \nabla H_\nu,\, e_z\rangle + \frac{H_\nu}{\epsilon}\langle \nabla v,\, e_z\rangle \ .\end{aligned}$$

Die Gleichung *iii)* ist äquivalent zu

$$-\frac{v}{\epsilon}\langle \nabla H_\nu,\, e_z\rangle = \frac{1}{\epsilon v}\Delta v - \frac{1}{\epsilon}|A|^2 - \frac{2}{\epsilon v^2}|\nabla v|^2 \ ,$$

und durch Einsetzen folgt die erste Evolutionsgleichung. Für die zweite berechnen wir

$$\Delta f = \nabla_i(\nabla_i \frac{H_\nu}{\epsilon v}) = \frac{1}{\epsilon v}\Delta H_\nu + \frac{H_\nu}{\epsilon}\Delta v^{-1} + \frac{2}{\epsilon}\langle \nabla H_\nu,\, \nabla v^{-1}\rangle \ .$$

Wenn wir zur Umformung des vorletzten Terms *iii)* verwenden, sehen wir, dass

$$\begin{aligned}\frac{H_\nu}{\epsilon}\Delta v^{-1} &= -\frac{H_\nu}{\epsilon v^2}\Delta v + \frac{2H_\nu}{\epsilon}v^{-3}|\nabla v|^2 \\ &= -\frac{H_\nu}{\epsilon v^2}|A|^2 v - \frac{2H_\nu}{\epsilon v^{-3}}|\nabla v|^2 + \frac{H_\nu}{\epsilon}\langle \nabla H_\nu,\, e_z\rangle + \frac{2H_\nu}{\epsilon}v^{-3}|\nabla v|^2 \\ &= -\frac{H_\nu}{\epsilon v}|A|^2 + \frac{H_\nu}{\epsilon}\langle \nabla H_\nu,\, e_z\rangle \ .\end{aligned}$$

Dieses Ergebnis setzen wir in den letzten Ausdruck für Δf ein und erhalten wegen Evolution $ii)$, dass

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}H_\nu &= \frac{1}{\epsilon v}\Delta H_\nu + \frac{2}{\epsilon}\langle \nabla H_\nu,\, \nabla v^{-1}\rangle + \frac{H_\nu}{\epsilon}\langle \nabla H_\nu,\, e_z\rangle - \frac{H_\nu}{\epsilon v^2}|A|^2 v + f|A|^2 \\ &= \frac{1}{\epsilon v}\Delta H_\nu - \frac{2}{\epsilon v^2}\langle \nabla H_\nu,\, \nabla v\rangle + \frac{H_\nu}{\epsilon}\langle \nabla H_\nu,\, e_z\rangle + |A|^2\ ,\end{aligned}$$

wie behauptet.

□

1.4.3 Abschätzung an $\frac{\partial}{\partial t}u_\epsilon$ mit Hilfe einer $H_{\nu,\epsilon}$-Schranke

Wir nutzen die Ähnlichkeit in den Evolutionen von v und H_ν, um eine zeitlich innere Abschätzung an H_ν zu erhalten.

Lemma 1.12 *Sei u_ϵ glatte Lösung von $(\star_\epsilon)$ und gelte auf ganz $\Omega \times [0,\infty)$, dass*

$$|\nabla u_\epsilon| \leq \tilde{c}\ .$$

Wenn $H_{\nu,\epsilon}(\cdot,t)$ die mittlere Krümmung des Graphen von $\frac{u_\epsilon}{\epsilon}(\cdot,t)$ bezüglich des oberen Einheitsnormalenfeldes bezeichnet, dann gilt für alle $t>0$

$$-\frac{\sqrt{n(\tilde{c}-\epsilon)}}{\sqrt{t}} - \tilde{c} \leq H_{\nu,\epsilon} \leq \frac{\sqrt{n(\tilde{c}-\epsilon)}}{\sqrt{t}} + (\tilde{c}-\epsilon)\ . \tag{1.23}$$

Bemerkung: Wir werden im Anschluss an Lemma 2.23 zeigen, dass diese Abschätzung zu einer scharfen Abschätzung für die L^∞-Norm der schwachen mittleren Krümmung von Nivauflächen gewisser schwacher Lösungen von Problem $(\star)$ führt.

Beweis: Notiere wieder $H_\nu = H_{\nu,\epsilon}$. Sei

$$a := -\frac{2}{\epsilon v^2}\nabla v + \frac{H_\nu}{\epsilon}e_z\ ,$$

so dass wegen Lemma 1.10

$$\frac{\partial}{\partial t}\epsilon v = \frac{1}{\epsilon v}\Delta \epsilon v + \langle \nabla \epsilon v,\, a\rangle - |A|^2 \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial}{\partial t}H_\nu = \frac{1}{\epsilon v}\Delta H_\nu + \langle \nabla H_\nu,\, a\rangle + |A|^2\ .$$

Man definiert für noch zu wählendes $\delta,\theta>0$ und $c(t_0,\theta)$ die Funktion

$$\phi_{t_0} = tH_\nu + c(t_0,\theta)\epsilon v - \frac{\theta}{2}t - \delta t\ .$$

Es gilt, dass

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\phi_{t_0} =& H_\nu + t\frac{\partial}{\partial t}H_\nu + c(t_0,\theta)\epsilon\frac{\partial}{\partial t}v - \theta/2 - \delta \\
=& H_\nu + \frac{1}{\epsilon v}\Delta(tH_\nu) + \langle a,\, \nabla(tH_\nu)\rangle + t|A|^2 \\
&+ \frac{1}{\epsilon v}\Delta(c(t_0,\theta)\epsilon v) + \langle a,\, \nabla(c(t_0,\theta)\epsilon v)\rangle - c(t_0,\theta)|A|^2 - \frac{\theta}{2} - \delta \\
=& H_\nu + \frac{1}{\epsilon v}\Delta\phi_{t_0} + \langle a,\, \nabla\phi_{t_0}\rangle + |A|^2(t - c(t_0,\theta)) - \frac{\theta}{2} - \delta \\
\leq& \frac{1}{\epsilon v}\Delta\phi_{t_0} + \langle a,\, \nabla\phi_{t_0}\rangle + |A|^2\left(\frac{n}{2\theta} + t - c(t_0,\theta)\right) - \delta\ ,
\end{aligned}$$

wo im letzten Schritt die Höldersche Ungleichung in der Form $H_\nu \leq \frac{\theta}{2} + \frac{H_\nu^2}{2\theta}$ und die Spurungleichung $H_\nu^2 \leq n|A|^2$ eingegangen sind. Wählt man also $c(t_0,\theta) = n/(2\theta) + t_0$, so gilt für $t \leq t_0$ stets

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi_{t_0} < \frac{1}{\epsilon v}\Delta\phi_{t_0} + \langle a,\, \nabla\phi_{t_0}\rangle\ .$$

Wegen des parabolischen Maximumprinzips bleibt daher ϕ_{t_0} bis zum Zeitpunkt t_0 durch seine Anfangs- und Randwerte beschränkt. Es gilt nun einerseits $\phi_{t_0}(\cdot,0) = c(t_0,\theta)\epsilon v \leq c(t_0,\theta)\tilde{c}$. Andererseits gilt wegen $\dot{u} = -f\epsilon v$ und weil $\dot{u} \equiv 0$ auf $\partial\Omega$ zu allen Zeiten, dass dort $f = 0$, das heißt $H_\nu = -\epsilon v$ und somit $\phi_{t_0}(\cdot,t) \leq -t\epsilon v + c(t_0,\theta)\tilde{c} - t/4 \leq c(t_0,\theta)\tilde{c}$. Es gilt also für jedes $0 < t_0$ auch bei $t = t_0$ nach Grenzübergang $\delta \longrightarrow 0$, dass

$$\begin{aligned}
\phi_t &\leq c(t,\theta)\tilde{c} \quad \text{und dies ist äquivalent zu} \\
tH_\nu(\cdot,t) &\leq c(t,\theta)\tilde{c} - c(t,\theta)\epsilon v + t\frac{\theta}{2}\ , \\
H_\nu(\cdot,t) &\leq \frac{1}{t}\left(\frac{n}{2\theta} + t\right)(\tilde{c} - \epsilon) + \frac{\theta}{2}\ , \\
H_\nu(\cdot,t) &\leq \frac{1}{t}\left(\frac{n(\tilde{c}-\epsilon)}{2\theta}\right) + (\tilde{c} - \epsilon) + \frac{\theta}{2} =: s_t(\theta)\ .
\end{aligned} \tag{1.24}$$

Weil diese Ungleichung für festes t mit jedem $\theta > 0$ erfüllt ist, kann man $s_t(\theta)$ noch für festes t in θ minimieren. Es ist

$$\frac{d}{d\theta}s_t(\theta) = -\frac{n(\tilde{c}-\epsilon)}{\theta^2 2t} + \frac{1}{2}$$

und daher ein kritischer Punkt von $s_t(\theta)$ erreicht, wenn

$$\theta = \sqrt{\frac{n(\tilde{c}-\epsilon)}{t}}\ .$$

Offenbar ist zudem $\frac{d^2}{d\theta^2}s_t > 0$, so dass aus (1.24) die obere Abschätzung

$$H_\nu(\cdot,t) \le \frac{1}{t}\left(\frac{n(\tilde{c}-\epsilon)}{2}\sqrt{\frac{t}{n(\tilde{c}-\epsilon)}}\right) + (\tilde{c}-\epsilon) + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{n(\tilde{c}-\epsilon)}{t}}$$

und daraus die rechte Ungleichung aus (1.23) folgt. Für die untere Abschätzung definiert man ganz analog $\tilde{\phi}_{t_0} = tH_\nu - c(t_0,\theta)\epsilon v + (\theta/2)t + \delta t$ und erhält wegen $H_\nu \ge -|H_\nu| \ge -\frac{\theta}{2} - \frac{n}{2\theta}|A|^2$, dass mit $c(t_0,\theta) = c(\theta) = n/(2\theta)$ bereits

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\phi} > \frac{1}{\epsilon v}\Delta\tilde{\phi} + \langle a,\, \nabla\tilde{\phi}\rangle \ .$$

Die Funktion $\tilde{\phi}$ ist also auch für $\delta = 0$ bis zum Zeitpunkt $t = t_0$ nach unten durch ihre Anfangs- und Randwerte beschränkt. Aus der Beschränkung allein durch die Anfangswerte ergibt sich

$$\tilde{\phi} \ge -\frac{n}{2\theta}\tilde{c}\ , \qquad \text{das heißt} \qquad H_\nu \ge \frac{1}{t}\left(\frac{n}{2\theta}\right)(\epsilon-\tilde{c}) - \frac{\theta}{2}\ .$$

Wegen der Randwerte ist

$$\tilde{\phi} \ge -\frac{n}{2\theta}\tilde{c} - t\epsilon v + \frac{\theta}{2}t\ , \qquad \text{das heißt} \qquad H_\nu \ge \frac{1}{t}\left(\frac{n}{2\theta}\right)(\epsilon-\tilde{c}) - \tilde{c}\ .$$

Insgesamt hat man also

$$H_\nu \ge -\frac{1}{t}\left(\frac{n(\tilde{c}-\epsilon)}{2\theta}\right) - \tilde{c} - \frac{\theta}{2} = -s_t(\theta) - \epsilon$$

für dieselbe Funktion $s_t(\theta)$ wie vorhin. Die Behauptung folgt wie für die obere Schranke durch Minimieren von s_t.

□

Korollar 1.13 *Sei u_ϵ glatte Lösung von ($\star_\epsilon$), und gelte auf ganz $\Omega \times [0,\infty)$, dass $|\nabla u_\epsilon| \le \tilde{c}$. Dann gilt für alle $t > 0$*

$$-\frac{\sqrt{n(\tilde{c}-\epsilon)}}{\sqrt{t}} - 2\tilde{c} + \epsilon \le \frac{\partial}{\partial t}u_\epsilon \le \frac{\sqrt{n(\tilde{c}-\epsilon)}}{\sqrt{t}} + \tilde{c} - \epsilon\ . \tag{1.25}$$

Beweis: Mit (1.21) sieht man, dass

$$\frac{\partial}{\partial t}u_\epsilon = \mathrm{div}\frac{\nabla u_\epsilon}{\sqrt{|\nabla u_\epsilon|^2+\epsilon^2}} - \sqrt{|\nabla u_\epsilon|^2+\epsilon^2} = -H_{\nu,\epsilon} - \epsilon v_\epsilon\ .$$

Die Behauptung folgt dann mit Lemma 1.12 wegen der Gradientenschranke.

□

1.5 Existenz, Eindeutigkeit und gleichmäßige Abschätzungen

Proposition 1.14 *Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n, \epsilon \in (0,1), f \in C^{0,1}(\bar{\Omega})$ und $g \in C^\infty(\partial B)$ so, dass $(\star_\epsilon)$ eine Gradientenbedingung erfüllt (siehe Definition 1.6). Dann existiert eine eindeutige Lösung $u_\epsilon \in C^\infty(\bar{\Omega} \times (0,\infty)) \cap C^0(\bar{\Omega} \times [0,\infty))$ von $(\star_\epsilon)$ mit*

$$\begin{aligned} &i) \qquad -\frac{1}{4} \leq u_\epsilon \leq \sup_\Omega(f)\ , \\ &ii) \qquad |\nabla u_\epsilon| \leq \tilde{c}(n,\Omega,f) = \tilde{c} \quad \textit{und} \\ &iii) \qquad -\frac{\sqrt{n\tilde{c}}}{\sqrt{t}} - 2\tilde{c} \leq \frac{\partial}{\partial t} u_\epsilon \leq \frac{\sqrt{n\tilde{c}}}{\sqrt{t}} + \tilde{c}\ . \end{aligned} \tag{1.26}$$

Man kann weiterhin $R \geq R_0(E_0)$ und Anfangswerte f so wählen, dass für Gebiete mit einer Mindestgröße $B_R(0)\backslash E_0 \subset \Omega$ in Abschätzung i) gilt, dass $c(\Omega) = c(n,E_0)$ und $\tilde{c} = \tilde{c}(n,E_0)$. f kann man ferner so wählen, dass zusätzlich $|\nabla u_\epsilon| \leq H_{\max}(\partial E_0)$ entlang ∂E_0. Weiter kann man Anfangswerte f und Randwerte g auf ∂B so wählen, dass zusätzlich

$$\frac{\partial}{\partial t} u_\epsilon \geq 0 \quad \textit{oder} \quad \frac{\partial}{\partial t} u_\epsilon \leq 0 \quad \textit{auf ganz} \ \ \Omega \times (0,\infty)\ . \tag{1.27}$$

Beweis: Für $\phi_i \in C^\infty(\Omega) \cap C^{0,1}(\bar{\Omega})$ bezeichne $(\star_\epsilon)_i$ das Problem $(\star_\epsilon)$ zu Anfangswerten ϕ_i statt f. Seien nun die ϕ_i so, dass $\phi_i \longrightarrow f$ gleichmäßig, $\phi_i = f$ auf $\partial\Omega$ und dass die Probleme $(\star_\epsilon)_i$ eine Gradientenbedingung (1.6) erfüllen. Solche ϕ_i erhält man z.B. als Summe von Glättungen von f auf einer geeigneten Zerlegung der Eins wie im Beweis von Thm 5.2.2, S.173 in [EG92].

Für festes i folgt Behauptung $i)$ aus Korollar 1.8 (S.26) und Behauptung $ii)$ aus Lemma 1.7 (S.26) zusammen mit (1.10) aus Lemma 1.2. Wegen der $\frac{\partial}{\partial t}u_\epsilon$-Schranke aus Lemma 1.2 (S.15) folgt mit dem DeGiorgi/Nash-artigen Theorem 12.10 aus [Lie96] eine Hölderschranke für $|\nabla u|$ und mit [Lie96] Thm 8.3 die Kurz- und Langzeitexistenz von Lösungen $u_i := u_{\epsilon,i}$ der Probleme $(\star_\epsilon)_i$. Wegen Korollar 1.13 (S.33) gilt für die u_i zusätzlich Behauptung $iii)$. Dabei sind alle Abschätzungen gleichmäßig in i. Die Lösungen u_i sind eindeutig wegen des parabolischen Maximumprinzips z.B. in der Form von Thm 9.1 in [Lie96].

Wir kümmern uns nun um den Grenzübergang $i \longrightarrow \infty$. Seien dazu Folgen $t_j \searrow 0$, $T_j \nearrow \infty$ gegeben und $(K_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Ausschöpfung von Ω durch Kompakta. Auf $K_0 \times [t_0,T_0]$ erfüllen die u_i gleichmäßige C^∞-Abschätzungen in i. Nach Arzela-Ascoli gibt es also eine Teilfolge u_{i_k} und eine Funktion $v_0 : K_0 \times [t_0,T_0] \longrightarrow \mathbb{R}$, so dass $u_{i_k} \overset{k\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} v_0$ gleichmäßig in $C^k(K_0 \times [t_0,T_0])$ für beliebiges $k \in \mathbb{N}_0$. v_0 erfüllt daher auf seinem Definitionsbereich insbesondere die PDGL aus $(\star_\epsilon)$ und Abschätzungen $i) - iii)$.

Für $j > 0$ wähle sukzessive Teilfolgen $u_{i_k(j)}$ aus, so dass $u_{i_k(j)} \longrightarrow v_j$ lokal gleichmäßig auf $K_j \times [t_j, T_j]$ mit partiellen Ableitungen bis zur Ordnung $k \geq 2$. Nach Konstruktion ist

$$v_{j_1}(x,t) = v_{j_2}(x,t) \qquad \forall\ t \geq \min\{t_{j_1}, t_{j_2}\}\ \ \forall\ x \in K_{j_1} \cap K_{j_2}.$$

Wir definieren daher

$$v(x,0) := f(x),\ \text{und}\ v(x,t) := v_j(x,t),$$

wo j so groß ist, dass $x \in K_j, t \in [t_j, T_j]$. Dann erfüllt v in $\Omega \times (0,\infty)$ die PDGL aus $(\star_\epsilon)$ sowie die Abschätzungen $i) - iii)$. Weil die $\dot{v}$ wegen der Abschätzung $iii)$ in der Zeit für beliebige $T > 0$ über $[0,T]$ integrierbar ist, nimmt v seine Anfangswerte stetig an. Seine Randwerte nimmt v nach Konstruktion offenbar ebenfalls stetig an.

v ist wohldefiniert und eindeutig, weil es stetig auf $\bar{\Omega} \times [0,\infty)$ ist, und weil wegen der Glattheit im Inneren auf allen Gebieten der Form $K \times [t,\infty)$, $K \subset \Omega$ kompakt, ein parabolisches Maximumprinzip zur Verfügung steht. Der erste Teil der Behauptung ist damit bewiesen.

Die Abhängigkeit der Gradientenschranke von der Barriere entlang ∂B_R entfällt im behaupteten Fall wegen $R \geq R_0(E_0)$, und weil für $R \longrightarrow \infty$ wegen der Konstruktion der Barrieren ϕ_4 und ϕ_5 offenbar $|\frac{\partial}{\partial \nu} v| \longrightarrow 0$ gleichmäßig entlang ∂B_R gilt. Wir wählen R_0 o.B.d.A. so, dass $\max_{\partial B_R} |\frac{\partial}{\partial \nu} v| \leq \max_{\partial E_0} |\frac{\partial}{\partial \nu} v|$.

Ein Beispiel für Anfangs- und Randwerte, mit denen man $|\nabla v| \leq H_{\max}$ auf ∂E_0 und zugleich $\frac{\partial}{\partial t} v \geq 0$ erreichen kann, lauten

$$f_\uparrow(x) := \max\{\phi_3(x), \phi(x)\}\ , \quad g_\uparrow(x) := \phi(x)\ ,$$

wo ϕ_3 die in (1.14) beziehungsweise ϕ die in Lemma 1.5 $ii)$ definierte Sublösung von $(\star_\epsilon)$ ist. Da wir auf beschränktem Gebiet arbeiten, erfüllen

$$f_\downarrow(x) := \min\{\phi_2(x), c(\Omega)\}\ , \quad g_\downarrow(x) := c(\Omega)$$

die letzte Behauptung, falls ϕ_2 die Superlösung aus (1.13) und $c(\Omega)$ die Randwertkonstante aus Lemma 1.5 $i)$ sind. Man beachte, dass wegen (1.9) das Vorzeichen von $\dot{u}$ erhalten bleibt und offenbar $Q_\epsilon(f_\uparrow(x)) \geq 0$ sowie $Q_\epsilon(f_\downarrow(x)) \leq 0$ gilt.

□

Um zu zeigen, dass die im Lemma 1.5 für konstante Randwerte am äußeren Gebietsrand geforderte obere Schranke $c(\Omega)$ wesentlich und scharf ist, geben wir den folgenden Nichtexistenzsatz.

Proposition 1.15 *Sei E_0 zulässiger innerer Gebietsrand für $(\star_\epsilon)$. Sei $\Omega = B \backslash E_0$, wo B beschränkt und* $\operatorname{dist}(\partial B, \partial E_0) > 0$. *Wir definieren den Inkugelradius von E_0 als*

$$r_0 := \max\{r \in \mathbb{R} |\ \exists\ y \in E_0\ \textit{mit}\ B_r(y) \subset E_0\}$$

und bezeichnen mit y das Zentrum einer beliebig gewählten Innkugel. Wenn dann $R > 0$ so groß ist, dass $\Omega = B\backslash E_0 \subset B_R(y)$, so gilt: Für Randwerte

$$g(x) \equiv c(\Omega) > (n-1)\log\frac{R}{R - \operatorname{dist}(\partial E_0, \partial B_R(y))}$$

existiert $\epsilon_0 > 0$, so dass für $\epsilon \leq \epsilon_0$ das Problem $(\star_\epsilon)$ auf $\Omega \times [0,\infty)$ keine Lösung besitzt.

Beweis: Der Beweis erzeugt einen Widerspruch zum Vermeidungsprinzip der schwachen Lösungen für den IMCF aus [HI01]. Sei $f(x) := f_\downarrow(x) = \min\{c(\Omega), \phi_2(d(x))\}$, wo ϕ_2 die Barriere aus (1.13) mit Parameter $a < \operatorname{dist}(\partial E_0, \partial B)$ ist.

Gäbe es Lösungen u_{ϵ_i} für eine Folge $\epsilon_i \longrightarrow 0$, so gälte für diese Lösungen $\frac{\partial}{\partial t}u_{\epsilon_i}(x,t) \leq 0$, wie in der letzten Proposition gezeigt. Man betrachtet nun die Folge von Funktionen $u_i(x,t) = u_{\epsilon_i}(x,t)$. Mit derselben Argumentation wie später ab Seite 48 dieser Arbeit im Beweis des schwachen Existenzsatzes 2.9 erhält man aus dieser Folge eine schwache Lösung für das Ausgangsproblem $(\star)$ dieser Arbeit. Weil diese Lösung für alle Zeiten existiert und monoton fallend ist, muss sie gegen eine stationäre Grenzfunktion w konvergieren, die dann schwache Lösung für das Randwertproblem des IMCF auf dem Gebiet Ω wäre. Für solche Lösungen ist ein Vermeidungsprinzip bekannt, das in der Nivauflächen-Formulierung besagt: Falls $E \subseteq E_0$, u schwache Lösung des IMCF auf $\tilde{\Omega} = B\backslash E$, so ist $u \geq w$. Wir wählen $E = B_r(y)$, dann ist u explizit bekannt und für $x \in \partial B$ gilt $u(x) \leq (n-1)\log\frac{R}{r} < c(\Omega) = w(x)$, was ein Widerspruch ist.

□

Bemerkung: Mit für $(\star_\epsilon)$ zulässigem E_0 meinen wir in der Proposition ein E_0, das die Gradientenbedingung für konstante äußere Randwerte (1.6) unverletzt lässt. Beachte, dass ∂B im Nichtexistenzsatz beliebige Regularität und Geometrie haben darf. Wählt man $E_0 = B_r(y)$ und $\Omega = B_R(y)\backslash B_r(y)$, so existiert genau die stationäre Lösung, die der unter dem IMCF expandierenden Sphäre entspricht. Diese hat Randwerte $(n-1)\log\frac{R}{r}$, so dass in diesem Sinne die Gradientenbedingung für konstante äußere Randwerte (1.6) eine scharfe Existenzbedingung darstellt.

Innere Abschätzung an die Funktionswerte

Das folgende Resultat ist für den Beweis der Hauptergebnisse der vorliegenden Arbeit nicht nötig, soll aber der Vollständigkeit halber vorgestellt werden. Claus Gerhardt beweist in [Ger80], Theorem 2.3, eine innere Abschätzung an die Funktionswerte von Lösungen eines Problems, in dem der Hauptterm durch den Minimalflächenoperator gegeben ist. Seine Technik ist es, den Graphen der Lösung mit Kugelkappen zu vergleichen, die mit passender Geschwindigkeit von ihm weg translatieren. Da die hier betrachtete Operatorenfamilie im Spezialfall $\epsilon = 1$ im Hauptterm ebenfalls den Minimalflächenoperator trägt, lässt sich seine Technik auf unseren Fall verallgemeinern.

Lemma 1.16 *Sei u_ϵ Lösung des Problems $(\star_\epsilon)$ zu einem festen $\epsilon > 0$, und gelte auf ganz $\Omega \times [0,\infty)$, dass*

$$|\nabla u_\epsilon| \leq \tilde{c} \ .$$

Sei weiterhin $x_0 \in \Omega$ und der Radius R so gewählt, dass $B_R(x_0) \subseteq \Omega$. Dann ist

$$u_\epsilon(x,t) \leq \epsilon R + \sup_{B_R(x_0)} u_\epsilon(x,0) + t\left(\frac{n}{R} - \epsilon\right)$$

auf ganz $B_R(x_0)\times[0,T]$. Weiterhin gilt auf dem verkleinerten Zylinder $B_r(x_0)\times[0,T]$, wo $r = R\frac{\tilde{c}}{\sqrt{\tilde{c}^2+\epsilon^2}}$, dass

$$u_\epsilon(x,t) \geq -\epsilon R + \inf_{B_R(x_0)} u_\epsilon(x,0) - t\left(\frac{n}{R\tilde{c}} + 1\right)\sqrt{\tilde{c}^2+\epsilon^2} \ .$$

Beweis: Sei o.B.d.A. $x_0 = 0$. Wir definieren die untere beziehungsweise obere Hemisphäre einer Kugel um den Ursprung mit Radius R als Graphen der Funktionen $s^- = -\sqrt{R^2-|x|^2} + R$ und $s^+ = \sqrt{R^2-|x|^2} - R$. Mit deren Hilfe konstruieren wir die die Vergleichsfunktionen

$$\delta^\pm(x,t) = \epsilon s^\mp(x) \pm \kappa + M^\pm + t\cdot C^\pm$$

für beliebig kleines $\kappa > 0$. Dabei sei $M^- = \inf_B u(\cdot,0)$, $M^+ = \sup_B u(\cdot,0)$ und C noch offen. Es gilt $\delta^-(x,0) < u(x,0) < \delta^+(x,0)$. Sollte erstmals $u(x,t) \geq \delta^+$ an einer Stelle $x \in B_R(x_0)$ oder $u(x,t) \leq \delta^-$ an einer Stelle $x \in B_r(x_0)$ werden, so müsste dort $\nabla u - \nabla\delta^\pm = 0$ sein. Wähle also $R_0 < R$ so, dass bei $|x| = R_0$

$$|\nabla \epsilon s^+(x)|^2 = |\nabla \epsilon s^-(x)|^2 = \epsilon^2 \frac{R_0^2}{R^2 - R_0^2} > \tilde{c}^2 \ ,$$

das heißt $R_0 > R\frac{\tilde{c}}{\sqrt{\tilde{c}^2+\epsilon^2}}$. Eine Berührung kann dann zu jeder Zeit t nur noch im Inneren von $B_{R_0}\times\{t\}$ auftreten. Sollte zum Beispiel erstmalig $u(x,t) = \delta^+(x,t)$ auftreten, so wäre dort ein neues, in $B_R(x_0)$ inneres Minimum von $\delta^+ - u$ erreicht. Dies stünde im Widerspruch zum parabolischen Maximumprinzip, wenn δ^+ in $B_R(x_0)$ Superlösung der PDGL aus $(\star_\epsilon)$ wäre. Wegen $\frac{\partial}{\partial t}\delta^+ = C^+$ genügt dafür die Wahl

$$Q_\epsilon(\delta^+) = A_\epsilon(\epsilon\cdot s^-) - \epsilon\sqrt{|\nabla s^-|^2+1} = A_1(s^-) - \epsilon\sqrt{|\nabla s^-|^2+1} \leq \frac{n}{R_0} - \epsilon =: C^+ \ .$$

Die erste Behauptung folgt daher aus dem Grenzübergang $R_0 \longrightarrow R$ und $\kappa \longrightarrow 0$. Mutatis Mutandis folgt auch $u \geq \delta^-$. Insbesondere genügt die Wahl

$$C^- \leq \inf_{x\in B_{R_0}} Q_\epsilon(\delta^-) = \inf_{B_{R_0}} Q_\epsilon(\epsilon\cdot s^+) \ ,$$

und man errechnet, dass auf $B_{R_0}(x_0)$

$$Q_\epsilon(\epsilon \cdot s^+) = A_1(s^+) - \epsilon\sqrt{|\nabla s^-|^2 + 1} \geq -\frac{n}{R_0} - \epsilon\sqrt{\frac{R_0^2}{R^2 - R_0^2} + 1} =: C^-$$

ausreicht. Das Resultat folgt nun durch die Grenzübergänge $\kappa \to 0$ und $R_0 \to R\frac{\tilde{c}}{\sqrt{\tilde{c}^2+\epsilon^2}}$.

