

Quantenstochastische Integration in Hilbertmoduln

Dissertation
der mathematischen Fakultät
der Eberhard-Karls-Universität
zu Tübingen

zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften

vorgelegt von
Jürgen Hellmich
aus Konstanz

2001

Tag der mündlichen Prüfung: 5. März 2002
Dekan: Prof. Dr. Ch. Lubich
1. Berichterstatter: Prof. Dr. B. Kümmerer
2. Berichterstatter: Prof. Dr. M. Wolff

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	iii
Zusammenfassung	ix
1. Nichtkommutative Wahrscheinlichkeitstheorie	1
1.1. Grundlegende Begriffe und Notation	1
1.2. Wahrscheinlichkeitsräume und ihre Morphismen	3
1.3. Bedingte Erwartung und Unabhängigkeit	4
1.4. Zufallsvariable und Prozeß	7
1.5. Weißes Rauschen	13
1.6. Markov-Prozeß	18
1.7. Multiplikative Kozyklen als Kopplungen	20
1.8. Beispiel einer Kopplung	22
1.9. Ein wegweisendes Beispiel	24
2. Hilbertmoduln	29
2.1. Hilbert-C*-Moduln	29
2.2. Hilbert-W*-Moduln	32
2.3. Hilbertmoduln zu bedingten Erwartungen: $L^2(\mathcal{A}, P_0)$	37
2.4. Die Linksmultiplikation in $L^2(\mathcal{A}, P_0)$	41
2.5. Eine Anwendung der Theorie: $\mathcal{A}_0 \bar{\otimes} \mathcal{H}_\varphi$	43
2.6. Drei Ebenen des weißen Rauschens	45
3. Additive Kozyklen	47
3.1. Unitale Kozyklen	47
3.2. Die Standardkonstruktion	49
3.3. Beispiele zur Standardkonstruktion	53
3.4. Eigenschaften additiver Kozyklen	55

4. Stochastische Integration in Hilbertmoduln	59
4.1. Das stochastische Integral von Treppenfunktionen	59
4.2. Modulwertige L^2 -Theorie	61
4.3. Die Fortsetzung des Integrals	64
4.4. Stochastische Differentialgleichungen	68
4.5. Korrespondenz zwischen unitalen und additiven Kozyklen	75
5. Affilierte Operatoren	85
5.1. P_0 -affilierte Operatoren	86
5.2. Adjungierbare P_0 -affilierte Operatoren	90
5.3. Die Multiplikation in $L^2(\mathcal{A}, P_0)$	91
6. Anwendungen	95
6.1. Additive Kozyklen zum Poissonschen weißen Rauschen	95
6.2. Additive Kozyklen und die detailed balance-Bedingung	97
Anhang	101
A.1. Anhang zu Kapitel 1	101
A.2. Abzählbar erzeugte von Neumann Algebren	103
A.3. Integration \mathcal{A} -wertiger Funktionen	104
A.4. Ein Gegenbeispiel	108
A.5. Anhang zu Kapitel 6	110

Einleitung

Die Beobachtung des schottischen Botanikers R. Brown aus dem Jahre 1827, daß Blütenpollen, die in einer Flüssigkeit suspendiert werden, fortwährende ruckartige Bewegungen vollführen, war der Ausgangspunkt einer Reihe mathematischer und physikalischer Entdeckungen. Die Ursache für dieses Phänomen, das heute seinem Entdecker zu Ehren als *Brownsche Bewegung* bezeichnet wird, ist die Wärmebewegung der Flüssigkeitsmoleküle. Einen Teil ihrer ungeordneten Bewegung übertrugen sie auf Pollenkörner, die groß genug sind, um unter dem Mikroskop sichtbar zu sein und klein genug, um auf die Richtungsfluktuationen der Molekülstöße mit abrupten Bewegungsänderungen zu reagieren. Das war A. Einsteins Leitgedanke in seiner 1905 erschienenen Arbeit [Ein] zur Erklärung der Brownschen Bewegung. Unter der idealisierenden Annahme, es gebe in jedem Moment so viele elastische Molekülstöße, daß die Richtungsänderungen in beliebig nahe beieinanderliegenden Zeitintervallen unabhängig sind, konnte er die Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial \lambda(x, y, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \lambda(x, y, t)}{\partial y^2}$$

für die Übergangsdichten $\lambda(x, y, t)$ eines (eindimensionalen) Brownschen Teilchens gewinnen, das in x startend während der Zeitspanne t nach y gelangt. Mit der Lösung

$$\lambda(x, y, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{4Dt}\right)$$

erhielt er seine berühmte Beziehung

$$\langle (B_{t+\Delta t} - B_t)^2 \rangle = 2D \Delta t \quad (i)$$

für die mittlere quadratische Abweichung der Teilchenposition B_t während der Zeitspanne Δt . Aus ihr kann bereits eine charakteristische Eigenschaft der Brownschen Bewegung abgelesen werden: Die $\sqrt{\Delta t}$ -Abhängigkeit der Distanz, die das Teilchen im Mittel während der Zeit Δt zurücklegt, hat zur Folge, daß ihm zu keinem Zeitpunkt eine Geschwindigkeit zugeschrieben werden kann. Diese aus physikalischer Sicht etwas befremdliche Eigenschaft liegt zum einen an der postulierten extremen Irregularität der Teilchenumgebung und zum anderen daran, daß die Masse des Teilchens in den Überlegungen keine Rolle spielt.

Im Jahre 1908 erzielte P. Langevin ähnliche Ergebnisse wie Einstein. In seiner Arbeit [Lgv] ging er allerdings von einer Modifikation der Newtonschen Bewegungsgleichungen für den Ort X_t des Brownschen Teilchens zum Zeitpunkt t aus: Er nahm an, daß sich das Teilchen

unter dem Einfluß zweier Kräfte bewegt. Da ist zunächst eine geschwindigkeitsabhängige Reibungskraft $-\gamma\dot{X}_t$, die von der Viskosität der umgebenden Flüssigkeit erzeugt wird. Die zweite Kraft N_t ist stochastischer Natur. Durch sie sollen die vielen elastischen Stöße der Flüssigkeitsmoleküle mit dem Teilchen beschrieben werden. Über sie war wenig bekannt. Immerhin führte ihn die Vorstellung, daß sich in jedem noch so kleinen Zeitintervall eine sehr große Anzahl von räumlich völlig ungeordneten Stößen ereignen, zu der Annahme, daß die resultierenden Kräfte auf das Teilchen in zwei beliebig benachbarten Zeitintervallen ‘nichts voneinander wissen’, daß sie also unabhängig sind. Die nach ihm benannte Differentialgleichung

$$m\ddot{X}_t = -\gamma\dot{X}_t + N_t, \quad (\text{ii})$$

oder, mit $Y_t := \dot{X}_t$, $\beta := \gamma/m$ und $W_t := N_t/m$

$$\dot{Y}_t + \beta Y_t = W_t, \quad (\text{iii})$$

ist zunächst nur als formale Gleichung aufzufassen. Eine Lösung Y_t müßte den stochastischen Charakter von $W := (W_t)_{t \geq 0}$ widerspiegeln, d.h., $(Y_t)_{t \geq 0}$ müßte als stochastischer Prozeß behandelt werden. Gleichung (iii) ist also eigentlich erst im Rahmen einer weitergefaßten Theorie von Differentialgleichungen zu verstehen, sogenannter *stochastischer* Differentialgleichungen, die von K. Itô zwischen 1940 und 1950 entwickelt wurden [Itô]. N. Wiener stellte 1923 die Brownsche Bewegung auf ein solides mathematisches Fundament, indem er eine Realisierung auf den stetigen Funktionen $C(\mathbb{R}^+)$ konstruierte [Wie]. Demnach ist $B := (B_t)_{t \geq 0}$ ein Gauß-Prozeß mit stationären unabhängigen Zuwächsen. Seine Pfade sind fast sicher stetig, allerdings in jedem Zeitintervall von unbeschränkter Variation und damit nirgends differenzierbar (siehe z.B. [Hid]). W – das sog. weiße Rauschen – läßt sich nur als verallgemeinerter stochastischer Prozeß, nämlich als distributionelle Ableitung der Brownschen Bewegung interpretieren [GeVi, Hid]. Da die Pfade von B von unbeschränkter Variation sind, ist es nicht möglich, das Integral in der formalen Lösung

$$Y_t = Y_0 e^{-\beta t} + \int_0^t e^{-\beta(t-s)} dB_s,$$

($dB_s = W_s ds$) von (iii) als Stieltjes-Integral pfadweise zu definieren. K. Itô löste das Problem in einem größeren Rahmen, indem er Integrale der geforderten Art als L^2 -Grenzwerte geeigneter Riemann-Stieltjes-Summen konstruierte. Dabei waren die Orthogonalität der Zuwächse und die Beziehung (i) die entscheidenden ‘geometrischen’ Eigenschaften der Brownschen Bewegung, die diesen Zugang ermöglichten. Auf diese Weise wurde eine mathematisch rigoreuse Behandlung stochastischer Differentialgleichungen

$$\frac{d}{dt} Y_t = a(t, Y_t) + b(t, Y_t) W_t$$

oder,

$$dY_t = a(t, Y_t) dt + b(t, Y_t) dB_t, \quad (\text{iv})$$

wie sie normalerweise geschrieben werden, möglich, indem man sie als Integralgleichungen

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t a(s, Y_s) ds + \int_0^t b(s, Y_s) dB_s$$

umformulierte und nun wieder die üblichen Iterationsmethoden zur Verfügung hatte, um zu einer Lösungstheorie zu gelangen. Von entscheidender Bedeutung für die Berechnung konkreter Ergebnisse ist der sog. Itô-Kalkül, der sich für die Differentiale dt und dB_t in der Itô-Tabelle

	dB_t	dt
dB_t	dt	0
dt	0	0

ausdrückt. Die Theorie stochastischer Differentialgleichungen entwickelte sich schnell zu einem schlagkräftigen Instrument zur Konstruktion von Markov-Prozessen. Lösungen von (iv) lassen sich als Diffusionsprozesse interpretieren, mit a als Drift- und b als Diffusionskoeffizient. Für nicht explizit zeitabhängige a und b ist die Lösung von (iv) ein stationärer Markov-Prozeß ([Øks]).

Ausgehend u.a. von Überlegungen zum Meßprozeß und neueren Entwicklungen in der Quantenoptik rückte in den 70er und 80er Jahren die Theorie offener Quantensysteme zur Beschreibung irreversibler Dynamiken in das Blickfeld der mathematischen Physik ([Dav4]). Solche Dynamiken werden als stochastische Mittelung über reversible Dynamiken interpretiert: Man erhält sie, indem man das interessierende System, das Objektsystem, an ein Umgebungssystem, das Reservoir, koppelt und die Zustandsdynamik des Gesamtsystems durch Mittelung über den Zustand des Reservoirs auf das Objektsystem einschränkt (in der physikalischen Literatur bezeichnet man dieses Vorgehen als Bildung der *Relativspur*). Auf diese Weise erhält man sog. *Master-Gleichungen* für die Zustandsdynamik, die normalerweise Gedächtniseffekte, also Rückwirkungen des Objektsystems auf das Reservoir berücksichtigen und damit meistens zu kompliziert sind, um exakt gelöst zu werden. Unter geeigneten Voraussetzungen ([Dav1, Dav2, Dav3]) lassen sich die Gedächtniseffekte approximativ beseitigen: Der sog. schwache Kopplungslimes reduziert die Kopplungsstärke und kompensiert diese Schwächung der Wechselwirkung mit dem Reservoir durch Wechsel auf eine grobere Zeitskala. Man gewinnt so eine Halbgruppendedynamik auf dem Objektsystem, verliert aber bei diesem Vorgang meistens das Reservoir, da der schwache Kopplungslimes normalerweise zu keiner Limesdynamik im Reservoir führt. Um Halbgruppendedynamiken trotzdem direkt durch Mittelung einer reversiblen Dynamik zu erhalten, müssen an das Reservoir spezielle Anforderungen gestellt werden. Zur Vermeidung der Gedächtniseffekte, müssen die Wirkungen des Objektsystems auf das Reservoir genügend schnell abklingen, damit sie zu keiner Rückkopplung führen können. Das erreicht man durch die starke Forderung, daß Ereignisse zu beliebig benachbarten Zeitpunkten unabhängig sein sollen. Klassisch ist das die zentrale Eigenschaft von weißem Rauschen. Dynamiken des zusammengesetzten Systems mit diesen Eigenschaften lösen das sog. Dilationsproblem für die Halbgruppendedynamik auf dem Objektsystem, also die Aufgabe, zu

einer vorgegebenen irreversiblen Dynamik durch Vergrößerung des betrachteten Systems ein reversibles dynamisches System zu finden, aus dem die Ausgangsdynamik durch Mittelung über die zusätzlichen Freiheitsgrade entsteht. Ein solches Dilatationsproblem stellt sich mit unterschiedlichen Anforderungen an die dilatierte Dynamik. Die am leichtesten zugänglichen Dilatationen sind algebraischer Natur, in dem Sinne, daß die reversible Dynamik keine weitere Eigenschaft, wie etwa die Stationarität der irreversiblen Dynamik in einem bestimmten Zustand, respektiert. Überraschend viel schwerer ist es, zu einem vorgegebenen stationären dynamischen System eine stationäre Dilatation zu konstruieren (die im Übrigen auch nicht immer existieren muß, [ApFr, Küm1]). In dieser Arbeit sollen Wege zur Gewinnung solcher Dilatationen aufgezeigt werden, indem sie als quantenstochastische Prozesse ([Acc, AFL, Küm4, Küm3]) aufgefaßt werden (genauer gesagt, als quantenstochastisches Analogon von Markov-Prozessen), zu deren Konstruktion Werkzeuge einer hier zu entwickelnden Theorie nichtkommutativer stochastischer Differentialgleichungen eingesetzt werden können. Arbeiten, die als Wegbereiter der Vorliegenden anzusehen sind, reichen bis in die 80er Jahre zurück. Seit dieser Zeit war es der Leitgedanke vieler Arbeiten von B. Kümmerer, einen quantenstochastischen Markov-Prozeß durch Kopplung eines Objektsystems an ein Wärmebad zu erhalten, das durch ein weißes Rauschen modelliert wird. Es zeigte sich, daß die entscheidende mathematische Struktur zur Beschreibung einer solchen Kopplung durch Familien von Automorphismen gegeben ist, die einen multiplikativen Kozyklus zum verwendeten weißen Rauschen bilden ([KüMa, Küm3, Küm4]). Eine bedeutende Klasse unter diesen Kopplungen sind die inneren Kozyklen, die aus unitären Kozyklen zum weißen Rauschen entstehen.