□

Kapitel 2

Schwache Lösungen und ihre Niveaumengen

2.1 Definition und erste Eigenschaften

2.1.1 Der schwache Lösungsbegriff

Es sei kurz an die Definition des Ausgangsproblems vom Beginn des ersten Kapitels erinnert:

$$(\star) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}u = \operatorname{div}\dfrac{\nabla u}{|\nabla u|} - |\nabla u| & \text{auf } \Omega \times (0,\infty) \ , \\ u = 0 & \text{auf } \partial E_0 \times [0,\infty) \ , \\ u = f & \text{auf } \Omega \times \{0\} \ . \end{cases}$$

Für dieses Problem sollen im Rest dieser Arbeit schwache Lösungen definiert, gefunden und studiert werden. Wir wählen zunächst einen geeigneten Funktionenraum.

Motivation: Sei $u_i = u_{\epsilon_i}$ glatte Lösung von $(\star_{\epsilon_i})$ auf Gebieten $\Omega_i = B_i \backslash E_0$. Dabei soll $\Omega_i \longrightarrow \Omega$, wo wir Konvergenzen von Gebieten stets im Sinne punktweiser Konvergenz fast überall der charakteristischen Funktionen verstehen wollen. Weiter gelte $\epsilon_i \longrightarrow 0$. Falls $u_i \longrightarrow u$ punktweise auf $\Omega \times [0,\infty)$ (setze u_i dazu eventuell beliebig auf Ω_i fort), so ist wegen des Satzes von Arzela Ascoli und der Gradientenschranke für alle $t \in [0,\infty)$ die Konvergenz der gesamten Folge $u_i(\cdot,t) \longrightarrow u(\cdot,t)$ bereits gleichmäßig auf allen Mengen der Form $\bar{\Omega} \cap K \times \{t\}$, $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Daher ist für beliebige Zeiten t

$$u(\cdot,t) \in C^{0,1}(\bar{\Omega}) \ . \tag{2.1}$$

Mit demselben Argument folgt aus der $\dot{u}_\epsilon$-Schranke von Korollar 1.13 von Seite 33 bei gleichmäßiger Konvergenz auf kompakten Zeitintervallen an beliebigen Stellen $x \in \Omega$ zu beliebigen Zeiten $t > 0$

$$u(x,\cdot) \in C^{0,1}([t,\infty)) \ . \tag{2.2}$$

Weil die $\dot{u}_\epsilon$-Schranke aus dem Korollar für $t \longrightarrow 0$ reell über Intervallen der Form (t,T) integrierbar ist, gilt weiter $|u(x,0) - u(x,t)| \leq c(n,E_0)\sqrt{t}$. Also ist zusätzlich für alle $x \in \Omega$

$$u(x,\cdot) \in C^0([0,\infty)) \ . \tag{2.3}$$

Andererseits gilt die Umkehrung: ist $u(t) = u(x,t)$ für festes x stetig auf $[0,\infty)$ und lokal lipschitzstetig auf dem Intervall $(0,\infty)$, so existiert $\dot{u}$ fast überall auf $[0,\infty)$ und ist in $L^1[0,T]$ für beliebiges $T > 0$. Man betrachtet dazu einfach für frei gewähltes $0 < \delta < T$ den Ausdruck $u(T) - u(\delta) + u(\delta) - u(0)$ und erhält, dass

$$\text{für jedes } \delta > 0 \text{ gilt } \int_\delta^T \dot{u}(t)dt \leq 2|\max_{[0,T]} u - \min_{[0,T]} u| \ .$$

Sei deswegen die Klasse von Funktionen, in der nach einer schwachen Lösung für Problem $(\star)$ gesucht wird, definiert als

$$\begin{aligned} \mathcal{C} := \Big\{ u \in C^0(\bar{\Omega} \times [0,\infty)) \ \Big| \ & \forall t \geq 0 : u(\cdot\ ,t) \in \quad C^{0,1}(\bar{\Omega}) \\ & \text{und} \quad \forall x \in \bar{\Omega},\ \forall t > 0 : u(x,\cdot) \in C^{0,1}([t,\infty)) \cap C^0([0,\infty)) \quad \Big\} \ . \end{aligned} \tag{2.4}$$

Definition 2.1 (Vergleichsfunktion) : *Sei $u \in \mathcal{C}$. Wir sagen, v sei eine (obere beziehungsweise untere) Vergleichsfunktion für u, wenn $v \in \mathcal{C}$ ($v \geq u$ beziehungsweise $v \leq u$) und wenn $\{v \neq u\} \subset\subset \Omega \times [0,\infty)$.*

Die parabolische Verallgemeinerung der Energie $J_u(v)$ aus [HI01] definieren wir wie folgt: Sei $K \subset \bar{\Omega}$ kompakt, $t > 0$, $u, v \in \mathcal{C}$. Dann sei

$$\mathcal{J\!P}_u^{K,t}(v) := \int_{K \times \{t\}} |\nabla v| + v\big(|\nabla u| + \dot{u}\big) \ . \tag{2.5}$$

Ist $\dot{u} \in L^\infty$ zur Zeit t auf einer Menge positiven $n-$dimensionalen Lebesgue-Maßes nicht definiert, so wählen wir dort der bequemen Notation halber willkürlich einen beschränkten Repräsentanten. Auf diese Wahl kommt es aber im Folgenden nicht an.

Definition 2.2 (Schwache (Super- bzw. Sub-)Lösung) : *Wir sagen, u sei eine schwache (Super- bzw. Sub-) Lösung der PDGL aus Problem $(\star)$, wenn $u \in \mathcal{C}$ und wenn für alle (oberen bzw. unteren) Vergleichsfunktionen v gilt, dass*

$$(\dagger) \qquad \mathcal{J\!P}_u^{K,t}(u) \leq \mathcal{J\!P}_u^{K,t}(v) \ , \tag{$\dagger$}$$

für fast alle $t > 0$, wo $K \subset \Omega$ kompakt mit $\{v(\cdot,t) \neq u(\cdot,t)\} \subset K$ ist.

Wir nennen u eine schwache (Super- bzw. Sub-) Lösung des ARWP $(\star)$, wenn u schwache (Super- bzw. Sub-) Lösung der PDGL aus Problem $(\star)$ ist und seine Anfangs- und Randwerte stetig annimmt.

Definition 2.3 (Reguläre Zeiten) : *Gilt* (†) *für u zu einer Zeit t_0, das heißt, existiert die partielle Ableitung $\dot{u}(x,t)$ für $\mathcal{L}^n$-fast alle x zur Zeit t, so nennen wir t eine* reguläre Zeit *für u.*

Es ist klar, dass die eingeführten Energien bei fester Wahl von u und v nicht von der speziellen Wahl des Kompaktums K abhängen, solange $\{u \neq v\} \subset K$. Ebenso klar ist, dass u genau dann schwache Lösung von $(\star)$ (PDGL oder ARWP) ist, wenn u schwache Superlösung und schwache Sublösung ist. Statische schwache Lösungen von $(\star)$ sind offenbar schwache Lösungen des IMCF im Sinne von [HI01]. Die Motivation und Rechtfertigung für den schwachen Lösungsbegriff besteht im folgenden Lemma und im Kompaktheitsresultat 2.6.

Lemma 2.4 *Wenn u klassische (Super- bzw. Sub-) Lösung der PDGL aus $(\star)$ ist, dann ist u auch schwache (Super- bzw. Sub-) Lösung der PDGL aus $(\star)$.*

Beweis: Sei $v \in \mathcal{C}$ Vergleichsfunktion für die klassische Lösung u. Sei $\tilde{K} := \cup_{t\geq 0}\{v \neq u\}$, dann ist $\tilde{K} \subset \Omega$ präkompakt, und wegen $\mathrm{dist}(\tilde{K}, \partial\Omega) > 0$ kann man $K \subset \Omega$ kompakt mit glattem Rand wählen, so dass $\tilde{K} \subseteq K$. Wir multiplizieren die PDGL aus $(\star)$ mit $(u-v)$, integrieren zur Zeit t über K und nutzen in K das Divergenztheorem. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \int_K \dot{u}(u-v) &= \int_K -\nabla(u-v)\cdot\frac{\nabla u}{|\nabla u|} - |\nabla u|(u-v)\ , \\ \Longrightarrow \qquad \int_K u(|\nabla u| + \dot{u}) &\leq \int_K -|\nabla u| + \frac{\nabla u\cdot\nabla v}{|\nabla u|} + v(|\nabla u| + \dot{u})\ , \qquad (2.6) \\ \Longrightarrow \qquad \int_K |\nabla u| + u(|\nabla u| + \dot{u}) &\leq \int_K |\nabla v| + v(|\nabla u| + \dot{u})\ . \end{aligned}$$

Falls u klassische Sublösung (das heißt $\dot{u} \leq \mathrm{div}\frac{\nabla u}{|\nabla u|} - |\nabla u|$) ist, so bleibt diese Rechnung richtig, falls man $u \geq v$ fordert, und falls man in der ersten Zeile das Gleichheitszeichen durch "$\leq$"ersetzt. Folglich ist jede klassische Sublösung u auch eine schwache Sublösung. Analoges gilt für Superlösungen.

□

Insbesondere sind für klassische Lösungen offenbar alle Zeiten $t > 0$ bereits regulär.

2.1.2 Kompaktheit

Wir erinnern zunächst an einige grundlegende Tatsachen aus der Theorie der BV-Funktionen, die wir im Beweis des Kompaktheitssatzes benötigen. Wo im Folgenden $u \in BV(\Omega)$, ist das Variationsmaß von u definiert als

$$\mu_u(\Omega) = \sup\left\{ \int_\Omega u\cdot\mathrm{div}\varphi\ d\mathcal{L}^n \;\middle|\; \varphi \in C_c^1(\Omega),\ |\varphi| \leq 1 \right\}.$$

Falls $u \in C^{0,1}(K)$, $K \subset\subset \Omega$, so sind Mengen $A \subseteq K$ genau dann μ_u-messbar, wenn sie $\mathcal{L}^n$-messbar sind, und es gilt $\mu_u(A) = \mathcal{L}^n \llcorner |\nabla u|(A)$. Wo im Folgenden Messbarkeit ohne Angabe eines Maßes gefordert oder behauptet wird, ist stets Borel-Messbarkeit gemeint. Folgendes Lemma zitiert die für die Unterhalbstetigkeit der Energie $I\!P_u^{K,t}(v)$ nötigen elementaren Aussagen, von denen jedoch nur die erste leicht in der Literatur zu finden ist.

Lemma 2.5 (Unterhalbstetigkeiten) *Sei $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ Folge von Funktionen in $BV(\Omega)$ und konvergiere $u_i \longrightarrow u$ im Sinne von $L^1_{loc}(\Omega)$ für $i \longrightarrow \infty$. Sei $K \subset\subset \Omega$ und $A \subseteq K$ messbar.*

i) Es gilt

$$\int_A d\mu_u \quad \leq \liminf_{i\longrightarrow\infty} \int_A d\mu_{u_i} \ . \tag{2.7}$$

ii) Falls $f \geq 0$ eine messbare Funktion auf A ist, so gilt

$$\int_A f d\mu_u \leq \liminf_{i\longrightarrow\infty} \int_A f d\mu_{u_i} \ . \tag{2.8}$$

iii) Sei zusätzlich $\sup_i \|u_i\|_{BV(K)} \leq C(K)$ für alle $K \subset\subset \Omega$. Falls $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge nichtnegativer integrierbarer Funktionen ist und und $f_i \longrightarrow f$ gleichmäßig konvergiert, so gilt

$$\int_A f d\mu_u \leq \liminf_{i\longrightarrow\infty} \int_A f_i d\mu_{u_i} \tag{2.9}$$

Bemerkung: Falls die Funktionen u_i sogar lokal gleichmäßig lipschitzstetig auf Ω sind, das heißt $\sup_i |\nabla u_i| \leq C(K)$ für alle $K \subset\subset \Omega$, und falls $u_i \longrightarrow u$ gleichmäßig konvergiert, so ist u lokal lipschitzstetig. Alle Aussagen des Lemmas gelten dann mit $\mu_{u_i} = \mathcal{L}^n \llcorner |\nabla u_i|$ beziehungsweise $\mu_u = \mathcal{L}^n \llcorner |\nabla u|$.

Beweis: Aussage i) folgt zum Beispiel aus [EG92], 5.2. Theorem 1. Aussage ii) folgt aus i) durch Übergang auf Treppenfunktionen $s \leq f$ mit der Linearität des Integrals. Falls Aussage iii) nicht gälte, so würde aus Aussage ii) folgen, dass

$$\liminf_{i\longrightarrow\infty} \int_A f d\mu_{u_i} - \liminf_{i\longrightarrow\infty} \int_A f_i d\mu_{u_i} =: 3\epsilon_0 > 0 \ .$$

Also gälte für hinreichend große $k \geq k(\epsilon_0)$

$$\int_A f d\mu_{u_k} - \liminf_{i\longrightarrow\infty} \int_A f_i d\mu_{u_i} \geq 2\epsilon_0 \ .$$

Nach Übergang auf eine gegen den lim inf konvergierende Teilfolge $u_j = u_{i_j}$ im zweiten Term gilt also für hinreichend großes $j \geq j(\epsilon_0)$

$$\int_A f_k d\mu_{u_k} \quad < \quad \int_A f d\mu_{u_j} - \epsilon_0 \ .$$

Wähle nun $k = j$ und beide o.B.d.A. so groß, dass zugleich $|f_j - f| \leq \epsilon^2$. Dann hat man

$$0 < \epsilon < \int_A |f - f_j| d\mu_{u_j}, \quad \text{mithin} \ \ \frac{1}{\epsilon} < C(K) \ ,$$

was für hinreichend kleines ϵ einen Widerspruch zur gleichmäßigen Schranke in der BV-Norm darstellt.

□

Der folgende Satz wird es im Beweis des schwachen Existenztheorems möglich machen, bei der mit dem Dimensionstrick aus der $\epsilon-$Regularisierung gewonnenen Familie $(U_\epsilon)_\epsilon$ von klassischen Lösungen von $(\star)$ den Grenzübergang $\epsilon \longrightarrow 0$ durchzuführen.

Proposition 2.6 (Kompaktheitssatz) *Sei $(\Omega_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Gebieten des $\mathbb{R}^n$. Seien $u_i : \Omega_i \times [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ schwache Lösungen der PDGL aus $(\star)$ mit*

$$\sup |\nabla u_i| \leq C \ .$$

Wenn dann $\Omega_i \longrightarrow \Omega$ und $u_i \longrightarrow u$ lokal gleichmäßig konvergiert, so ist u schwache Lösung auf Ω und $\sup |\nabla u| \leq C$.

Beweis: Sei v Vergleichsfunktion für u. Sei weiter $K \subset\subset \Omega$ und $T > 0$ so, dass $\{v \neq u\} \subseteq K \times [0,T]$. Es ist zu zeigen, dass für alle solchen v, für beliebige $t \in (0, T_0]$ die Ungleichung (†) gilt, das heißt

$$I\!P_u^{K,t}(u) \leq I\!P_u^{K,t}(v) \ .$$

Wir setzten zunächst voraus, dass $v < u + 1$. Da Ω offen ist, habe K o.B.d.A. glatten Rand, sonst vergrößere K ein wenig. Sei χ_K die charakteristische Funktion von K. Aus der Theorie der Cacciopolimengen ist bekannt, dass es eine Funktionenfolge $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset BV(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ gibt, so dass $\phi_k \longrightarrow \chi_K$ in $L^1(\Omega)$ und $\mu_{\phi_k}(\Omega) \longrightarrow \mu_{\chi_K}(\Omega)$ für $k \longrightarrow \infty$. Insbesondere folgt aus der Konstruktion der ϕ_k (siehe zum Beispiel [EG92]), dass $\phi_k \in C_c^\infty(\Omega), 0 \leq \phi_k \leq 1$, und $\mathrm{spt}(\phi_k) \subset K \subset \Omega_i$ für hinreichend großes i, k, so dass $\phi_k v + (1 - \phi_k)u_i$ zulässige Vergleichsfunktionen für u_i bei hinreichend großem i, k sind. Wir Wählen zwei beliebige Zeiten t_1, t_2 mit $t_1 < t_2$ aus. Die folgende

Ungleichung gilt dann, weil sie für die Integranden zu fast jeder Zeit gilt.

$$\int_{t_1}^{t_2} I\!P_{u_i}^{K,t}(u_i)dt \leq \int_{t_1}^{t_2} I\!P_{u_i}^{K,t}(\phi_k v + (1-\phi_k)u_i)dt, \Longrightarrow$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega} \phi_k\big(|\nabla u_i| + u_i(|\nabla u_i| + \dot{u}_i)\big) \leq \int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega} \phi_k\big(|\nabla v| + v(|\nabla u_i| + \dot{u}_i)\big) + \int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega} |v-u_i||\nabla\phi_k|$$

$$\Longrightarrow \int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega} \phi_k\big[(1+u_i-v)|\nabla u_i| + (u_i-v)\dot{u}_i\big] \leq \int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega} \phi_k|\nabla v| + \int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega} |v-u_i||\nabla\phi_k| \ .$$

Dabei haben wir für den Schritt von der ersten zur zweiten Zeile genutzt, dass $|1-\phi_k||\nabla u_i| = (1-\phi_k)|\nabla u_i|$. Für jedes feste i erlaubt das Theorem über majorisierte Konvergenz zusammen mit der Qualität der Approximation $\phi_k \longrightarrow \chi_K$ den Grenzübergang $k \longrightarrow \infty$. Weil weiterhin $\partial^* K = \partial K$ gilt, folgt aus dem Struktursatz für Cacciopolimengen, dass $\mu_{\chi_K}(\Omega) = \mathcal{H}^{n-1}\llcorner\partial K$, und man erhält

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{K} (1+u_i-v)|\nabla u_i| + \int_{t_1}^{t_2}\int_{K} (u_i-v)\dot{u}_i \leq \int_{t_1}^{t_2}\int_{K} |\nabla v| + \int_{t_1}^{t_2}\int_{\partial K} |v-u_i| d\mathcal{H}^{n-1} \ . \quad (2.10)$$

Weil $u_i \longrightarrow u$ gleichmäßig auf K und $v = u$ auf ∂K ist, verschwindet das letzte Integral für $i \longrightarrow \infty$. Für das erste Integral gilt mit Aussage *iii)* aus Lemma 2.5, weil $u_i - v + 1 \geq 0$ für hinreichend großes i ist, dass

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{K} (1+u-v)|\nabla u| \leq \liminf_{i\longrightarrow\infty} \int_{t_1}^{t_2}\int_{K} (1+u_i-v)|\nabla u_i| \ .$$

Im zweiten Integral von (2.10) kann man wegen $\dot{u}(x,\cdot) \in L^1([0,T])$ Fubini anwenden und sieht für die einzelnen Terme

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{K} u_i\dot{u}_i = \int_{K}\int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}u_i^2 = \frac{1}{2}\int_{K} u_i^2(x,T) - u_i^2(x,0) d\mathcal{L}^n$$

$$\text{und} \quad -\int_{t_1}^{t_2}\int_{K} v\dot{u}_i = -\int_{K}\Big(vu_i\Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} u_i\dot{v}dt\Big)d\mathcal{L}^n \ .$$

Beide linken Ausdrücke konvergieren also für $i \longrightarrow \infty$ wegen der Gleichmäßigkeit von $u_i \longrightarrow u$ und weil $\dot{v} \in L^1([0,T])$. Man kann mit diesen Überlegungen also in (2.10)

den Grenzübergang $i \longrightarrow \infty$ vollziehen und erhält die gewünschte Ungleichung mit Hilfe des Lemmas von Dubois-Raymond in der Form

$$\int_{t_1}^{t_2}\!\!\int_K (1+u-v)|\nabla u| + \int_{t_1}^{t_2}\!\!\int_K (u-v)\dot{u} \leq \int_{t_1}^{t_2}\!\!\int_K |\nabla v| \ .$$

Sei schließlich v allgemeine Vergleichsfunktion für u. Mit exakt demselben Iterationsargument wie [HI01] sieht man auch in unserer Situation: Falls (†) für $v \leq u+k$ gilt, so auch für $v \leq u+2k$. Dazu erzeugt man für $v \leq u+2k$ die Vergleichsfunktionen $v_1 := \min\{u+k, v\}$ und $v_2 := \max\{v-k, u\}$. Es sind $v_1, v_2 \leq u+k$, so dass für beide (†) schon bewiesen ist. Man setzt jeweils in (†) ein, addiert die Ungleichungen und erhält so die Behauptung.

□

2.1.3 Eindeutigkeit unter einer Vorzeichenbedingung

Lemma 2.7 *Sei u schwache Lösung des ARWP ($\star$) und sei im Lipschitz-Sinne*

$$|\nabla u| + \dot{u} \geq 0$$

auf ganz $\Omega \times [0,\infty)$. Dann ist u eindeutig in dieser Klasse, das heißt es gibt keine weitere schwache Lösung zu denselben Anfangs- und Randwerten, die ebenfalls die obige Vorzeichenbedingung erfüllt.

Bemerkung: Der Beweis des Lemmas ist eine Verallgemeinerung des Eindeutigkeitsbeweises von Huisken und Ilmanen in der Situation des IMCF. In der Energie $J_u(v)$ aus HI ist der nichtlineare Term $v|\nabla u|$ auf natürliche Weise nichtnegativ, was in den Beweis entscheidend eingeht. In der parabolischen Situation lautet der entsprechende Term $v(|\nabla u| + \dot{u})$. Die Vorzeichenbedingung muss hier explizit gefordert werden und kann auch nicht durch eine Bedingung an die Anfangswerte ausgedrückt werden, da die Ungleichung $(|\nabla u| + \dot{u}) \geq 0$ unter dem Fluss im Allgemeinen nicht erhalten bleibt. Handelt es sich bei u lokal um eine klassische Lösung, so macht diese Bedingung die geometrische Aussage, dass die mittlere Krümmung der Niveauflächen von u in dieser Umgebung nichtnegativ ist. Wir beweisen in Lemma 2.30, dass die Präsenz von isolierten inneren Extrema in den Anfangswerten f des Problems ($\star$) wegen der stetigen Annahme der Anfangswerte durch Lösungen u und der dadurch implizierten Extrema für u eine Brechung dieser Eindeutigkeitsbedingung impliziert. Man hat jedoch:

Korollar 2.8 *Sei u schwache Lösung von ($\star$) zu Anfangswerten $f \in C^2(\Omega)$ mit*

$$C := \inf_{\Omega} \liminf_{\epsilon \longrightarrow 0} \left(\operatorname{div} \frac{\nabla f}{\sqrt{|\nabla f|^2 + \epsilon^2}} - \sqrt{|\nabla f|^2 + \epsilon^2} \right) \geq 0 \ . \tag{2.11}$$

Dann ist u eindeutig.

Beweis des Korollars: Seien u_ϵ glatte Lösungen von $(\star_\epsilon)$ auf Gebieten $\Omega_\epsilon = B_{R(\epsilon)}\backslash E_0$ zu den Anfangswerten $f_\epsilon = \min f, c(\Omega)$. Für jedes vorgegebene $\delta > 0$ gilt mit hinreichend kleinem $\epsilon > 0$ wegen der Bedingung (2.11), dass

$$C_\epsilon \;:=\; \inf_{\Omega_\epsilon\times\{\epsilon\}} \left(\operatorname{div} \frac{\nabla u_\epsilon}{\sqrt{|\nabla u_\epsilon|^2+\epsilon^2}} - \sqrt{|\nabla u_\epsilon|^2+\epsilon^2} \right) \;\geq\; C-\delta \;.$$

Wegen (1.9) aus Lemma 1.2 von Seite 15 bleibt dann $\dot{u}_\epsilon \geq C-\delta$ auf ganz $\Omega_\epsilon \times [0,\infty)$ erhalten. Für Limiten $\tilde{u}$ beliebiger Teilfolgen $(u_{\epsilon_i})_{i\in\mathbb{N}}$, $\lim_{i\longrightarrow\infty}\epsilon_i = 0, R(\epsilon_i) \nearrow \infty$ gilt daher im Lipschitz-Sinne $\dot{\tilde{u}} \geq 0$ überall und für alle Zeiten. Wir werden mit Hilfe der Argumentation aus dem Beweis von Theorem 2.9 sehen, dass $\tilde{u}$ schwache Lösung ist und damit die Voraussetzung von Lemma 2.7 erfüllt. Es folgt $u = \tilde{u}$.

□

Beweis von Lemma 2.7: Zunächst verschaffen wir uns durch leichtes Skalieren der schwachen Lösung u eine strikte Energieungleichung. Sei dazu u schwache Lösung von $(\star)$, v Vergleichsfunktion für u. Wähle eine reguläre Zeit $t_0 > 0$ aus und setze $K := K(t_0) = \{v(\cdot,t_0) \neq u(\cdot,t_0)\}$. Betrachte für $0 < \delta < 1$ die Funktion $u_\delta := u/(1-\delta)$ bzw. $v_\delta := v/(1-\delta)$. Weil u schwache Lösung ist, gilt

$$(1-\delta)\int\limits_K |\nabla u_\delta| + (1-\delta)u_\delta(|\nabla u_\delta| + \dot{u}_\delta) \leq \int\limits_K |\nabla v| + v(1-\delta)(|\nabla u_\delta| + \dot{u}_\delta), \quad \text{also}$$

$$\int\limits_K |\nabla u_\delta| + u_\delta(|\nabla u_\delta| + \dot{u}_\delta) + \delta\int\limits_K (v_\delta - u_\delta)(|\nabla u_\delta| + \dot{u}_\delta) \leq \int\limits_K |\nabla v_\delta| + v_\delta(|\nabla u_\delta| + \dot{u}_\delta) \;.$$

Dabei verstehen sich alle Funktionen, wie auch im Folgenden, stets ausgewertet zur Zeit t_0, wo nicht offensichtlich etwas anderes gemeint ist. Griffiger formuliert und nach Umbenennung von v_δ in v haben wir

$$(\dagger_\delta) \qquad \mathbb{P}_{u_\delta}^{K,t}(u_\delta) + \delta\int\limits_K (v-u_\delta)(|\nabla u_\delta| + \dot{u}_\delta) \leq \mathbb{P}_{u_\delta}^{K,t}(v)$$

für alle Vergleichsfunktionen v für u_δ. Falls insbesondere v Vergleichsfunktion für u mit $v = u$ zur Zeit $t = 0$ ist, zum Beispiel v eine andere Lösung von $(\star)$ zu gleichen Anfangswerten, so ist für hinreichend kleines δ auch $u_\delta + (v-u_\delta)_+ \geq u_\delta$ eine Vergleichsfunktion für u_δ in $(\dagger_\delta)$.

Seien nun u, v schwache Lösungen von $(\star)$ mit gleichen Anfangswerten. Einsetzen von $u_\delta + (v-u_\delta)_+ \geq u_\delta$ statt v in $(\dagger_\delta)$ ergibt (wo nicht anders angegeben, wird stets über $K \cap \{v > u_\delta\}$ integriert)

$$\int |\nabla u_\delta| + u_\delta(|\nabla u_\delta| + \dot{u}_\delta) + \delta\int (v-u_\delta)(|\nabla u_\delta| + \dot{u}_\delta) \leq \int |\nabla v| + v(|\nabla u_\delta| + \dot{u}_\delta) \;.$$

Einsetzen von $v-(v-u_\delta)_+$ statt v und von v statt u in (†) hingegen bedeutet

$$\int |\nabla v| + v(|\nabla v| + \dot{v}) \quad \leq \quad \int |\nabla u_\delta| + u_\delta(|\nabla v| + \dot{v}) \ ,$$

wo o.B.d.A. t_0 auch für v eine reguläre Zeit ist. Die Addition dieser beiden Ungleichungen liefert

$$\int (v-u_\delta)\left(|\nabla v| + \dot{v} - (|\nabla u_\delta| + \dot{u}_\delta)\right) + \delta \int (v-u_\delta)(|\nabla u_\delta| + \dot{u}_\delta) \leq 0 \ . \tag{2.12}$$

In einem zweiten Schritt nutzt man die Information, die bei der Überbrückung der Distanz $v-u_\delta$ entsteht. Man betrachtet in $(\dagger_\delta)$ statt v die Vergleichsfunktion $u_\delta + (v-s-u_\delta)_+,\ s \geq 0$ und integriert über s. Nach Sortieren der Terme erhält man

$$\int_0^\infty \int_{v-s>u_\delta} (u_\delta - (v-s))(|\nabla u_\delta| + \dot{u}_\delta) \quad +$$

$$\delta \int_0^\infty \int_{v-s>u_\delta} (v-s-u_\delta)(|\nabla u_\delta| + \dot{u}_\delta) \leq \int_0^\infty \int_{v-s>u_\delta} |\nabla v| - |\nabla u_\delta| d\mathcal{L}^n ds \ .$$

Indem man das Integrationsgebiet des inneren Integrals in einer charakteristischen Funktion kodiert und Fubini anwendet, erhält man

$$(1-\delta) \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty (u_\delta - v)(|\nabla u_\delta| + \dot{u}_\delta)\chi_{\{0<s<v-u_\delta\}} \quad +$$

$$(1-\delta) \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty s(|\nabla u_\delta| + \dot{u}_\delta)\chi_{\{0<s<v-u_\delta\}} \leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty (|\nabla v| - |\nabla u_\delta|)\chi_{\{0<s<v-u_\delta\}} ds \ d\mathcal{L}^n \ .$$

Diese Ungleichung integriert man in s, verwendet dabei

$$\int_0^\infty \chi_{\{0<s<v-u_\delta\}} ds\ (x,t) = (v-u_\delta)_+(x,t) \text{ und } \int_0^\infty s\chi_{\{0<s<v-u_\delta\}} ds\ (x,t) = \frac{(v-u_\delta)_+^2}{2}(x,t)$$

und erhält

$$-\frac{1-\delta}{2} \int (v-u_\delta)^2(|\nabla u_\delta| + \dot{u}_\delta) \leq \int (v-u_\delta)(|\nabla v| - |\nabla u_\delta|) d\mathcal{L}^n \ . \tag{2.13}$$

Wenn man Ungleichung (2.12) zu

$$\int (v-u_\delta)\left(|\nabla v| - |\nabla u_\delta|\right) + \int (v-u_\delta)\left(\dot{v} - \dot{u}_\delta\right) + \delta \int (v-u_\delta)(|\nabla u_\delta| + \dot{u}_\delta) \leq 0$$

umsortiert und darin die Abschätzung (2.13) nutzt, findet man schließlich

$$\int (v-u_\delta)\left(\delta - \frac{1-\delta}{2}(v-u_\delta)\right)(|\nabla u_\delta| + \dot{u}_\delta) \leq -\int (v-u_\delta)\,(\dot{v}-\dot{u}_\delta)\ .$$

Da v und u dieselben nichtnegativen Anfangswerte haben, ist $v < u_\delta$ bei $t = 0$. Also gibt es $t_0 > 0$, so dass für alle $t \leq t_0$ gilt, dass $v - u_\delta \leq 2\delta$. Falls andererseits $v > u$ vorkommt, so gilt für hinreichend kleines $\delta > 0$ auch $\{v > u_\delta\} \neq \emptyset$, wähle also o.B.d.A. t_0 und δ so, dass $\max_\Omega(v-u_\delta)(x,t_0) = 2\delta$. Wir haben nun $\delta^2 \leq \delta - \frac{1-\delta}{2}(v-u_\delta)$. Weil also laut Voraussetzung $|\nabla u| + \dot{u} \geq 0$, ist auch

$$\int_0^{t_0}\int (v-u_\delta)_+\delta^2(|\nabla u_\delta| + \dot{u}_\delta)(x,t)d\mathcal{L}^n dt \leq -\int_{\tilde{K}}\int_0^{t_0}(v-u_\delta)_+(\dot{v}-\dot{u}_\delta)d\mathcal{L}^n dt$$
$$= -\int \frac{(v-u_\delta)_+^2}{2}(x,t_0)d\mathcal{L}^n < 0\ .$$

Hier haben wir $\tilde{K} := \cup_{t\leq t_0} K(t)$ notiert. Da im linken Integral alle Integranden nichtnegativ sind, kann aber das Integral nicht strikt negativ sein, also muss $v \leq u$ bleiben. Da durch Rollentausch aus demselben Beweis auch $u \leq v$ folgt, haben wir $v = u$.

□

2.2 Existenz schwacher Lösungen auf einem Außengebiet

Theorem 2.9 *Für beliebige Anfangswerte $0 \leq f \in C^{0,1}(\mathbb{R}^n \backslash E_0)$ besitzt das Problem $(\star)$ eine schwache Lösung $0 \leq u \in \mathcal{C}$, die im Sinne von Differenzenquotienten global die folgenden Abschätzungen erfüllt:*

$$\begin{aligned} &i) && |\nabla u| \leq \tilde{c}(n, E_0, f) && \text{und} \\ &ii) && \forall\ t > 0, \quad -\frac{\sqrt{n\tilde{c}}}{\sqrt{t}} - 2\tilde{c} \leq \frac{\partial}{\partial t}u \leq \frac{\sqrt{n\tilde{c}}}{\sqrt{t}} + \tilde{c}\ . \end{aligned} \tag{2.14}$$

Definition 2.10 *Eine Lösung u von $(\star)$ auf einem Gebiet $\Omega \times [0,\infty)$ nennen wir $\epsilon-$approximierbar, falls sie lokal gleichmäßiger Limes einer Folge von Lösungen u_ϵ von Problemen $(\star_\epsilon)$ auf $\Omega_\epsilon \times [0,\infty)$ mit $\Omega_\epsilon \longrightarrow \Omega$ ist. Dabei verstehen wir die letzte Konvergenz im Sinne der $L^1_{loc}-$Konvergenz von charakteristischen Funktionen.*

Bemerkung: Insbesondere sind die Lösungen, die im folgenden Beweis des Existenztheorems konstruiert werden, offenbar sämtlich $\epsilon-$approximierbar. Das Problem $(\star)$ besitzt also unter den Bedingungen des obigen Existenztheorems stets eine $\epsilon-$approximierbare Lösung. Ist diese monoton wachsend in der Zeit, so ist sie die einzige ihrer Art.

Beweis: Sei f gegeben. Konstruiere zunächst eine Folge von Problemen $(\star_i) := (\star_{\epsilon_i})$. Sei dazu $R_i \longrightarrow \infty$ eine Folge mit $R_i > \mathrm{diam} E_0 + 2$ und o.B.d.A. $0 \in E_0$. Sei

$$\Omega_i := B_{R_i}(0) \backslash E_0 \ .$$

Weiterhin sei

$$\epsilon_i := \epsilon(R_i, E_0) = e^{-(4+2\max H_{\partial E_0})R_i} \ .$$

Dann ist auch $\epsilon_i \leq \frac{1}{2R_i}$, so dass die unteren Barrieren ϕ_3 und ϕ_4 konstruiert werden können. Nun finde $c_i = c(n, f, i, E_0) \geq 0$ minimal, so dass

$$f(x) \geq \frac{1}{2}(n-1) \log \frac{R_i - \mathrm{dist}(x, \partial B_{R_i}(0))}{R_i - \mathrm{dist}(E_0, \partial B_{R_i}(0))} \ - \ c_i$$

und definiere

$$c(\Omega_i) := \frac{1}{2}(n-1) \log \frac{R_i}{R_i - \mathrm{dist}(E_0, \partial B_{R_i}(0))} \ - \ c_i \ .$$

Zuletzt sei $\eta_i \in C^\infty(\Omega_i)$, $0 \leq \eta_i \leq 1$, eine Abschneidefunktion, so dass $\eta_i \equiv 1$ auf $\bar{B}_{R_i} \backslash B_{R_i - 1}$, $\eta_i \equiv 0$ auf $\bar{B}_{R_i - 2} \backslash E_0$ und definiere

$$f_i : \Omega_i \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto (1 - \eta_i) f + \eta_i c(\Omega_i) \ .$$

Wie man sofort sieht, erfüllt das Problem $(\star_\epsilon)$=$(\star_{\epsilon_i})$ mit den Daten $\Omega_i, \epsilon_i, g \equiv c(\Omega_i)$ und f_i die Gradientenbedingung für konstante äußere Randwerte aus Definition (1.6) von Seite 24, so dass Proposition 1.14 von Seite 34 glatte Lösungen u_i der Probleme $(\star_{\epsilon_i})$ garantiert. Auf einem festen Kompaktum $K(t, T, R) := (\bar{B}_R(0) \backslash E_0) \times [t, T]$, $0 < t < T < \infty$ ist $f_i = f$ für hinreichend großes i. Die globalen Barrieren ϕ_i entlang ∂E_0 oder auch die Tatsache $|\nabla u_i| \leq \tilde{c}(n, E_0, f)$ garantieren die Beschränktheit, und mit der $\dot{u}_\epsilon$-Schranke aus Proposition 1.14, *iii*) hat man die gleichgradige Stetigkeit der Folge (u_i) auf $K(t, T, R)$, so dass mit Arzela-Ascoli $u_{i_k} \longrightarrow u$ für eine passende Teilfolge gleichmäßig auf $K(t, T, R)$ konvergiert. Durch sukzessive Teilfolgenwahl entlang einer Folge von Kompakta $K(t_j, T_j, R_j)$ mit $t_j \searrow 0$, $T_j \nearrow \infty$ und $R_j \nearrow \infty$ erhält man eine Teilfolge u_j, die auf ganz $(\mathbb{R}^n \backslash E_0) \times [0, \infty)$ lokal gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion $0 \leq u \in \mathcal{C}$ konvergiert. Wegen Proposition 1.14 erfüllt u die Abschätzungen *i*) und *ii*). Wir wenden den Dimensionstrick und das Kompaktheitsresultat an, um zu sehen, dass u schwache Lösung von $(\star)$ ist.

Sei $U_i(x, z, t) := u_i(x, t) - \epsilon_i z$ wie in (1.18). Dann löst U_i das Problem $(\star\star_\epsilon)$ mit $\epsilon = \epsilon_i$ glatt und ist folglich auch schwache Lösung der PDGL aus $(\star)$. Zusammen mit der Grenzfunktion

$$U(x, z, t) := u(x, t)$$

erfüllt die Folge (U_i) die Voraussetzungen des Kompaktheitssatzes 2.6, so dass U schwache Lösung der PDGL aus $(\star)$ auf $(\mathbb{R}^n \backslash E_0) \times \mathbb{R} \times (0, \infty)$ ist. Das folgende Lemma schließt den Beweis des Theorems ab, indem es die Projektion auf einen z-Schnitt der zylindrischen Niveauflächen von U ermöglicht.

Lemma 2.11 *Sei $U(x,z,t) = u(x,t)$. Falls U schwache Lösung von $(\star)$ auf $\Omega \times \mathbb{R} \times [0,\infty)$ ist, so ist u schwache Lösung von $(\star)$ auf $\Omega \times [0,\infty)$*

Beweis: Sei v Vergleichsfunktion für u, wo $u(x,t) = U(x,z,t)$ und t reguläre Zeit für U ist, und $\{v(x,t) \neq u(x,t)\} \subset K$ für ein Kompaktum $K \subset\subset \mathbb{R}^n \backslash E_0$. Sei weiter $\phi_k \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ für $k \in \mathbb{N}$ mit $\phi_k(z) \equiv 1$ für $z \in [-k,k]$, spt$\phi_k \subset [-k-1, k+1]$ und $|\phi_k'| \leq 1/2$. Wir bezeichnen $K_k := K \times [-k-1, k+1]$ und sehen, dass

$$V_k(x,z,t) := v(x,t)\phi_k(z)$$

zulässige Vergleichsfunktion für U, und dass zur Zeit t auch $\{V_k \neq U\} \subset K_k$ ist. Nun ist aber, weil die Integranden für $z \in [-k,k]$ konstant sind, wegen des Satzes von Fubini

$$\begin{aligned} I\!P_U^{K_k,t}(V_k) \;=\; 2k \int\limits_{K_k} |\nabla v| + v(|\nabla u| + \dot{u})\; d\mathcal{L}^n \\ + \int\limits_{K\times(I_1\cup I_2)} \phi_k|\nabla v| + |v||\phi_k'| + v\phi_k(|DU| + \frac{\partial}{\partial t}U)\; d\mathcal{L}^{n+1}\;, \end{aligned}$$

wo $I_1 = [-k-1, -k]$ und $I_2 = [k, k+1]$ sind. Insbesondere ist der letzte Integrand durch eine Konstante beschränkt, die nur von $\mathcal{L}^n(K), u$ und v, nicht aber von k abhängt. Lässt man daher in der Energieungleichung

$$\frac{1}{2k} I\!P_U^{K_k,t}(U) \leq \frac{1}{2k} I\!P_U^{K_k,t}(V_k)$$

k gegen Unendlich gehen, so verschwinden die Integrale, in deren Integrationsgebiet I_1 und I_2 vorkommen. Man erhält die Ungleichung $I\!P_u^{K,t}(u) \leq I\!P_u^{K,t}(v)$ zur Zeit t. □

Korollar 2.12 *Seien $0 < s \leq 1$ und $0 \leq c < \infty$ beliebig aber fest gewählt. Für die Anfangswerte*

$$f(x) := \left(s(n-1) \log \frac{|x|}{\sup_{\partial E_0} |x|} \;-\; c \right)_+$$

hat das Problem $(\star)$ eine eindeutige schwache Lösung $0 \leq u \in \mathcal{C}$, und u erfüllt im Sinne des Limes superior der Differenzenquotienten die Abschätzungen

$$\begin{aligned} &i) \qquad |\nabla u| \leq \max H_{\partial E_0} \qquad \textit{und} \\ &ii) \quad \forall\; t > 0, \quad 0 \leq \frac{\partial}{\partial t} u \leq \frac{\sqrt{n\tilde{c}}}{\sqrt{t}} + \tilde{c}\;. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Diese Lösung u ist $\epsilon-$approximierbar und konvergiert für $t \longrightarrow \infty$ lokal gleichmäßig gegen eine stationäre Lösung.

Beweis: Wir bezeichnen mit ϕ_3^i und ϕ_4^i die Barrieren aus (1.14) beziehungsweise (1.15). Dabei verwenden wir in ϕ_4^i statt s eine Folge $s_i \nearrow s$, $s_i < s$ und in beiden Funktionen ϵ_i statt ϵ, wo $\epsilon_i \searrow 0$ für $i \longrightarrow \infty$. Wir arbeiten auf $\Omega_i := B_{R_i}(0)\backslash E_0$, wo $R_i \nearrow \infty$. Zusätzlich wählen wir $\epsilon_i \leq \epsilon(s_i, R_i)$ hinreichend klein, so dass die Gradientenbedingung für konstante Anfangswerte aus Definition 1.6 nicht verletzt wird. Wir approximieren schließlich f auf ganz $\mathbb{R}^n\backslash E_0$ lokal gleichmäßig durch

$$f_{\epsilon_i}(x) = \max\{\phi_3^i(x), \phi_4^i(x) - c\} \ .$$

Aus dem Existenzsatz 1.14 erhalten wir monoton wachsende Lösungen u_i dieser Probleme, die gleichmäßig die Gradientenschranke in der Form i) erfüllen. Nun wiederholen wir das Approximationsargument aus dem Beweis von Theorem 2.9. Wir erhalten die Existenz einer schwachen Lösung u zu den Anfangswerten f. Es muss $\dot{u} \geq 0$ gelten, weil für alle i bereits $\dot{u}_i \geq 0$ gilt.Da die Lösung $u(x,t)$ für festes x in t monoton wächst und beschränkt ist, muss sie punktweise konvergieren. Die Lipschitz-Schranke für $t > 0$ garantiert, dass diese Konvergenz lokal gleichmäßig ist.

□

Aus demselben Beweis folgt auch der folgende Satz.

Proposition 2.13 (Fortsetzungssatz) *Sei u eine monoton wachsende oder sogar stationäre schwache Lösung von $(\star)$ auf $\mathbb{R}^n\backslash E_0$. Sei weiter $\tilde{E}_0 \subset E_0$ ein zulässiger innerer Gebietsrand für Problem $(\star)$ und $t_0 > 0$ beliebig. Für die Anfangswerte*

$$\tilde{f}(x) \ = \ \begin{cases} u(x,t_0) & \text{für } \ x \in \mathbb{R}^n\backslash E_0 \\ 0 & \text{für } \ x \in E_0\backslash\tilde{E}_0 \end{cases}$$

hat dann das Problem $(\star)$ eine eindeutige schwache Lösung $0 \leq \tilde{u} \in \mathcal{C}$ auf $\mathbb{R}^n\backslash\tilde{E}_0$. Die Funktion $\tilde{u}$ ist $\epsilon-$approximierbar und erfüllt die Abschätzungen (2.15) mit $H_{\partial\tilde{E}_0}$ statt $H_{\partial E_0}$. Für $t \longrightarrow \infty$ konvergiert $\tilde{u}$ lokal gleichmäßig gegen eine stationäre Lösung.

Aus dem Fortsetzungssatz erhält man wegen der Monotonie in t der Lösung $\tilde{u}$ einen neuen Beweis für das Vermeidungsprinzip des IMCF, indem man u als die stationäre schwache Lösung von $(\star)$ auf $\mathbb{R}^n\backslash E_0$ wählt. Falls $(E_z)_{z\geq 0}$ und $(\tilde{E}_z)_{z\geq 0}$ Familien von Hyperflächen sind, die den schwachen IMCF mit Zeitparameter z erfüllen, so besagt dieses Vermeidungsprinzip, dass $\tilde{E}_0 \subset E_0$ auch $\tilde{E}_z \subseteq E_z$ für alle $z \geq 0$ impliziert.

Bemerkung zur Optimalität der Gradientenschranke: Falls $H_{\partial E_0} > 0$, so ist bekannt ([HI01], smooth start lemma), dass für kurze Zeit eine klassische Lösung des IMCF mit Startfläche ∂E_0 existiert. Wegen der Eindeutigkeit schwacher Lösungen fällt die schwache Lösung w des IMCF (mithin die stationäre schwache Lösung von $(\star)$) bis zu einem kleinen Niveau $z > 0$ mit der klassischen Lösung zusammen. Per definitionem gilt für die Funktion w, dass

$$|\nabla w(x)| = H_{\partial E_0}(x) \qquad \text{für alle } x \in \partial E_0.$$

Wir sehen daran, dass die Gradientenschranke $i)$ aus Korollar 2.12 einerseits global scharf auf den monoton wachsenden schwachen Lösungen von $(\star)$ mit $E_0 = B_r(y)$ ist und andererseits scharf im Sinne einer an mindestens einer Stelle in Gleichheit übergehenden Ungleichung auf den monoton wachsenden schwachen Lösungen von $(\star)$, falls ∂E_0 strikt positive mittlere Krümmung hat.

2.3 Regularität und Konvergenz der Niveaumengen

2.3.1 Motivation und Notation

Korollar 2.12 lässt hoffen, dass für $t \longrightarrow \infty$ schwache Lösungen so gut gegen stationäre Lösungen von Problem $(\star)$ konvergieren, dass auch die Ränder der Niveaumengen schwacher Lösungen u zu einem festen Niveau z gegen diejenige Menge konvergieren, die die Fläche ∂E_0 unter dem IMCF nach Zeit z erreichen würde. Dazu studieren wir die Regularität der Ränder der involvierten Niveauflächen in den folgenden Abschnitten und ihre Konvergenzeigenschaften ab Abschnitt 2.3.5.

Für die Regularität steht uns folgendes Theorem der geometrischen Maßtheorie zur Verfügung. Darin bezeichnen wir, wie für den Rest dieser Arbeit, für eine Menge $F \subset \mathbb{R}^n$ mit ∂F den maßtheoretischen Rand dieser Menge und mit $\partial^* F \subset \partial F$ ihren reduzierten Rand, das heißt diejenigen Punkte von ∂F, an denen im maßtheoretischen Sinne eine Normale definiert werden kann (siehe etwa [EG92], Abschnitt 5.7). Die Punkte des reduzierten Randes nennt man regulär, von der Menge $\partial F \backslash \partial^* F$ wird als der singulären Menge gesprochen. Eine präzise Definition davon, was es heißen soll, dass eine Menge ein Funktional in einer offenen Menge in einem Gebiet minimiert, ist zu Beginn von Abschnitt 2.3.2 gegeben.

Theorem 2.14 (Regularitätstheorem) *Sei H eine fast überall beschränkte messbare Funktion auf dem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Die Menge E enthalte eine offene Menge E_0 und minimiere das Funktional*

$$F \;\mapsto\; \tilde{J}_H^K(F) := \mathcal{H}^{n-1}(\partial^* F \cap K) + \int\limits_{F \cap K} H \; d\mathcal{L}^n \tag{2.16}$$

in jeder offenen Menge A in einem Gebiet $\Omega \backslash E_0$, das heißt jede Vergleichsmenge F enthalte E_0 ebenfalls. Falls dann ∂E_0 von der Klasse $C^{1,\alpha}$, $0 < \alpha \leq 1/2$ ist, so gilt

$$\begin{aligned} &\partial^* E \;\; \textit{ist eine} \;\; C^{1,\alpha}\textit{-Hyperfläche in } \mathbb{R}^n \\ &\textit{und} \;\; \mathcal{H}^k(\partial E \backslash \partial^* E) = 0 \;\; \textit{für} \;\; k > n - 8 \; . \end{aligned}$$

Dabei sind die $C^{1,\alpha}-$Abschätzungen für beliebig kleines $d > 0$ lokal gleichmäßig in der Menge

$$\partial_d^* E := \{x \in \partial^* E \mid \operatorname{dist}(x, (\partial E \backslash \partial^* E)) \geq d\} \tag{2.17}$$

und hängen nur von $n, \|H\|_\infty$ und den $C^{1,\alpha}-$Abschätzungen für ∂E_0 ab. Falls E das Funktional (2.16) in jeder offenen Menge in Ω minimiert, ohne dass E oder seine Vergleichsmengen F notwendigerweise ein Hindernis E_0 enthalten, so gilt die obige Aussage mit dem Unterschied, dass die lokal gleichmäßigen $C^{1,\alpha}$-Abschätzungen dann nur von n und $\|H\|_\infty$ abhängen.

Dabei sagen wir, eine Hyperfläche N erfülle solche lokal gleichmäßige $C^{1,\alpha}$-Schranken in einer Menge $A \subset \Omega$, falls es ein $\rho_0 > 0$ gibt, so dass für beliebiges $q \in A$ und für jedes $\rho \leq \rho_0$ die Flächenstücke $N \cap B_\rho(q) \cap A$ als Graphen von Funktionen g_q über den Tangentialräumen T_qN dargestellt werden können, so dass

$$\|g_q\|_{C^{1,\alpha}(T_qN \cap B_\rho(q))} \leq C < \infty \ ,$$

wo das Paar (C,ρ_0) unabhängig von q und nur abhängig von $n, \|H\|_\infty$ und gegebenenfalls den $C^{1,\alpha}-$Abschätzungen von ∂E_0 ist.

Man sagt im Fall des Theorems, E minimiere das Oberflächenfunktional plus die "bulk energy" H, gegebenenfalls unter Berücksichtigung des Hindernisses E_0. Mengen, die die Energie (2.16) minimieren, fallen insbesondere in die maßtheoretische Klasse der fast minimalen Mengen.

Beweis des Theorems: Alle Regularitätsaussagen folgen aus der Arbeit von I. Tamanini [Tam84], die mit fast minimalen Flächen arbeitet. Ein ausführlicher Beweis dafür, dass Flächen, die eine Bedingung der Art (2.16) unter Berücksichtigung eines Hindernisses erfüllen, fast minimal sind, findet sich in [Schb] im Anschluss an Theorem 4.1.3., in dem die Ergebnisse aus [Tam84] vorgestellt werden. Die $C^{1,\alpha}-$Regularität der Flächen folgt dort ebenfalls, wenn man nutzt, dass in unserer Situation insbesondere $H \in L^p_{loc}(\Omega)$ für beliebige $p > n$ ist und Proposition 4.2.1 aus [Schb] benutzt. Da dies in der dortigen Formulierung des Theorems nicht unmittelbar ersichtlich ist, zitieren wir für die $C^{1,\alpha}-$Regularität des reduzierten Randes aber das partial regularity Theorem aus [HI01].

□

Aus dem obigen Theorem folgt insbesondere, dass für $n \leq 7$ keine singuläre Menge $\partial^* E \backslash \partial E$ in den betrachteten Flächen auftritt. Wir werden mit Proposition 2.24 eine Aussage zitieren, die eine Kontrolle der Ortsänderung dieser singulären Menge unter L^1_{loc}-Konvergenz fast minimaler Mengen in beliebiger Dimension ermöglicht.