Etwa um dieselbe Zeit wurde die Itô-Theorie von R.L. Hudson und K.R. Parthasarathy auf die Fockdarstellung der CCR-Algebra ausgedehnt [HuPa1, Par]. Als Inkrementprozeß für ihre stochastischen Integrale verwendeten sie den Erzeuger- und Vernichterprozeß $A_t^* := \alpha^*(\chi_{[0,t]})$ bzw. $A_t := \alpha(\chi_{[0,t]})$, sowie den Teilchenzahlprozeß Λ_t , der durch Zweitquantisierung des Projektors $f \mapsto f \cdot \chi_{[0,t]}$ auf $L^2(\mathbb{R})$ entsteht. Sie gelangten zu folgender Itô-Tabelle

	$d\Lambda_t$	dA_t	dA_t^*	dt
$d\Lambda_t$	$d\Lambda_t$	0	dA_t^*	0
dA_t	dA_t	0	dt	0
dA_t^*	0	0	0	0
dt	0	0	0	0

für die Multiplikation stochastischer Integrale, mit deren Hilfe sie das algebraische Dilatationsproblem lösen konnten, indem sie unitäre Kozyklen als Lösungen geeigneter stochastischer Differentialgleichungen konstruierten ([HuPa2]). Diese Erfolge führten zu Nachfolgearbeiten, die die erzielten Ergebnisse auf andere Algebren zu übertragen suchten. Aus diesen vielen Arbeiten seien hier nur einige wenige herausgegriffen, die Einfluß auf die Entstehungsgeschichte der vorliegenden Arbeit hatten. D.B. Applebaum und R.L. Hudson führten stochastische Integration auf der Fockdarstellung der CAR-Algebra ein ([ApHu]). Aus physikalischer Sicht ist die stochastische Integration bzgl. der Fockdarstellung durchaus kritisierbar: In Anbetracht der Rolle des CCR-weißen Rauschens als

Wärmebad ist es nicht sehr befriedigend, wenn es in der Fockdarstellung als ein Bosonensystem bei der Temperatur Null interpretiert werden muß. R.L. Hudson und J.M. Lindsay trugen u.a. dieser Kritik Rechnung und dehnten die stochastische Integration in [HuLi] auf eine bestimmte Klasse von Temperaturzuständen der CCR aus. Dieser Ansatz wurde von J.M. Lindsay und I.F. Wilde in [LiWi] weiterverfolgt und schließlich von C. Barnett, R. Streater und I.F. Wilde in [BSW] auf Darstellungen zu quasifreien Zuständen der CAR- und CCR-Algebra verallgemeinert. In dieser Arbeit sind die Prozesse Funktionen mit Werten in der Algebra, während das stochastische Integral als Element des GNS-Hilbertraumes zum verwendeten Zustand entsteht. Diese Idee wurde von J. Prin in seiner Diplomarbeit [Pri] für die vereinfachte Situation eines eindimensionalen Objektsystems konsequent weitergeführt, indem er nun die gesamte stochastische Integrationstheorie im GNS-Hilbertraum zum Zustand des weißen Rauschens entwickelte. Er konnte sich dabei auf eine klare axiomatische Fassung nichtkommutativen weißen Rauschens stützen, das z.B. in [KüMa] vorgeschlagen wurde. Demnach ist ein weißes Rauschen durch ein Quadrupel $(\mathcal{A}, \psi, S_t, (\mathcal{A}_I)_I)$ gegeben – durch eine von Neumann Algebra \mathcal{A} mit einem treuen normalen Zustand ψ , einen Zeitschift S_t und eine durch Zeitintervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ indizierte Familie $(\mathcal{A}_I)_I$ von Unteralgebren von \mathcal{A} , der sog. Filtrierung des weißen Rauschens. Dabei sind Elemente $x \in \mathcal{A}_I$ und $y \in \mathcal{A}_J$ zu disjunkten Zeitintervallen I und J unabhängig im Sinne einer direkten Verallgemeinerung des klassischen Ergebnisses, daß das Produkt von unabhängigen Zufallsvariablen unter dem Erwartungswert faktorisiert: $\psi(xy) = \psi(x)\psi(y)$. In diesem Rahmen konnte erstmals ein Verfahren vorgestellt werden, das einem unitären Kozyklus auf kanonische Weise, in Form eines additiven Kozyklus, die abstrakte Version einer nichtkommutativen Brownschen Bewegung zuordnet. Es war der Ausgangspunkt der vorliegenden Arbeit, diesen Zusammenhang auch ohne die Einschränkung an die Objektsysteme zu etablieren. Dabei stellten sich Fortschritte erst dann ein, als der verwendete Begriff des weißen Rauschens eine weitere Verallgemeinerung erfahren hatte. Die entscheidende Idee war, das Objektsystem \mathcal{A}_0 in das weiße Rauschen so zu integrieren, daß es durch eine bedingte Erwartung P_0 von \mathcal{A} auf \mathcal{A}_0 zurückgewonnen werden kann. Dabei mußte natürlich auch der Unabhängigkeitsbegriff angepaßt werden: Die Faktorisierung unter dem Zustand ψ wurde durch die Faktorisierung unter P_0 ersetzt: $P_0(xy) = P_0(x)P_0(y)$. Um in diesem allgemeinen Rahmen eine stochastische Integration definieren zu können, war es nötig ein Substitut für den GNS-Hilbertraum \mathcal{H}_ψ von ψ zu finden, denn schon bei J. Prin waren die stochastischen Integrale und vor allem die additiven Kozyklen als Integratoren i.allg. nicht mehr Elemente der von Neumann Algebra \mathcal{A} , sondern lagen in \mathcal{H}_ψ . Da P_0 die Rolle von ψ in der bisherigen Definition des weißen Rauschens übernommen hatte, war es naheliegend nach einer Art GNS-Konstruktion für P_0 zu suchen, was auf die Struktur von Hilbertmoduln mit dem \mathcal{A}_0 -wertigen inneren Produkt $(x, y) \mapsto P_0(x^*y)$ führte. Damit war endlich der Rahmen gefunden, in dem der Zusammenhang zwischen unitalen Kozyklen (der Anpassung des Begriffs unitärer Kozyklen an die Hilbertmodulsituation) und additiven Kozyklen bewiesen werden konnte:

Mit den additiven Kozyklen wurde eine Theorie stochastischer Integrale entwickelt. Damit konnte durch Verwendung unserer klar umrissenen Formulierung des weißen Rauschens die Aufgabe gelöst werden, eine darstellungsfreie Version der stochastischen Integration einzuführen (wie es z.B. auch in [AFQ] versucht wurde), in dem Sinne, daß nicht für je-

de neue Umgebung, wie z.B. die CCR-/ CAR-Algebra, die Cuntz-Algebra O_∞ ([KüSp]), oder der volle Fockraum ([Spe]), von neuem die Konstruktion eines stochastischen Integrals in Angriff genommen werden muß. Unsere Version des weißen Rauschens liefert für jeden additiven Kozyklus als Integrator sofort eine kanonische Version des stochastischen Integrals (der nichtkommutativen Situation der verwendeten Algebren Rechnung tragend, handelt es sich um ein Rechts- und ein Linksintegral, je nach dem, von welcher Seite der Integrator auf den Integranden angewandt wird), das natürlich weitergehende Eigenschaften besitzen kann, wenn Algebren mit reichhaltiger Struktur verwendet werden, wie etwa die CCR-Algebra.

Unter Verwendung der stochastischen Integrale war die Definition von stochastischen Differentialgleichungen möglich, für deren Lösungen ein Existenz- und Eindeutigkeitssatz bewiesen werden konnte. Nun ließ sich eine Bedingung an den additiven Kozyklus finden und eine stochastische Differentialgleichung angeben, deren Lösung einen unitalen Kozyklus liefert. Aus diesem wiederum ließ sich über eine Standardkonstruktion der additive Kozyklus zurückgewinnen und so eine eindeutige Beziehung zwischen additiven und unitalen Kozyklen beweisen. Dieser Zusammenhang stellt sozusagen die geometrische Grundkonstellation dar, die zur Konstruktion unitärer Kozyklen (und damit zur Lösung des stationären Dilatationsproblems) vorhanden sein muß. Tatsächlich ist mit diesen unitalen Kozyklen eine Lösung des Dilatationsproblems soweit möglich, daß auf die Form des Lindblad-Generators der dilatierten Halbgruppen zurückgeschlossen werden kann. In dieser Arbeit stellen wir auch die Werkzeuge bereit, um die weitergehende Aufgabe zu lösen, unitale Kozyklen, also Elemente eines Hilbertmoduls, mit unitären Kozyklen in Verbindung zu bringen. Dafür benötigt man Bedingungen an Hilbertmodulelemente, die sie zwar nicht unbedingt als zur Algebra des zugrunde liegenden weißen Rauschens gehörig identifiziert, aber doch immerhin als Operatoren, die zur Algebra affiliert sind. Mit diesen Techniken ließen sich in [HKK] notwendige und hinreichende Bedingungen an den additiven Kozyklus angeben, die die Unitarität der Lösung sicherstellen.

Zusammenfassung

1. Kapitel. Hier stellen wir die Werkzeuge aus der nichtkommutativen Wahrscheinlichkeitstheorie bereit, die wir für die vorliegende Arbeit benötigen. Dabei können wir uns auf die grundlegenden Arbeiten [Küm1], ..., [Küm5] von B. Kümmerer stützen, in denen er die Fundamente einer nichtkommutativen Wahrscheinlichkeitstheorie gelegt und sie soweit vorangetrieben hat, daß es nun bereits um die Ausprägung bestimmter Forschungsrichtungen gehen kann. Die stochastische Integration, die wir in dieser Arbeit einführen wollen, stellt eine dieser Richtungen dar.

In diesem Kapitel wird die nichtkommutative Wahrscheinlichkeitstheorie soweit entwickelt, daß erkennbar wird, in welchem Kontext stochastische Integration betrieben werden soll, welche Probleme wir mit ihr lösen wollen und welchen mathematischen Strukturen wir dabei begegnen werden.

Im einzelnen werden wir den zentralen Begriff des nichtkommutativen Wahrscheinlichkeitsraumes (\mathcal{A}, ψ) als von Neumann Algebra \mathcal{A} mit treuem normalen Zustand ψ einführen und die wichtigsten wahrscheinlichkeitstheoretischen Begriffsbildungen in den nichtkommutativen Rahmen übertragen. Besonderes Augenmerk richten wir dabei zunächst auf die Definition bedingter Erwartungen und dem damit zusammenhängenden Unabhängigkeitsbegriff: Unabhängigkeit wird als Faktorisierung unter der bedingten Erwartung P_0 von \mathcal{A} auf eine Anfangsalgebra \mathcal{A}_0 definiert. Unsere Definition stellt eine leichte Verallgemeinerung der in [Küm3] verwendeten Version dar, die eine Faktorisierung unter dem Zustand ψ verlangt (wir können ψ als bedingte Erwartung der Algebra auf die eindimensionale Unteralgebra \mathbb{C} auffassen). Im Falle finiter von Neumann Algebren treffen wir mit dieser Verallgemeinerung auf das Konzept sog. *commuting squares* von [GHJ].

Nachdem wir festgelegt haben, was wir unter Zufallsvariablen und stochastischen Prozessen, insbesondere Markov-Prozessen, verstehen wollen, haben wir die Grundlagen, um das eigentliche Ziel dieser Arbeit angeben zu können: *Die Konstruktion von Markov-Prozessen als Kopplung eines Objektsystems \mathcal{A}_0 an ein Wärmebad*. Die Schritte, die uns diesem Ziel näherbringen, bestehen erst einmal in der Identifizierung des Wärmebades als *verallgemeinertes weißes Rauschen*. Grob gesagt handelt es sich dabei um einen nichtkommutativen Wahrscheinlichkeitsraum (\mathcal{A}, ψ) , versehen mit einer reversiblen Dynamik $(S_t)_{t \in \mathbb{R}}$ (einer Automorphismengruppe), der sog. *freien Dynamik des Wärmebades* und einer Familie $(\mathcal{A}_I)_I$ von von Neumann Teilalgebren, die durch Zeitintervalle I so indiziert werden, daß zu disjunkten Intervallen unabhängige Algebren gehören. Als einer der wichtigsten Begriffe dieser Arbeit, illustrieren wir weißes Rauschen durch eine Reihe von Beispielen: An erster Stelle natürlich klassisches, also kommutatives weißes Rauschen, dann Poissonches und CCR weißes Rauschen über einer Anfangsalgebra \mathcal{A}_0 , als diskretes Beispiel den

Bernoulli-Shift und schließlich ein verallgemeinertes Poissonsches weißes Rauschen, das wir für ein umfangreicheres Beispiel in Kapitel 6 vorbereiten.

Als nächstes führen wir *Kopplungen* von Objektsystemen an Wärmebäder ein. Wir präzisieren damit die Vorstellung, daß das Wärmebad mit dem Objektsystem in Wechselwirkung tritt. Jede solche Kopplung führt auf kanonische Weise zu einem Markov-Prozeß auf dem Gesamtsystem (also Objektsystem und weißem Rauschen) und zu einer Halbgruppen-Dynamik (der sog. *reduzierten Dynamik*) auf dem Objektsystem \mathcal{A}_0 , die wir uns als eine Art Mittelung (in der Physik oft als *coarse graining* bezeichnet) über die Wirkung des Markov-Prozesses vorstellen können. Für eine große Klasse von Markov-Prozessen haben wir damit das Konstruktionsproblem darauf reduziert, Kopplungen an weißes Rauschen zu finden. Eine wichtige Klasse solcher Kopplungen, nämlich die *inneren Kopplungen*, lassen sich durch *unitäre Kozyklen* bzgl. weißem Rauschen realisieren: Es handelt sich dabei um eine Familie $(u_t)_{t \geq 0}$ unitärer Operatoren in \mathcal{A} , die neben einer Adaptiertheitseigenschaft ($u_t \in \mathcal{A}_{[0,t]}$) vor allem die multiplikative Kozyklengleichung $u_{t+s} = S_t(u_s)u_t$ erfüllt. Das zentrale Anliegen dieser Arbeit ist es, Wege aufzuzeigen, die uns der Möglichkeit näherbringen, unitäre Kozyklen zu konstruieren.

In Abschnitt 1.8 illustrieren wir die eingeführten Konzepte, indem wir eine Kopplung an klassisches Poissonsches weißes Rauschen untersuchen (ein Beispiel, das auf [Küm5] zurückgeht). *Verallgemeinertes* Poissonsches weißes Rauschen führen wir bei dieser Gelegenheit als Kopplung eines verallgemeinerten Bernoulli-Shifts an klassisches Poissonsches weißes Rauschen ein. Auf diese Weise sind wir durch die Arbeit [Rup] von C. Rupp, in der viele verallgemeinerte Bernoulli-Shifts konstruiert wurden, mit einer Fülle neuer weißer Rauschen versehen.

Schließlich greifen wir in Abschnitt 1.9 ein Beispiel von J. Prin ([Pri]) wieder auf, um die Rolle stochastischer Integrale bei der Konstruktion unitärer Kozyklen zu beleuchten. Insbesondere der Zusammenhang zwischen unitären Kozyklen und additiven Kozyklen wird hier hervorgehoben. Obwohl dieses Beispiel nur das sehr kleine Objektsystem \mathbb{C} besitzt, gibt es uns doch eine Vorstellung davon, wie wir es für unseren allgemeineren Unabhängigkeitsbegriff erweitern müssen. Die entscheidende Beobachtung besteht darin, daß nicht zu erwarten ist, stochastische Integrale in der von Neumann Algebra \mathcal{A} definieren zu können (das war schon bei J. Prin nicht möglich, der den GNS-Hilbertraum verwendete), sondern daß wir dafür ein *Hilbert-C*-Modul* (bzw. Hilbert-W*-Modul) über der Anfangsalgebra \mathcal{A}_0 verwenden müssen.

2. Kapitel. Im ersten Abschnitt referieren wir die wichtigsten Begriffe aus der Theorie der Hilbert-C*-Moduln über einer C*-Algebra \mathcal{A} . Etwas ausführlicher verweilen wir bei der Realisierung solcher Moduln in den beschränkten Operatoren auf einem geeigneten Hilbertraum (Kolmogorov-Darstellung), weil wir solche Realisierungen zum Ausgangspunkt unserer Definition von Hilbert-W*-Moduln machen werden. Wir streben dabei keine abstrakte Definition des Hilbert-W*-Modul-Begriffs an (wie z.B. in [Sch]), sondern beschränken uns auf den für uns wichtigen Fall, in dem \mathcal{A} eine von Neumann Algebra ist. Dabei haben wir von [Sch] und verwandten Überlegungen in [Fra] profitiert und einen ‘goldenen Mittelweg’ zwischen diesen beiden Zugängen gefunden. Die Nähe unserer Hilbert-W*-Moduln zu den beschränkten Operatoren gestattet es uns, Topologien, wie die σ stop-

und die w^* -Topologie auf diesen Räumen zu verwenden und eine Version des Satzes von Kaplansky zu formulieren.

Den Rest dieses Kapitels verwenden wir dazu, die entwickelten Konzepte anzuwenden und das Hilbertmodul $L^2(\mathcal{A}, P_0)$ einzuführen, das zu einem Wahrscheinlichkeitsraum (\mathcal{A}, ψ) und einer bedingten Erwartung P_0 von \mathcal{A} auf eine Anfangsalgebra $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$ gehört. Wir werden dabei feststellen, daß wir diese Konstruktion als eine Verallgemeinerung der GNS-Konstruktion ansehen können, auf die sie sich reduziert, wenn wir für P_0 den Zustand ψ verwenden (aufgefaßt als bedingte Erwartung auf $\mathcal{A}_0 := \mathbb{C}$). Wir zeigen, daß sich wichtige Konzepte aus der Theorie der von Neumann Algebren auf $L^2(\mathcal{A}, P_0)$ ausdehnen lassen. Handelt es sich bei (\mathcal{A}, ψ) etwa um den Wahrscheinlichkeitsraum eines weißen Rauschens, so läßt sich vor allem der Unabhängigkeitsbegriff auf $L^2(\mathcal{A}, P_0)$ übertragen. Insbesondere läßt sich auf $L^2(\mathcal{A}, P_0)$ ein Produkt zwischen unabhängigen Elementen definieren (und auf diese Weise das bekannte Ergebnis klassischer Wahrscheinlichkeitstheorie verallgemeinern, daß das Produkt unabhängiger L^2 -Funktionen wieder eine L^2 -Funktion ist). Erst die Möglichkeit dieser Konstruktion erlaubt es, in Kapitel 4 die Definition eines stochastischen Integralbegriffs in Angriff zu nehmen, wozu ja unter anderem das Produkt zwischen einem Integranden und einem Integrator benötigt wird. Aber auch viele Automorphismen und andere vollständig positive Abbildungen auf \mathcal{A} finden ihre Version als Abbildung auf $L^2(\mathcal{A}, P_0)$ – genügend Struktur also, um die algebraische Version des weißen Rauschens zu einer Hilbertmodul-Version fortsetzen zu können.

3. Kapitel. Wir verwenden eine Hilbertmodul-Version des weißen Rauschens und passen zunächst das Konzept des unitären Kozyklus' an die Modul-Situation an, indem wir den Begriff des *unitalen* Kozyklus einführen. Ein solcher Kozyklus erfüllt weiterhin eine multiplikative Kozyklengleichung (mit der Multiplikation unabhängiger Elemente in $L^2(\mathcal{A}, P_0)$) und eine abgeschwächte Unitaritätseigenschaft (denn 'Unitarität' steht uns auf $L^2(\mathcal{A}, P_0)$ a priori nicht zur Verfügung), die einfach darin besteht, daß jedes Element des Kozyklus den Betrag eins hat. Die unitale Struktur der Kozyklen ist ausreichend, um auf dem Objektsystem \mathcal{A}_0 eine Halbgruppensdynamik zu induzieren (genau so, wie es bei dem Markov-Prozeß zu einem *unitären* Kozyklus der Fall ist, s.o.). Sie reicht auch aus, um auf kanonische Weise einen sog. additiven Kozyklus in $L^2(\mathcal{A}, P_0)$ konstruieren zu können. Diese *Standardkonstruktion* stellen wir in Abschnitt 3.2 vor und illustrieren sie in 3.3 an einem Kozyklus zur Brownschen Bewegung und zum Poisson-Prozeß. In Abschnitt 3.4.1 untersuchen wir die Eigenschaften additiver Kozyklen und klären, wie sich der Lindblad-Generator der reduzierten Dynamik auf \mathcal{A}_0 aus dem unitalen Kozyklus und dem zugehörigen additiven Kozyklus bestimmt.

4. Kapitel. Wir benutzen die im 3. Kapitel eingeführten additiven Kozyklen $(b_t)_{t \geq 0}$, um auf dem Hilbertmodul $L^2(\mathcal{A}, P_0)$ zu einem weißen Rauschen $(\mathcal{A}, \psi, S_t, (\mathcal{A}_I)_I)$ eine Verallgemeinerung des klassischen Itô-Integrals zu definieren. Dabei schlagen wir den 'üblichen' Weg ein und definieren das Integral zunächst für Integranden x , die durch einfache Prozesse $(x_t)_{t \geq 0}$ gegeben sind (also Prozesse, die in jedem Zeitintervall nur endlich viele Werte annehmen). Der nichtkommutativen Situation Rechnung tragend, unterscheiden wir zwischen einem Linksintegral $\int_0^t db_s x_s$ und einem Rechtsintegral $\int_0^t x_s db_s$. Mit ihrer Hil-

fe gewinnen wir die Substitute für die Itô-Isometriebeziehung der klassischen Theorie – das entscheidende Hilfsmittel zur Ausdehnung der Integrale auf größere Prozeßklassen. In Abschnitt 4.2 entwickeln wir dafür zunächst eine L^2 -Theorie Hilbertmodul-wertiger Funktionen. Diese bilden selbst auf kanonische Weise ein Prä-Hilbertmodul über \mathcal{A}_0 . Allerdings begegnen wir dem eigentümlichen Problem, daß dieser Raum der L^2 -integrierbaren Funktionen in keiner der sich natürlicherweise anbietenden Topologien vollständig ist. Die Vervollständigung des Raumes zu einem Hilbert- W^* -Modul über \mathcal{A}_0 wird also auch Elemente enthalten, die nicht mehr als Modul-wertige Funktionen interpretierbar sind (ein Beispiel geben wir in Anhang A.4). Der so erhaltene Raum ist noch zu groß: Unsere Integrale lassen sich nur auf seine adaptierten Funktionen fortsetzen, also auf L^2 -Funktionen x , für die zu jedem Zeitpunkt $t \geq 0$ das Bild x_t in $L^2(\mathcal{A}_{[0,t]}, P_0)$ liegt. Im Abschnitt 4.3 konstruieren wir einen Projektor, der sie aus dem Raum aller L^2 -integrierbaren Funktionen herausprojiziert. Den so erhaltenen Raum bezeichnen wir als den Raum der L^2 -integrierbaren Prozesse (obwohl auch in ihm Elemente enthalten sind, die nicht mehr als Prozesse im eigentlichen Sinne, d.h., als adaptierte Funktionen, interpretierbar sind). Auf diesen Raum dehnen wir unsere Integrale aus. Wir sind dadurch in der Lage, im Abschnitt 4.4 stochastische Differentialgleichungen einzuführen (die ja eigentlich über Integralgleichungen definiert sind) und für sie einen Existenz- und Eindeutigkeitssatz zu beweisen.

Damit haben wir die technischen Voraussetzungen geschaffen, um im Rest dieses Kapitels das Hauptergebnis dieser Arbeit zu formulieren und zu beweisen: Wir stellen einen ein-eindeutigen Zusammenhang zwischen additiven und unitalen Kozyklen her. Der Zuordnung eines additiven Kozyklus zu einem unitalen sind wir bereits in der Standardkonstruktion im Abschnitt 3.2 begegnet. Für die umgekehrte Richtung erhalten wir für jeden additiven Kozyklus den zugehörigen unitalen Kozyklus als Lösung einer geeigneten stochastischen Differentialgleichung.

5. Kapitel. In Kapitel 4 haben wir für die Herleitung des zentralen Ergebnisses, also des Zusammenhangs zwischen unitalen und additiven Kozyklen, bis auf die Unabhängigkeitsstruktur keine weiteren Eigenschaften verwendet, die über die Hilbertmodul-Struktur hinausgehen. Das drückt sich insbesondere dadurch aus, daß wir mit reinen Hilbertmodul-Methoden nur unitalen, i.allg. aber keine unitären Kozyklen erwarten können, weil uns die Modulstruktur keine Methoden an die Hand gibt, mit denen zwischen unitalen und unitären Elementen zu unterscheiden wäre. Wenn wir also Fragen nach der Unitarität der multiplikativen Kozyklen stellen wollen, müssen wir weitere Eigenschaften der von Neumann Algebra \mathcal{A} heranziehen, die unserem Hilbertmodul $L^2(\mathcal{A}, P_0)$ zugrunde liegt. In Kapitel 5 führen wir damit die Techniken ein, die es uns später einmal erlauben werden, die Frage nach der Unitarität des multiplikativen Kozyklus zu beantworten ([HKK]).

Die unitären Kozyklen, die uns interessieren, sollen zu stationären stochastischen Prozessen führen und müssen deshalb im Zentralisator \mathcal{A}^ψ des Zustands ψ von (\mathcal{A}, ψ) liegen. Das vereinfacht unsere Untersuchungen beträchtlich, da dann die Standardkonstruktion zeigt, daß die zugehörigen additiven Kozyklen in dem Hilbert- W^* -Modul $L^2(\mathcal{A}^\psi, P_0)$ zu der *finalen* von Neumann Algebra \mathcal{A}^ψ liegen muß. Für dieses Hilbert- W^* -Modul konstruieren wir auf dem GNS-Hilbertraum von ψ eine Realisierung durch (i.allg. unbeschränkte) Operatoren, die zu \mathcal{A}^ψ affiliert sind. Damit haben wir genügend algebraische Struktur zur Verfü-

gung, um diejenigen Elemente x von $L^2(\mathcal{A}^\psi, P_0)$ zu charakterisieren, deren Adjungierte x^* ebenfalls wieder in $L^2(\mathcal{A}^\psi, P_0)$ liegen (die *adjungierbaren* Hilbertmodul-Elemente). Außerdem geben wir Bedingungen an, die sicherstellen, daß das Produkt xy zweier Elemente x und y aus $L^2(\mathcal{A}^\psi, P_0)$ wieder in $L^2(\mathcal{A}^\psi, P_0)$ liegt, selbst wenn x und y nicht unabhängig sind.

6. Kapitel. Dieses Kapitel ist zwei Anwendungen unserer Theorie gewidmet. In Abschnitt 6.1 führen wir die Standardkonstruktion zur Gewinnung additiver Kozyklen am Beispiel eines unitären Kozyklus zum verallgemeinerten Poissonschen weißen Rauschen durch. Wir erhalten für diesen neuen additiven Kozyklus eine explizite Darstellung. In Abschnitt 6.2 geben wir eine Bedingung an den additiven Kozyklus an, die sicherstellt, daß der zugehörige unitale Kozyklus (vgl. Kapitel 4) auf \mathcal{A}_0 eine W^* -dynamisches System induziert, das der sog. *detailed balance*-Bedingung genügt.

Danksagung. Die mathematischen Ideen, die man zu Hause am Schreibtisch entwickelt, haben normalerweise eine lange Vorgeschichte in Form von Seminaren und Arbeitsgemeinschaften, aber auch – und vielleicht vor allem – in Gesprächen beim gemeinsamen Mittagessen oder beim nachmittäglichen Kaffee, die sich über kurz oder lang unweigerlich um Mathematik drehen. So entstehen die langen Diskussionen in kleiner Runde, die nicht selten erst spät in der Nacht ihr Ende finden. Es ist mir eine Freude, all jenen zu danken, mit denen ich diese anregende und freundschaftliche Atmosphäre genießen durfte.

An erster Stelle möchte ich meinen beiden Mentoren Manfred Wolff und Burkhard Kümmerner Dank aussprechen. Ihr mathematisches Interessengebiet, das sich weit in die Physik und dort insbesondere in die Quantenmechanik erstreckt und besonders ihre kompetente und freundschaftliche Art, mich und andere an ihren Ideen und Überlegungen teilhaben zu lassen, erzeugte das anregende und anspornende Klima, ohne das diese Arbeit wohl nie entstanden wäre. Insbesondere die grundlegenden Arbeiten von Burkhard Kümmerner zur nichtkommutativen Wahrscheinlichkeitstheorie, die wesentlich dazu beitrugen, diesem Gebiet eine klar umrissene Kontur zu geben, stellten *die* tragfähige Grundlage bereit, von der aus der Vorstoß in mathematisches Neuland gewagt werden konnte.

Mein ganz besonderer Dank gilt Claus Köstler, der mir in unzähligen Diskussionen stets ein verlässlicher und kompetenter Partner war. Mit seiner unerschrockenen Art über mathematische und physikalische Probleme nachzudenken, hat er zur Genauigkeit vieler der in dieser Arbeit vorgestellten Begriffsbildungen beigetragen. Auch die entspannten mathematischen Exkursionen mit Rolf Gohm, die mitunter von ganz einfachen Ausgangspunkten unversehens zu interessanten Problemen und Einsichten führen konnten, sind mir lebhaft in Erinnerung.

Viele Ideen sind im Umfeld der C^* -Arbeitsgruppe in Tübingen und Stuttgart entstanden. Claudia Hertfelder, Claudia Rupp, Tatjana Lang, Lisa Steiner, Nils Gebhard, Géza Giedke, Florian Haag, Florian Karsten, Martin Leitz-Martini, Oliver Marquetant, Michael Schieber, Jürgen Schweizer und allen anderen früheren und jetzigen Mitgliedern der C^* -AG möchte ich für die angenehme Arbeitsatmosphäre danken, die ich in ihrem Kreise erlebt habe.

Einen großen Verdienst hat sich Helmut Fischer um das Gelingen dieser Arbeit erworben.

Daß er immer bereit war, mit mir über Probleme der Mathematik und der Physik, insbesondere der Quantenmechanik, zu diskutieren, war mir eine verlässliche und oft in Anspruch genommene Anregung. Von mindestens derselben Wichtigkeit jedoch sind die gemeinsam mit ihm unternommenen Bergfahrten, die mir über so manche Durststrecke hinweghalfen.

1. Nichtkommutative Wahrscheinlichkeitstheorie

Die klassische Wahrscheinlichkeitstheorie ist eine ausgereifte Theorie, die leistungsfähige Werkzeuge zur Untersuchung stochastischer Phänomene besitzt. Eine nichtkommutative Wahrscheinlichkeitstheorie sollte die klassische (kommutative) Wahrscheinlichkeitstheorie als Spezialfall enthalten. Daher werden wir Verallgemeinerungen ihrer wichtigsten Begriffe angeben müssen. Die Strategie, die wir dabei verfolgen besteht darin, von den spezifisch klassischen Aspekten der Wahrscheinlichkeitstheorie, wie etwa dem Maßraum, oder den Pfaden stochastischer Prozesse usw. zu abstrahieren, indem wir algebraische Substitute dieser Begriffe suchen, die eine nichtkommutative Fortschreibung erlauben. Bei den Konzepten, die in eine nichtkommutative Version zu übertragen sind, handelt es sich im Wesentlichen um das des Wahrscheinlichkeitsraumes, der bedingten Erwartung, der Zufallsvariable, des stochastischen Prozesses und des Übergangsoperators. Darauf aufbauend können wir die zentralen Hilfsmittel einführen, die wir für die Formulierung eines nichtkommutativen stochastischen Integralbegriffs benötigen werden: Wir brauchen eine nichtkommutative Version des weißen Rauschens und als Voraussetzung dafür eine genaue Untersuchung des Unabhängigkeitsbegriffes. Dabei wird uns ein gelegentlicher Blick auf die kommutative Situation helfen, den richtigen Weg einzuschlagen.

Anschließend definieren wir Markov-Prozesse und erklären, wie diese durch Kopplung an weißes Rauschen gewonnen werden können. In einer einfachen kommutativen Situation zeigen wir dann, wie eine solche Kopplungen als Lösung einer stochastischen Differentialgleichung entsteht.

Wenn es unsere Ausführungen nicht zu sehr in die Länge zieht, gehen wir so vor, daß wir den nichtkommutativen Versionen die kommutativen gegenüberstellen (für ausführlichere Darlegungen, die wir als Richtschnur dieses Kapitel verwendet haben, verweisen wir dabei generell auf [Küm1, Küm3, Küm4, Küm5]). Damit nutzen wir dieses Kapitel zum einen, um in die Ideen der nichtkommutativen Wahrscheinlichkeitstheorie einzuführen und zum anderen, um die für den Fortgang dieser Arbeit benötigte Sprache bereitzustellen.

1.1 Grundlegende Begriffe und Notation

Im folgenden stellen wir grundlegende Begriffe und Notationen zusammen, die für die gesamte Arbeit gelten. Für weitergehende Informationen zum vorgestellten Stoff verweisen wir auf [BrRo1, BrRo2, KaRi1, KaRi2, Ped, Sak] und [Ta1].