Wenn E eine abgeschlossene Menge ist, so bezeichne $int(E)$ ihr Inneres. Für den Rest dieser Arbeit führen wir die folgenden Bezeichnungen für die Subniveaumengen von Funktionen u und ihre Ränder ein:

$$\begin{aligned} E^t_z(u) &:= \{x \,|\, u(x,t) < z\} \quad \text{und} \quad {}^+E^t_z(u) := int(\{x \,|\, u(x,t) \leq z\}) \ , \\ N^t_z(u) &:= \partial E^t_z(u) \quad \text{und} \quad {}^+N^t_z(u) := \partial {}^+E^t_z(u) \ . \end{aligned} \tag{2.18}$$

Wo klar ist, welche Funktion u gemeint ist, lassen wir den Funktionsnamen weg. Bei Funktionen, die nicht von t abhängen, entfällt der Zeitindex. Beachte, dass aus

$u \in \mathcal{C}$ folgt, dass zu allen Zeiten t die Subniveaumengen $E_z^t(u)$ und ${}^+E_z^t(u)$ Mengen lokal endlichen Umfangs (Caccioppoli-Mengen) sind. Da unser Parameter z der Zeitrichtung des IMCF bei Huisken und Ilmanen entspricht, nennen wir in Anlehnung an deren Nomenklatur z ein *Sprungniveau von u zur Zeit t*, falls $\mathcal{L}^n({}^+E_z^t \backslash E_z^t) > 0$. Wegen der Koflächenformel für lipschitzstetige Funktionen (siehe z.B. [EG92], 3.4.2., remark *ii*) ist sogar ohne Verwendung der Blätterungseigenschaften dieser Mengen klar, dass für jede Zeit $t \geq 0$ gilt, dass $\mathcal{L}^n({}^+E_z^t \backslash E_z^t) = 0$ für fast alle z. Insbesondere liegt die Menge

$$R_t := \{z \in u(\cdot,t)(\bar{\Omega}) \mid \partial^* E_z^t = \partial^* {}^+E_z^t\} \tag{2.19}$$

dicht in $u(\cdot,t)(\bar{\Omega})$ für alle t.

2.3.2 Alternative schwache Formulierung

Seien $E, F \subseteq \Omega$ Mengen mit lokal endlichem Umfang, $A \subset \Omega$ offen und $K \subset\subset A$ ein Kompaktum mit glattem Rand. Wir bezeichnen die symmetrische Differenz $(E \backslash F) \cup (F \backslash E)$ zweier Mengen mit $E \Delta F$ und definieren die Energie von F bezüglich einer lipschitzstetigen Funktion u in K zum Zeitpunkt t als

$$\mathbb{I\!P}_u^{K,t}(F) \;:=\; \mathcal{H}^{n-1}(\partial^* F \cap K) - \int\limits_{F \cap K} |\nabla u(x,t)| + \dot{u}(x,t)\, d\mathcal{L}^n \;. \tag{2.20}$$

Beachte, dass der Integrand rechts bereits wegen der Wahl der Klasse $\mathcal{C}$ in (2.4) für jedes $t > 0$ beschränkt ist (wähle für $\dot{u}$ zu irregulären Zeiten zunächst o.B.d.A. den beschränkten Repräsentanten, der durch Ersetzung mit dem Limes superior der Differenzenquotienten erklärt ist.) Motivation und Rechtfertigung für diese Definition besteht in Theorem 2.16. Wir sagen E minimiere die Energie $\mathbb{I\!P}_u^{K,t}$ in der Menge A (von außen / von innen), falls

$$(\dagger\dagger) \qquad \mathbb{I\!P}_u^{K,t}(E) \leq \mathbb{I\!P}_u^{K,t}(F)$$

für alle F (mit $E \subseteq F$ / mit $F \subseteq E$) mit $E \Delta F \subseteq K \subset\subset A$. Wegen der allgemein gültigen Ungleichung $\mathcal{H}^{n-1}(\partial^*(E \cup F)) + \mathcal{H}^{n-1}(\partial^*(E \cap F)) \leq \mathcal{H}^{n-1}(\partial^* E) + \mathcal{H}^{n-1}(\partial^* F)$ gilt hier

$$\mathbb{I\!P}_u^{K,t}(E \cup F) + \mathbb{I\!P}_u^{K,t}(E \cap F) \leq \mathbb{I\!P}_u^{K,t}(E) + \mathbb{I\!P}_u^{K,t}(F) \;. \tag{2.21}$$

Deswegen minimiert E das Funktional $\mathbb{I\!P}_u^{K,t}$ in A zur Zeit t genau dann, wenn E dies von außen und von innen tut. Wir definieren

Definition 2.15 *Sei $u : \Omega \times [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $u \in \mathcal{C}$. Dann nennen wir u schwache Sublösung (schwache Superlösung) von $(\star)$, falls für fast alle Zeiten $t > 0$ für alle Niveaus z und für alle Mengen $A \subset\subset \Omega$, die Menge ${}^+E_z^t$ die Energie $\mathbb{I\!P}_u^{K,t}$ in A von außen minimiert (falls die Menge E_z^t die Energie $\mathbb{I\!P}_u^{K,t}$ in A von innen minimiert). Wir nennen u eine schwache Lösung, wenn u eine schwache Sub- und eine schwache Superlösung ist.*

Theorem 2.16 *Die Lösungsbegriffe der Definitionen 2.15 und 2.2 sind äquivalent.*

Beweis: Schritt 1) Zeige: Wenn u schwache (Sub- oder Super-) Lösung im Sinne von 2.15 ist, so auch im Sinne von 2.2. Sei dazu $v : \Omega \times [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Vergleichsfunktion für u, und sei $\{v \neq u\} \subset (K \times [0,T]) \subset\subset (\Omega \times [0,\infty))$. Seien $a \leq u, v \leq b$ auf $K \times [0,T]$ und $F_z^t := \{v(x,t) < z\}$, ${}^+F_z^t := \{v(x,t) \leq z\}$. Dann gilt zu allen Zeiten t für alle Niveaus z, dass $F_z^t \Delta E_z^t \subset K$. Wie in ([HI01], (1.7)) folgt mit der Koflächenformel, dass (für irreguläre Zeiten wähle einen beliebigen beschränkten Repräsentanten für $\dot{u}$)

$$\forall t > 0, \quad \mathbb{I}\!P_u^{K,t}(v) = \int_a^b \mathbb{I}\!P_u^{K,t}(F_z^t)dz + b \int_K (|\nabla u| + \dot{u})(x,t)d\mathcal{L}^n \ . \tag{2.22}$$

Wenn also ${}^+E_z^t$ bzw. E_z^t für fast alle $t > 0, z$ die Energie $\mathbb{I}\!P_u^{K,t}$ von außen beziehungsweise von innen in K minimieren, so ist auch $\mathbb{I}\!P_u^{K,t}(u) \leq \mathbb{I}\!P_u^{K,t}(v)$ für alle Vergleichsfunktionen $v \leq u$ beziehungsweise $v \geq u$. Beachte dazu, dass im ersten Term rechts beliebig zwischen ${}^+F_z^t$ und F_z^t gewechselt werden darf, da $\forall t$ für $\mathcal{L}^1$-fast alle z beide Mengen in den benötigten maßtheoretischen Eigenschaften gleich sind.

Schritt 2) Sei nun u schwache Sublösung von $(\star)$ nach 2.2. Fixiere $t > 0$ regulär, so dass $\mathbb{I}\!P_u^{K,t}(u) \leq \mathbb{I}\!P_u^{K,t}(v)$ für alle Vergleichsfunktionen $v \leq u$. Wähle z_0 beliebig und $F \subseteq \Omega$ so, dass ${}^+E_{z_0}^t \subset F$ und $F \setminus {}^+E_{z_0}^t \subset K \subset\subset \Omega$. Konstruiere aus F eine Vergleichsfunktion v für u. Definiere dazu

$$F^t := \begin{cases} F & t \in [0, t+1] \\ \emptyset & \text{sonst.} \end{cases} , \qquad F_z^t := \begin{cases} F^t \cup {}^+E_z^t & z \geq z_0 \\ {}^+E_z^t & z < z_0 \end{cases} .$$

Definiere v durch $F_z^t = \{v(x,t) < z\}$. Dann liegt für alle t die Funktion v in $BV_{loc}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, so dass die Energie $\mathbb{I}\!P_u^{K,t}(v)$ definiert ist. Indem man v durch $v_k \in C_c^\infty(K \times [0, t+2])$ so approximiert, dass zu jeder Zeit $|\nabla v_k| \longrightarrow |\nabla v|$ im Sinne von Radon-Maßen konvergiert, sieht man, dass die Energie $\mathbb{I}\!P_u^{K,t}(v)$ endlich ist und Gleichung (2.22) auch für v gilt. Aus $\mathbb{I}\!P_u^{K,t}(u) \leq \mathbb{I}\!P_u^{K,t}(v)$ folgt nun mit (2.22)

$$\begin{aligned} \int_a^b \mathbb{I}\!P_u^{K,t}({}^+E_z^t)dz \quad &\leq \quad \int_a^b \mathbb{I}\!P_u^{K,t}(F_z^t)dz \ , \\ \Longrightarrow \quad \int_{z_0}^b \mathbb{I}\!P_u^{K,t}({}^+E_z^t) - \mathbb{I}\!P_u^{K,t}(F^t \cup {}^+E_z^t)dz \quad &\leq \quad 0 \ , \\ \overset{(2.21)}{\Longrightarrow} \quad \int_{z_0}^b \mathbb{I}\!P_u^{K,t}(F^t \cap {}^+E_z^t) - \mathbb{I}\!P_u^{K,t}(F^t)dz \quad &\leq \quad 0 \ . \end{aligned}$$

Angenommen, es gilt für alle $z \in [z_0, b]$, dass $I\!P_u^{K,t}(F^t) \leq I\!P_u^{K,t}(F^t \cap {}^+E_z^t)$ (zeige unten: dies ist o.B.d.A. der Fall). Dann folgt aus der letzten Ungleichung $I\!P_u^{K,t}(F^t) = I\!P_u^{K,t}(F^t \cap {}^+E_z^t)$ für fast alle $z \in [z_0, b]$. Wenn nun $(z_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset [z_0, b]$ eine solche Folge mit $z_i \longrightarrow z_0$ ist, so konvergiert ${}^+E_{z_i}^t \longrightarrow {}^+E_{z_0}^t$ im Sinne von L^1_{loc}, und somit folgt aus der Unterhalbstetigkeit von $I\!P_u^{K,t}$, dass

$$I\!P_u^{K,t}({}^+E_{z_0}^t) \leq \liminf_{i\longrightarrow\infty} I\!P_u^{K,t}({}^+E_{z_i}^t \cap F) \leq I\!P_u^{K,t}(F) \ .$$

Also minimiert ${}^+E_{z_0}^t$ das Funktional $I\!P_u^{K,t}$ in K von außen. Zeige das "o.B.d.A.": Falls obige Annahme nicht erfüllt sein sollte, gibt es also $z_1 \in [z_0, b]$ mit $I\!P_u^{K,t}(F^t \cap {}^+E_{z_1}^t) < I\!P_u^{K,t}(F^t)$. Falls $z_1 = z_0$, so sind wir fertig. Sonst nimmt die linksseitig unterhalbstetige Funktion $z \mapsto I\!P_u^{K,t}(F^t \cap {}^+E_z^t)$ auf dem Kompaktum $[z_0, z_1]$ ihr Minimum an einer Stelle ζ an, und man kann obiges Argument auf $F^t \cap {}^+E_\zeta^t$ statt F^t anwenden, um die gewünschte Ungleichung zu erhalten. Folglich sind schwache Sublösungen im Sinne von 2.2 auch schwache Sublösungen im Sinne von 2.15.

Schritt 3) Sei zuletzt u schwache Superlösung nach 2.2. Hier wählt man $F \subset E_{z_0}^t$ und definiert

$$F^t := \begin{cases} F & t \in [0, t+1] \\ \Omega & \text{sonst.} \end{cases} , \qquad F_z^t := \begin{cases} F^t \cap E_z^t & z \leq z_0 \\ E_z^t & z > z_0 \end{cases} .$$

Dann verfährt man analog zu 2) mit dem Unterschied, dass am Ende $z_i < z_0$ und daher $E_{z_i}^t \cap F \longrightarrow E_{z_0}^t$ für $z_i \longrightarrow z_0$. Folglich minimiert $E_{z_0}^t$ die Energie $I\!P_u^{K,t}$ in K von innen.

□

2.3.3 Regularität der Mengen $\partial^*\ {}^{(+)}E_z^t(u)$

Bevor die Frage nach der Konvergenz von gewissen schwachen Lösungen von $(\star)$ gegen stationäre Lösungen gestellt werden soll, sammeln wir einige Eigenschaften der Energie der Mengen ${}^{(+)}E_z^t(u)$ und ziehen daraus Konsequenzen für die Regularität der Ränder in dem Fall, dass z ein beliebiges Niveau von u zu einer beliebigen Zeit t ist. Wir benötigen für die dazu benutzten Approximationstechniken insbesondere das Wissen über gewisse Monotonieeigenschaften der Energie in z bei festem t und auch in t. Die Ergebnisse sind in Proposition 2.22 zusammengefasst.

Sei u klassische Lösung von $(\star)$, $|\nabla u| \neq 0$ und daher alle $t > 0$ reguläre Zeiten. Fixiere t und z, und wähle $K \subset\subset \bar{\Omega}$ mit $E_z^t(u) \subset K$. Wir nutzen, dass für festes t auf den glatten Niveauflächen von u stets $H = \operatorname{div}\frac{\nabla u}{|\nabla u|}$ ist. Weil $\frac{\nabla u}{|\nabla u|^2}$ orthogonal zu ∂E_z^t ist, gilt entlang ∂E_z^t die Formel

$$\operatorname{div}_{\partial E_z^t}\frac{\nabla u}{|\nabla u|^2} = -\ \vec{\mathrm{H}} \cdot \frac{\nabla u}{|\nabla u|^2} = \frac{\nabla u}{|\nabla u|^2} \cdot H\nu.$$

Dabei bezeichnet $\vec{H}$ den mittleren Krümmungsvektor der Hyperfläche ∂E_z^t, $\mathrm{div}_{\partial E_z^t}$ ihren tangentialen Divergenzoperator und ν ihre äußere Einheitsnormale. Mit Koflächenformel, erster Variationsformel und der PDGL aus $(\star)$ berechnen wir:

$$\begin{aligned}\int\limits_{E_z^t\cap K} |\nabla u| + \dot{u}\ d\mathcal{L}^n &= \int\limits_{\{u<z\}} \frac{|\nabla u|+\dot{u}}{|\nabla u|}|\nabla u| d\mathcal{L}^n = \int\limits_0^z \int\limits_{\{u=s\}} \frac{1}{|\nabla u|}(|\nabla u|+\dot{u}) d\mathcal{H}^{n-1} ds \\ &= \int\limits_0^z \int\limits_{\{u=s\}} \frac{1}{|\nabla u|} H d\mathcal{H}^{n-1} ds = \int\limits_0^z \int\limits_{\{u=s\}} \frac{\nabla u}{|\nabla u|^2} H\nu\ d\mathcal{H}^{n-1} ds \\ &= \int\limits_0^z \int\limits_{\partial E_s^t} \mathrm{div}_{\partial E_s^t} \frac{\nabla u}{|\nabla u|^2} d\mathcal{H}^{n-1} ds = \int\limits_0^z \frac{d}{d\epsilon}\bigg|_{\epsilon=0} \mathcal{H}^{n-1}(\Phi^\epsilon(\partial E_s^t)) ds\ ,\end{aligned}$$

wo Φ^ϵ lokaler Fluss des Variationsvektorfeldes $\frac{\nabla u}{|\nabla u|^2}$ ist. Weil aber

$$\frac{d}{d\epsilon} u(\Phi^\epsilon(x)) = \langle \nabla u, \frac{\nabla u}{|\nabla u|^2}\rangle = 1$$

ist, gilt wegen der Gleichheit der Variationen auch die folgende Gleichheit:

$$\frac{d}{d\epsilon}\bigg|_{\epsilon=0} \mathcal{H}^{n-1}(\Phi^\epsilon(\{u=s\})) = \frac{d}{d\epsilon}\bigg|_{\epsilon=0} \mathcal{H}^{n-1}((\{u=s+\epsilon\})) = \frac{d}{ds}\mathcal{H}^{n-1}(\{u=s\})\ .$$

Man erhält also das folgende Lemma, weil

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_u^{K,t}(E_z^t) \ &= \ \mathcal{H}^{n-1}(\partial^* E_z^t \cap K) \ - \int\limits_{E_z^t\cap K} |\nabla u| + \dot{u}\ d\mathcal{L}^n \\ &= \quad \mathcal{H}^{n-1}(\partial E_z^t) \quad - \int\limits_0^z \frac{d}{ds}\mathcal{H}^{n-1}(\{u=s\}) ds \ = \ \mathcal{H}^{n-1}(\partial E_0)\ .\end{aligned}$$

Lemma 2.17 (Energieerhalt unter klassischem Fluss) *Falls u eine klassische Lösung von $(\star)$ ist, so haben die Mengen $E_z^t(u)$ für beliebiges $t > 0$ und beliebiges $z \geq 0$ die konstante Energie*

$$\mathbb{P}_u^{K,t}(E_z^t(u)) \ = \ \mathcal{H}^{n-1}(\partial E_0)\ . \qquad \square$$

Um die Verallgemeinerung dieser Aussage auf schwache Lösungen zu finden, beobachten wir folgende wichtige Unterhalbstetigkeit. Sei F_i eine Folge von Mengen mit lokal endlichem Umfang und konvergiere $F_i \overset{i\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} F$ gegen eine Menge F im Sinne

von $L^1_{loc}-$ Konvergenz der charakteristischen Funktionen. Dann hat F lokal endlichen Umfang, und es gilt zu regulärer Zeit t

$$\mathbb{P}_u^{K,t}(F) \leq \liminf_{i \longrightarrow \infty} \mathbb{P}_u^{K,t}(F_i) \ . \tag{2.23}$$

Die Unterhalbstetigkeit folgt aus dem Theorem über majorisierte Konvergenz und aus Aussage *ii)* in Lemma 2.5 durch Anwendung auf die Folge der charakteristischen Funktionen von F_i und der charakteristischen Funktion von F.

Um studieren zu können, wie weit der Energieerhalt aus Lemma 2.17 sich auf schwache Lösungen ausdehnen lässt, müssen wir den Begriff der totalen Energie einer präkompakten Menge $F \subset \bar{\Omega}$ mit endlichem Umfang wie folgt einführen:

$$\mathbb{P}_u^t(F) := \mathcal{H}^{n-1}(\partial^* F) - \int\limits_F |\nabla u| + \dot{u} \ d\mathcal{L}^n \ .$$

Es gilt offenbar $\mathbb{P}_u^t(F) = \mathbb{P}_u^{K,t}(F)$ für jedes $K \supset F$. Wenn in einer Aussage im Folgenden die totalen Energien mehrerer solcher Mengen F_i verglichen werden, so fassen wir stets $\mathbb{P}_u^t(F_i)$ als $\mathbb{P}_u^{K,t}(F_i)$ mit $\cup_{i\in\mathbb{N}} F_i \subset K$ auf. Dabei ist vorausgesetzt, dass $\cup_{i\in\mathbb{N}} F_i$ präkompakt ist. Man beachte, dass insbesondere die totale Energie der Mengen ${}^{(+)}E_z^t(u)$ für Lösungen u von $(\star)$ endlich ist, sofern die Mengen präkompakt sind.

Lemma 2.18 (Energieerhalt in der $z-$Variablen) *Sei $u \in C^{0,1}(\bar{\Omega}\times[0,\infty))$ eine schwache Sublösung von $(\star)$. Falls Ω einen äußeren Rand hat, sei dort $u(x,t) \equiv c(\Omega)$ und $0 \leq u \leq c(\Omega)$ für alle Zeiten t. Falls Ω keinen äußeren Rand hat, setze $c(\Omega) = \infty$. Sei ${}^+z_\infty = \sup\{z > 0 | {}^+E_z^t$ präkompakt $\}$ und entsprechend $z_\infty = \sup\{z > 0 | E_z^t$ präkompakt $\}$. Falls Ω einen äußeren Rand hat, sei ${}^+z_\infty = z_\infty = c(\Omega)$. Dann gilt für reguläre Zeiten $t > 0$ für $z < {}^+z_\infty$*

i) $z \mapsto \mathbb{P}_u^t({}^+E_z^t)$ *ist monoton wachsend in z für $z \geq 0$.*

ii) $\mathbb{P}_u^t(E_z^t) \leq \mathbb{P}_u^t({}^+E_z^t)$ *falls $z > 0$.*

Falls u wie oben, jedoch schwache Superlösung von $(\star)$ ist, gilt für $z < z_\infty$

iii) $z \mapsto \mathbb{P}_u^t(E_z^t)$ *ist monoton fallend in z für $z \geq 0$.*

iv) $\mathbb{P}_u^t(E_z^t) \geq \mathbb{P}_u^t({}^+E_z^t)$ *für $z \geq 0$*

Falls u wie oben, jedoch schwache Lösung von $(\star)$ ist, gilt für $0 < z < {}^+z_\infty$

v) $\mathbb{P}_u^t(E_{z_\infty}^t) = \mathbb{P}_u^t(E_z^t) = \mathbb{P}_u^t({}^+E_z^t) = \mathbb{P}_u^t({}^+E_0^t) = c(t) = \mathcal{H}^{n-1}(\partial^* {}^+E_0^t(u))$. *Dabei gilt die erste Gleichheit, falls $z_\infty < \infty$.*

Bemerkung: Man beachte, dass die Beweise der Lemmata 2.18 und 2.19 nicht von der speziellen "bulk energy" der Energie $\mathbb{P}_u^{K,t}$ abhängen, sondern nur von deren Unterhalbstetigkeit unter $L^1_{loc}-$Konvergenz der eingesetzten Mengen. Diese Unterhalbstetigkeit wäre auch für jede andere Energie derjenigen Form gegeben, die im Regularitätstheorem 2.14 betrachtet wird.

Beweis: Für den Beweis von *i)* wähle ein reguläres t fest und $0 \leq z_0 < z_1$. Dann ist ${}^+E^t_{z_0} \subset {}^+E^t_{z_1}$, und die Behauptung folgt, weil u Sublösung nach Definition 2.15 ist und daher ${}^+E^t_{z_0}$ die Energie $\mathbb{P}_u^{K,t}$ in einem geeigneten Kompaktum von außen minimiert. Behauptung *ii)* folgt wie folgt: Wegen der Monotonie *i)* auf Folgen $z_i \nearrow z$ gilt, dass $\mathbb{P}_u^{K,t}({}^+E^t_{z_i}(u)) \leq \mathbb{P}_u^{K,t}({}^+E^t_z(u))$. Wegen ${}^+E^t_{z_i} \longrightarrow E^t_z$ folgt *ii)* daher aus der Unterhalbstetigkeit von $\mathbb{P}_u^{K,t}$, die wir vor dem Lemma angemerkt haben. *iii)* beweist man analog zu *i)*, *iv)* analog zu *ii)*. Zu *v)*: Für $0 < z < {}^+z_\infty$ ist wegen *ii)* und *iv)* jeweils $\mathbb{P}_u^{K,t}(E^t_z) = \mathbb{P}_u^{K,t}({}^+E^t_z)$, und als Funktion von z ist diese Größe wegen *i)* und *iii)* konstant. Die drittletzte Gleichheit stimmt, weil für ein beliebiges Nicht-Sprungniveau $z > 0$ von u zur Zeit t stets ${}^+E^t_0 \subseteq E^t_z$ und sich deswegen die Gleichheit $\mathbb{P}_u^{K,t}(E^t_z) = \mathbb{P}_u^{K,t}({}^+E^t_0)$ direkt aus den Energieungleichungen für beide ergibt. Die erste Gleichheit folgt analog, die letzte schließlich durch Auswerten von $\mathbb{P}_u^t({}^+E^t_0)$.
□

Lemma 2.19 (Energieverhalten in der Zeit t) *Sei u eine schwache Lösung von $(\star)$. Falls u monoton wachsend in t ist, so ist die Energiekonstante $c(t)$ aus Lemma 2.18 v) monoton fallend. Genauer gilt für $0 < t < T$, falls T reguläre Zeit und daher das Integral definiert ist,*

$$c(T) \; + \int\limits_{{}^+E^t_0 \setminus {}^+E^T_0} (|\nabla u| + \dot{u})(x,T) \; d\mathcal{L}^n(x) \; \leq \; c(t) \; .$$

Falls u monoton fallend ist, gilt für $0 < t < T$, wo t reguläre Zeit ist,

$$c(t) \; \leq \; c(T) \; - \int\limits_{{}^+E^T_0 \setminus {}^+E^t_0} (|\nabla u| + \dot{u})(x,t) \; d\mathcal{L}^n(x) \; .$$

Beweis: Sei u monoton wachsend. Dann gilt ${}^+E^T_0 \subseteq {}^+E^t_0$ und wir können nutzen, dass ${}^+E^T_0$ die Energie $\mathbb{P}_u^{K,T}$ von außen minimiert. Wir wählen K mit ${}^+E^t_0 \subset K$ und haben

$$\begin{aligned} c(T) \; &= \mathbb{P}_u^{K,T}({}^+E^T_0) = \mathcal{H}^{n-1}(\partial^* {}^+E^T_0) \; - \; 0 \\ &\leq \; \mathcal{H}^{n-1}(\partial^* {}^+E^T_0) \; + \int\limits_{{}^+E^t_0 \setminus {}^+E^T_0} |\nabla u(x,T)| + \dot{u}(x,T) \; d\mathcal{L}^n \\ &\leq \; \mathcal{H}^{n-1}(\partial^* {}^+E^t_0) \; - \; 0 = \mathbb{P}_u^{K,t}({}^+E^T_0) = \; c(t) \; . \end{aligned}$$

Die Behauptung für monoton fallendes u folgt analog, weil nun ${}^+E_0^t \subseteq {}^+E_0^T$ und ${}^+E_0^t$ die Energie $I\!P_u^{K,t}$ von außen minimiert.

□

Mit dem folgenden wichtigen technischen Lemma erhalten wir als Gewinn aus dem Monotonieverhalten der Energie sofort die Regularität der Ränder von Sprungniveauflächen zu regulären Zeiten. Ebenso erhalten wir, dass die Ränder aller Subniveauflächen zu einer festen nicht regulären Zeit t_0 dennoch minimierend für ein passendes Energiefunktional der selben Art wie $I\!P_u^{K,t}$ sind. Auch die L^∞-Schranken der dort auftretenden 'bulk energy' sind nach Konstruktion offenbar so gut, wie man hoffen kann.

Lemma 2.20 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $E_i \subset \Omega$ eine Folge von Caccioppoli-Mengen, die in $L^1_{loc}(\Omega)$ zu $E \subset \Omega$ konvergiert. Sei $\mathcal{H}^{n-1}(\partial^* E_i \cap K) \leq C_1$ unabhängig von i für beliebige glatt berandete $K \subset \Omega$, K kompakt, und seien für jedes i Funktionen $H_i \in L^\infty(\Omega)$ gegeben, so dass $\|H_i\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_2$ unabhängig von i.*

Falls dann jede Menge E_i in einer offenen Menge $A \subset \Omega$ (von außen / von innen) minimierend für die Energie

$$J_{H_i}(F) = \mathcal{H}^{n-1}(\partial^* F \cap K) - \int\limits_{F \cap K} H_i \; d\mathcal{L}^n$$

ist, wo $F \Delta E_i \subset K \subset\subset A \subset\subset \Omega$ gilt, so existiert eine Funktion $H \in L^\infty(\Omega)$, so dass E in A (von außen / von innen) minimierend für die Energie

$$J_H(F) = \mathcal{H}^{n-1}(\partial^* F \cap K) - \int\limits_{F \cap K} H \; d\mathcal{L}^n$$

ist. H kann als der Limes jeder in L^∞ schwach konvergenten Teilfolge H_{i_k} gewählt werden und es gilt daher $\|H\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \limsup_{i \longrightarrow \infty} \|H_i\|_{L^\infty(\Omega)}$.