1.1.1 Allgemeines. $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}^+, \mathbb{R}, \mathbb{R}^+$ und \mathbb{C} stellen die natürlichen, die ganzen, die positiven ganzen (einschließlich der Null), die reellen, die positiven reellen (ebenfalls mit Null) und die komplexen Zahlen dar. Gelegentlich benutzen wir \mathbb{T} , und meinen damit \mathbb{Z} oder \mathbb{R} . Für eine Teilmenge I dieser Mengen bezeichnet I^c ihr Komplement. Hilberträume und ihre Unterräume werden durch die Buchstaben \mathcal{H} und \mathcal{K} und ihre Elemente üblicherweise durch griechische Buchstaben bezeichnet. Das Skalarprodukt $\mathcal{H} \times \mathcal{H} \ni (\xi, \eta) \mapsto \langle \xi | \eta \rangle$ verwenden wir rechts-linear. Für die *beschränkten Operatoren* $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ auf \mathcal{H} benutzen wir kleine Buchstaben. p und q sind für Projektoren reserviert. Für den Abschluß eines Unterraumes \mathcal{H} und den zugehörigen orthogonalen Projektor schreiben wir mitunter $[\mathcal{H}]$. Für $x, y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ist $[x, y] := xy - yx$ und $\{x, y\} := xy + yx$. Ist \mathcal{S} eine Teilmenge eines Vektorraums \mathcal{V} , dann ist $\text{lh}\{\mathcal{S}\}$ die *lineare Hülle*, die von ihr in \mathcal{V} erzeugt wird.

1.1.2 Algebren. C^* - und W^* -Algebren bezeichnen wir mit den Buchstaben \mathcal{A}, \mathcal{B} und \mathcal{C} . Meistens verwenden wir sie in einer konkreten Realisierung als Unteralgebren der beschränkten Operatoren $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ auf einem Hilbertraum \mathcal{H} , d.h., im Falle von W^* -Algebren, als *von Neumann Algebren*. $\mathcal{A}' := \{y \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \mid [x, y] = 0, \text{ f.a. } x \in \mathcal{A}\}$ meint dann die *Kommutante* und $\mathcal{Z}(\mathcal{A}) := \mathcal{A} \cap \mathcal{A}'$ das *Zentrum* von \mathcal{A} in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Ist \mathcal{H} n -dimensional ($n < \infty$), so schreiben wir statt $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ auch M_n und meinen damit den Raum der $n \times n$ -Matrizen. $\mathbb{1}_{\mathcal{A}}$ ist der *Einsoperator* in \mathcal{A} . Normalerweise wird es klar sein, zu welcher Algebra er gehört, so daß wir den Index meist weglassen können. $\|x\|$ bezeichnet die Norm eines Elementes $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. $\mathcal{A}_1 := \{x \in \mathcal{A} \mid \|x\| \leq 1\}$ ist die Einheitskugel und $\mathcal{A}^+ := \{x \in \mathcal{A} \mid x \geq 0\}$ der positive Kegel von \mathcal{A} . \mathcal{A}_* bezeichnet den *Präduale* von \mathcal{A} , d.h., den Raum der normalen linearen Funktionale auf \mathcal{A} und \mathcal{A}_*^+ die positiven Elemente darin. $\mathcal{A}_{*,1}^+$ sind die *normalen Zustände*, also die positiven, normalen Funktionale der Norm Eins. Für sie werden die griechischen Symbole φ, ψ usw. verwendet. Wir gehen generell davon aus, daß \mathcal{A}_* norm-separabel ist, so daß alle Approximationen in \mathcal{A} mit Folgen, statt mit Netzen möglich sind (vgl. A.2.2). Mit $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ bezeichnen wir den *W^* -algebraischen Aufspann* zweier W^* -Algebren \mathcal{A} und \mathcal{B} , d.h., den w^* -Abschluß (s.u.) des algebraischen Aufspanns von \mathcal{A} und \mathcal{B} . Für eine Familie $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ von W^* -Algebren wird ein solcher Aufspann durch $\bigvee_{i \in I} \mathcal{A}_i$ bezeichnet. Ist ψ ein treuer normaler Zustand auf \mathcal{A} , dann ist $\sigma^\psi := (\sigma_t^\psi)_{t \in \mathbb{R}}$ seine *modulare Automorphismengruppe* und $\mathcal{A}^\psi := \{x \in \mathcal{A} \mid \psi(xy) = \psi(yx) \text{ f.a. } y \in \mathcal{A}\}$ der *Zentralisator*, d.h., die *Fixpunktalgebra* von σ^ψ . Für einen unitären Operator $u \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ bezeichnet $\text{Ad } u$ den Automorphismus $u^* \cdot u$ auf $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

1.1.3 Topologie. Von den Topologien des *dualen Paares* $\langle \mathcal{A}, \mathcal{A}_* \rangle$ auf \mathcal{A} benutzen wir die σ wop- oder w^* -Topologie (wir gebrauchen beide Begriffe), also die *lokalkonvexe Topologie* auf \mathcal{A} , die durch die Halbnormen $\mathcal{A} \ni x \mapsto |\varphi(x)|, \varphi \in \mathcal{A}_*^+$, erzeugt wird. Darüberhinaus die σ stop- und gelegentlich die σ stop*-Topologie, deren Halbnormen durch $\mathcal{A} \ni x \mapsto \varphi(x^*x)^{\frac{1}{2}}$ bzw. $\mathcal{A} \ni x \mapsto [\varphi(x^*x) + \varphi(xx^*)]^{\frac{1}{2}}, \varphi \in \mathcal{A}_*^+$, gegeben sind. Limiten in diesen Topologien werden durch die Schreibweise (in der Reihenfolge obiger Aufzählung) σw -, oder w^* -, σs - und σs^* -lim deutlich gemacht. In konkreten Realisierungen der Algebra auf einem Hilbertraum \mathcal{H} haben wir noch die wop- und die stop-Topologie zur Verfügung, die durch die Halbnormen $\mathcal{A} \ni x \mapsto |\langle \xi | x \eta \rangle|$ bzw. $\mathcal{A} \ni x \mapsto \|x \xi\|, \xi, \eta \in \mathcal{H}$,

erzeugt werden. Für einen *treuen* normalen Zustand ψ auf \mathcal{A} , ist durch $\mathcal{A} \ni x \mapsto \psi(x^*x)^{\frac{1}{2}}$ die sog. ψ -Norm auf \mathcal{A} definiert, die mit $\|\cdot\|_\psi$ bezeichnet werde. Limiten werden durch w-, s- bzw. $\|\cdot\|_\psi$ -lim angegeben.

1.1.4 GNS-Darstellung. Der *GNS-Hilbertraum* eines treuen normalen Zustandes ψ auf \mathcal{A} ist der Abschluß von \mathcal{A} in der ψ -Norm. Als Bezeichnung wählen wir $L^2(\mathcal{A}, \psi)$, oft auch einfach \mathcal{H}_ψ , oder gemäß obiger Vereinbarung $[\mathcal{A}]$, wenn klar ist, zu welchem Zustand der GNS-Hilbertraum gebildet wird. Da ψ treu und normal ist, können wir davon ausgehen, daß \mathcal{A} bereits auf seinem GNS-Hilbertraum dargestellt ist: $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H}_\psi)$. ψ ist dann durch den Vektorzustand mit dem zyklischen und separierenden Vektor $\mathbb{1}$ und die Darstellung π_ψ durch die identische Abbildung gegeben. Die Wirkung von Operatoren $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\psi)$ schreiben wir multiplikativ, also $T : \xi \mapsto T\xi$, $\xi \in \mathcal{H}_\psi$, während für die Wirkung von Operatoren T auf \mathcal{A} die Schreibweise $T : x \mapsto T(x)$ vorbehalten ist. Auf diese Weise läßt sich für einen von \mathcal{A} auf \mathcal{H}_ψ stetig fortsetzbaren Operator T dasselbe Symbol verwenden: $Tx = T(x)$, oder, wenn T ein Automorphismus ist: $Tx\xi = T(x)T\xi$, für $x \in \mathcal{A} \subseteq \mathcal{H}_\psi$, $\xi \in \mathcal{H}_\psi$.

In manchen Situationen, vor allem in der Entwicklung der Theorie affilierter Operatoren, ist es bequem, den zyklischen Vektor $\mathbb{1}$ durch den Buchstaben Ω deutlich zu machen. Dadurch hebt die Schreibweise ‘ $x\Omega$ ’ die Rolle von x als $L^2(\mathcal{A}, \psi)$ -Element stärker hervor. Den zu Ω gehörenden *modularen Operator* bezeichnen wir dann wie üblich durch Δ und die *modulare Konjugation* durch J . Die GNS-Darstellung der modularen Gruppe σ^ψ ist durch $(\Delta^{it})_{t \in \mathbb{R}}$ gegeben.

1.2 Wahrscheinlichkeitsräume und ihre Morphismen

1.2.1 Wahrscheinlichkeitsraum. Die klassische Wahrscheinlichkeitstheorie geht bei der Beschreibung eines stochastischen Vorgangs von einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, Σ, μ) aus, bestehend aus einem Grundraum Ω , der die möglichen Ausgänge und einer σ -Algebra Σ von Teilmengen von Ω , die die möglichen Ereignisse beschreibt, sowie einem Maß μ auf Σ , das diese Ereignisse stochastisch bewertet. Als algebraisches Bild eines solchen Wahrscheinlichkeitsraumes bietet sich das Paar (\mathcal{A}, ψ) an, das aus der kommutativen W^* -Algebra $\mathcal{A} := L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ und dem treuen normalen Zustand $\psi := \int_\Omega \cdot d\mu$ gebildet wird. Die möglichen Ereignisse werden nun durch die Projektionen von \mathcal{A} (also den charakteristischen Funktionen zu Elementen aus Σ) beschrieben. Normalerweise läßt sich aus der algebraischen Version (\mathcal{A}, ψ) wieder auf ein Modell des Wahrscheinlichkeitsraumes (Ω, Σ, μ) zurückschließen (siehe z.B. [Ta1], III, Proposition 1.21, [Sak], Proposition 1.18.1). Die nichtkommutative Fortschreibung des Begriffs Wahrscheinlichkeitsraum besteht nun einfach darin, daß wir für \mathcal{A} auch nichtkommutative W^* -Algebren zulassen: Ein (*nichtkommutativer*) *Wahrscheinlichkeitsraum* ist ein Paar (\mathcal{A}, ψ) , das aus einer W^* -Algebra \mathcal{A} und einem treuen normalen Zustand ψ besteht (siehe auch [Acc, AFL, Küm4]).

1.2.2 Morphismen. Ein *Morphismus* T von einem Wahrscheinlichkeitsraum (\mathcal{A}, ψ) in einen zweiten Wahrscheinlichkeitsraum (\mathcal{B}, φ) ist ein *vollständig positiver*, $\mathbb{1}$ -erhaltender,

linearer Operator von \mathcal{A} nach \mathcal{B} mit der Eigenschaft $\varphi \circ T = \psi$. Die Morphismen von (\mathcal{A}, ψ) in sich bezeichnen wir durch $\text{Mor}(\mathcal{A}, \psi)$. Sie umfassen die *Automorphismen* $\text{Aut}(\mathcal{A}, \psi)$, d.h., die $*$ -Automorphismen von \mathcal{A} , die ψ invariant lassen. Morphismen sind automatisch *normal*, d.h. w^* - w^* -stetig (Anhang A.1.1) und *treu*: $T(x^*x) = 0$ hat $\psi(T(x^*x)) = \psi(x^*x) = 0$ und, da ψ treu ist, $x = 0$ zur Folge.

Jeder Morphismus T läßt sich kanonisch zu einer Kontraktion \bar{T} auf den GNS-Hilbertraum fortsetzen. \bar{T} ist auf dem dichten Teilraum \mathcal{A} von \mathcal{H}_ψ durch $\bar{T}x = T(x)$ definiert. Die Kadison-Schwarz-Ungleichung für den vollständig positiven Operator T zeigt die Fortsetzbarkeit von \bar{T} zu einer Kontraktion auf ganz \mathcal{H}_ψ : $\|\bar{T}x\|_\psi^2 = \psi(T(x^*)T(x)) \leq \psi(T(x^*x)) = \|x\|_\psi^2$. Diese Fortsetzung bezeichnen wir auch als *GNS-Darstellung des Morphismus* T . Gemäß den Bemerkungen in 1.1.4 schreiben wir später statt \bar{T} wieder T . Die Zuordnung $T \mapsto \bar{T}$ ist punktweise σ stop-stop-stetig und injektiv. Es ist allerdings zu beachten, daß die Adjungierte \bar{T}^* i.allg. nicht mehr die GNS-Darstellung eines Morphismus T^* von (\mathcal{A}, ψ) ist (ein Beispiel ist in [Küm1] angegeben). Damit das doch gilt, ist notwendig und hinreichend, daß T mit der modularen Automorphismengruppe σ^ψ vertauscht (siehe [Küm2], oder Anhang A.1.2). In diesem Fall heißt $T^* \in \text{Mor}(\mathcal{A}, \psi)$ ψ -Adjungierte von T . Sie genügt der Gleichung $\psi(xT(y)) = \psi(T^*(x)y)$ f.a. $x, y \in \mathcal{A}$ und ist durch sie eindeutig bestimmt. Für einen beliebigen Automorphismus $T \in \text{Aut}(\mathcal{A}, \psi)$ läßt sich leicht einsehen, daß eine ψ -Adjungierte existiert und daß diese durch T^{-1} gegeben ist. Insbesondere vertauscht T also mit σ^ψ .

Ein *W*-dynamisches System* (\mathcal{A}, ψ, T_t) ist ein Wahrscheinlichkeitsraum (\mathcal{A}, ψ) , versehen mit einer punktweise w^* -stetigen Halbgruppe $(T_t)_{t \geq 0} \subset \text{Mor}(\mathcal{A}, \psi)$. Liegt sie in $\text{Aut}(\mathcal{A}, \psi)$, so läßt sie sich kanonisch zu einer w^* -stetigen Automorphismengruppe $(T_t)_{t \in \mathbb{R}} \subset \text{Mor}(\mathcal{A}, \psi)$ erweitern. Eine einfache Rechnung zeigt, daß diese dann auch punktweise σ stop-stetig ist. (\mathcal{A}, ψ, T_t) heißt *reversibles W*-dynamisches System*, wenn es sich bei T_t um Automorphismen handelt, andernfalls sprechen wir von einem *irreversiblen W*-dynamischen System*. Ist das irreversible System $\|\cdot\|$ -stetig, so besitzt die Halbgruppe $(T_t)_{t \geq 0}$ einen beschränkten Generator L , den sog. *Lindblad-Generator*: $T_t = e^{tL}$.

Mitunter begegnen wir auch W*-dynamischen Systemen in diskreter Zeit: $t \in \mathbb{Z}^{(+)}$. T_t ist dann durch $T := T_1$ bereits eindeutig bestimmt: $T_t = T^t$. Für diesen Fall schreiben wir (\mathcal{A}, ψ, T) . Alle weiteren Begriffe der kontinuierlichen Situation übertragen sich sinngemäß.

1.3 Bedingte Erwartung und Unabhängigkeit

1.3.1 Bedingte Erwartung. Von besonderem Interesse sind für uns Morphismen P von (\mathcal{A}, ψ) in (\mathcal{B}, φ) , für die es einen injektiven $*$ -Homomorphismus j von (\mathcal{B}, φ) in (\mathcal{A}, ψ) mit der Eigenschaft $P \circ j = \text{id}_{\mathcal{B}}$ gibt. Einen solchen Morphismus P nennen wir *bedingte Erwartung* von (\mathcal{A}, ψ) auf (\mathcal{B}, φ) . j ist die zu P gehörende Injektion. Sie ist durch P eindeutig bestimmt. Normalerweise werden wir $j(\mathcal{B})$ mit einer W^* -Unteralgebra \mathcal{A}_0 von \mathcal{A} (die dieselbe $\mathbb{1}$ wie \mathcal{A} besitzt) und $\varphi = \psi \circ j$ mit ψ identifizieren. $P_0 := P \circ j \in \text{Mor}(\mathcal{A}, \psi)$ ist dann die *bedingte Erwartung bzgl. ψ* von \mathcal{A} auf \mathcal{A}_0 . Da der Bezug zum Zustand

ψ meist offensichtlich sein wird, werden wir ihn normalerweise unterdrücken und einfach von der ‘bedingten Erwartung P_0 ’ sprechen. Sie besitzt die sog. *Moduleigenschaft*: $P_0(xyz) = xP_0(y)z$ für alle $x, z \in \mathcal{A}_0$ und $y \in \mathcal{A}$. Nach einem bekannten Satz von Takesaki ([Ta2], Theorem 7.1) existiert P_0 genau dann, wenn \mathcal{A}_0 unter der modularen Automorphismengruppe σ^ψ von ψ global invariant gelassen wird. Nach 1.2.2 existiert also die ψ -Adjungierte von P_0 , und man überzeugt sich leicht, daß sie mit P_0 übereinstimmt: P_0 ist ψ -selbstadjungiert. P_0 bildet das Zentrum $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$ in das Zentrum von \mathcal{A}_0 ab: $P_0(z)x = P_0(zx) = P_0(xz) = xP_0(z)$ f.a. $z \in \mathcal{Z}(\mathcal{A})$ und $x \in \mathcal{Z}(\mathcal{A}_0)$.

Ist ψ ein Spurzustand auf \mathcal{A} , d.h., ist \mathcal{A} eine *finite* W^* -Algebra, so ist die modulare Gruppe trivial. In diesem Fall gibt es also zu jeder W^* -Unteralgebra von \mathcal{A} eine bedingte Erwartung. Diese Situation liegt z.B. in der klassischen Wahrscheinlichkeitstheorie immer vor.

Der Zusammenhang mit dem klassischen Begriff der bedingten Erwartung kann nun folgendermaßen hergestellt werden: Eine W^* -Unteralgebra \mathcal{A}_0 von $\mathcal{A} := L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ ist von der Form $\mathcal{A}_0 = L^\infty(\Omega, \Sigma_0, \mu_0)$. Dabei ist Σ_0 eine σ -Unteralgebra von Σ und μ_0 die Einschränkung von μ auf Σ_0 . P_0 sei die bedingte Erwartung von \mathcal{A} auf \mathcal{A}_0 bzgl. $\psi_\mu := \int_\Omega \cdot d\mu$. Wählen wir in der Gleichung $\psi_\mu(x_0 P_0(y)) = \psi_\mu(x_0 y)$, die für alle $x_0 \in \mathcal{A}_0$ und $y \in \mathcal{A}$ gilt, für x_0 die charakteristische Funktion χ_{A_0} einer Menge $A_0 \in \Sigma_0$, so erhalten wir aus ihr die klassische Bestimmungsgleichung einer bedingten Erwartung (vgl. z.B. [Hid]):

$$\int_{A_0} P_0(y) d\mu = \int_{A_0} y d\mu, \quad \text{f.a. } A_0 \in \Sigma_0, y \in \mathcal{A}.$$

1.3.2 Es wird sich im Verlaufe dieser Arbeit zeigen, daß es sinnvoll ist, den Begriff des Wahrscheinlichkeitsraumes noch um eine W^* -Unteralgebra \mathcal{A}_0 von \mathcal{A} zu ergänzen (mit $\mathbb{1}_{\mathcal{A}} = \mathbb{1}_{\mathcal{A}_0}$). Dabei wird vorausgesetzt, daß es die bedingte Erwartung P_0 bzgl. ψ von \mathcal{A} auf \mathcal{A}_0 gibt. Ein solches Tripel $(\mathcal{A}, \psi, \mathcal{A}_0)$ werden wir im folgenden also ebenfalls als Wahrscheinlichkeitsraum bezeichnen (da die bedingte Erwartung durch das Tripel bereits eindeutig festgelegt ist, führen wir P_0 in der Notation nicht extra an).

1.3.3 Unabhängigkeit. Der klassische Begriff der *Unabhängigkeit* können wir auch mit Hilfe *bedingter Erwartungen* formulieren. Dieser Möglichkeit, die sich in der klassischen Wahrscheinlichkeitstheorie nicht gerade aufdrängt, wird uns den Weg weisen, wie wir den Unabhängigkeitsbegriff für unsere erweiterte Version 1.3.2 eines Wahrscheinlichkeitsraumes zu definieren haben. Wir erinnern uns an die klassische Formulierung: Zwei σ -Unteralgebren Σ_1 und Σ_2 eines Wahrscheinlichkeitsraumes (Ω, Σ, μ) heißen *unabhängig*, wenn für jeweils zwei Ereignisse $A_i \in \Sigma_i$, $i = 1, 2$, die Faktorisierungseigenschaft $\mu(A_1 \cap A_2) = \mu(A_1)\mu(A_2)$, oder äquivalenterweise $\psi_\mu(\chi_{A_1} \cdot \chi_{A_2}) = \psi_\mu(\chi_{A_1})\psi_\mu(\chi_{A_2})$ gilt ($\psi_\mu := \int_\Omega \cdot d\mu$). Zwei Unteralgebren $L^\infty(\Omega, \Sigma_i, \mu)$, $i = 1, 2$, von $L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ heißen *unabhängig*, wenn der Erwartungswert des Produkts je zweier Elemente $x_i \in L^\infty(\Omega, \Sigma_i, \mu)$, faktorisiert: $\psi_\mu(x_1 x_2) = \psi_\mu(x_1)\psi_\mu(x_2)$. Nun können wir den Zustand ψ_μ aber auch als bedingte Erwartung $P_\mu : L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu) \ni x \mapsto \psi_\mu(x) \cdot \mathbb{1}$ auf die triviale Unteralgebra $\mathbb{C} \cdot \mathbb{1}$ auffassen. Unabhängigkeit heißt dann ‘Faktorisieren unter der bedingten Erwartung P_μ ’. Von diesem Standpunkt gehen wir bei unserer Definition aus.

1.3.4 Definition. Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\mathcal{A}, \psi, \mathcal{A}_0)$. Zwei Unteralgebren $\mathcal{A}_i \supseteq \mathcal{A}_0$, $i = 1, 2$, für die die bedingten Erwartungen P_i bzgl. ψ von \mathcal{A} auf \mathcal{A}_i existieren, heißen unabhängig (über \mathcal{A}_0) oder P_0 -unabhängig, wenn das Produkt von jeweils zwei Elementen $x_i \in \mathcal{A}_i$, $i = 1, 2$, unter der bedingten Erwartung P_0 faktorisiert:

$$P_0(x_1 x_2) = P_0(x_1) P_0(x_2). \quad (1.1)$$

Ist $\mathcal{A}_0 = \mathbb{C} \cdot \mathbb{1}$, so sprechen wir auch von der ψ -Unabhängigkeit der Algebren \mathcal{A}_1 und \mathcal{A}_2 .

Meistens sprechen wir vereinfachend von der ‘Unabhängigkeit der W^* -Unteralgebren \mathcal{A}_1 und \mathcal{A}_2 von $(\mathcal{A}, \psi, \mathcal{A}_0)$ ’ und meinen damit, daß die Voraussetzungen obiger Definition erfüllt sind.

Für $\mathcal{A}_0 = \mathbb{C} \cdot \mathbb{1}$, d.h. $P_0 = \psi \cdot \mathbb{1}$, erhalten wir die direkte Verallgemeinerung der klassischen Formulierung auf nichtkommutative Wahrscheinlichkeitsräume (\mathcal{A}, ψ) . Unsere Definition ist eine Art Vergrößerung dieser direkten Version, denn alle Elemente aus \mathcal{A}_0 sind gemäß obiger Definition unabhängig. \mathcal{A}_0 selbst ist also für diesen Unabhängigkeitsbegriff strukturelos.

Die bedingten Erwartungen P_i von \mathcal{A}_i auf \mathcal{A}_0 existieren, denn sie sind einfach durch die Einschränkung von P_0 auf \mathcal{A}_i gegeben. Außerdem folgt aus $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}_i$: $P_i \circ P_0 = P_0$. Dieser Sachverhalt ist am einfachsten über die GNS-Darstellung einzusehen.

Folgendes Lemma spiegelt im Falle eines treuen normalen Spurzustands die Eigenschaften sog. *commuting squares* wieder, wie sie in ([GHJ]) auftreten.

1.3.5 Lemma. Gegeben seien ein Wahrscheinlichkeitsraum (\mathcal{A}, ψ) und drei Unteralgebren \mathcal{A}_0 , \mathcal{B} und \mathcal{C} von \mathcal{A} , so daß die bedingten Erwartungen bzgl. ψ $P_{\mathcal{B}}$ und $P_{\mathcal{C}}$ von \mathcal{A} auf \mathcal{B} bzw. \mathcal{C} existieren. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- i) $P_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) = P_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}) = \mathcal{A}_0$.
- ii) Die bedingte Erwartung P_0 bzgl. ψ von \mathcal{A} auf \mathcal{A}_0 existiert und ist durch $P_{\mathcal{B}} \circ P_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{C}} \circ P_{\mathcal{B}} = P_0$ gegeben.
- iii) \mathcal{B} und \mathcal{C} sind unabhängig über \mathcal{A}_0 (insbesondere gilt $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{B}$ und $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{C}$).

Beweis. i) \Rightarrow ii): Die Fortsetzungen von $P_{\mathcal{B}}$, $P_{\mathcal{C}}$ und P_0 auf den GNS-Hilbertraum sind die orthogonalen Projektionen auf $L^2(\mathcal{B}, \psi)$, $L^2(\mathcal{C}, \psi)$ bzw. $L^2(\mathcal{A}_0, \psi)$ (die wir wieder durch dieselben Symbole bezeichnen). Aus i) erhalten wir $P_{\mathcal{B}} P_{\mathcal{C}} = P_0 P_{\mathcal{B}} P_{\mathcal{C}}$ und außerdem $P_0 \leq P_{\mathcal{B}}$, $P_0 \leq P_{\mathcal{C}}$. Daraus folgt sofort $P_{\mathcal{B}} P_{\mathcal{C}} = P_0 = P_{\mathcal{C}} P_{\mathcal{B}}$. Insbesondere vertauschen $P_{\mathcal{B}}$ und $P_{\mathcal{C}}$, so daß $P_{\mathcal{B}} \circ P_{\mathcal{C}}$ eine bedingte Erwartung bzgl. ψ ist, nämlich die von \mathcal{A} auf \mathcal{A}_0 . Die Umkehrung ii) \Rightarrow i) ist klar.

ii) \Rightarrow iii): Zunächst gilt $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{B}$ und $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{C}$: Ein Element $x \in \mathcal{A}$ liegt genau dann in \mathcal{A}_0 bzw. \mathcal{B} , wenn $x = P_0(x)$ bzw. $x = P_{\mathcal{B}}(x)$ gilt. Für $x \in \mathcal{A}_0$ erhalten wir also $P_{\mathcal{B}}(x) = P_{\mathcal{B}} \circ P_0(x) = P_{\mathcal{B}} \circ P_{\mathcal{B}} \circ P_{\mathcal{C}}(x) = P_0(x) = x$, d.h., $x \in \mathcal{B}$ (und genauso: $x \in \mathcal{C}$). Es folgt $P_0 \circ P_{\mathcal{B}} = P_0 \circ P_{\mathcal{C}} = P_0$ und damit:

$$P_0(P_{\mathcal{B}}(x) P_{\mathcal{C}}(y)) = P_0 \circ P_{\mathcal{B}}(P_{\mathcal{B}}(x) P_{\mathcal{C}}(y)) = P_0(P_{\mathcal{B}}(x) P_{\mathcal{B}} \circ P_{\mathcal{C}}(y))$$

$$= P_0(P_{\mathcal{B}}(x) P_0(y)) = P_0(P_{\mathcal{B}}(x)) P_0(P_{\mathcal{C}}(y)),$$

f.a. $x, y \in \mathcal{A}$.

iii) \Rightarrow ii): Es gilt

$$\begin{aligned} \psi(x P_{\mathcal{B}} \circ P_{\mathcal{C}}(y)) &= \psi(P_{\mathcal{B}}(x) P_{\mathcal{C}}(y)) = \psi(P_0(P_{\mathcal{B}}(x) P_{\mathcal{C}}(y))) \\ &= \psi(P_0 \circ P_{\mathcal{B}}(x) P_0 \circ P_{\mathcal{C}}(y)) = \psi(P_0(x) P_0(y)) = \psi(x P_0(y)) \end{aligned}$$

f.a. $x, y \in \mathcal{A}$ und damit $P_{\mathcal{B}} \circ P_{\mathcal{C}} = P_0 = P_{\mathcal{C}} \circ P_{\mathcal{B}}$. \square

1.3.6 Korollar. Für W^* -Unteralgebren \mathcal{B} und \mathcal{C} von $(\mathcal{A}, \psi, \mathcal{A}_0)$, die unabhängig über \mathcal{A}_0 sind, gilt (1.1):

$$P_0(x_1 y x_2) = P_0(x_1 P_0(y) x_2), \quad \text{f.a. } x_1, x_2 \in \mathcal{B}, y \in \mathcal{C}. \quad (1.2)$$

Beweis. Die Behauptung ergibt sich unter Verwendung von Lemma 1.3.5 aus der Modul-eigenschaft der bedingten Erwartung $P_{\mathcal{B}}$:

$$P_0(x_1 y x_2) = P_0 \circ P_{\mathcal{B}}(x_1 P_{\mathcal{C}}(y) x_2) = P_0(x_1 P_{\mathcal{B}} \circ P_{\mathcal{C}}(y) x_2) = P_0(x_1 P_0(y) x_2),$$

f.a. $x_1, x_2 \in \mathcal{B}, y \in \mathcal{C}$. \square

Gleichung (1.3.6) wird sich als das entscheidende Hilfsmittel zum Aufbau einer stochastischen Integrationstheorie herausstellen.

1.4 Zufallsvariable und Prozeß

1.4.1 Zufallsvariable. Eine klassische Zufallsvariable X ist eine meßbare Abbildung zwischen zwei Wahrscheinlichkeitsräumen (Ω, Σ, μ) und $(\Omega_0, \Sigma_0, \mu_0)$. Dabei ist μ_0 das Bildmaß $X(\mu)$ von μ unter X . Wir verbinden damit folgende Vorstellung:

(Ω, Σ, μ) fassen wir als ‘Hintergrundsystem’ auf, als Quelle des zufälligen Geschehens. Wir denken dabei z.B. an ein Gas, oder eine Flüssigkeit, also an ein (physikalisches) System mit vielen Teilchen. Ω ist dann der Phasenraum \mathbb{R}^{6n} , d.h., Elemente $\omega \in \Omega$ beschreiben die möglichen Zustände des Systems. Σ besteht aus den Borelmengen $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{6n})$ und beschreibt die möglichen Ereignisse, während das Maß μ , z.B. das Gibbs-Gleichgewichtsmaß, die Wahrscheinlichkeit dieser Ereignisse wiedergibt. Dieses (große) System ist i.allg. nicht in allen seinen Eigenschaften vollständig beobachtbar (n ist ja normalerweise außerordentlich groß). Teilinformationen über das System werden durch die Zufallsvariable X ‘extrahiert’ und in dem kleineren (d.h. weniger komplexen) System durch Ereignisse aus Σ_0 zugänglich gemacht. Sie werden durch das Bildmaß μ_0 bewertet. Dieses Bild können wir an einem Beispiel noch etwas konkretisieren. Stellen wir uns unter X als erstes die Projektion auf den Phasenraum $\Omega_0 := \mathbb{R}^6$ eines der Teilchen vor. Dieses (vor den anderen ausgezeichnete) Teilchen können wir uns z.B. als ein Brownsches Partikel denken. Das große System wäre die Flüssigkeit, in der es sich üblicherweise befindet.