Bemerkung: Lemma 2.23 zeigt insbesondere, dass H auf den Rändern derjenigen Subniveaumengen von Lösungen, die nicht zu einem Sprungniveau gehören, wegen seiner Interpretation als verallgemeinerte mittlere Krümmung dieser Ränder bereits eindeutig ist. Insbesondere konvergiert jede der in L^∞ schwach konvergenten Teilfolgen H_i des Lemmas dort zu einem Repräsentanten der selben L^∞-Äquivalenzklasse.

Beweis: Die Unterhalbstetigkeit einer festen Energie unter $L^1_{loc}-$Konvergenz von Mengen ist bekannt. Dass also das feste Energiefunktional des Lemmas für den Spezialfall $H_i \equiv H$ unter $L^1_{loc}-$Konvergenz von Mengen nicht sogar stetig ist, rührt nur von dem $\mathcal{H}^{n-1}(\partial^* E_i)$-Term her. Damit ist heuristisch klar, dass die Arbeit des Beweises darin liegt, den Term $\mathcal{H}^{n-1}(\partial^* E)$ passend nach unten abzuschätzen, wofür wir auf den Beweis von Lemma 3.16 in [Scha] verweisen. Wir führen die nötigen Veränderungen an jenem Beweis für den Fall vor, in dem die Mengen E_i nach außen minimierend für ihre Energien sind. Der Fall der Minimierung nach innen ist völlig

analog und es ist bereits darauf hingewiesen worden, dass eine Menge eine Energie genau dann in einer offenen Menge minimiert, wenn sie dies in jener Menge von außen und von innen tut.

Wenn wir exakt gleich verfahren wie im Beweis von Lemma 3.16 in [Scha], dort jedoch statt der Oberflächenminimierung die Energieminimierung der Mengen E_i benutzen, so ergibt sich statt der letzten Ungleichung im dortigen Beweis die Aussage, dass für alle i

$$\mathcal{H}^{n-1}(\partial^* E_i \cap K) - \int\limits_{E_i \cap K} H_i \; d\mathcal{L}^n \;\leq\; \mathcal{H}^{n-1}(\partial^* F \cap K) + \phi_i - \int\limits_{F \cap K} H_i \; d\mathcal{L}^n \; . \qquad (2.24)$$

Dabei bezeichnet ϕ_i einen Integralterm, der für $i \longrightarrow \infty$ verschwindet und nur von den Spuren gewissen charakteristischer Funktionen auf dem dafür speziell gewählten ∂K (Originalnotation K') abhängt. Wegen der schwachen Kompaktheit gibt es eine Teilfolge der H_i, die wir wieder mit H_i bezeichnen und eine Funktion $H \in L^\infty(\Omega)$, so dass $H_i \rightharpoonup H$. Wegen der Definition der schwachen Konvergenz in L^∞ beziehungsweise wegen der Unterhalbstetigkeit der $BV-$Norm unter $L^1_{loc}-$Konvergenz gilt dann

$$\lim_{i \longrightarrow \infty} \int\limits_K \chi_F H_i \; d\mathcal{L}^n \;=\; \int\limits_K \chi_F H \; d\mathcal{L}^n \qquad \text{und}$$
$$\mathcal{H}^{n-1}(\partial^* E \cap K) \;\leq\; \liminf_{i \longrightarrow \infty} \mathcal{H}^{n-1}(\partial^* E_i \cap K) \; .$$

Zusätzlich ist aber für jedes feste $k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{i \longrightarrow \infty} \left| \int_{E_i \cap K} H_i - \int_{E \cap K} H \right| \;\leq$$
$$\lim_{i \longrightarrow \infty} \left(\left| \int_{E_i \cap K} H_i - \int_{E_k \cap K} H_i \right| + \left| \int_{E_k \cap K} H_i - \int_{E_k \cap K} H \right| + \left| \int_{E_k \cap K} H - \int_{E \cap K} H \right| \right)$$
$$\leq \lim_{i \longrightarrow \infty} \left(C_2 \int_K \left| \chi_{E_i} - \chi_{E_k} \right| + \left| \int_K \chi_{E_k} H_i - \int_K \chi_{E_k} H \right| + C_2 \int_K \left| \chi_{E_k} - \chi_E \right| \right)$$
$$\leq \; 2C_2 \mathcal{L}^n(E_k \Delta E) \; ,$$

wo im letzten Schritt wieder die schwache Konvergenz $H_i \rightharpoonup H$ eingegangen ist. Indem wir nun $k \longrightarrow \infty$ gehen lassen, zeigt die $L^1_{loc}-$Konvergenz $E_k \longrightarrow E$, dass

$$\lim_{i \longrightarrow \infty} \int_{E_i \cap K} H_i \; d\mathcal{L}^n \;=\; \int_{E \cap K} H \; d\mathcal{L}^n$$

Insgesamt erhalten wir also mit dem Grenzübergang $i \longrightarrow \infty$ aus der Ungleichung 2.24 die gewünschte Abschätzung

$$\mathcal{H}^{n-1}(\partial^* E \cap K) - \int\limits_{E \cap K} H \; d\mathcal{L}^n \;\leq\; \mathcal{H}^{n-1}(\partial^* F \cap K) - \int\limits_{F \cap K} H \; d\mathcal{L}^n \; .$$

□

Lemma 2.21 *Sei u schwache Lösung von $(\star)$ und $t > 0$ reguläre Zeit. Dann sind $\partial^* E_z^t(u)$ und $\partial^* {}^+E_z^t(u)$ jeweils $(n-1)$-dimensionale $C^{1,\alpha}-$Hyperflächen in $\mathbb{R}^n$, falls sie ein Kompaktum beranden. Die $C^{1,\alpha}-$Abschätzungen sind lokal gleichmäßig in den Mengen $\partial_d^* E_z^t(u)$ und $\partial_d^* {}^+E_z^t(u)$ für beliebiges $d > 0$ und hängen nur von $\||\nabla u| + \dot{u}\|_\infty$ zur Zeit t und den $C^{1,\alpha}$-Abschätzungen von ∂E_0 ab. Es ist stets*

$$\mathcal{H}^k(\partial^{(+)} E_z^t(u) \backslash \partial^{*\,(+)} E_z^t(u)) = 0 \quad \textit{für} \quad k \geq n-7 \ .$$

Beweis: Wenn z kein Sprungniveau von u zur Zeit t ist, gilt $\partial^* E_z^t(u) = \partial^* {}^+E_z^t(u)$. Weil u schwache Lösung ist, minimiert diese Menge die Energie $I\!P_u^{K,t}$ von innen und von außen und respektiert dabei das Hindernis E_0. Theorem 2.14 impliziert dann die lokale $C^{1,\alpha}-$Regularität und die Aussage über die Hausdorffdimension der singulären Menge. Dabei hängen die lokalen $C^{1,\alpha}$-Schranken von denen von E_0 und von H, also von $\sup|\nabla u|$ und $\sup|\dot{u}|$ ab.

Falls z ein Sprungniveau von u zur Zeit t ist, so existieren Folgen $(z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ und $(\tilde{z}_i)_{i\in\mathbb{N}}$, wo z_i und $\tilde{z}_i$ keine Sprungniveaus von u zur Zeit t sind, so dass $z_i \nearrow z$ und $\tilde{z}_i \searrow z$. Wir haben dann, dass

$$E_{z_i}^t \longrightarrow E_z^t \quad \text{und} \quad E_{\tilde{z}_i}^t \longrightarrow^+ E_z^t \quad \text{in} \quad L^1_{loc}(\Omega) \ .$$

Wegen der Monotoniebetrachtung aus Lemma 2.18 haben wir nun

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{n-1}(\partial^* E_{z_i}^t \cap K) \ \leq \ \mathcal{H}^{n-1}(\partial^* E_{z_i}^t) \ &= \ c(t) \ + \int\limits_{E_{z_i}^t} |\nabla u| + \dot{u} \\ &\leq \ c(t) \ + \int\limits_{B_R(0)} |\nabla u| + \dot{u} \ \leq \ \hat{c}(t) \cdot \omega_n R^n \ , \end{aligned}$$

wo $\hat{c}(t)$ hinreichend groß gewählt ist, um die L^∞-Norm von $(|\nabla u| + \dot{u})$ zu dominieren (beachte dazu, dass $u \in \mathcal{C}$) und $B_R(0)$ so groß ist, dass alle beteiligten Mengen darin enthalten sind. Eine analoge Abschätzung gilt offenbar für $\mathcal{H}^{n-1}(\partial^* E_{\tilde{z}_i}^t \cap K)$. Aus dem vorigen Lemma 2.20 folgt also, dass auch die Grenzflächen ∂E_z^t und $\partial^+ E_z^t$ die Energie $I\!P_u^{K,t}$ von innen und von außen minimieren. Die Regularität folgt somit wieder direkt aus Theorem 2.14.

□

Bemerkung: Generell erhält man im Fall $\epsilon-$approximierbarer Lösungen eine Abhängigkeit der $C^{1,\alpha}-$Schranken von n, f, t und ∂E_0, indem man die Abschätzungen aus (2.14) benutzt. Da die $|\dot{u}|$-Schranke im Falle $\epsilon-$approximierbarer Lösungen für wachsendes t nur besser wird und gegen ein $c(n, \tilde{c}) = c(n, f, \partial E_0)$ konvergiert, kann man sie in unseren späteren Betrachtungen stets vernachlässigen. Weiterhin verschwindet offenbar die Abhängigkeit von den Anfangswerten f zum Beispiel für die Anfangswerte aus Korollar 2.12 zugunsten der von n und E_0.

Proposition 2.22 *Sei u schwache Lösung von $(\star)$ und $t > 0$ beliebige Zeit. Dann existiert eine Funktion $H_t \in L^\infty(\mathbb{R}^n \backslash E_0)$, so dass für beliebige Niveaus z die Mengen ${}^+E_z^t(u)$ und für $z > 0$ auch die Mengen $E_z^t(u)$, falls sie präkompakt sind, die Energie*

$$J_{H_t}^K(F) = \mathcal{H}^{n-1}(\partial^* F \cap K) - \int\limits_{F \cap K} H_t \; d\mathcal{L}^n$$

in jeder offenen Menge $A \subset (\mathbb{R}^n \backslash E_0)$ minimieren. $\partial^* E_z^t(u)$ und $\partial^* {}^+E_z^t(u)$ sind daher jeweils $(n-1)$-dimensionale $C^{1,\alpha}-$Hyperflächen in $\mathbb{R}^n$. Ihre $C^{1,\alpha}-$Abschätzungen sind lokal gleichmäßig in den Mengen $\partial_d^* E_z^t(u)$ und $\partial_d^* {}^+E_z^t(u)$ aus (2.17) für beliebiges $d > 0$ und hängen nur von $\|H_t\|_\infty$ und den $C^{1,\alpha}$-Abschätzungen von ∂E_0 ab. Es ist stets

$$\mathcal{H}^k(\partial\, {}^{(+)}E_z^t(u) \backslash \partial^*\, {}^{(+)}E_z^t(u)) = 0 \quad \text{für} \quad k \geq n - 7 \; .$$

Beweis: Für reguläre Zeiten t folgt die Aussage aus dem vorangegangenen Lemma mit $H_t := (|\nabla u| + \dot{u})(\cdot, t)$. Falls t nicht regulär und $z > 0$ kein Sprungniveau ist, wähle eine Folge regulärer Zeiten $t_i \longrightarrow t$ mit $t_i > t$ und setze $H_i := (|\nabla u| + \dot{u})(\cdot, t_i)$, so dass $sup_i \|H_i\|_\infty \leq C < \infty$ unabhängig von i. Der einfacheren Notation halber wählen wir für jedes i $z_i \in (z - 1/i, z + 1/i)$ so, dass z_i kein Sprungniveau von u zur Zeit t_i ist und setzen $E_i := E_{z_i}^{t_i}$. Weil $u(\cdot, t_i) \longrightarrow u(\cdot, t)$ mit $i \longrightarrow \infty$ lokal gleichmäßig konvergiert, konvergiert dann auch $E_i \longrightarrow E := E_z^t$ in L^1_{loc} und $\mathcal{H}^{n-1}(\partial E_i) \leq \sup_i \hat{c}(t_i)\omega_n R^n \leq C$. Dass ${}^+E_0^t$ präkompakt ist, garantiert hier, dass C unabhängig von i ist. Die Existenz der Funktion H und die Energieminimierungseigenschaft von E_z^t folgen dann aus Lemma 2.20, die Regularität des Randes aus Theorem 2.14. Falls z Sprungniveau ist, so können wir mit den selben Argumenten wie in Lemma 2.18 und dem letzten Lemma sowohl E_z^t als auch ${}^+E_z^t$ bei festem t über geeignete Folgen z_i approximieren (beachte dazu die Bemerkung nach Lemma 2.18). Im letzten Lemma kann dabei $H_i = H$ unabhängig von i gewählt werden.

□

Völlig analog zu Huisken und Ilmanen in ([HI01], S.370) erhalten wir nun die Existenz einer schwachen mittleren Krümmung für die Ränder von Subniveauflächen, die nicht zu Sprungniveaus gehören.

Lemma 2.23 *Sei u eine schwache Lösung von $(\star)$ in beliebiger Dimension n und gelte auf ganz $\bar{\Omega} \times [0, \infty)$*

$$|\nabla u| \leq \tilde{c} \; .$$

Wähle $t > 0$ fest. Dann besitzen für fast alle z die Flächen $\partial^*\, {}^{(+)}E_z^t(u)$ eine schwache mittlere Krümmung $H_z^t \in L^\infty$ bezüglich ihrer maßtheoretischen äußeren Einheitsnormalen, wo $H_z^t(x) = H_t(x)$ für $\mathcal{H}^{n-1}-$fast alle $x \in \partial^*\, {}^{(+)}E_z^t(u)$ und für genau die Funktion H_t aus Proposition 2.22 ist. Das heißt, für alle Vektorfelder X auf einer Umgebung von $\partial^*\, {}^{(+)}E_z^t(u)$ mit kompaktem Träger in K gilt

$$\int\limits_{\partial^*\, {}^{(+)}E_z^t \cap K} \mathrm{div}_{\partial^*\, {}^{(+)}E_z^t} X \; d\mu \;=\; \int\limits_{\partial^*\, {}^{(+)}E_z^t \cap K} \langle X, \nu \rangle H_z^t \; d\mu \; .$$

Falls t reguläre Zeit ist, so gilt $H^t_z(x) = (|\nabla u| + \dot{u})(x,t)$ für fast alle $x \in \partial^{*\,(+)} E^t_z(u)$. Falls u $\epsilon-$approximierbar ist, gilt weiterhin zu beliebigen Zeiten t, dass

$$\|H^t_z\|_{L^\infty} \leq \frac{\sqrt{n\tilde{c}}}{\sqrt{t}} + \tilde{c}\ . \tag{2.25}$$

Beweis: Der Beweis des ersten Teils ist weitestgehend identisch mit dem bei [HI01] und benutzt die Minimierungseigenschaft aus Definition 2.2 beziehungsweise aus Proposition 2.22 in der ersten Variationsformel sowie die Koflächenformel. Man braucht im Beweis von [HI01] lediglich an den relevanten Stellen $|\nabla u|$ durch $(|\nabla u| + \dot{u})$ zu ersetzen und ein Einheitsvektorfeld ν zu definieren, indem man entlang der $C^{1,\alpha}-$Hyperflächen $\partial^{*\,(+)} E^t_z(u)$ dieses Vektorfeld ν durch deren Normale definiert, so dass dort $\mathcal{H}^{n-1}-$fast überall die Gleichheit $\nabla u = \nu|\nabla u|$ gilt, und indem man ν auf dem Inneren von Sprungflächen beliebig fortsetzt.

Für den Beweis der L^∞-Abschätzung verwenden wir, dass jede $\epsilon-$approximierbare Lösung gleichmäßiger Limes von passenden Lösungen u_ϵ des Problems $(\star_\epsilon)$ ist. Dort aber ist $\sqrt{|\nabla u_\epsilon|^2 + \epsilon^2} + \dot{u}_\epsilon = -H_{\nu,\epsilon}$. Die Behauptung folgt dann aus der $H_\nu-$Schranke in Lemma 1.12, weil für $\epsilon \searrow 0$ die translatierten Graphen von $\frac{u_\epsilon}{\epsilon}$ wo benötigt gegen Zylinder der Form $\partial^{*\,(+)} E^t_z(u) \times \mathbb{R}$ konvergieren.

□

Bemerkung zur Optimalität der $\|H^t_z\|_{L^\infty}$-Abschätzung: Auf $\Omega = \mathbb{R}^n \backslash B_r(0)$ ist die statische schwache Lösung des Problems $(\star)$ auch klassisch, und aus der Bemerkung über die Optimalität der Gradientenschranke $\tilde{c}$ im Anschluss an Korollar 2.12 wissen wir, dass für die monoton wachsende schwache Lösung aus eben diesem Korollar $H^t_0 = H_{\partial B_r} = \tilde{c}$ gilt. Es kann daher für $t \longrightarrow \infty$ keine bessere $L^\infty-$Abschätzung für H^t_z richtig sein. Allgemeiner gilt die Schärfe der L^∞-Abschätzung auf allen Gebieten, auf denen die Gradientenschranke $\tilde{c}$ optimal ist, und sie gilt auf dieselbe Weise.

2.3.4 Regularitätseigenschaften in Dimension $n \leq 7$

In Raumdimension $n \leq 7$ nutzen wir den Dimensionstrick von Abschnitt 1.3 aus. Wir erhalten so zusätzliche Eigenschaften von präkompakten Niveaumengen $\{u(x,t) = z\}$ derjenigen Lösungen u von $(\star)$, die lokal gleichmäßige Limiten von Lösungen u_ϵ der zugehörigen Approxmimationsprobleme $(\star_\epsilon)$, mithin $\epsilon-$approximierbar sind. In diese Klasse fällt insbesondere auch die eindeutige stationäre Lösung auf dem betrachteten Gebiet.

Es war noch nicht gezeigt, dass im Allgemeinen $\{u(x,t) = z\} = \partial\ {}^+E^t_z(u)$ gilt. Laut Definition ist nur ${}^+E^t_z(u) = int\{u(x,t) \leq z\}$ aber $\{u(x,t) \leq z\}$ nicht notwendig auch der Abschluss seines Inneren. Wäre diese Ungleichheit der Fall, so würde die betreffende Niveaumenge es nicht zulassen, mit den später von uns benutzten Methoden durch passende Niveaumengen zu anderen Zeiten im Hausdorff-Abstand approximiert zu werden. Wir schließen das entsprechende Phänomen für $\epsilon-$approximierbare Lösungen durch die Lemmata 2.27 und 2.28 aus.

Sei also im Folgenden, wo nichts anderes gesagt wird, stets $n \leq 7$ und u eine $\epsilon-$approximierbare Lösung von $(\star)$ auf $\mathbb{R}^n \backslash E_0$ zu Anfangswerten f. Wir wählen in den approximierenden Problemen $(\star_\epsilon)$ stets den äußeren Gebietsrand als $B = B_{R_\epsilon}(0)$ und R_ϵ so groß, dass für die betrachteten Niveaumengen $\{u(x,t_0) = z_0\} \subset B_r(0) \subset B_{R_\epsilon}(0)$ gilt und dass die im Beweis des schwachen Existenzsatzes 2.9 erzeugten Anfangswerte $f_i = f_{\epsilon_i}$ mit f auf $B_r(0)$ übereinstimmen. $\epsilon \leq 1$ wählen wir so klein, dass $(\star_\epsilon)$ als Anfangs- und Randwertproblem die Voraussetzungen des Existenzsatzes 1.14 erfüllt. Sprechen wir im Folgenden über den Grenzprozess $\epsilon \longrightarrow 0$, so meinen wir stets die im Beweis des schwachen Existenzsatzes benutzen Typen von Folgen $\epsilon_i \searrow 0$ und $R_i \nearrow \infty$ sowie $f_i = f_{\epsilon_i} \longrightarrow f$ lokal gleichmäßig.

Man kann ebenso zeigen, dass für $R_i \equiv R_0$ auf beschränkten Gebieten $B_{R_0} \backslash \Omega$ die folgenden Aussagen richtig bleiben, falls die Randwerte aller approximierenden Probleme $(\star_\epsilon)$ auf ∂B_{R_0} konstant und größer als z_0 sind. Lediglich die Abhängigkeit der unten benutzten und erhaltenen $C^{1,\alpha}-$ Abschätzungen ändert sich, sie schließt dann zusätzlich im Allgemeinen eine Abhängigkeit von R_0 mit ein, weil für möglicherweise nicht hinreichend groß gewähltes R_0 die Abschätzungen aus Theorem 2.9 diese Abhängigkeit in der L_∞-Norm des 'bulk energy'-Terms mitbringen. Wir benötigen für eine Dimensionsreduktion im Beweis von Lemma 2.25 noch das folgende Zitat.

Proposition 2.24 (Konvergenz zu regulären Punkten) *Seien E_i und E Mengen lokal endlichen Umfangs, $E_i \longrightarrow E$ im Sinne der $L^1_{loc}-$Konvergenz der charakteristischen Funktionen, die in jeder offenen Menge $A \subset \Omega$ für jedes glatt berandete Kompaktum K mit $K \subset\subset A \subset \Omega$ eine feste Energie der Form (2.16) minimieren. Sei weiter x_i eine Folge von Punkten mit*

$$x_i \in \partial E_i \quad \textit{für alle} \quad i \qquad \textit{und} \qquad x_i \longrightarrow x \in \Omega \ .$$

Dann gilt auch $x \in \partial E$. Falls sogar $x \in \partial^* E$ ist, erhält man zusätzlich, dass $x_i \in \partial^* E_i$ für hinreichend großes i ist.

Beweis: Die Proposition ist ein Spezialfall einer Teilaussage von Theorem 4.1.3 aus [Schb] und folgt aus der Hauptaussage von [Tam84].

□

Lemma 2.25 *Sei u eine $\epsilon-$approximierbare Lösung von $(\star)$ und $t_0 > 0$ eine beliebige Zeit. Ferner sei $x_0 \in \{u(x,t_0) = z_0\} \subset\subset (\mathbb{R}^n \backslash E_0)$ und z_0 kein Sprungniveau von u zur Zeit t_0. Dann existiert eine Hyperfläche $N \subset \mathbb{R}^n$, die lokal gleichmäßige $C^{1,\alpha}$-Schranken erfüllt, die wiederum nur von n, E_0, f und der Zeit t_0 abhängen, und für diese Hyperfläche N gilt, dass $x_0 \in N$ und $N \subseteq \{u(x,t_0) = z_0\}$. Insbesondere ist N der Graph einer $C^{1,\alpha}-$Funktion über $T_{x_0}N \cap B_\rho(x_0)$, wo ρ ebenfalls nur von n, E_0, f und der Zeit t_0 abhängt.*

Falls z_0 Sprungniveau von u zur Zeit t_0 ist und x_0 positiven Abstand zu den Komponenten der Sprungfläche ${}^+E^{t_0}_{z_0} \backslash E^{t_0}_{z_0}$ hat oder in deren Rand liegt, so existiert ebenfalls ein solches N.

Beweis: Schritt 1) Etabliere die Approximationssituation in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ zur festgehaltenen und daher gegebenenfalls nicht notierten Zeit t_0. Wir betrachten den Punkt $p_0 := (x_0, u(x_0, t_0)) = (x_0, z_0) \in (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$. Wir nutzen aus, dass die Niveaumengen der Funktionen U_ϵ aus Abschnitt 1.3 für jedes feste ϵ eine Blätterung von $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ zur Zeit t_0 bilden. Sei dazu

$$\gamma_\epsilon := u_\epsilon(x_0, t_0) - \epsilon u(x_0, t_0)$$

Dann gilt $U_\epsilon(p_0, t_0) = \gamma_\epsilon$. Bezeichnen wir also

$$N_\epsilon := \{(x, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} | U_\epsilon(x, z, t_0) = \gamma_\epsilon\}$$
$$\text{und}$$
$$E_\epsilon := \{(x, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} | U_\epsilon(x, z, t_0) < \gamma_\epsilon\} \ ,$$

so ist $p_0 \in N_\epsilon$. Weil U_ϵ das Problem $(\star\star_\epsilon)$ des Typs von Problem $(\star_\epsilon)$ schwach löst und zudem glatt ist, gilt stets $\partial E_\epsilon = N_\epsilon$, und die Mengen E_ϵ minimieren wegen Theorem 2.16 in jeder offenen Menge das Energiefunktional

$$I\!P_U^{K,t_0}(F) = \mathcal{H}^n(\partial^* F \cap K) - \int\limits_{F \cap K} |DU_\epsilon| + \frac{\partial}{\partial t} U_\epsilon \ d\mathcal{L}^{n+1}$$

ohne dabei zugleich ein Hindernisproblem zu lösen. Es gilt bei (o.B.d.A) hinreichend groß gewähltem Gebiet $B_{R_\epsilon} \backslash E_0$ wegen (1.26) aus Proposition 1.14 die Abschätzung

$$|DU_\epsilon| + |\frac{\partial}{\partial t} U_\epsilon| \quad \leq \quad 3\tilde{c} + 1 + \frac{\sqrt{n\tilde{c}}}{\sqrt{t_0}} \quad \leq \quad C(n, E_0, f) \ ,$$

wo f die Anfangswerte des Problems $(\star)$ und nicht die der Probleme $(\star_\epsilon)$ meint.

Schritt 2) Schließe singuläre Punkte im Limes aus, falls die N_ϵ lokal gegen einen Zylinder konvergieren (Dimensionsreduktion). Wir wollen dazu Lemma 2.20 benutzen. Insbesondere gilt für $H_\epsilon := |DU_\epsilon| + \frac{\partial}{\partial t} U_\epsilon$, dass $H_\epsilon \in L^\infty$, $\|H_\epsilon\|_\infty \leq C$ unabhängig von ϵ. Wegen der lokal gleichmäßigen Konvergenz $U_\epsilon \longrightarrow U$ mit $U(x, z, t) = u(x, t)$ konvergieren ferner für jedes Kompaktum $K \in ((\mathbb{R}^n \backslash E_0) \times \mathbb{R})$ die Mengen $E_\epsilon \cap K$ in $L^1(K)$ gegen $E := \{(x, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} | U(x, z, t) < z_0\}$. Wir benötigen eine Massenschranke. Wähle K o.B.d.A. mit glattem Rand. Seien $F_i := E_\epsilon \cup V_i$, wo $V_i \subset K$, ∂V_i glatt und wo für $i \longrightarrow \infty$ gilt, dass $\mathcal{L}^{n+1}(V_i) \longrightarrow \mathcal{L}^{n+1}(K)$ sowie $\mathcal{H}^n(\partial V_i) \longrightarrow \mathcal{H}^n(\partial K)$. Dann liefert Einsetzen in die Energieungleichung für E_ϵ, dass

$$\mathcal{H}^n(\partial E_\epsilon \cap K) \leq \mathcal{H}^n(\partial F_i \cap K) + \int\limits_{F_i \Delta E_\epsilon} |H_\epsilon| \, d\mathcal{L}^{n+1} \longrightarrow \mathcal{H}^n(\partial K) + \mathcal{L}^{n+1}(K) \cdot \|H_\epsilon\| \leq C_2(K).$$

Daher liefert Lemma 2.20, dass E minimierend für eine passende Energie der bekannten Form ist. Das Regularitätstheorem 2.14 bestätigt, dass wegen $n + 1 \leq 8$ nun $\mathcal{H}^1(\partial^* E \backslash \partial E) = 0$ gilt. Angenommen, ∂E habe lokal bei einem Punkt p_0 die Form eines Zylinders, $\partial E \cap K = (\partial E' \times (-\delta, \delta)) \cap K$ für ein kleines $\delta > 0$, wo E' die

Projektion von E auf die ersten n Komponenten und K ein geeignetes Kompaktum mit $p_0 \in K$ ist. Falls dann ein Punkt $q \in \partial E \cap A$ existiert mit $q \in (\partial^* E \backslash \partial E)$, so gilt auch $q' \times (-\delta, \delta) \cap K \subset (\partial^* E \backslash \partial E)$ für ein passendes $q' \in \mathbb{R}^n$, was ein Widerspruch zur Aussage $\mathcal{H}^1(\partial^* E \backslash \partial E) = 0$ ist. Folglich ist die Menge $\partial E =: N_0$ dort regulär, wo sie eine solche Zylinderform hat. Somit besagt das Regularitätstheorem 2.14 zusammen mit Proposition 2.24, dass für alle betrachteten $\epsilon > 0$ die glatten Flächen N_ϵ und N_0 lokal gleichmäßige und auch in ϵ gleichmäßige $C^{1,\alpha}$-Abschätzungen besitzen, wo N_0 ein Zylinder dieser Form ist. Wir haben bewiesen: wo für die Normale $\nu = \nu_{N_0}$ des reduzierten Randes $N_0 = \partial^* E$ gilt, dass $\nu \perp e_z$, da ist bereits $\partial E = \partial^* E$.