Dann beschreibt X lediglich die Einbettung des kleinen Systems in das große. Andererseits wird das große System mit dem kleinen aber auch in Wechselwirkung stehen, d.h., dieses im Verlaufe der Zeit beeinflussen: Das Brownsche Teilchen erfährt durch die Moleküle der umgebenden Flüssigkeit eine große Anzahl unregelmäßiger Stöße. Seine Phasenraumkoordinate wird damit zeitabhängig und beschreibt in ihrer zeitlichen Entwicklung die Wechselwirkung der Umgebung mit dem kleinen System. Dieser Vorstellung werden wir gerecht, wenn wir von der einen Zufallsvariable X zu einer ganzen Familie $(X_t)_{t \in I}$ von Zufallsvariablen X_t – zu einem Prozeß – übergehen (I könnte ein Intervall in \mathbb{R} oder \mathbb{Z} sein).

Beobachtungen, oder Messungen am kleinen System beschreiben wir durch *Observable*: beschränkte, meßbare Funktionen $f : (\Omega_0, \Sigma_0, \mu_0) \rightarrow (\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$. $f \in L^\infty(\Omega_0, \Sigma_0, \mu_0)$ könnte z.B. die Energie, oder eine Ortskomponente des Teilchens bedeuten. f ist ebenfalls eine Zufallsvariable. Seine Verteilung ist das Bildmaß $f(\mu_0) = f \circ X(\mu)$. Durch $f \circ X \in L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ wird für jede Observable $f \in L^\infty(\Omega_0, \Sigma_0, \mu_0)$ des kleinen Systems eine Observable des Umgebungssystems (Ω, Σ, μ) definiert. Die Abbildung

$$j : \mathcal{B} := L^\infty(\Omega_0, \Sigma_0, \mu_0) \rightarrow \mathcal{A} := L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu); \quad f \mapsto f \circ X,$$

ist ein $\mathbb{1}$ -erhaltender, injektiver $*$ -Homomorphismus. Für die Zustände ψ und φ , die von den Maßen μ und μ_0 auf \mathcal{A} , bzw. \mathcal{B} erzeugt werden, gilt offensichtlich $\psi \circ j = \varphi$, d.h.: durch j wird ein Morphismus von (\mathcal{B}, φ) nach (\mathcal{A}, ψ) definiert. Die Tatsache, daß für die wichtigsten Wahrscheinlichkeitsräume $(\Omega_0, \Sigma_0, \mu_0)$ (z.B. für Standard-Borelräume, $[\text{Acc}]$) jeder injektive $*$ -Homomorphismus j von \mathcal{B} in \mathcal{A} mit $\psi \circ j = \varphi$ durch eine Zufallsvariable in der oben beschriebenen Weise entsteht, rechtfertigt die folgende Definition.

Definition. Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum (\mathcal{A}, ψ) und eine W^* -Algebra \mathcal{B} . Dann ist eine (nichtkommutative) Zufallsvariable mit Werten in \mathcal{B} ein $\mathbb{1}$ -erhaltender, injektiver $*$ -Homomorphismus $j : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$, so daß es die bedingte Erwartung P_0 bzgl. ψ von \mathcal{A} auf $\mathcal{A}_0 := j(\mathcal{B})$ gibt.

Es ist klar, daß in der nichtkommutativen Situation die Existenz der bedingten Erwartung P_0 in die Definition mit aufgenommen werden muß. $P_0 \in \text{Mor}(\mathcal{A}, \psi)$ ist normal (Anhang A.1.1). Daher ist $j(\mathcal{A})$ eine W^* -Algebra und j ebenfalls normal ([BrRo1], Theorem 2.4.23). Definieren wir den Zustand φ auf \mathcal{B} in kanonischer Weise durch $\psi \circ j$ (das entspricht in der kommutativen Situation dem Übergang zum Bildmaß der Zufallsvariablen), so ist $P := j^{-1} \circ P_0$ die bedingte Erwartung von (\mathcal{A}, ψ) auf (\mathcal{B}, φ) und j die zu P gehörende Injektion: $P \circ j = \text{id}_{\mathcal{B}}$ (vgl. 1.3.1). Dieser Zusammenhang zwischen Zufallsvariable und bedingter Erwartung läßt sich durch folgendes kommutative Diagramm noch einmal übersichtlich fassen:

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{A}, \psi) & \xrightarrow{\text{id}_{\mathcal{A}}} & (\mathcal{A}, \psi) \\ j \uparrow & & \downarrow P \\ (\mathcal{B}, \varphi) & \xrightarrow{\text{id}_{\mathcal{B}}} & (\mathcal{B}, \varphi) \end{array}$$

1.4.2 Prozeß. Ein Prozeß auf einem Wahrscheinlichkeitsraum ist eine Familie von Zufallsvariablen. Ein Prozeß auf $(\mathcal{A}, \psi, \mathcal{A}_0)$ sollte unseren bisherigen Überlegungen zur Folge also eine Familie $(j_t)_{t \in \mathbb{R}}$ von Zufallsvariablen mit Werten in \mathcal{A}_0 sein. Die Annahme, daß sich die äußeren Bedingungen, unter denen der Prozeß abläuft, mit der Zeit nicht ändern, führt zu stationären Prozessen. Obwohl wir es praktisch ausschließlich mit Prozessen in kontinuierlicher Zeit $t \in \mathbb{R}$ zu tun haben werden, soll in der folgenden Definition auch der Fall eines Prozesses in diskreter Zeit, d.h., $t \in \mathbb{Z}$, mit eingeschlossen werden.

Definition. Ein stationärer stochastischer Prozeß mit Werten in \mathcal{A}_0 auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\mathcal{A}, \psi, \mathcal{A}_0)$ ist ein *Quadrupel* $(\mathcal{A}, \psi, T_t, \mathcal{A}_0)$. Dabei ist (\mathcal{A}, ψ, T_t) ein *reversibles W^* -dynamisches System*. Der Prozeß heißt *minimal*, falls $\mathcal{A} = \bigvee_{t \in \mathbb{T}} T_t \circ j(\mathcal{A}_0)$ gilt (j ist wie üblich die *kanonische Einbettung* von \mathcal{A}_0 in \mathcal{A} , die zu P_0 gehört). Für den Fall $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ *diskreter Zeit* schreiben wir auch $(\mathcal{A}, \psi, T, \mathcal{A}_0)$.

Da $T_t \in \text{Aut}(\mathcal{A}, \psi)$ mit der modularen Gruppe σ^ψ vertauscht, ist durch $j_t := T_t \circ j$ eine Familie von Zufallsvariablen mit Werten in \mathcal{A}_0 erklärt, die folgende Stationaritätseigenschaft besitzt: Die Korrelationen $\psi(j_{t_1+s}(x_1) \cdots j_{t_n+s}(x_n))$, $t_i, s \in \mathbb{T}$, $x_i \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, hängen nicht von dem gemeinsamen Zeitparameter s ab. Es läßt sich zeigen, daß unter der Minimalitätsvoraussetzung zu jeder solchen Familie von Zufallsvariablen ein Prozeß $(\mathcal{A}, \psi, T_t, \mathcal{A}_0)$ gehört ([AFL]).

Wie schon erwähnt, identifizieren wir \mathcal{A}_0 meistens mit seinem Bild $j(\mathcal{A}_0)$ in \mathcal{A} . Daher werden wir im folgenden die Einbettung j meist weglassen können. Die Separabilitätseigenschaft des kleinen Systems (\mathcal{A}_0, ψ) überträgt sich auf den Wahrscheinlichkeitsraum (\mathcal{A}, ψ) , wenn der Prozeß minimal ist. D.h., solche Prozesse führen nicht aus den Wahrscheinlichkeitsräumen mit separablem Prädual hinaus (vgl. 1.1.2). Das läßt sich leicht mit den Methoden aus Anhang A.2 zeigen.

1.4.3 Filtrierung. In der kommutativen Wahrscheinlichkeitstheorie ist alles, was während eines Zeitintervalls $[s, t]$ über einen Prozeß $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ zu erfahren ist, in der σ -Algebra $\Sigma_{[s,t]}$ kodiert, die durch die Zufallsvariablen $(X_r)_{r \in [s,t]}$ erzeugt wird. Für einen nichtkommutativen stationären stochastischen Prozeß $(\mathcal{A}, \psi, T_t, \mathcal{A}_0)$ ersetzen wir die σ -Algebra Σ_I ($I \subseteq \mathbb{T}$ ein Intervall) durch die W^* -Unteralgebra $\mathcal{A}_I := \bigvee_{r \in I} T_r \circ j(\mathcal{A}_0)$. Offensichtlich gilt $\mathcal{A}_{I+t} = T_t(\mathcal{A}_I)$ ($I+t := \{r+t \mid r \in I\}$), und man überzeugt sich auch leicht von $\mathcal{A}_{[r,t]} = \mathcal{A}_{[r,s]} \vee \mathcal{A}_{[r,t]}$, f.a. $r \leq s \leq t$. Die Algebra $\mathcal{A}_{\{0\}}$ stimmt mit \mathcal{A}_0 überein. Da \mathcal{A}_I von σ^ψ global invariant gelassen wird, denn T_t vertauscht mit σ^ψ ([Ped], Lemma 8.14.9), existiert die bedingte Erwartung P_I bzgl. ψ von (\mathcal{A}, ψ) auf \mathcal{A}_I . Aus der Eindeutigkeit der bedingten Erwartung P_{I+t} von (\mathcal{A}, ψ) auf $T_t(\mathcal{A}_I)$, erhalten wir $P_{I+t} = T_t \circ P_I \circ T_{-t}$. Diese Beziehung und die punktweise σ stop-Stetigkeit von $t \mapsto T_t$ sorgen im Falle $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ dafür, daß die Algebren $\mathcal{A}_{\bar{I}}$ (\bar{I} ist der Abschluß des Intervalls I in \mathbb{R}) und \mathcal{A}_I übereinstimmen (siehe das nachfolgende Lemma). Wir machen unsere Überlegungen zum Ausgangspunkt folgender Definition:

Definition. Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum (\mathcal{A}, ψ) . Ist für jedes Intervall $I \subseteq \mathbb{T}$ eine W^* -Unteralgebra $\mathcal{A}_I \subseteq \mathcal{A}$ gegeben, so nennen wir die Familie $(\mathcal{A}_I)_{I \subseteq \mathbb{T}} :=: (\mathcal{A}_I)_I$ eine *Filtrierung* von (\mathcal{A}, ψ) , wenn sie folgende Eigenschaften besitzt:

i) $\mathcal{A}_K = \mathcal{A}_I \vee \mathcal{A}_J$ für $K = I \cup J$.

ii) $\mathcal{A}_I = \bigvee \{\mathcal{A}_J \mid J \subseteq I, J \text{ ist beschränkt}\}$.

iii) Die bedingten Erwartungen P_I bzgl. ψ von (\mathcal{A}, ψ) auf \mathcal{A}_I existieren.

Die Filtrierung $(\mathcal{A}_I)_I$ heißt minimal, wenn $\mathcal{A}_{\mathbb{T}} = \mathcal{A}$ gilt. Für $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ heißt sie abgeschlossen, wenn \mathcal{A}_I und $\mathcal{A}_{\bar{I}}$ für jedes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ übereinstimmt. Wir nennen sie stetig von oben, wenn $\mathcal{A}_I = \bigcap \{\mathcal{A}_J \mid J \supset I, \text{dist}(J, \partial I) > 0\}$ und stetig von unten, wenn $\mathcal{A}_I = \bigvee \{\mathcal{A}_J \mid J \subset I, \text{dist}(J, \partial I) > 0\}$ für alle Intervalle I erfüllt ist, die ein nichtleeres Inneres besitzen. $(\mathcal{A}_I)_I$ heißt Markov-Filtrierung, falls $P_{(-\infty, 0]} \circ P_{[0, \infty)} = P_{\{0\}}$ gilt. Eine Automorphismengruppe $(T_t)_{t \in \mathbb{T}} \subset \text{Aut}(\mathcal{A}, \psi)$ und eine Filtrierung $(\mathcal{A}_I)_I$ nennen wir verträglich, wenn $T_t(\mathcal{A}_I) = \mathcal{A}_{I+t}$ für alle $t \in \mathbb{T}$ und jedes Intervall $I \subseteq \mathbb{T}$ gilt. Wir nennen sie lokal verträglich, wenn die Intervalle I und $I + t$ in dieser Gleichung das Element 0 enthalten müssen.

Bemerkungen. $\text{dist}(J, \partial I) := \inf\{|s - t| \mid s \in J, t \in \partial I\}$ meint den minimalen Abstand der Punkte aus J zu den Randpunkten von I . Aus i) folgt die Monotonie $\mathcal{A}_I \subseteq \mathcal{A}_J$ für $I \subseteq J$. Mit ii) legen wir fest, daß die Algebren zu unbeschränkten Intervallen durch solche mit beschränkten erreichbar sind, daß sie also nicht ‘unnötig groß’ sind. Das hat auch zur Folge, daß eine Filtrierung bereits durch die Algebren zu beschränkten Intervallen bestimmt ist.

Die Abgeschlossenheit einer Filtrierungen folgt sofort aus $\partial I = \partial \bar{I}$, wenn sie stetig von oben oder unten ist. Allerdings gilt die Umkehrung normalerweise nicht.

Den Begriff ‘Verträglichkeit mit einer Automorphismengruppe’ haben wir etwas strikter gefaßt als z.B. in [Küm3], wo lediglich $T_s \mathcal{A}_{[-s, t]} = \mathcal{A}_{[0, t+s]}$ für alle $t, s \geq 0$ verlangt wird. Für $-t \leq r \leq s$ folgt daraus $T_r \mathcal{A}_{[-s, t]} = T_{-(s-r)} \mathcal{A}_{[0, t+s]} = \mathcal{A}_{[-s+r, t+r]}$, also die Version der lokalen Verträglichkeit in unserer Definition.

Handelt es sich nicht um die kanonische Filtrierung einer Automorphismengruppe, so kann es durchaus erwünscht sein, daß nur diese lokale Version der Verträglichkeit erfüllt ist. Wir kommen bei der Diskussion der Definition von Markov-Prozessen und Kozyklen (1.6.1 bzw. Seite 20) darauf noch einmal kurz zu sprechen. Im weiteren Verlauf wird aber nur die globale Version der Verträglichkeit eine Rolle spielen.

Die folgenden Überlegungen machen überwiegend nur für $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ einen Sinn. Die Stellen, wo $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ebenfalls möglich ist, heben wir nicht extra hervor.

Lemma. Die Filtrierung $(\mathcal{A}_I)_I$ eines Wahrscheinlichkeitsraumes (\mathcal{A}, ψ) besitzt folgende Eigenschaften:

i) $(\mathcal{A}_I)_I$ ist stetig von unten und daher auch abgeschlossen, wenn die Filtrierung mit einer Automorphismengruppe verträglich ist. Darüberhinaus sind dann die Abbildungen $t \mapsto P_{(-\infty, t]}$ und $t \mapsto P_{[t, \infty)}$ punktweise σ stop-stetig.

ii) $(\mathcal{A}_I)_I$ ist genau dann stetig von unten bzw. von oben, wenn die Familie der bedingten Erwartungen $(P_I)_I$ von unten bzw. von oben punktweise σ stop-stetig ist, d.h., wenn

für jede Folge $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $I_n \subset I$ bzw. $I_n \supset I$ und $0 < \text{dist}(I_n, \partial I) \rightarrow 0$ die Folge $(P_{I_n})_{n \in \mathbb{N}}$ in der punktweisen σ stop-Topologie gegen P_I konvergiert.

Beweis. Zu i): Die Filtrierung $(\mathcal{A}_I)_I$ sei mit der Automorphismengruppe $(T_t)_{t \in \mathbb{R}} \subset \text{Aut}(\mathcal{A}, \psi)$ verträglich. I sei ein Intervall mit nichtleerem Inneren. Dann können wir zwei Teilintervalle J und K von I wählen, die folgende Eigenschaften besitzen: $I = J \cup K$, $J + \varepsilon \subset I$ und $K - \varepsilon \subset I$ für alle genügend kleinen $\varepsilon > 0$. Ein $x \in \mathcal{A}_J$ liegt dann wegen $T_\varepsilon(x) \in \mathcal{A}_{J+\varepsilon} \in \{\mathcal{A}_L \mid L \subset I, \text{dist}(L, \partial I) > 0\}$ und $x = w^*\text{-}\lim_{\varepsilon \searrow 0} T_\varepsilon(x)$ in $\bigvee \{\mathcal{A}_L \mid L \subset I, \text{dist}(L, \partial I) > 0\}$. Analog folgt $\mathcal{A}_K \subseteq \bigvee \{\mathcal{A}_L \mid L \subset I, \text{dist}(L, \partial I) > 0\}$. Damit gilt $\mathcal{A}_I = \mathcal{A}_J \vee \mathcal{A}_K \subseteq \bigvee \{\mathcal{A}_L \mid L \subset I, \text{dist}(L, \partial I) > 0\} \subseteq \mathcal{A}_I$.