Schritt 3) Nutze die Regularität der Approximatoren N_ϵ. Seien $\nu_\epsilon := \nu_{N_\epsilon}(p_0)$ die Normalen dieser Hyperflächen im Punkt p_0. Wähle eine Folge ϵ_i aus. Weil $\nu_i := \nu_{\epsilon_i}$ eine Folge in S^{n+1} bilden, existiert $\nu \in S^{n+1}$ und eine Teilfolge $(\nu_k)_{k\in\mathbb{N}} = (\nu_{i_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\nu_k \longrightarrow \nu$. Sei T_ν die Hyperebene in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ mit $p_0 \in T_\nu$, $\nu \perp T_\nu$. Falls $\nu \perp e_z$ ist, so gilt wegen der Gleichmäßigkeit der $C^{1,\alpha}-$Schranken Folgendes: Für hinreichend großes k sind wegen der vorangestellten Proposition 2.24 die Flächen $N_k = N_{\epsilon_k}$ über $T_\nu \cap B_\rho(p_0)$ als Graphen von $C^{1,\alpha}$-Funktionen g_k darstellbar, wobei $\rho = \rho_0/2$, ρ_0 aus dem Regularitätstheorem 2.14 gewählt werden kann. Eine Teilfolge, wir wollen sie wieder mit $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ bezeichnen, konvergiert also gegen eine $C^{1,\alpha}-$Funktion g über $T_\nu \cap B_\rho(p_0)$, deren Graph wir N_0 nennen. Nun kann man sukzessive Teilfolgen der N_ϵ so auswählen, dass auch global die N_k gegen eine reguläre Hyperfläche konvergieren, die in $B_\rho(p_0)$ mit N_0 übereinstimmt und im Folgenden auch so genannt werden soll.

Sei nun $p \in N_0$ ein beliebiger Punkt, dann existiert eine Folge von Punkten p_k mit $p_k \in N_k$ und $p_k \longrightarrow p$ für $k \longrightarrow \infty$. Aber N_k sind Niveauflächen von $U_k = U_{\epsilon_k}$ und

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} |U_k(p_k) - U(p)| \;\leq\; \lim_{k\longrightarrow\infty} (|U_k(p_k) - U_k(p)| + |U_k(p) - U(p)|) = 0$$

weil wegen der Stetigkeit von U_k und der lokal gleichmäßigen Konvergenz $U_k \longrightarrow U$ beide Limiten einzeln existieren und gleich Null sind. Zugleich gilt

$$\lim U_k(p_k) \;=\; \lim \gamma_{\epsilon_k} \;=\; z_0$$

und daher $U(p) = z_0$ für alle $p \in N_0$, also $N_0 \subset \{(x,z) | U(x,z,t_0) = z_0\}$.

Schritt 4) Unterscheide anhand der Geometrie von N_0 zwischen Sprungniveaus und anderen Niveaus von u. Nehme zunächst an, für alle $q \in N_0$ gelte $\nu_{N_0}(q) \perp e_z$. Dann ist N_0 global ein Zylinder, $U \equiv z_0$ auf N_0 und der Schnitt

$$N := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; (x,z) \in N_0 \right\}$$

ist unabhängig von der Wahl von z eine reguläre Hyperfläche mit den selben lokal gleichmäßigen $C^{1,\alpha}-$Abschätzungen wie N_0. Wegen $u(x,t_0) = U(x,z,t_0)$ ist $N \subset \{u(\cdot,t_0) = z_0\}$ die gesuchte Hyperfläche.

Sei nun N_0 so, dass ein $q = (q', q_z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ existiert mit $\langle \nu_{N_0}(q), e_z \rangle \neq 0$. Dann existiert $r > 0$ mit $\langle \nu_{N_0}, e_z \rangle \neq 0$ auf ganz $B_r(\tilde{q})$ für ein passendes $\tilde{q}$. Sei o.B.d.A. bereits $q = \tilde{q}$. Wir betrachten $B = B_{r/2}(q') \subset \mathbb{R}^n$. Weil $N_k \longrightarrow N_0$ und die N_k Graphen über jeder Hyperebene $(\mathbb{R}^n \times \{z\})$ sind, ist $N_0 \cap (\bar{B} \times \mathbb{R})$ der Graph einer stetigen Funktion $g : \bar{B} \longrightarrow \mathbb{R}$. Genauer gesagt gilt (Index k bedeutet stets ϵ_k)

$$N_k = \left\{ (x, z) \;\middle|\; z = \frac{u_k(x, t_0)}{\epsilon_k} - \frac{\gamma_k}{\epsilon_k} \right\}$$

und deswegen

$$g(x) - z_0 \;=\; \lim_{k \longrightarrow \infty} \left(\frac{u_k(x, t_0)}{\epsilon_k} - \frac{\gamma_k}{\epsilon_k} \right) - z_0 \;=\; \lim_{k \longrightarrow \infty} \frac{u_k(x, t_0) - u_k(x_0, t_0)}{\epsilon_k} \; .$$

Weil g beschränkt ist, ist auch der letzte Term dem Betrage nach durch eine Konstante C beschränkt und wir erhalten einen Widerspruch, wenn nicht für hinreichend große k gilt $u_k(x, t_0) - u_k(x_0, t_0) \leq \epsilon_k(C+9)$. Aber dann ist $u_k(x, t_0) \leq \epsilon_k(C+9) + u_k(x_0, t_0)$ und wegen der lokal gleichmäßigen Konvergenz $u_k \longrightarrow u$ gilt $u_k(x, t_0) \longrightarrow u(x_0, t_0) = z_0$ für alle $x \in B$ und somit ist z_0 Sprungniveau. Wegen der Geometrie von N_0 kann man offenbar den Ausgangspunkt $q = (q', q_z)$ der Überlegung so wählen, dass $|q' - x_0|$ beliebig klein ist. Folglich liegt x_0 im Abschluss einer Zusammenhangskomponente E mit $B \subset E$ von ${}^{+}E^{t_0}_{z_0} \backslash E^{t_0} - z_0$, auf der $u(x, t_0) \equiv z_0$ gilt.

□

Bemerkung: Wegen der häufigen Auswahl von Teilfolgen ist die gefundene Hyperfläche N möglicherweise hochgradig uneindeutig. Wir zeigen daher das folgende

Lemma 2.26 *Sei $n \leq 7$ und u eine $\epsilon-$approximierbare Lösung von $(\star)$. Alle Bezeichnungen seien wie in der Aussage des letzten Lemmas gewählt. Falls $C^{1,\alpha}$ Hyperflächen $N_1 \neq N_2$ existieren mit $x_0 \in (N_1 \cap N_2)$ und $(N_1 \cup N_2) \subset \{u(x, t_0) = z_0\}$, so ist z_0 ein Sprungniveau für u zur Zeit t_0 und x_0 liegt im Abschluss einer Zusammenhangskomponente von ${}^{+}E^{t_0}_{z_0} \backslash E^{t_0}_{z_0}$.*

Beweis: Wir argumentieren so, wie weiter hinten im Beweis des Konvergenztheorems 2.33 ausführlich dargestellt, indem wir einen Radius r so klein wählen, dass die beiden Flächen N_i über ihren Tangentialebenen $T_i = T_{x_0} N_i \cap B_r(x_0)$ als Graphen von $C^{1,\alpha}$-Funktionen f_i dargestellt werden können, für die jeweils $Df_i(0) = 0, f_i(0) = 0$ und $|Df| \leq 1/100$, folglich $|f_i| \leq r/100$ gilt. Insbesondere ist $\mathrm{dist}(x, T_i) \leq r/100$ für jedes $x \in N_i$. Wir reduzieren die Betrachtung in mehreren Schritten jeweils auf die für uns ungünstigsten und somit hinreichenden Fälle. Sei daher $T_1 \perp T_2$. $B_r(x_0) \backslash (T_1 \cup T_2)$ besitzt dann eine Zusammenhangskomponente K, deren Rand sowohl T_1 als auch T_2 nichttrivial schneidet. Es genügt, den Fall zu betrachten, in dem $K \cap N_i = \{x_0\}$. Angenommen, z_0 ist kein Sprungniveau von u zur Zeit t_0. Dann existiert in $B_{r/4}(x_0)$ ein Punkt y mit $u(y, t_0) = z_1 \neq z_0$. Wir betrachten den Fall $z_1 < z_0$, der andere Fall liegt gänzlich analog. Es existiert dann eine nichtleere offene Menge $E := \{x \in$

$B_{r/4}(x_0) \mid u(x,t_0) < z\}$, wo $z_1 < z < z_0$ und z kein Sprungniveau von u zur Zeit t_0 ist. Sei $y \in \partial E$ so, dass $r_y = |y - x_0| = \mathrm{dist}(\partial E, x_0)$. Wegen des vorangegangenen Lemmas existiert in $B_r(x_0)$ daher eine $C^{1,\alpha}-$ Hyperfläche N mit $y \in N$ und $N \subset \partial E$. Wenn $T_y = T_y(N)$ die Tangentialebene von N in y bezeichnet, so gilt wieder $\mathrm{dist}(x, T_y) \leq (r/100)$ für alle $x \in N$. Nun ist aber zusätzlich wegen der Wahl von y offenbar $T_y = T_y(\partial B_{r_y})$. Es genügt im Folgenden, den symmetrischen Fall zu betrachten, in dem $\mathrm{dist}(y, T_1) = \mathrm{dist}(y, T_2)$ und T_y parallel zu $T_1 \cap T_2$ ist. Elementare Anwendung des Satzes von Pythagoras zeigt dann, dass $\mathrm{dist}(x_0, (T_y \cap T_i)) \leq r/(2\sqrt{2})$. Aber dann muss $(N \cap N_i) \cap B_{r/2}(x_0)$ nichtleer sein, was einen Widerspruch zur Wohldefiniertheit der Funktion u darstellt, da u auf N und N_i unterschiedliche Werte annimmt. Folglich muss bereits $u(x,t_0) \equiv z_0$ auf ganz $B_{r/4}(x_0)$ gewesen sein.

□

Korollar 2.27 *Sei $n \leq 7$ und u eine $\epsilon-$approximierbare Lösung von $(\star)$. Ferner sei z_0 kein Sprungniveau von u zur Zeit t_0 und die Menge $\{u(\cdot,t_0) = z_0\}$ präkompakt. Dann ist*

$$\{u(\cdot,t_0) = z_0\} = \partial E_{z_0}^{t_0} = \partial\{u(\cdot,t_0) > z_0\} \ .$$

Die Menge zerfällt in Zusammenhangskomponenten N, die jeweils kompakte $C^{1,\alpha}$-Hyperflächen ohne Rand sind und die jeweils genau eine Zusammenhangskomponente von $E_{z_0}^{t_0}(u)$ beranden. Die $C^{1,\alpha}$-Abschätzungen für diese Hyperflächen N sind lokal gleichmäßig in jeder Kugel im Komplement von $E_0 \subset \mathbb{R}^n$ und hängen nur von n, E_0, f und t_0 ab.

Beweis: Lemma 2.26 besagt mit Hilfe von Lemma 2.25, dass $\{u(\cdot,t_0) = z_0\}$ lokal um einen ihrer Punkte jeweils aus genau einer $C^{1,\alpha}-$Hyperfläche besteht, sich also nicht verzweigen kann. Lemma 2.25 liefert zudem, dass diese Hyperfläche sich schließen muss, da sie als Hyperfläche keine Randpunkte haben kann (Fortsetzbarkeit durch Graphen-Darstellung in Kugeln von festem Radius), die Menge $\{u = z_0\}$ aber kompakt ist.

□

Wenn wir im Folgenden davon sprechen, dass eine Funktion $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ an einer Stelle x_0 ein isoliertes inneres Minimum (Maximum) hat, so meinen wir, dass eine offene Umgebung $U(x_0) \subset \Omega$ existiert, so dass $f(x) \geq f(x_0) := z_0$ ($\leq f(x_0) = z_0$) in ganz $U(x_0)$ und $f(x) > z_0$ ($< z_0$) auf $\partial U(x_0)$. Wenn wir davon sprechen, dass die Funktion f ein solches Minimum (Maximum) in einem Gebiet Ω hat, so meinen wir, dass $U(x_0) \subset \Omega$ gewählt werden kann.

Korollar 2.28 *Sei $n \leq 7$, z_0 Sprungniveau einer $\epsilon-$approximierbaren Lösung u von $(\star)$ zur Zeit t_0 und die Menge $\{u(\cdot,t_0) = z_0\}$ präkompakt. Dann ist*

$$\{u(\cdot,t_0) = z_0\} \quad = \quad \overline{{}^{+}E_{z_0}^{t_0}} \quad \setminus \quad \overline{\overset{\circ}{E}{}_{z_0}^{t_0}} \ .$$

Jede Zusammenhangskomponente dieser Menge enthält eine Zusammenhangskomponente von E_0 oder ein isoliertes Minimum von $u(\cdot, t_0)$ mit Wert $z \leq z_0$ oder ein isoliertes Maximum von $u(\cdot, t_0)$ mit Wert $z \geq z_0$. Der Rand jeder Zusammenhangskomponente von $\{u(\cdot, t_0) = z_0\}$ ist eine kompakte $C^{1,\alpha}$-Hyperfläche und die $C^{1,\alpha}$-Abschätzungen für diese Hyperfläche sind lokal gleichmäßig in jeder Kugel im Komplement von $E_0 \subset \mathbb{R}^n$ und hängen nur von n, E_0, f und t_0 ab.

Beweis: Die Beweise von Lemma 2.26 und 2.25 besagen, dass die Ränder von Gebieten mit $u(\cdot, t_0) \equiv z_0$ ebenfalls Hyperflächen mit den dort erklärten lokal gleichmäßigen $C^{1,\alpha}-$Schranken sind. Ansonsten folgt die Behauptung wie im vorangegangenen Lemma.

□

Lemma 2.29 *Sei $n \geq 3$ beliebig. Punktweise monoton in t wachsende Lösungen von $(\star)$ haben zu keiner Zeit isolierte innere Extrema im Raum. Monoton in t fallende Lösungen von $(\star)$ haben zu keiner Zeit isolierte innere Minima im Raum.*

Beweis: Das Lemma gilt wegen der folgenden technischeren Aussage

Lemma 2.30 *Lösungen u von $(\star)$, die in einem Gebiet $\Omega \times (t_1, t_2)$ fast überall $(|\nabla u| + \dot{u}) \geq 0$ erfüllen, haben zu Zeiten $t \in (t_1, t_2)$ keine isolierten inneren Extrema in Ω. Dabei genügt es, $\dot{u}$ im Sinne des Limes inferior seiner Differenzenquotienten zu verstehen. Ist t_0 reguläre Zeit, so hat u bereits dann in Ω zur Zeit t_0 keine isolierten inneren Extrema, wenn lediglich zur Zeit t_0 gilt, dass punktweise fast überall $(|\nabla u| + \dot{u}) \geq 0$.*

Lösungen von $(\star)$, die in einem Gebiet $\Omega \times (t_1, t_2)$ punktweise monoton fallend in der Zeit sind, haben zu Zeiten $t \in (t_1, t_2)$ keine isolierten inneren Minima in Ω. Ist t_0 reguläre Zeit, so hat u bereits dann in Ω keine isolierten inneren Minima, wenn lediglich zu Zeit t_0 gilt, dass punktweise fast überall $\dot{u} \leq 0$.

Beweis: Sei die Zeit t_0 reguläre Zeit für u. Falls $u(\cdot, t_0)$ ein isoliertes inneres Minimum (Maximum) an einer Stelle x_0 mit Wert z hat, dann existiert ein kleines $1 > \delta > 0$, so dass auf dem Rand einer passenden Umgebung $U(x_0)$ gilt, dass $u(x, t_0) \geq z + 2\delta$ $(u(x, t_0) \leq z - 2\delta)$. Weil u lipschitzstetig ist, kann man U o.B.d.A. als glatt berandetes Kompaktum K wählen. Sei daher $E := \{u < z + \delta\} \cap K$ $(E := \{u > z - \delta\} \cap K)$ Wir definieren die Vergleichsfunktion v zur Zeit t_0 durch $v \equiv z + \delta$ $(v \equiv z - \delta)$ auf E und $v = u$ sonst. In der Zeit setzen wir v beliebig aber lipschitzstetig so fort, dass v erlaubte Vergleichsfunktion für u wird. Setzen wir v in die Energieungleichung (†) ein, so erhalten wir nach Umsortieren der Terme

$$\int\limits_{E \times \{t_0\}} |\nabla u| + u(|\nabla u| + \dot{u}) \quad \leq \quad \int\limits_{E \times \{t_0\}} c(|\nabla u| + \dot{u}) \ ,$$

wo $c = z + \delta$ $(c = z - \delta)$. Nutzt man nun auf E die Abschätzung $z \leq u \leq (z + \delta)$ $((z - \delta) \leq u \leq z)$ aus, so führt unter der Annahme eines isolierten inneren Miminums

die Bedingung $\dot{u} \leq 0$, oder die insbesondere für monoton wachsende Lösungen erfüllte Bedingung $(|\nabla u| + \dot{u}) \leq u$ jeweils zu dem Ergebnis, dass

$$\int\limits_{E\times\{t_0\}} |\nabla u| \leq 0$$

womit u in E konstant und gleich v sein müsste, was ein Widerspruch ist. Läge ein inneres Maximum vor, so käme auf analoge Weise ein Widerspruch zustande, wenn man annähme, dass $(|\nabla u| + \dot{u}) \geq 0$ auf E.

Falls t_0 keine reguläre Zeit ist, so betrachte $t \in (t_1, t_2)$ nahe bei t_0, so dass wegen der Stetigkeit von u in Zeitrichtung auch $u(\cdot, t)$ ein isoliertes inneres Extremum in einer Umgebung von x_0 hat. Der Beweis beider Lemmata ist damit abgeschlossen. □

Bemerkung: Aus den vergangenen Lemmta folgt in Dimension $n \leq 7$ insbesondere ein alternativer Beweis für die gleichmäßige $C^{1,\alpha}-$Regularität der Ränder aller Sub- und Superniveaumengen von $\epsilon-$approximierbaren Lösungen u auch zu Zeiten t, die für u keine regulären Zeiten im Sinne der Energieminimierung sind.

2.3.5 Konvergenz der Niveaumengen

Eine Funktion u nennt man eigentlich, falls $\{u \leq z\} \subset\subset \Omega$ für alle Niveaus z. Wir erinnern weiter daran, dass eine Folge von Mengen $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ genau dann im Sinne des Hausdorff-Abstandes gegen eine Menge N konvergiert, wenn gilt

$$\forall \epsilon > 0\ \exists k_0 \in \mathbb{N}: \quad \forall k > k_0 \begin{cases} \forall\ x \in N_k: & \operatorname{dist}(x, N) \leq \epsilon \ \text{ und} \\ \forall\ y \in N: & \operatorname{dist}(y, N_k) \leq \epsilon\ . \end{cases} \tag{2.26}$$

Falls $N_k = \partial E_k$ für alle k sowie $N = \partial E$ ist und $\partial E_k \longrightarrow \partial E$ im Sinne des Hausdorff-Abstandes konvergiert, so konvergiert offensichtlich insbesondere $E_k \longrightarrow E$ im Sinne der $L^1_{loc}-$Konvergenz der charakteristischen Funktionen. Sei u schwache Lösung von $(\star)$, die für $t \longrightarrow \infty$ gegen eine stationäre schwache Lösung w konvergiert. Unabhängig von der Dimension n konvergieren dann die Niveaumengen $\{u(x,t) = z\} \cap B_R(0)$ für beliebig großes R im Hausdorff-Abstand gegen die Niveauflächen der stationären Lösung, falls z kein Sprungniveau der stationären Lösung ist und zusätzlich $\{w = z\} = \partial\{w < z\} \subset B_R(0)$ gilt. Man beachte, dass die Frage keine Rolle spielt, ob das Niveau z Sprungniveau für die approximierende Funktion u zu irgendwelchen Zeiten ist. Konvergenz im Sinne des Hausdorff-Abstandes gilt für solche Niveaus sogar global, falls u zu allen Zeiten eine Wachstumsbedingung der Art

$$u(x,t) \geq \left(s(n-1) \log \frac{|x|}{\sup_{\partial E_0} |x|} \ - \ c \right)_+ \tag{2.27}$$

erfüllt, wo $0 < s \leq 1$ und $0 \leq c < \infty$ unabhänging von t sind. Dies gilt zum Beispiel für die monoton wachsenden Lösungen u aus Korollar 2.12 oder aus dem Fortsetzungssatz 2.13. Beide Bedingungen verhindern, dass sich Zusammenhangskomponenten einer Niveaumenge $N_z^t(u)$ bei festem z für $t \longrightarrow \infty$ der Konvergenz entziehen, indem sie in die räumliche Unendlichkeit entschwinden.

Die Konvergenz erhalten wir für Niveaus $z > 0$ aus dem wesentlich allgemeineren folgenden Lemma durch die Wahl $u_i(x) := u(x, t_i)$ auf einer passenden Folge $t_i \longrightarrow \infty$ und nach Einschränkung auf Kugeln B_{R_i} mit $R_i \nearrow \infty$. Beachte, dass das Lemma nicht benutzt, dass u_i oder w Lösung irgendeiner Gleichung ist.

Lemma 2.31 *Sei $R >> 0$ fest gewählt und $\Omega = B_R(0) \backslash E_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit kompaktem Rand. Sei weiter $w : \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ lipschitzstetig in $\bar{\Omega}$ und nichtnegativ. Sei nun $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $C^{0,1}\bar{\Omega}$, die gleichmäßig gegen w konvergiert. Falls $z_0 \in \mathcal{R}$, wo*

$$\mathcal{R} := \{z \in (w(\Omega) \backslash w(\partial\Omega)) \ : \ \partial\{w > z\} = \partial\{w < z\}\} \ ,$$

so konvergieren die Niveaumengen $\{u_i = z_0\}$ im Sinne des Haussdorf-Abstandes gegen $N_{z_0}(w)$

Beweis: Schritt 1) Bezeichne im Beweis $N_{z_0}(w)$ mit $N_{z_0}^w$ und benenne ausnahmsweise die Mengen $\{u_i = z_0\}$ mit $N_{z_0}^{u_i}$, selbst dann, wenn $\mathcal{L}^n(\{u_i = z_0\}) > 0$. Wir konstruieren zunächst eine Menge, die eine Umgebung der Niveaumenge $N_{z_0}^w$ enthält und untersuchen dann die in dieser Umgebung vertretenen Niveaumengen der Funktion u. Sei dazu $z_0 \in \mathcal{R}$ und $\delta := \min_{x\in\partial\Omega} |z_0 - w(x)|$. Insbesondere ist $\delta > 0$. Weil w lipschitzstetig ist, ist $d := \text{dist}(N_{z_0}^w, \partial\Omega) \geq \frac{\delta}{c}$, wo c die Lipschitzkonstante von w ist. Wähle daher $k \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{k} < d$ und definiere

$$A_k := \left\{x \in \Omega \mid \ \text{dist}(x, N_{z_0}^w) \leq \frac{1}{k}\right\} \ . \tag{2.28}$$

Wegen des Zwischenwertsatzes für w ist für passende Mengen D_{k-}, D_{k+} offenbar $\partial A_k = D_{k-} \dot\cup D_{k+}$, wo $w < z_0$ auf D_{k-} und $w > z_0$ auf D_{k+}. Sei daher

$$\begin{aligned} m_k &:= \max\{w(x) : x \in D_{k-}\} \ , \qquad \delta_{k-} := \frac{|z_0 - m_k|}{2} \ , \\ M_k &:= \max\{w(x) : x \in D_{k+}\} \ , \qquad \delta_{k+} := \frac{|z_0 - M_k|}{2}. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Dabei sind o.B.d.A. $z_0 - \delta_{k-}$, $z_0 + \delta_{k+}$ keine Sprungniveaus von w, sonst verkleinere δ_{k-} oder δ_{k+} ein wenig. Bedenke dazu, dass solche Niveaus wegen der Koflächenformel dicht in $w(\Omega)$ liegen. Betrachte fortan

$$B_k := \{z_0 - \delta_{k-} < w < z_0 + \delta_{k+}\} \ . \tag{2.30}$$

Offenbar ist $\partial B_k = N_{z_0-\delta_{k-}}^w \dot\cup N_{z_0+\delta_{k+}}^w$, $N_{z_0}^w \subset B_k$.

Schritt 2) Nutze, dass $u_i \overset{k\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} w$ gleichmäßig konvergiert, um zu zeigen, dass $N^{u_i}_{z_0} \subset B_k$ für große i. Genauer gilt für hinreichend großes $i = i(k)$, dass $|w - u_i| < \frac{1}{2}\min\{\delta_{k-}, \delta_{k+}\}$. Dann aber gilt auch

$$\left\{z_0 - \frac{\delta_{k-}}{2} < u_i < z_0 + \frac{\delta_{k+}}{2}\right\} \subseteq B_k \ ,$$

also wegen des Zwischenwertsatzes und der Stetigkeit der u_i auch $\{u_i = z_0\} \subseteq B_k$. Nach Umindizierung gilt also für einen Folgenrest der ursprünglichen Folge, dass $u_k \longrightarrow w$ gleichmäßig mit $\{u_k = z_0\} \subseteq B_k$ für alle betrachteten k.

Schritt 3) Studiere Eigenschaften von B_k für $k \longrightarrow \infty$. Zeige: Falls $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge mit $x_k \in B_k$ für alle k ist, so gilt $\lim_{k\longrightarrow\infty} \mathrm{dist}(x_k, N^w_{z_0}) = 0$, womit der Beweis der ersten Bedingung aus (2.26) erbracht wäre. Träte die genannte Konvergenz nicht auf, so gäbe es eine Teilfolge x_{k_i} mit der Eigenschaft

$$\exists \epsilon > 0 \ : \ \forall k \in \mathbb{N} \ \exists k_i \geq k \ : \ \mathrm{dist}(x_{k_i}, N^w_{z_0}) > \epsilon \ .$$

Fixiere ein solches ϵ und bezeichne $x_{k_i} =: x_n$. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wäre beschränkt, hätte also eine Teilfolge $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$, die im Folgenden ebenfalls (x_n) heißen soll und ein $x \in \bar{\Omega}$ mit $\lim_{n\longrightarrow\infty} x_n = x$. Dabei wäre $\mathrm{dist}(x, N^w_{z_0}) \geq \epsilon$. Wegen $x_n \in B_n$ wäre $z_0 - \delta_{n-} < u(x_n) < z_0 + \delta_{n+}$, wobei $\delta_{n\pm} \longrightarrow 0$ für $n \longrightarrow \infty$. Dann aber gälte auch $u(x_n) \longrightarrow z_0$, und da u stetig ist, müsste $u(x) = z_0$ sein, mithin $x \in N^w_{z_0}$, was einen Widerspruch zur Wahl der Folge (x_n) ergäbe.