Die Stetigkeit von $t \mapsto P_{(-\infty, t]}$ erhalten wir aus der punktweisen σ stop-Stetigkeit von T_s und der Gleichung $P_{(-\infty, t+s]} = T_s \circ P_{(-\infty, t]} \circ T_{-s}$ f.a. $s \in \mathbb{R}$.

Zu ii): Zunächst die Stetigkeit von unten: $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei eine gegen I monoton wachsende Intervallfolge mit $\text{dist}(I_n, \partial I) > 0$. Für alle $L \subset I$ mit $\text{dist}(L, \partial I) > 0$ gibt es also ein $n_L \in \mathbb{N}$ mit $I_n \supseteq L$ für alle $n \geq n_L$. Ist die Filtrierung $(\mathcal{A}_I)_I$ stetig von unten, so folgt $\mathcal{A}_I = \bigvee_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_{I_n}$. Die GNS-Darstellungen P_{I_n} konvergieren monoton wachsend gegen einen Projektor Q , der durch die GNS-Darstellung P_I majorisiert wird. Für jedes $x \in \mathcal{A}$ läßt sich $P_I(x)$ nach dem Satz von Kaplansky in der σ stop-Topologie durch eine Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_{I_n}$ approximieren. Also gilt: $P_I x \Omega = P_I(x) \Omega = \lim_k Q x_k \Omega = Q P_I x \Omega$ f.a. $x \in \mathcal{A}$, d.h., $P_I = Q$ und $P_I(x) = \|\cdot\|_\psi\text{-}\lim_n P_{I_n}(x)$ f.a. $x \in \mathcal{A}$. Nun folgt die Stetigkeit von unten für die bedingten Erwartungen aus der Tatsache, daß die σ stop-Konvergenz auf beschränkten Mengen zur $\|\cdot\|_\psi$ -Konvergenz äquivalent ist.

Die Umkehrung: $(P_I)_I$ sei stetig von unten und $x \in \mathcal{A}_J$. Für jede monoton gegen J wachsende Folge $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Intervallen mit $\text{dist}(I_n, \partial J) > 0$ gilt $x = P_J(x) = \sigma\text{-}\lim_n P_{I_n}(x)$, also $x \in \bigvee \{\mathcal{A}_L \mid L \subset J, \text{dist}(L, \partial J) > 0\}$. Wir erhalten $\mathcal{A}_J \subseteq \bigvee \{\mathcal{A}_L \mid L \subset J, \text{dist}(L, \partial J) > 0\}$. Die umgekehrte Inklusion ist klar.

Nun die Stetigkeit von oben: $(P_I)_I$ sei in der punktweisen σ stop-Topologie von oben stetig und $x \in \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{A}_{[s-\varepsilon, t+\varepsilon]} \supseteq \mathcal{A}_{[s, t]}$. Dann gilt $x = \sigma\text{-}\lim_{\varepsilon \searrow 0} P_{[s-\varepsilon, t+\varepsilon]}(x) = P_{[s, t]}(x) \in \mathcal{A}_{[s, t]}$, also $\mathcal{A}_{[s, t]} = \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{A}_{[s-\varepsilon, t+\varepsilon]}$. Die Umkehrung: Für jede monotone Intervallfolge $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $I = \bigcap_n I_n$ konvergieren die GNS-Darstellungen P_{I_n} in der stop-Topologie monoton gegen einen Projektor. Damit konvergiert $(P_{I_n}(x))_{n \in \mathbb{N}}$ für jedes $x \in \mathcal{A}$ in der ψ -Norm, und da diese Folge beschränkt ist, in der σ stop-Topologie gegen ein Grenzelement y , das offensichtlich in $\mathcal{A}_I = \bigcap_n \mathcal{A}_{I_n}$ liegt. Aus $y = P_I(\sigma\text{-}\lim_n P_{I_n}(x)) = \sigma\text{-}\lim_n P_I \circ P_{I_n}(x) = P_I(x)$ folgt die Behauptung. \square

Jeder stationäre stochastische Prozeß $(\mathcal{A}, \psi, T_t, \mathcal{A}_0)$ erzeugt also seine eigene abgeschlossene, mit $(T_t)_{t \in \mathbb{R}}$ verträgliche Filtrierung $(\mathcal{A}_I)_I := \left(\bigvee_{t \in I} T_t(\mathcal{A}_0)\right)_I$ – die *kanonische Filtrierung* zum Prozeß. Ist $(\tilde{\mathcal{A}}_I)_I$ eine Filtrierung, die mit der Automorphismengruppe $(T_t)_{t \in \mathbb{R}}$ des Prozesses verträglich ist und $\mathcal{A}_0 = \tilde{\mathcal{A}}_{\{0\}}$ erfüllt, so sprechen wir auch von einer Filtrierung, die mit dem Prozeß verträglich ist. Die Bedingung $\mathcal{A}_0 = \tilde{\mathcal{A}}_{\{0\}}$ läßt sich immer erfüllen, wenn man zum $\tilde{\mathcal{A}}_{\{0\}}$ -wertigen Prozeß $(\mathcal{A}, T_t, \psi, \tilde{\mathcal{A}}_{\{0\}})$ übergeht.

Bemerkung. Haben wir einen Prozeß $(\mathcal{A}, T_t, \psi, \mathcal{A}_0)$ gegeben, dann bezeichnen wir (vor allem in der Theorie der stochastischen Integration) auch eine Funktion $\chi : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{A}$ (oder ihre Hilbertmodul-wertigen Fortsetzung, vgl. Kapitel 4) mit der Adaptiertheitseigenschaft $\chi_t \in \mathcal{A}_{(-\infty, t]}$ als Prozeß. Dahinter steckt das Bild einer Art ‘Koordinatendarstellung’ des Ausgangsprozesses: Für jedes $\chi \in \mathcal{A}_0$ wird durch $\Phi_\chi : t \mapsto T_t(\chi)$ eine solche adaptierte Funktion bestimmt. Die Abbildung $\chi \mapsto \Phi_\chi$ bezeichnen wir als den zu $(\mathcal{A}, T_t, \psi, \mathcal{A}_0)$ gehörenden *Fluß auf \mathcal{A}_0* . Handelt es sich bei \mathcal{A}_0 um M_n , so genügt es, wenn der Fluß auf einer Matrixeinheit bekannt ist (daher die Assoziation mit einer Koordinatendarstellung). Eine adaptierte Funktion können wir als Verallgemeinerung von Φ_χ ansehen und so den Namen *Prozeß* für sie in einem gewissen Umfang rechtfertigen.

1.4.4 Konstruktion verträglicher Filtrierungen. Wenn es um die Konstruktion verträglicher Filtrierungen geht, ist es mitunter hilfreich, von einem kleineren Satz von Unteralgebren ausgehen zu können, die eine solche Filtrierung bereits eindeutig festlegen.

Lemma. *Eine minimale Filtrierung $(\mathcal{A}_I)_I$, die mit einer Automorphismengruppe $(T_t)_{t \in \mathbb{R}} \subset \text{Aut}(\mathcal{A}, \psi)$ verträglich ist, wird schon von Unteralgebren \mathcal{A}_I zu endlichen Intervallen $I \subseteq \mathbb{R}_0^+$, festgelegt, wenn diese folgende Eigenschaften besitzen:*

- i) $\mathcal{A}_{[0, t]} = \mathcal{A}_{[0, s]} \vee \mathcal{A}_{[s, t]}$ für $0 \leq s \leq t$.
- iii) $T_s(\mathcal{A}_{[0, t]}) = \mathcal{A}_{[s, t+s]}$ für $t, s \geq 0$.
- ii) $\mathcal{A} = \bigvee_{s \leq 0 \leq t} T_s(\mathcal{A}_{[0, t]})$.
- iv) Die bedingte Erwartung P_I auf \mathcal{A}_I existiert.

Beweis. Für eine gegebene verträgliche Filtrierung $(\mathcal{A}_I)_I$ erfüllen die Algebren zu Intervallen $I \subseteq \mathbb{R}_0^+$ die Eigenschaften i)-iv). Sie legen wegen

$$\mathcal{A}_{[s, t]} = T_s(\mathcal{A}_{[0, t-s]}) \quad \text{f.a. } s \leq t, \quad (*)$$

die Filtrierung bereits fest. Haben wir umgekehrt nur die Algebren zu Intervallen in \mathbb{R}_0^+ zur Verfügung, versehen mit den oben aufgeführten Eigenschaften, so erheben wir (*) zur Definition und müssen zeigen, daß auf diese Weise eine mit $(T_t)_{t \geq 0}$ verträgliche Filtrierung erzeugt wird. Die Verträglichkeit ist aus (*) direkt zu ersehen und die Minimalität ergibt sich sofort aus ii). Die bedingten Erwartungen auf $\mathcal{A}_{[s, t]}$ sind durch $T_s \circ P_{[0, t-s]} \circ T_{-s}$ gegeben. Wir zeigen zunächst i) von Definition 1.4.3: Für $r \leq s' \leq s \leq t$ gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{[r, s]} \vee \mathcal{A}_{[s', t]} &= T_r(\mathcal{A}_{[0, s'-r]}) \vee T_r(\mathcal{A}_{[s'-r, s-r]}) \vee T_{s'}(\mathcal{A}_{[0, t-s']}) \\ &= T_r(\mathcal{A}_{[0, s'-r]}) \vee T_{s'}(\mathcal{A}_{[0, s-s']}) \vee T_{s'}(\mathcal{A}_{[0, t-s']}) = T_r(\mathcal{A}_{[0, s'-r]}) \vee T_{s'}(\mathcal{A}_{[0, t-s']}) \\ &= T_r(\mathcal{A}_{[0, s'-r]}) \vee T_{s'-r}(\mathcal{A}_{[0, t-s']}) = T_r(\mathcal{A}_{[0, s'-r]} \vee \mathcal{A}_{[s'-r, t-r]}) = \mathcal{A}_{[r, t]}. \end{aligned}$$

Wir definieren $\mathcal{A}_{[s, \infty)} := \bigvee_{t \geq 0} \mathcal{A}_{[s, s+t]}$ und $\mathcal{A}_{(-\infty, t]} := \bigvee_{s \geq 0} \mathcal{A}_{[t-s, t]}$ und erfüllen damit ii) von Definition 1.4.3. \square

Wenn wir auf ii) verzichten, so erhalten wir immer noch eine verträgliche Filtrierung, die aber nicht mehr minimal sein muß. Die besonderen Eigenschaften von Prozessen, die mit Markov-Filtrierungen verträglich sind, behandeln wir in 1.6.1.

1.4.5 Verallgemeinerte stochastische Prozesse. In der klassischen Wahrscheinlichkeitstheorie ergibt sich bereits die Notwendigkeit, den Prozeßbegriff zu erweitern. Ein typisches (und für uns das wichtigste) Beispiel ist der Prozeß des weißen Rauschens ([GeVi, Hid]). Wir kommen im Abschnitt 1.5 ausführlich darauf zu sprechen und geben hier nur die Definition:

Definition. Ein verallgemeinerter stationärer stochastischer Prozeß ist durch ein reversibles W^* -dynamisches System (\mathcal{A}, ψ, T_t) und eine mit $(T_t)_{t \in \mathbb{T}}$ verträgliche Filtrierung $(\mathcal{A}_t)_t$ bestimmt. Wir schreiben dafür $(\mathcal{A}, \psi, T_t, (\mathcal{A}_t)_t)$.

Der entscheidende Unterschied zur bisherigen Definition stationärer stochastischer Prozesse besteht darin, daß die von $(\mathcal{A}, \psi, T_t, \mathcal{A}_0)$, $\mathcal{A}_0 := \mathcal{A}_{\{0\}}$, kanonisch erzeugte Filtrierung i.allg. von $(\mathcal{A}_t)_t$ verschieden sein kann. Der Prozeß des weißen Rauschens, den wir im nächsten Abschnitt einführen werden, hat für diese Definition Pate gestanden. Für ihn wird $T_t(\mathcal{A}_0) = \mathcal{A}_0$ gelten, so daß die kanonische Filtrierung trivial sein wird.

Natürlich ist jeder stationäre stochastische Prozeß $(\mathcal{A}, \psi, T_t, \mathcal{A}_0)$ auch ein verallgemeinerter Prozeß. Es ist klar, daß eine ‘diskrete Version’ eines verallgemeinerten stochastischen Prozesses zu keiner neuen Definition führt: Wir erhalten einfach einen stationären stochastischen Prozeß in diskreter Zeit mit seiner kanonischen Filtrierung $(\mathcal{A}_t)_t$, wobei nun \mathcal{A}_t durch $\bigvee_{n \in \mathbb{I}} T^n(\mathcal{A}_1)$ mit $\mathcal{A}_1 := \mathcal{A}_{\{0\}}$ gegeben ist.

1.5 Weißes Rauschen

Die wichtigsten Beispiele für verallgemeinerte stochastische Prozesse sind weiße Rauschen. Da es sich dabei um einen unserer zentralen Begriffe handelt, illustrieren wir ihn zunächst mit einer Reihe von Beispielen, ehe wir die allgemeine Definition vorstellen und Folgerungen ziehen. In Abschnitt 1.5.9 untersuchen wir den Typ der von Neumann Algebra \mathcal{A} des weißen Rauschens.

1.5.1 Klassisches (Gaußsches) weißes Rauschen. (Für eine ausführlichere Darstellung sei auf [GeVi, Hid] verwiesen.) Der Wahrscheinlichkeitsraum des weißen Rauschens ist $(\mathcal{S}', \Sigma, \mu)$. Dabei ist $\mathcal{S}' := \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ der Raum der temperierten Distributionen, also der Dualraum der reellwertigen, schnellfallenden Funktionen $\mathcal{S} := \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Der verallgemeinerte Prozeß des weißen Rauschens ist durch die Familie X der Zufallsvariablen $(X_f)_{f \in \mathcal{S}}$ gegeben, die durch $X_f(x') := \langle f, x' \rangle$, $x' \in \mathcal{S}'$, definiert sind. Die Funktionen $f \in \mathcal{S}$ übernehmen also die Rolle der Zeit bei klassischen Prozessen. Dahinter steckt das Bild, daß X_f aus einem Prozeß $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ durch Mittelung mit einer Funktion f entsteht, die um einen bestimmten Zeitpunkt herum konzentriert ist: $X_f = \int_{\mathbb{R}} f(t) X_t dt$. Diese Vorstellung ist zwar mathematisch nicht haltbar, denn X_t existiert nicht als klassischer Prozeß, aber sie liefert immerhin die richtige Intuition für die Definition.