Schritt 4) Die zweite Bedingung aus (2.26) ist unter der oben gezeigten Konvergenz offensichtlich erfüllt.

□

Bemerkung: In der allgemeinen Situation des Lemmas gilt in der Notation des Beweises nicht, dass sogar $N^w_{z_0\pm\delta_{k\pm}} \backslash A_k = \emptyset$. Falls zum Beispiel w in $x \in (\Omega\backslash A_k) \cap \{u < z_0\}$ ein isoliertes inneres Maximum mit $z_0 - \delta_{k-} < w(x) < z_0 + \delta_{k+}$ annimmt, so gibt es mindestens eine Zusammenhangskomponente Z von B_k mit $x \in Z$ und $Z \cap A_k = \emptyset$. Da in unserer Anwendung w schwache Lösung des IMCF ist, hat w aber wegen Lemma 2.29 keine isolierten inneren Extrema.

Bemerkung: Für monoton wachsende Lösungen u von $(\star)$, die gegen stationäres w konvergieren, können wir wegen $u_i := u(t_i, \cdot) \leq w$ nutzen, dass $\{w \leq z_0\} \subset \{u_i \leq z_0\}$. Der Beweis des letzten Lemmas funktioniert daher für punktweise monoton wachsende Approximation ganz analog, wenn man statt der Mengen A_k die Mengen $A_k \backslash E^w_{z_0}$ verwendet. Wir erhalten so, dass $\partial^+ E^{t_i}_{z_0}(u) \longrightarrow \partial^+ E_{z_0}(w)$ im Hausdorff-Abstand auch dann konvergiert, wenn z ein Sprungniveau von w ist. Analog gilt, dass $\partial E^{t_i}_{z_0}(u) \longrightarrow \partial E_{z_0}(w)$ für beliebige Niveaus z für monoton fallende Lösungen u von $(\star)$.

Wir wollen nun die Regularität der Ränder von Niveaumengen schwacher Lösungen aus Proposition 2.22 nutzen, um zu zeigen, dass lokal um Punkte, in denen die Ränder der Niveaumengen $C^{1,\alpha}$ sind, auch tatsächlich die Approximation durch die Ränder von Niveaumengen geeigneter schwacher Lösungen in der Klasse $C^{1,\beta}$ für jedes $\beta < \alpha$ stattfindet.

Definition 2.32 *Sei w stationäre Lösung von $(\star)$, mithin schwache Lösung des inversen mittleren Krümmungsflusses mit Anfangsbedingung E_0. Wir definieren die Menge der Sprungniveaus*

$$\mathcal{S}^{E_0}_{IMCF} := \left\{ z \geq 0 \;\middle|\; \mathcal{L}^n(\{w = z\}) > 0 \right\} .$$

Falls $z \in \mathcal{S}^{E_0}_{IMCF}$ ist, so nennen wir z ein IMCF-Sprungniveau (des schwachen IMCF mit Anfangsbedingung E_0). Weiter sei

$$\mathcal{R}^{E_0}_{IMCF} := \left\{ z \geq 0 \;\middle|\; \partial\{w < z\} = \partial\{w > z\} \quad \textit{oder} \quad \{w = z\} = \overline{{}^{+}E_z(w)} \setminus \overline{{}^{\circ}E_z(w)} \right\} .$$

Bemerkung: Wegen Korollar 2.27 ist in Dimension $n \leq 7$ jedes Niveau z in $\mathcal{R}^{E_0}_{\mathrm{IMCF}}$ enthalten. Ist z kein IMCF-Sprungniveau, so erfüllt es daher $z \in \mathcal{R}$ für das $\mathcal{R}$ aus Lemma 2.31.

Wenn wir im Folgenden sagen, eine Familie N_i konvergiere lokal gleichmäßig in $C^{1,\beta}$ zu einer Grenzfläche N, so meinen wir, dass für jedes $x \in N$ ein Radius $\rho_0 > 0$ existiert, so dass für alle hinreichend großen i und für jedes $\rho \leq \rho_0$ die Flächenstücke $N_i \cap B_\rho(x)$ und $N \cap B_\rho(x)$ als Graphen von Funktionen g_i und g über dem Tangentialraum T_xN darstellbar sind und dass $g_i \longrightarrow g$ in $C^{1,\beta}(T_xN \cap B_\rho(x))$ konvergiert. Wir erhalten:

Theorem 2.33 (Hauptsatz über Konvergenz) *Sei u schwache Lösung von $(\star)$, die eine Wachstumsbedingung der Art (2.27) erfüllt. Weiter konvergiere $u(\cdot, t) \longrightarrow w$ lokal gleichmäßig für $t \longrightarrow \infty$, wo w stationäre schwache Lösung von $(\star)$ ist. Dann gilt für beliebige Niveaus $z > 0$ die Konvergenz*

$$E^t_z(u) \overset{t\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} E_z(w) \quad \textit{im Sinne von} \quad L^1_{loc}.$$

für bliebige Niveaus $z \in \mathcal{R}^{E_0}_{IMCF}$, die nicht IMCF-Sprungniveaus sind, gilt

$$\partial E^t_z(u) \overset{t\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} \partial E_z(w) \quad \textit{im Sinne des Hausdorff-Abstandes} \quad .$$

Sei $z \in \mathcal{R}^{E_0}_{IMCF}$ kein IMCF-Sprungniveau. Für Punkte $x \in \partial^* E_z(w) = \partial^* {}^{+}E_z(w)$ sei $R_x := \min\{ \operatorname{dist}(x, \partial\Omega), \operatorname{dist}(x, (\partial E_z(w) \setminus \partial^* E_z(w)))\}$. Dann gilt zusätzlich, dass

$$\partial^* E^t_z(u) = \partial^* {}^{+}E^t_z(u) \overset{t\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} \partial^* E_z(w) \quad \textit{lokal gleichmäßig in } C^{1,\alpha}$$

in jeder der Kugeln $B_{R_x}(x)$, für jedes $\alpha < 1/2$. Falls $u(x,t)$ zusätzlich monoton wachsend in t für alle Zeiten und für jedes $x \in \mathbb{R}^n \backslash E_0$ ist, so gilt zusätzlich, falls z ein IMCF-Sprungniveau ist, unter ansonsten identischen Voraussetzungen, dass

$$\partial^* {}^+E_z^t(u) \overset{t\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} \partial^* {}^+E_z(w) \quad \textit{einschichtig und lokal gleichmäßig in } C^{1,\alpha}$$

in jeder der Kugeln $B_{R_x}(x)$, für jedes $\alpha < 1/2$. Falls $u(x,t)$ stattdessen monoton fallend in t für alle Zeiten und für jedes $x \in \mathbb{R}^n \backslash E_0$ ist, so gilt zusätzlich, falls z ein IMCF-Sprungniveau ist, unter ansonsten identischen Voraussetzungen, dass

$$\partial^* E_z^t(u) \overset{t\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} \partial^* E_z(w) \quad \textit{lokal gleichmäßig in } C^{1,\alpha}$$

in jeder der Kugeln $B_{R_x}(x)$, für jedes $\alpha < 1/2$.

Bemerkung: 1) Wir werden in Proposition 2.36 zeigen, dass die gegebenen Konvergenzen für monoton wachsende Lösungen u von $(\star)$ einschichtig sind.

2) Wir geben im Anschluss an den Beweis ein Theorem, das die Ergebnisse unter den besseren Regularitätseigenschaften in Dimension $n \leq 7$ zusammenfasst.

3) Die Arbeit im folgenden Beweis steckt darin, zu zeigen, dass die Normalen der beteiligten Familien von Hyperflächen relativ zu einander nur so wenig kippen, dass man sie in einer kleinen Kugel $B_\rho(x)$ um einen Punkt x der Zielfläche als Graphen über deren Tangentialraum in x darstellen kann. Diese Aussage folgt zwar ebenfalls direkt aus dem bereits zitierten Theorem 4.1.3 in [Schb], soll aber hier der Vollständigkeit halber nochmals elementar bewiesen werden. Die im Beweis konstruierte Situation wird insbesondere zum Beweis von Proposition 2.36 benötigt.

Beweis: Wegen Lemma 2.31 und des Abschnittes davor sowie der Bemerkung danach erhalten wir in jedem Fall, dass die passenden Konvergenzen ${}^{(+)}E_z^t(u) \longrightarrow {}^{(+)}E_z(w)$ im Sinne von L^1_{loc} geschieht. Dies gilt bereits wegen der lokal gleichmäßigen Konvergenz der Funktionenfolge, durch die diese Mengen definiert werden. Den Rest des Beweises führen wir nur für den Fall, dass z kein Sprungniveau für w ist. Die anderen Fälle folgen vollständig analog. Wir arbeiten im Beweis stets mit wie im Beweis von Lemma 2.31 konstruierten Folgen von Zeiten $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Schritt 1) Etabliere die Situation um einen Punkt q der Zielfläche: Wir wählen zunächst $q \in \partial^* E_z^w := \partial^* E_z(w)$ beliebig und translatieren so, dass $q = 0 \in \mathbb{R}^n$. Es existiert der Tangentialraum $T_0 \partial^* E_z^w$, den wir mit der entsprechenden Tangentialebene identifizieren. Rotiere nun so, dass $\nu = e_n$. Wähle dann $r > 0$ mit $r < \min\{R/2, \min_t \rho_0(t)\}$ hinreichend klein, so dass wegen des Regularitätstheorems 2.14 für $B_r := B_r(0,0) \subset \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ eine Funktion $f \in C^{1,\alpha}(T_0 N_z^w \cap B_r(0,0))$ existiert, so dass

$$f(0) = 0,\ Df(0) = 0,\ \partial^* E_z^w \cap B_r(0) = \mathrm{graph}(f),\ \|f\|_{C^{1,\alpha}} \leq K,$$

wo K nicht vom gewählten Punkt q oder von r abhängt. Insbesondere gilt dann für

alle $y \in B_r(0) \cap T_0\partial^* E_z^w$, dass

$$\begin{aligned} |Df(y)| = |Df(y) - Df(0)| &\leq |y|^\alpha K \leq r^\alpha K \ , \\ |f(y)| \quad &\leq f(0) + (\sup |Df(x)|)|y - 0| \leq |y|^{1+\alpha} K \leq r \cdot r^\alpha K \ . \end{aligned}$$

Sei deswegen r zusätzlich so klein gewählt, dass $|Df(y)| \leq \frac{1}{100}$, $|f(y)| \leq \frac{r}{100}$. Die Mengen $A_k = \{p \in \mathbb{R}^n \mid \operatorname{dist}(p, \partial E_z^w) \leq \frac{1}{k}\}$ aus (2.28) haben in dieser Graphen-Situation insbesondere die Eigenschaft, dass

$$A_k \cap B_r \subseteq \left\{ (x, x_n) \;\middle|\; x \in T_0\partial^* E_z^w \cap B_r(0), |x_n| \leq \max_{B_r(0)} |f| + \frac{1}{k} \right\} \ .$$

Wir betrachten daher im Folgenden stets so große k, dass $\frac{1}{k} \leq \frac{r}{100}$, damit

$$A_k \cap B_r \subseteq S := \left\{ (x, x_n) \;\middle|\; x \in T_0\partial^* E_z^w \cap B_r(0), |x_n| \leq \frac{2r}{100} \right\} \ .$$

Schritt 2) Sichere die Regularität der approximierenden Flächen in einer geeigneten Umgebung. Von der ebenfalls in Lemma 2.31 konstruierten Folge $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ($u_k := u(\cdot, t_k)$) ist bekannt: für hinreichend großes k ist $\{u_k = z\} \subseteq A_k$. Wähle nun eine Zusammenhangskomponente $\mathcal{Z}_k$ von $\partial\{u_k = z\} \cap B_r$ aus. Jede Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Punkten $x_k \in \mathcal{Z}_k$ konvergiert wegen Lemma 2.31 zu einem regulären Punkt $x_\infty \in \partial_d^* E_z^w$ mit positivem Abstand d zur singulären Menge $\partial E_z^w \backslash \partial^* E_z^w$. Wenn wir daher r gegebenenfalls noch etwas verkleinern, so existiert wegen des Satzes über Konvergenz zu regulären Punkten 2.24 ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $k \geq k_0$ bereits $\mathcal{Z}_k$ ausschließlich aus regulären Punkten besteht und so dass jedes $x_k \in \mathcal{Z}_k$ einen festen Mindestabstand d_k zum nächstgelegenen nichtregulären Punkt innerhalb derselben Komponente von $\partial^* E_z^{t_k}$ oder $\partial^{*\,+} E_z^{t_k}$ einhält. Indem wir von d_k auf $0 < \inf_k d_k =: d$ übergehen und die vorigen Überlegungen mit $r \leq d/2$ wiederholen, können wir daher die $C^{1,\alpha}-$Abschätzungen nutzen, die Theorem 2.14 für jede der Flächen $\mathcal{Z}_k$ in der Menge B_r garantiert. Da auch die Grenzfläche $\partial^* E_z^w$ lokal von der Klasse $C^{1,\alpha}$ ist, können wir die Abschätzungen o.B.d.A. als gleichmäßig in k annehmen.

Schritt 3) Untersuche die Normalen der Hyperflächen $\mathcal{Z}_k$. Wähle dazu ein $p \in \mathcal{Z}_k$ mit $\operatorname{dist}(p, q) \leq \frac{r}{5}$. OBdA ist $\langle p, e_n\rangle \geq 0$ (sonst Punktspiegelung am Ursprung). Wegen $\mathcal{Z}_k \cap B_{4r/5}(p) \subseteq B_r(0)$ ist mit demselben Argument wie in Schritt 1 auch diese Fläche Graph einer Funktion $g_k : T_p\mathcal{Z}_k \cap B_{4r/5}(p) \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\|g\|_{C^{1,\alpha}} \leq K$. Sei ν_k diejenige Wahl der Normalen an $\mathcal{Z}_k$ in p, für die $\langle \nu_k, e_n\rangle =: \gamma \geq 0$. Rotiere in der $T_0\partial^* E_z^w$-Ebene um den Ursprung, so dass

$$\nu_k = \gamma e_n + \sqrt{1 - \gamma^2} e_1 \ . \tag{2.31}$$

Analog zu $\operatorname{graph}(f) \subset S$ gilt nun auch $\operatorname{graph}(g_k) \subset S_k$, wo $\partial S_k \subset E_- \dot\cup E_+$,

$$\begin{aligned} E_- &= \{s \in \mathbb{R}^n \ : \ \langle \nu_k, s\rangle = \langle \nu_k, p\rangle - \frac{r}{100}\} \ , \\ E_+ &= \{s \in \mathbb{R}^n \ : \ \langle \nu_k, s\rangle = \langle \nu_k, p\rangle + \frac{r}{100}\} \ . \end{aligned}$$

Weil die Folge u_k so konstruiert war, dass insbesondere $\mathcal{Z}_k \subset A_k$, erhalten wir in dem nun vorliegenden linearisierten Bild, dass E_- den in positive e_n-Richtung gelegenen

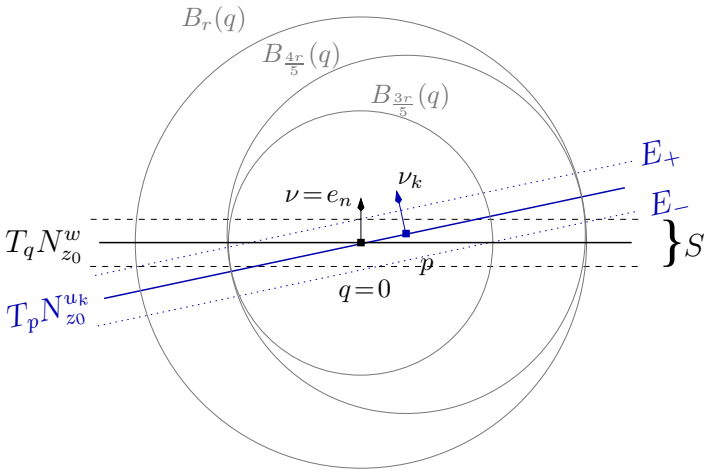

Abbildung 2.1: Schematische Darstellung der Umgebungen und linearen Objekte des Beweises in der x_1, x_n -Ebene

Rand der Menge S in $B_r(0) \cap B_{4r/5}(p)$ nicht schneiden kann. Also gilt für jedes $s \in E_- \cap B_{3r/5}(0)$, dass $\langle s,\, e_n\rangle \leq \frac{2r}{100}$. Dies und (2.31) ergibt nach Einsetzen in die Gleichung für E_-, dass

$$\begin{aligned} \forall s \in E_- \quad \gamma\langle s,\, e_n\rangle &= -\frac{r}{100} + \gamma\langle p,\, e_n\rangle + \sqrt{1-\gamma^2}(\langle p,\, e_1\rangle - \langle s,\, e_1\rangle) \\ &\geq -\frac{r}{100} - \frac{r}{4}\sqrt{1-\gamma^2} - \langle s,\, e_1\rangle\sqrt{1-\gamma^2}\,, \text{ also} \\ \forall\ s \in E_- \cap B_{3r/5}(0)\ :\quad \gamma\frac{2r}{100} &\geq -\frac{r}{100} - \frac{r}{4}\sqrt{1-\gamma^2} - \langle s,\, e_1\rangle\sqrt{1-\gamma^2}\,. \end{aligned} \tag{2.32}$$

Nun existiert aber $s \in E_- \cap \bar{B}_{3r/5}(0)$ mit

$$|\langle s,\, e_1\rangle| = \sqrt{\left(\frac{3r}{5}\right)^2 - \langle s,\, e_n\rangle^2} \geq \sqrt{\left(\frac{3r}{5}\right)^2 - \left(\frac{2r}{100}\right)^2} > \frac{r}{2}\,.$$

Folglich kann man $s \in E_- \cap B_{3r/5}(0)$ mit $\langle s,\, e_1\rangle = -\frac{r}{2}$ wählen und sieht mit (2.32)

$$\gamma \geq \sqrt{\frac{895}{904}}\,.$$

Insbesondere sind also alle $\mathcal{Z}_k$ in $B_{3r/5}(0)$ als Graphen von Funktionen $\tilde{g}_k$ über $T_q\partial^* E^w_z$ darstellbar. Wir erhalten daher eine in $C^{1,\alpha}(T_q\partial^* E^w_z \cap B_{3r/5})$ gleichmäßig beschränkte

Folge von Funktionen. Wegen der wohlbekannten kompakten Einbettung $C^{1,\alpha} \hookrightarrow C^{1,\beta}$ konvergiert daher eine Teilfolge. Da die gesamte Folge wegen Lemma 2.31 punktweise konvergiert, ist der Limes der Teilfolge bekannt und gleich $N_z(w)$. Die Argumentation oben zeigt, dass die $C^{1,\beta}-$Konvergenz dann auch für die gesamte Folge gilt. Da $\alpha < 1/2$ beliebig und β beliebig nah bei α gewählt werden kann, gilt das Ergebnis für alle $\beta < 1/2$. Wir bezeichnen in der Aussage der Konvention halber dieses β mit α.

□

Theorem 2.34 (Konvergenz in Dimension $n \leq 7$) *Sei u eine schwache Lösung von $(\star)$, die eine Wachstumsbedingung der Art (2.27) erfüllt. Weiter konvergiere $u(\cdot,t) \longrightarrow w$ lokal gleichmäßig für $t \longrightarrow \infty$, wo w stationäre schwache Lösung von $(\star)$ ist. Falls dann $z > 0$ kein IMCF-Sprungniveau ist, so gilt, dass*

$$\partial E_z^t(u) = \partial^+ E_z^t(u) \overset{t\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} \partial E_z(w) \quad \text{lokal gleichmäßig in } C^{1,\alpha}$$

für jedes $\alpha < 1/2$. Falls $u(x,t)$ monoton wachsend in t für alle Zeiten und für jedes $x \in \mathbb{R}^n \backslash E_0$ ist, so gilt zusätzlich, falls z ein IMCF-Sprungniveau ist, dass

$$\partial^+ E_z^t(u) \overset{t\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} \partial^+ E_z(w) \quad \text{einschichtig und lokal gleichmäßig in } C^{1,\alpha}$$

für jedes $\alpha < 1/2$. Falls $u(x,t)$ stattdessen monoton fallend in t für alle Zeiten und für jedes $x \in \mathbb{R}^n \backslash E_0$ ist, so gilt, falls z ein IMCF-Sprungniveau ist, dass

$$\partial E_z^t(u) \overset{t\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} \partial E_z(w) \quad \text{lokal gleichmäßig in } C^{1,\alpha}$$

für jedes $\alpha < 1/2$.

Beweis: Die stationäre Lösung w ist eindeutig und somit $\epsilon-$approximierbar. Wegen der Lemmata 2.28 und 2.27 gilt in Dimension $n \leq 7$ automatisch, dass $\mathcal{R}^{E_0}_{\mathrm{IMCF}}$ jedes Niveau $z \geq 0$ enthält. Singuläre Mengen treten wegen der kleinen Dimension nicht auf. Damit folgen alle Konvergenzaussagen aus dem letzten Theorem. Die Einschichtigkeit beweisen wir in Proposition 2.36.

□

2.3.6 Niveaumengen monoton wachsender Lösungen

Sei u monoton wachsende Lösung von $(\star)$, zum Beispiel zu den in Korollar 2.12 oder Proposition 2.13 gegebenen Anfangswerten. Wir nutzen aus, dass dann die "bulk energy" der Energie $\mathbb{P}_u^{K,t}$ aus (2.20) das richtige Vorzeichen hat, um herauszufinden, dass die Konvergenz aus Theorem 2.33 zu regulären Punkten einschichtig ist. Um diesen Begriff präzisieren zu können, bezeichne w die stationäre schwache Lösung von $(\star)$, zu der u konvergiert. Wir fixieren ein z_0 und erinnern an die Mengen

$$\partial_d^{*\,(+)} E_{z_0}(w) := \{\ x \in \partial^{*\,(+)} E_{z_0}(w) \mid \operatorname{dist}(x, (\partial^{(+)} E_{z_0}(w) \backslash \partial^{*\,(+)} E_{z_0}(w))) \geq d\ \}$$

aus dem Regularitätstheorem 2.14. Wir sagen dann, die Konvergenz von $\partial^{(+)}E^t_{z_0}(u)$ gegen die Menge $\partial^{(+)}E_{z_0}(w)$ sei *einschichtig gegen reguläre Punkte*, falls für jedes kleine $d > 0$ ein $t_d \in \mathbb{R}$ existiert, so dass für beliebiges $x \in \partial^*_d{}^{(+)}E_{z_0}(w)$ und für jedes $t \geq t_d$ die Menge

$$\partial^{(+)}E^t_{z_0}(u) \cap B_{d/2}(x)$$

einfach zusammenhängend ist und keine Zusammenhangskomponente ihres Komplements umschließt.

Sei E eine präkompakte Menge lokal endlichen Umfangs in $\mathbb{R}^n$. Man sagt, E sei von außen minimierend oder minimiere die Oberfläche von außen (sei outward minimizing / outward area minimizing) in einer Menge A, falls für alle präkompakten Mengen $F \subset \mathbb{R}^n$ mit $E \subseteq F$ und $F \backslash E \subset A$ gilt, dass

$$|\partial^* E \cap K| \ \leq \ |\partial^* F \cap K|.$$

Dabei sei K ein beliebiges Kompaktum mit $A \subset K$. Wir sagen, E sei von außen minimierend, wenn E von außen minimierend in A für alle beschränkten Mengen $A \subset \mathbb{R}^n$ ist. Wir finden für unsere Situation folgende Anwendung dieses Begriffs.

Lemma 2.35 *Sei u monoton wachsende Lösung von $(\star)$. Dann sind für alle Zeiten $t > 0$ die Mengen ${}^+E^t_z(u)$ von außen minimierend, falls sie präkompakt sind. Die Mengen $E^t_z(u)$ sind von außen minimierend, falls sie präkompakt sind und $z > 0$ gilt.*

Beweis: Sei $t > 0$ reguläre Zeit und sei und z fest gewählt. Weiter sei $F \subset\subset \bar{\Omega}$ eine Menge mit ${}^+E^t_z(u) \subseteq F$. Falls dann K ein Kompaktum mit $F \Delta {}^+E^t_z \subset K$ ist, so folgt, weil ${}^+E^t_z$ die Energie $\mathbb{I}\!P^{K,t}_u$ in K von außen minimiert, dass auch

$$|\partial^* {}^+E^t_z \cap K| \ \leq \ |\partial^* {}^+E^t_z \cap K| + \int\limits_{F \backslash {}^+E^t_z} |\nabla u| + \dot{u} \, d\mathcal{L}^n \leq \ |\partial^* F \cap K| \ .$$

Folglich ist die Menge ${}^+E^t_z$ von außen minimierend.

Angenommen, z sei kein Sprungniveau von u zur Zeit t. Wegen $\partial^* E^t_z = \partial^* {}^+E^t_z$ haben wir dann, dass $E^t_z(u)$ ebenfalls von außen minimierend ist. Sei nun z frei gewählt, dann folgt die Behauptung durch Approximation von z mit Nicht-Sprungniveaus von u zur Zeit t von oben und von unten, sowie mit Lemma 2.20 durch die triviale Wahl $H \equiv 0$ in der Energie aus (2.16). Die für das Lemma benötigten gleichmäßigen Schranken an $\mathcal{H}^{n-1}(\partial^* E^t_{z_i} \cap K)$ folgen wie im Beweis von Proposition 2.22.

Falls $t > 0$ nicht notwendig reguläre Zeit ist, nutzen wir die Tatsache, dass die Energie H aus Lemma 2.20 offenbar das selbe Vorzeichen haben muss wie $|\nabla u| + \dot{u}$. Der Rest des Beweises ist analog zum obigen Fall regulärer Zeiten.

□

Mit Hilfe der im Beweis zum Hauptsatz über Konvergenz 2.33 konstruierten Situation können wir jetzt das Versprechen vom Beginn dieses Abschnitts einlösen und die folgende Proposition beweisen.

Proposition 2.36 *Sei u monoton wachsende schwache Lösung von $(\star)$, die die Voraussetzungen des Hauptsatzes über Konvergenz 2.33 erfüllt. Dann ist jede der dort für u gegebenen lokalen $C^{1,\alpha}-$Konvergenzen zusätzlich einschichtig gegen reguläre Punkte.*

Beweis: Wir arbeiten mit den Bezeichnungen aus dem Beweis des Hauptsatzes über Konvergenz 2.33 und führen einen einfachen Widerspruchsbeweis. Dazu fixieren wir ein Niveau z und nehmen beispielsweise an, die Konvergenz von $\partial^+ E_z^t(u)$ zu regulären Punkten von $\partial^+ E_z^w$ sei nicht einschichtig. Dann gibt es $x \in \partial_d^* {}^+E_z^w$ für ein $d > 0$, so dass auf einer Folge $t_k \longrightarrow \infty$ die Mengen

$$\partial^+ E_z^{t_k}(u) \cap B_{d/2}(x)$$

nicht einfach zusammenhängend sind oder Komponenten ihres Komplements umschließen. O.B.d.A. (sonst benenne die Folge anders) sind die so gefundenen t_k und das d oben gerade die t_k und das d aus dem Beweis von Theorem 2.33. Dann wissen wir aus dem Beweis von Lemma 2.31, dass $(\{u(\cdot, t_k) = z\} \cap B_{d/2}(x)) \subset (A_k \cap B_{d/2}(x))$, und dass jede Zusammenhangskomponente $\mathcal{Z}_k$ von $\partial^+ E_z^{t_k}(u) \cap B_{3r/5}(x)$, für das $r > 0$ aus dem erwähnten Beweis, Graph einer passenden Funktion und enthalten in der Schicht S (siehe auch Abbildung 2.1) ist. Seien Z_k^1 und Z_k^2 zwei solche Komponenten. Sei

$$F := \{y \in B_{d/2}(x) \mid x \text{ liegt zwischen } Z_k^1 \text{ und } Z_k^2 \text{ und } u(x, t_k) > z\} \ .$$

Weil u stetig ist, gilt sogar $\mathcal{L}^n(F) > 0$. Offenbar ist ${}^+E_z^{t_k}(u) \subset ({}^+E_z^{t_k}(u) \cup F)$ und

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^{n-1}(\partial\,({}^+E_z^{t_k}(u) \cup F)) \leq \\ \mathcal{H}^{n-1}({}^+E_z^{t_k}(u)) - \mathcal{H}^{n-1}(Z_k^1) - \mathcal{H}^{n-1}(Z_k^2) + \frac{2/k}{n-1}\omega_{(n-1)}\left(\frac{3r}{5}\right)^{n-2} \\ < \mathcal{H}^{n-1}({}^+E_z^{t_k}(u)) \ ,\end{aligned}$$

wo $\omega_{(n-1)}$ das Volumen der $(n-1)$-dimensionalen Einheitskugel bezeichnet. Insbesondere haben wir damit einen Widerspruch dazu erzeugt, dass ${}^+E_z^{t_k}(u)$ von außen minimierend ist, und die Behauptung ist bewiesen. In allen anderen Fällen folgt die Behauptung ganz analog.

□

Hat der betrachtete Raum $\mathbb{R}^n$ die Dimension $n \leq 7$, so haben die Niveaumengen der betrachteten Funktionen keine singuläre Menge. Aus den Ergebnissen des Existenztheorems 2.9 beziehungsweise des Fortsetzungssatzes 2.13, der Äquivalenz der beiden schwachen Lösungsbegriffe aus Theorem 2.16, des Regularitätergebnisses für die Ränder der Subniveaumengen aus Proposition 2.22 sowie der Existenz einer schwachen mittleren Krümmung bestimmter dieser Ränder aus Lemma 2.23 und aus dem Konvergenztheorem 2.34 sowie Proposition 2.36 dieser Arbeit folgt daher insbesondere das folgende, abschließende Theorem.

Theorem 2.37 (Hauptergebnisse in Dimension $n \leq 7$:) *Sei $n \leq 7$, und sei $f \in C^{0,1}(\mathbb{R}^n \backslash E_0)$ eine beliebige nichtnegative Funktion. Dann hat das Problem ($\star$) mit den Anfangswerten f laut Theorem 2.9 eine nichtnegative schwache Lösung u im Sinne der Definitionen 2.2 beziehungsweise 2.15, die diese Anfangswerte stetig annimmt und für alle Zeiten existiert. Für diese Lösung gilt: Es existiert eine Konstante $\tilde{c} = \tilde{c}(n, E_0, f)$, so dass*

$$\begin{aligned} &i) && |\nabla u| \leq \tilde{c}(n, E_0, f) \qquad \text{und} \\ &ii) \quad \forall\, t > 0, && -\frac{\sqrt{n\tilde{c}}}{\sqrt{t}} - 2\tilde{c} \leq \frac{\partial}{\partial t} u \leq \frac{\sqrt{n\tilde{c}}}{\sqrt{t}} + \tilde{c}\ . \end{aligned}$$

Für jede schwache Lösung von ($\star$) gilt: Zu jeder Zeit $t > 0$ und für jedes Niveau $z \geq 0$ sind die Ränder der Niveaumengen E_z^t und ${}^+E_z^t$ reguläre Hyperflächen des $\mathbb{R}^n$, falls die Menge selbst beschränkt ist. Diese Hyperflächen erfüllen lokal gleichmäßige $C^{1,\alpha}-$Abschätzungen, die nur von $\| |\nabla u| \|_\infty$ und $\|\dot{u}\|_\infty$ zur Zeit t auf einem hinreichend großen Kompaktum und von den $C^{1,\alpha}-$Abschätzungen von ∂E_0 abhängen. Ist weiterhin z kein Sprungniveau von u zur Zeit t, so gilt $\partial E_z^t = \partial^+ E_z^t = \{x | u(x,t) = z\}$. Für beliebige Niveaus z besitzen die Flächen ∂E_z^t und $\partial^+ E_z^t$ Flächen zu jeder Zeit eine schwache mittlere Krümmung in L^∞.

Ist f eine schwache Sublösung der Niveauflächenformulierung des inversen mittleren Krümmungsflusses nach [HI01] und erfüllt f eine Wachstumsbedingung der Form

$$f(x) \geq \left(s(n-1) \log \frac{|x|}{\sup_{\partial E_0} |x|} \ - \ c \right)_+$$

für feste Werte $s > 0$ und $c \geq 0$, so ist u zudem proper, eindeutig und monoton wachsend und konvergiert für $t \longrightarrow \infty$ lokal gleichmäßig gegen die eindeutige, schwache Lösung w des inversen mittleren Krümmungsflusses auf $\mathbb{R}^n \backslash E_0$. Die Flächen $\partial\, {}^+E_z^t$ dieser Lösung konvergieren für jedes Niveau z mit $t \longrightarrow \infty$ einschichtig und lokal gleichmäßig in der $C^{1,\alpha}-$Norm gegen die Flächen $\partial\, {}^+E_z(w)$. Alle diese Flächen besitzen eine schwache mittlere Krümmung H_z^t und es gilt $\|H_z^t\|_\infty \leq t^{-1/2}(n\tilde{c})^{1/2} + \tilde{c}$ für das $\tilde{c}$ aus der Abschätzung $i)$ oben.

□

2.4 Anhang: Ein Maximumprinzip

Die folgenden Überlegungen zeigen insbesondere, dass die Funktionen ϕ_2 von Seite 19 und ϕ_3 von Seite 20 aus dem Abschnitt über Gradientenschranken am Rand auch dort als Barrieren für eine glatte Lösung u_ϵ des Problems $(\star_\epsilon)$ wirksam sind, wo die Distanzfunktion d zur Vergleichsfläche $\Sigma = \partial E_0$ nicht zweimal klassisch differenzierbar ist. Wir zeigen dies für die Situation der oberen Barriere und formulieren das gänzlich analog beweisbare Ergebnis für untere Barrieren als Korollar. Stets nehmen wir an, ∂E_0 sei von der Klasse C^k mit $k \geq 2$.

Die Idee ist es, zu zeigen, dass ein klassisches parabolisches Maximumprinzip deswegen ausreicht, weil glatte Lösungen u_ϵ die Barrieren $\phi \circ d(x)$, $d(x) := \mathrm{dist}(x, \partial E_0)$ ohnehin nur dort berühren können, wo diese Barrieren ebenfalls regulär sind. Wir benötigen zunächst eine Bezeichnung.

Definition 3.1 *Sei ∂E_0 eine C^k-Hyperfläche, $k \geq 2$, für $E_0 \subset \mathbb{R}^n$, und sei $x \in \mathbb{R}^n \backslash E_0$. Wir nennen x einen ambivalenten Punkt (der Distanzfunktion von ∂E_0), falls $p \neq q$, $p, q \in \partial E_0$ existieren, so dass $|x - p| = |x - q| = d(x)$.*

Wir zeigen zunächst, dass der Wert einer glatten Funktion u mit $u \leq \phi \circ d$ an einem ambivalenten Punkt nicht mit dem Wert von $\phi \circ d$ übereinstimmen kann, weil sich sonst eine Richtung angeben lässt, in die u an diesem Punkt nicht differenzierbar wäre.

Lemma 3.2 *Sei u eine glatte Funktion auf $\Omega \subset (\mathbb{R}^n \backslash E_0)$. Sei weiter $\phi : [0, a) \longrightarrow \mathbb{R} : s \mapsto \phi(s)$ glatt, streng monoton wachsend mit $\phi' > 0$, und gelte $\phi(s) \longrightarrow \infty$ für $s \longrightarrow a$. Wenn $u(x) \leq \phi(d(x))$ gilt, wo beide Funktionen definiert sind, so gilt $u(x) < \phi(d(x))$ für alle dort liegenden ambivalenten Punkte x.*

Beweis: (Vergleiche Abbildung 3.1) Sei x ein ambivalenter Punkt und $p \neq q$ in Σ so, dass $\mathrm{dist}(x, \partial E_0) = |x - p| = |x - q|$ ist. Wir verwenden Standardbezeichnungen für den $\mathbb{R}^n$. Sei o.B.d.A. $x = 0 \in \mathbb{R}^n$ und liege das Dreieck x, p, q in der x_1, x_n-Ebene so, dass $\langle p,\, e_n \rangle = \langle q,\, e_n \rangle$ und $0 < \langle p,\, e_1 \rangle = -\langle q,\, e_1 \rangle$. Wenn s ein Punkt auf der positiven x_1-Achse und $|s|$ klein ist, dann folgt aus elementarer Betrachtung der Seitenlängen in den Dreiecken $(p, s, 0)$ beziehungsweise $(q, -s, 0)$, dass

$$d(s) \leq |p - s| < |p - 0| = d(x) \quad \text{und} \quad d(-s) < d(x) \ .$$

$\phi(d)$ hat also entlang der x_1-Achse ein striktes lokales Maximum in $x = 0$. Angenommen, es wäre entgegen der Behauptung $u(x) = \phi(d(x))$. Da die x_1-Achse eine lineare Nebenbedingung darstellt und mit dem Gradienten von $\phi \circ d$ einen spitzen Winkel α einschließt, gibt es eine positive Konstante $c(\alpha)$, so dass für kleines $\delta > 0$

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{u(he_1) - u(0)}{h} \leq \limsup_{h \searrow 0} \frac{\phi(d(he_1)) - \phi(0)}{h} \leq -c(\alpha) \inf_{d \in [d(0)-\delta, d(0)+\delta]} \phi'(d) < 0$$

$$\text{und} \quad \lim_{h \nearrow 0} \frac{u(he_1) - u(0)}{h} \geq c(\alpha) \inf_{d \in [d(0)-\delta, d(0)+\delta]} \phi'(d) > 0 \ .$$

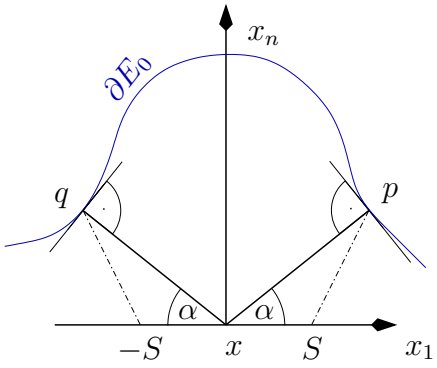

Abbildung 3.1: Situation um einen ambivalenten Punkt der Distanzfunktion von ∂E_0

Also existiert $\frac{\partial}{\partial x_1} u(x)$ nicht, was ein Widerspruch dazu ist, dass u glatt ist.

□

Falls für eine glatte Funktion u mit $u \leq \phi \circ d$ also an einer Stelle x_0 gilt, dass $u(x_0) = \phi(d(x_0)) =: c_0$, so ist x_0 kein ambivalenter Punkt. Wir zeigen im nächsten Lemma, dass ein Vergleich der Niveaufläche $\{u = c_0\}$ mit der Niveaumenge $\{\phi \circ d = c_0\}$ genügend Kontrolle über den kleinsten Eigenwert der zweiten Fundamentalform von ∂E_0 in einer Umgebung des die Distanz realisierenden Punktes von x_0 ermöglicht, um die Regularität der Distanzfunktion in einer Umgebung von x_0 zu erhalten. Dazu nutzen wir, dass jede Niveaumenge von $\phi \circ d$ einer Niveaumenge von d entspricht.

Lemma 3.3 *Seien E_0, ∂E_0, u, d und ϕ wie im letzten Lemma. Insbesondere sei $u \leq \phi \circ d$, wo beide Funktionen definiert sind. Falls dann $c_0 := u(x_0) = \phi(d(x_0))$ an einer Stelle x_0 ist, so existiert eine Umgebung U um x_0, so dass $d \in C^k(U)$ (und somit auch $\phi \circ d \in C^k(U)$).*

Beweis: (Vergleiche Abbildung 3.2) Seien x_0, c_0 wie im Lemma gegeben. Wegen Lemma 3.2 ist x_0 kein ambivalenter Punkt. Sei daher $p \in \partial E_0$ der eindeutig bestimmte Punkt mit $d(x_0) = |x_0 - p|$. Wegen $u \leq (\phi \circ d)$ gilt

$$\{u \geq c_0\} \subseteq \{\phi \circ d \geq c_0\} \ .$$

Weil x_0 nicht ambivalent ist, enthält auch der Strahl L von p aus in Richtung x_0 zwischen x_0 und p keine ambivalenten Punkte. Dies folgt aus der Tatsache, dass $B_{x_0} := B_{d(x_0)}(x_0)$ die Fläche ∂E_0 nur in p berührt und daraus, dass für Punkte $\hat{x} \in L$, $|\hat{x} - p| < |x_0 - p|$ die entsprechenden Kugeln $B_{d(\hat{x})}(\hat{x})$ in B_{x_0} enthalten sind. Wir finden daher für die glatte Funktion u, dass

$$\lim_{\hat{x} \longrightarrow x_0} \frac{u(\hat{x}) - u(x_0)}{|\hat{x} - x_0|} \ \leq \ \lim_{\hat{x} \longrightarrow x_0} \frac{\phi(d(\hat{x})) - \phi(d(x_0))}{|d(\hat{x}) - d(x_0|)} \ = \ -\phi'\big|_{d(x_0)} < 0 \ ,$$

also $|\nabla u|(x_0) \geq |\phi'(d(x_0))| \neq 0$ und daher $|\nabla u| \neq 0$ auf einer Umgebung U von x_0. Es ist daher $S := \{u = c_0\} \cap U$ eine glatte, reguläre Hyperfläche des $\mathbb{R}^n$. Insbesondere erfüllt S eine beidseitige Kugelbedingung. Folglich gibt es einen Punkt $k_0 \in L$ mit $|k_0 - p| > |x_0 - p|$, so dass für $r_0 = |k_0 - x_0|$ gilt $B_{r_0}(k_0) \cap S = x_0$. O.B.d.A ist r_0 so klein, dass auch global $B_{r_0}(k_0) \cap \{u = c_0\} = x_0$ gilt. Weil nach Konstruktion

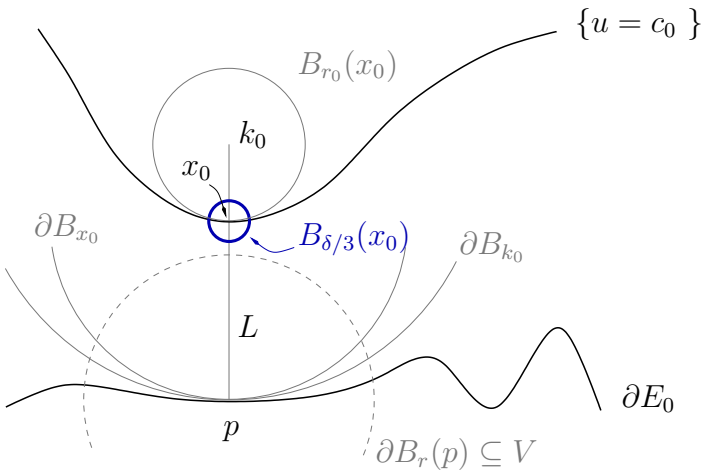

Abbildung 3.2: Situation um einen Berührungspunkt der Graphen von u und $\phi \circ d$. Der Ball $B_{\delta/3}(x_0)$ ist vergrößert wiedergegeben.

aber $B_{r_0}(k_0) \subset \{u \geq c_0\} \subseteq \{\phi \circ d \geq c_0\}$ ist, folgt $d(k_0) \geq r_0 + |x_0 - p|$, somit $d(k_0) = r_0 + |x_0 - p|$ und die Distanz $d(k_0)$ wird nur in p realisiert. Für $R_0 = d(k_0)$ berührt also insbesondere der Ball $B_{k_0} := B_{R_0}(k_0)$ die Fläche ∂E_0 nur in p. Bezeichnet $\kappa(p)$ den kleinsten Eigenwert der zweiten Fundamentalform von ∂E_0 in p, so gilt daher $\kappa(p) \geq -\frac{1}{R_0}$. Weil die Funktion $q \mapsto \kappa(q)$ auf ∂E_0 stetig ist, existiert daher eine Umgebung V um p in ∂E_0 mit

$$\kappa(q) \geq \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{R_0} - \frac{1}{d(x_0)}\right) \tag{3.1}$$

Wir zeigen abschließend, dass die Distanzfunktion in einer kleinen Umgebung von x_0 nur von $\partial E_0 \cap V$ abhängt. Man wähle dazu einen Radius r, so dass $B_r(p) \subset (\partial E_0 \cap V)$. Dann gilt für hinreichend kleine Wahl von δ, $0 < \delta < |k_0 - x_0|/2$, dass

$$\operatorname{dist}\ \big(\ \partial B_{x_0} \backslash B_r(p)\ ,\ \partial B_{k_0} \backslash B_r(p)\ \big) > \delta > 0\ .$$

Für beliebige Punkte $y \in B_{\delta/3}(x_0)$ gilt dann nach eventueller Verkleinerung von δ, dass $|y - p| \leq d(x_0) + \frac{\delta}{3}$. Andererseits gilt aber für alle $q \in (\partial E_0 \backslash B_r(p))$, dass $|y - q| > \operatorname{dist}(y, \partial B_{x_0}) + \frac{2}{3}\delta \geq d(x_0) + \frac{\delta}{3}$. Folglich realisieren alle Punkte $y \in B_{\delta/3}(x_0)$

ihre Distanz zu ∂E_0 innerhalb von $(\partial E_0 \cap B_r(p)) \subset V$, das heißt

$$\text{auf ganz } B_{\delta/3}(x_0) \text{ gilt:} \quad d(\cdot) = \text{dist}(\cdot, \partial E_0) = \text{dist}(\cdot, (\partial E_0 \cap V)) \ .$$

Weil aber auf V die Abschätzung (3.1) gilt, besagen Standardargumente für die Regularität der Distanzfunktion von einer Hyperfläche (wie zum Beispiel in [GT83] Abschnitt 14.6.), die sämtlich lokale Argumente sind, dass d auf ganz $B_{\delta/3}(x_0)$ so glatt ist wie ∂E_0 in der Umgebung V.

□

Aus den vorangegangenen Überlegungen zusammen mit dem klassischen parabolischen Maximumprinzip erhalten wir nun direkt das für uns interessante folgende

Lemma 3.4 *Sei u eine glatte Lösung von $(\star_\epsilon)$, $\phi : [0, a) \longrightarrow \mathbb{R} : s \mapsto \phi(s)$ streng monoton wachsend mit $\phi' > 0$, und gelte $\phi(s) \longrightarrow \infty$ für $s \longrightarrow a$. Wenn $\phi \circ d$ dort eine C^2-Superlösung von $(\star_\epsilon)$ ist, wo $d(x) = \text{dist}(x, \partial E_0)$ zweimal stetig differenzierbar ist, und falls auf dem ganzen Definitionsbereich von $\phi \circ d$ gilt, dass $u(x, 0) \leq \phi(d(x))$, so bleibt $u(x, t) \leq \phi(x)$ dort für alle Zeiten erhalten.*

Beweis: Falls zu einer beliebigen Zeit t gilt, dass $u(\cdot, t) \leq \phi \circ d$, wo immer beide Funktionen definiert sind, und falls $u(x, t) = \phi(d(x))$ an einer Stelle x ist, so folgt aus Lemma 3.2, dass x kein ambivalenter Punkt sein kann. Lemma 3.3 besagt dann, dass $\phi \circ d$ in einer Umgebung von x so regulär ist wie ∂E_0, in der Situation dieser Arbeit also zweimal stetig differenzierbar. Das klassische parabolische Maximumprinzip sorgt dann für den Erhalt von $u_\epsilon \leq (\phi \circ d)$ für alle Zeiten.

□

Mutatis Mutandis folgt aus den selben Beweisen die folgende analoge Aussage für untere Barrieren:

Korollar 3.5 *Sei u glatte Lösung von $(\star_\epsilon)$, $\phi : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R} : d \mapsto \phi(d)$ streng monoton fallend mit $\phi' < 0$. Wenn $\phi \circ d$ dort eine C^2-Sublösung von $(\star_\epsilon)$ ist, wo $d(x) = \text{dist}(x, \partial E_0)$ zweimal stetig differenzierbar ist und falls $u(x, 0) \geq \phi(d(x))$ auf ganz $\bar{\Omega}$ gilt, so bleibt $u(x, t) \geq \phi(x)$ überall für alle Zeiten erhalten.*

□

Literaturverzeichnis

[And94] B. Andrews, *Contraction of convex hypersurfaces in euclidian space*, Calculus of Variations **2** (1994), 151–171.

[BN00] Bray, H. and Neves, A., *Classification of prime 3-manifolds with Yamabe invariant greater than* $\mathbb{RP}^3$, Preprint, 2000.

[CGG91] Chen, Y.-G., Giga, Y., and Goto, S., *Uniqueness and existence of viscosity solutions of generalized mean curvature flow equations*, Journal of Differential Geometry **33** (1991), 749–786.

[CIL92] Crandall, M. G., Ishii, H., and Lions, P.-L., *User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations*, Bulletin of the American Mathematical Society **27** (1992), 1–67.

[EG92] Evans, Lawrence C. and Gariepy, Ronald F., *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Boca Raton, London, New York, Washington, D.C., 1992.

[ES91] Evans, L.C. and Spruck, J., *Motion of level sets by mean curvature*, Journal of Differential Geometry **33** (1991), 635–681.

[Ger80] Claus Gerhardt, *Evolutionary surfaces of prescribed mean curvature*, Journal of Differential Equations **36** (1980), 139–172.

[Ger90] Claus Gerhardt, *Flow of nonconvex hypersurfaces into spheres*, Journal of Differential Geometry **32** (1990), 299–314.

[Ger93] R. Geroch, *Energy extraction*, Annals of the New York Academy of Sciences **224** (1993), 108–117.

[GT83] David Gilbarg and Neil S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, second ed., Grundlehren der mathematischen Wissenschaften - A Series of Comprehensive Studies in Mathematics, vol. 224, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1983.

[HE89] Huisken, Gerhard and Ecker, Klaus, *Mean curvature evolutions of entire graphs*, Annals of Mathematics **130** (1989), no. 3, 453–471.

[HE91] ———, *Interior estimates for hypersurfaces moving by mean curvature*, Invent. math. **105** (1991), no. 3, 547–569.

[Hei] Mirjam Heidusch, *Zur Regularität des inversen mittleren Krümmungsflusses*, Dissertation, Universität Tübingen, Mathematisches Institut, Auf der Morgenstelle 10, 72076 Tübingen, erhältlich unter www.mathematik.uni-tuebingen.de/ab/analysis/pub/dissertation/, September 2001.

[HI98] Huisken, Gerhard and Ilmanen, Tom, *A note on the inverse mean curvature flow*, Saitama Workshop Proceedings (1998).

[HI01] ———, *The inverse mean curvature flow and the Riemannian Penrose Inequality*, Journal of Differential Geometry **59** (2001), no. 3, 353–438.

[HI02] ———, *Higher regularity of the inverse mean curvature flow*, Preprint, erhältlich unter www.math.ethz.ch/ ilmanen/papers/pub.html, 2002.

[Hui98] Gerhard Huisken, *Geometric concepts for the mass in general relativity*, Trends in Mathematical Physics, Proc. Conf. Univ. Tennessee, Knoxville, 1998, pp. 299–306.

[HZ94] Hardt, Robert and Zhou, Xiaodong, *An evolutionary problem for linear growth functionals*, Commun. in Partial Differential Equations **19** (1994), no. 11&12, 1879–1907.

[Ilm94] Tom Ilmanen, *Elliptic Regularization and Partial Regularity for Motion by Mean Curvature*, Memoires of the American Mathematical Society, vol. 520, Providence, 1994.

[Kry87] N.V. Krylov, *Nonlinear Elliptic and Parabolic Equations of second Order*, Reidel, Dordrecht, 1987.

[Lie96] Gary M. Lieberman, *Second Order Parabolic Differential Equations*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, London, New York, 1996.

[Pas] Eberhard Pasch, *Numerische Verfahren zur Berechnung von Krümmungsflüssen*, Dissertation, Universität Tübingen, Mathematisches Institut, Auf der Morgenstelle 10, 72076 Tübingen, erhältlich unter http://na.uni-tuebingen.de/pub/pasch/diss/, Oktober 1998.

[Scha] Felix Schulze, *Nichtlineare Evolution von Hyperflächen entlang ihrer mittleren Krümmung*, Dissertation, Universität Tübingen, Mathematisches Institut, Auf der Morgenstelle 10, 72076 Tübingen, erhältlich unter www.mathematik.uni-tuebingen.de/ab/analysis/pub/dissertation/, Juni 2002.

[Schb] ———, *Regularitätsergebnisse für minimale und fast minimale Flächen*, Diplomarbeit, Universität Tübingen, Mathematisches Institut, Auf der Morgenstelle 10, 72076 Tübingen, erhältlich unter www. mathematik. uni-tuebingen.de/ab/analysis/pub/diplom/, August 1999.

[Sim83] Leon M. Simon, *Lectures on Geometric Measure Theory*, Proceedings of the Centre for Mathematical Analysis, vol. 3, Centre for Mathematical Analysis, Australian National University, Canberra, 1983.

[Tam84] I. Tamanini, *Regularity results for almost minimal oriented hypersurfaces in* $\mathbb{R}^n$, Quaderni del Dipartimento di Matmatica dell'Universita di Lecce (1984).

[Urb90] John I.E. Urbas, *On the expansion of starshaped hypersurfaces by symmetric functions of their principal curvatures*, Mathematische Zeitschrift **205** (1990), 355–372.

[Vis98] A. Visintin, *Nucleation and mean curvature flow*, Communications in Partial Differential Equations **23** (1998), 17–53.

[Zho92] X. Zhou, *An evolution problem for plastic antiplanar shear*, Applied Mathematics & Optimization **25** (1992), 263–285.

Lebenslauf

Bernhard Hein, geb. Nowak
verheiratet mit Charlotte Hein

1972	geboren am 23. Januar in Esslingen
1978 - 1982	Grundschule in Esslingen
1982 - 1991	Georgii-Gymnasium in Esslingen
1991	Abitur
1991 - 1992	Zivildienst in Esslingen
1992 - 1999	Studium der Mathematik und kath. Theologie an der Universität Tübingen
1993 - 2000	Studium des Englischen an der Universität Tübingen
1994	Zwischenprüfungen in Mathematik und kath. Theologie
1995	Zwischenprüfung in Englisch
1996 - 1997	Studium der Mathematik und amerikanischen Literatur an der Arizona State University, Tempe, AZ, USA
1999	Staatsexamen in Mathematik und kath. Theologie
2000	Erweiterungsprüfung Staatsexamen in Englisch
2000 - 2004	wissenschaftlicher Angestellter an der Universität Tübingen (SFB 382)
2004	seit April wissenschaftlicher Angestellter am Albert-Einstein-Institut für Gravitationsphysik in Golm bei Potsdam.