μ , die Verteilung von X , ist durch das charakteristische Funktional $C(f) := e^{-\frac{1}{2} \|f\|^2}$ über den Satz von Bochner-Minlos bestimmt: $C(f) = \int_{\mathcal{S}'} e^{i \langle f, x' \rangle} d\mu(x') = \int_{\mathcal{S}'} e^{i X_f} d\mu$. Aus dieser Gleichung erhalten wir die Isometriebeziehung $\|f\|^2 = \|X_f\|_{\mu}^2 := \int_{\mathcal{S}'} |X_f|^2 d\mu$,

die zu einer Einbettung j_μ von $L^2(\mathbb{R})$ in $L^2(\mathcal{S}', \Sigma, \mu)$ ausgedehnt werden kann. Die Zufallsvariablen $\{e^{ix_f} \mid f \in \mathcal{S}\}$ liegen $\|\cdot\|_2$ -total in $L^2(\mathcal{S}', \Sigma, \mu)$ und w^* -total in $\mathcal{C} := L^\infty(\mathcal{S}', \Sigma, \mu)$. Die Zufallsvariablen $\text{Ih} \{e^{ix_f} \mid \text{supp } f \subseteq I\}$ erzeugen für jedes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ eine σ -Unteralgebra Σ_I von Σ . Aus $C(f+g) = C(f)C(g)$ für alle $f, g \in \mathcal{S}$ mit disjunkten Trägern, erkennt man die Unabhängigkeit der zugehörigen Zufallsvariablen X_f und X_g . D.h., Σ_I und Σ_J sind unabhängig, sobald die Intervalle I und J disjunkt sind. Das überträgt sich auf die Filtrierung $(\mathcal{C}_I)_I$ des Wahrscheinlichkeitsraumes (\mathcal{C}, ψ_μ) , $\psi_\mu := \int_{\mathcal{S}} \cdot d\mu$, die durch die Algebren $\mathcal{C}_I := L^\infty(\mathcal{S}', \Sigma_I, \mu)$ gebildet wird. Schließlich definiert der Rechtsshift s_t auf $L^2(\mathbb{R})$ über $S_t(X_f) := X_{s_t(f)}$, $f \in \mathcal{S}$, eine Dynamik auf (\mathcal{C}, ψ_μ) , die mit der Filtrierung $(\mathcal{C}_I)_I$ verträglich ist. Damit sind wir bei dem verallgemeinerten, stationären stochastischen Prozeß $(\mathcal{C}, S_t, \psi_\mu, (\mathcal{C}_I)_I)$ angekommen – dem Prozeß des weißen Rauschens.

Die *Wiener-Itô-Zerlegung* von $L^2(\mathcal{S}', \Sigma_I, \mu)$ liefert eine unitäre Äquivalenz zwischen diesem Hilbertraum und dem symmetrischen Fockraum $\mathcal{F}_+(L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}))$. Daraus ergibt sich auch die unitäre Äquivalenz zwischen $L^\infty(\mathcal{S}', \Sigma_I, \mu)$ und der Fockdarstellung der Weylalgebra $\mathcal{W}(L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}))$ über dem reellen Hilbertraum $L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ ([Hid]). Die Stetigkeit der Filtrierung $(\mathcal{C}_I)_I$ von oben und von unten läßt sich mit den Methoden aus 1.5.3 zeigen.

1.5.2 Poissonsches weißes Rauschen. Wir gehen von einem Poisson-Prozeß $X := (X_t)_{t \geq 0}$ der Intensität $\lambda > 0$ und Sprunghöhe 1 aus. X_t nimmt seine Werte also in \mathbb{N}_0 an und besitzt unabhängige stationäre Zuwächse mit der Verteilung $\mu(X_t - X_s = n) := \frac{\lambda^n (t-s)^n}{n!} e^{-\lambda(t-s)}$, $0 \leq s < t$. Es ist bekannt, daß X eine Realisierung auf der Menge Ω rechtsseitig stetiger Pfade $\omega : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ mit $\omega_0 = 0$ besitzt, für die zu jedem Zeitpunkt der linksseitige Grenzwert existiert, die stückweise konstant sind und Sprünge der Höhe 1 aufweisen. $X_t(\omega) = \omega_t$ ist daher zu jedem Zeitpunkt $t \geq 0$ die Anzahl der Sprünge, die im Zeitintervall $[0, t]$ erfolgten. Wir setzen X kanonisch zu negativen Zeiten fort: $-X_{-t}(\omega) = -\omega_{-t}$ zählt die Sprünge während $[-t, 0]$. Auf den Zylindermengen $\Omega_n((s, t]) := \{X_t - X_s = n\}$ aller Pfade, die genau $n \in \mathbb{N}_0$ Sprünge während des Zeitintervalls $(s, t]$, $s < t \in \mathbb{R}$, besitzen, ist das Maß μ durch $\mu(\Omega_n((s, t])) := \frac{(\lambda(t-s))^n}{n!} e^{-\lambda(t-s)}$ festgelegt und läßt sich auf die von diesen Mengen erzeugte σ -Algebra Σ fortsetzen. Für jedes Intervall I sei Σ_I die von den Mengen $\Omega_n((s, t])$, $(s, t] \subseteq I$, $n \in \mathbb{N}_0$, erzeugte σ -Algebra. Wegen der Unabhängigkeit der Zuwächse von $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$, sind Σ_I und Σ_J für disjunkte Intervalle I und J unabhängig. Durch $s_r : \Omega \rightarrow \Omega$; $(s_r(\omega))_t := \omega_{t+r} - \omega_r$, $t, r \in \mathbb{R}$, wird eine Gruppe maßerhaltender Transformationen des Grundraums Ω definiert: $\mu(s_r^{-1}\Omega_n((s, t])) = \mu(\Omega_n((s+r, t+r])) = \mu(\Omega_n((s, t]))$. Es gilt $s_r^{-1}\Sigma_I = \Sigma_{I+r}$. Ist Π die Algebra $L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$, S_t durch $S_t f := f \circ s_t$, $f \in \Pi$, die mit $(S_t)_{t \in \mathbb{R}}$ verträgliche Filtrierung $(\Pi_I)_I$ durch $(L^\infty(\Omega, \Sigma_I, \mu))_I$, sowie der Zustand π durch das Maß μ definiert, dann ist $(\Pi, \pi, S_t, (\Pi_I)_I)$ das *Poissonsche weiße Rauschen*.

Die Algebra Π wird durch die Projektoren $p_n(s, t] := \chi_{\Omega_n((s, t])}$, $s \leq t$, erzeugt. X ist ein L^2 -Prozeß mit Erwartungswert $\lambda \cdot t$ und Varianz $\lambda \cdot t$. Offensichtlich gilt $X_{s+t} = X_t + S_t X_s$ für alle $t, s \in \mathbb{R}$, wobei S_t nun die kanonische Fortsetzung des Shifts von der Algebra $L^\infty(\Omega, \Sigma_I, \mu)$ auf den GNS-Hilbertraum $L^2(\Omega, \Sigma_I, \mu)$ ist. Einen Prozeß mit dieser Eigenschaft bezeichnen wir als *additiven Kozyklus* bzgl. $(S_t)_{t \in \mathbb{R}}$ (vgl. 1.9.1, 3.2.3).

1.5.3 CCR weißes Rauschen über \mathcal{A}_0 . Wir wählen die Weylalgebra $\mathcal{W}(L^2(\mathbb{R}))$ über $L^2(\mathbb{R})$ (bekanntlich durch unitäre Operatoren $\{W(f) \mid f \in L^2(\mathbb{R})\}$ erzeugt, die den sog. *Weyl-Relationen* $W(f)W(g) = e^{i\text{Im}\langle f|g\rangle}W(f+g)$ genügen [BrRo2]) und gehen zum schwachen Abschluß \mathcal{C} der GNS-Darstellung bzgl. einem treuen, quasifreien, eichinvarianten Zustand φ über, der durch $\varphi(W(f)) := e^{-\frac{\lambda}{4}\|f\|^2}$, $\lambda > 1$, $f \in L^2(\mathbb{R})$, definiert wird. (\mathcal{C}, φ) ist ein nichtkommutativer Wahrscheinlichkeitsraum, den wir durch Tensorierung mit einem weiteren Wahrscheinlichkeitsraum (\mathcal{A}_0, ψ_0) (etwa $(M_n, \text{tr}(\rho \cdot))$, $0 < \rho \leq \mathbb{1}$, $\text{tr}(\rho) = 1$) zu dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\mathcal{A}, \psi, \mathcal{A}_0) := (\mathcal{A}_0 \otimes \mathcal{C}, \psi_0 \otimes \varphi, \mathcal{A}_0 \otimes \mathbb{1})$ erweitern können. Durch $P_0(\mathbf{a} \otimes \mathbf{y}) := \varphi(\mathbf{y}) \mathbf{a} \otimes \mathbb{1}$ ist die *tensor-bedingte Erwartung* von \mathcal{A} auf $\mathcal{A}_0 \otimes \mathbb{1}$ erklärt. Für jedes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ führen wir durch $\mathcal{C}_I := \{W(f) \mid \text{supp}(f) \subseteq I\}$ (wir unterdrücken die GNS-Darstellung bzgl. φ in unserer Schreibweise) eine Familie von W^* -Unteralgebren $\mathcal{A}_I := \mathcal{A}_0 \otimes \mathcal{C}_I$ ein, für die die bedingten Erwartungen P_I durch

$$P_I(\mathbf{a} \otimes W(f)) = e^{-\frac{\lambda}{4}\|f \cdot \chi_I\|^2} \mathbf{a} \otimes W(f \cdot \chi_I), \quad \text{f.a. } \mathbf{a} \in \mathcal{A}_0, f \in L^2(\mathbb{R}), \quad (1.3)$$

festgelegt sind. An dieser Gleichung können wir die Unabhängigkeit von \mathcal{A}_I und \mathcal{A}_J (über \mathcal{A}_0) für disjunkte Intervalle I und J sofort ablesen (vgl. Lemma 1.3.5):

$$\begin{aligned} P_I \circ P_J(\mathbf{a} \otimes W(f)) &= e^{-\frac{\lambda}{4}\|f \cdot \chi_{J^c}\|^2} P_I(\mathbf{a} \otimes W(f \cdot \chi_I)) = e^{-\frac{\lambda}{4}(\|f \cdot \chi_{J^c}\|^2 + \|f \cdot \chi_I \cdot \chi_{J^c}\|^2)} \mathbf{a} \otimes \mathbb{1} \\ &= e^{-\frac{\lambda}{4}\|f\|^2} \mathbf{a} \otimes \mathbb{1} = P_0(\mathbf{a} \otimes W(f)). \end{aligned}$$

Die Unteralgebren $(\mathcal{A}_I)_I$ bilden, wovon man sich leicht überzeugt, eine Filtrierung. Durch *Zweitquantisierung* des Rechtsshifts s_t auf $L^2(\mathbb{R})$ erhalten wir eine Dynamik $S_t(\mathbf{a} \otimes W(f)) := \mathbf{a} \otimes W(s_t(f))$ auf (\mathcal{A}, ψ) , die offensichtlich mit der Filtrierung $(\mathcal{A}_I)_I$ verträglich ist. Das System $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{C}, \psi_0 \otimes \varphi, S_t, (\mathcal{A} \otimes \mathcal{C}_I)_I)$ bezeichnen wir als *CCR weißes Rauschen über \mathcal{A}_0* . Für $\mathcal{A}_0 = \mathbb{C} \cdot \mathbb{1}$ sprechen wir vom *CCR weißen Rauschen*.

In [HKR] wird sog. *squeezed white noise* behandelt. Es handelt sich dabei um CCR weißes Rauschen, das zu nicht-eichinvarianten Zuständen, den *squeezed states*, gehört. Unser Beispiel ist ein Spezialfall dieser weißen Rauschen.

Zur Stetigkeit der Filtrierung $(\mathcal{A}_I)_I$: Gleichung (1.3) für die bedingten Erwartungen $P_{[s,t]}$ zeigt, daß die s - und t -Abhängigkeit nur über die Integralgrenzen des L^2 -Skalarproduktes auftreten. D.h.,

$$\begin{aligned} (s, t) \mapsto \left\| P_{[s,t]} \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i \otimes W(f_i) \right) \right\|_{\psi}^2 &= \sum_{i,j=1}^n \exp \left(-\frac{\lambda}{4} (\|f_i\|^2 + \|f_j\|^2) \right) \cdot \psi_0(\mathbf{a}_i^* \mathbf{a}_j) \cdot \\ &\quad \exp \left(-i \text{Im} \langle f_i \mid f_j \chi_{[s,t]} \rangle + \frac{\lambda}{2} \text{Re} \langle f_i \mid f_j \chi_{[s,t]} \rangle \right) \end{aligned}$$

ist stetig. Aus $\|P_{[s-\varepsilon, t+\varepsilon]}(\mathbf{x}) - P_{[s,t]}(\mathbf{x})\|_{\psi}^2 = \|P_{[s-\varepsilon, t+\varepsilon]}(\mathbf{x})\|_{\psi}^2 - \|P_{[s,t]}(\mathbf{x})\|_{\psi}^2$ f.a. $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$ folgt für die Abbildung $(s, t) \mapsto P_{[s,t]}$ die punktweise σ stop-Stetigkeit von oben auf der σ stop-dichten Menge $\mathcal{A}_0 \otimes_{\text{alg}} \mathcal{C}$ und wegen der gleichmäßigen Beschränktheit von $(P_{[s,t]})_{s < t}$ auch auf der gesamten Algebra \mathcal{A} . Nach Lemma 1.4.3 ist die Filtrierung $(\mathcal{A}_I)_I$ stetig von oben und von unten.

1.5.4 Ein Bernoulli-Shift. Ein einfaches Beispiel für die diskrete Version eines weißen Rauschens – eines *verallgemeinerten Bernoulli-Shifts* – läßt sich leicht folgendermaßen konstruieren: Wir gehen von den Wahrscheinlichkeitsräumen (\mathcal{A}_0, ψ_0) , $(\tilde{\mathcal{C}}, \tilde{\varphi})$ aus und bilden das unendliche Tensorprodukt $\mathcal{A}_1 := \otimes_{\mathbb{Z}} \tilde{\mathcal{C}}$ bzgl. $\varphi := \otimes_{\mathbb{Z}} \tilde{\varphi}$. Der Tensorshift $s : \otimes_i c_i \mapsto \otimes_i c_{i-1}$ ist ein Automorphismus von (\mathcal{C}, φ) . Wir bilden $(\mathcal{A}, \psi) := (\mathcal{A}_0 \otimes \mathcal{C}, \psi_0 \otimes \varphi)$. Die bedingte Erwartung P_0 von (\mathcal{A}, ψ) auf \mathcal{A}_0 ist durch $P_0(a_0 \otimes c) := \varphi(c) a_0$, $a_0 \in \mathcal{A}_0$, $c \in \mathcal{C}$, bestimmt (das ist die sogenannte *tensorbedingte Erwartung*). Mit der Fortsetzung $S := \text{id} \otimes s$ von s auf (\mathcal{A}, ψ) definieren wir die Elemente einer Filtrierung $(\mathcal{A}_I)_I$, $I \subseteq \mathbb{Z}$, durch $\mathcal{A}_I := \bigvee_{n \in I} S^n(\mathcal{A}_0 \otimes \tilde{\mathcal{C}})$, wobei wir $\mathcal{A}_1 := \mathcal{A}_0 \otimes \tilde{\mathcal{C}}$ mit einer Teilalgebra von \mathcal{A} identifizieren (offensichtlich wird diese Algebra von der modularen Automorphismengruppe σ^ψ global invariant gelassen, so daß die bedingte Erwartung P_I auf \mathcal{A}_I existiert). Die Unabhängigkeit der Algebren \mathcal{A}_I und \mathcal{A}_J für disjunkte Intervalle I und J ist nun leicht einzusehen. Durch $(\mathcal{A}, \psi, S, \mathcal{A}_I)$ haben wir einen verallgemeinerten Bernoulli-Shift über \mathcal{A}_0 definiert. Für eine ganze Klasse wesentlich komplexerer Beispiele sei auf [Rup] verwiesen.

1.5.5 Das CCR weiße Rauschen über \mathcal{A}_0 in Abschnitt 1.5.3 ist ein typisches Beispiel eines Vertreters derjenigen Klasse verallgemeinerter stochastischer Prozesse, die wir als (verallgemeinerte) weiße Rauschen bezeichnen werden. Die Verallgemeinerung, die wir in unserer Definition gegenüber klassischen weißen Rauschen vornehmen wollen, können wir an diesem Beispiel demonstrieren. Der wesentliche Unterschied (neben der Tatsache, daß wir natürlich nichtkommutative Wahrscheinlichkeitsräume zulassen) besteht in einer Abschwächung des Unabhängigkeitsbegriffs. Die klassische Unabhängigkeit zweier Unteralegebren \mathcal{A}_1 und \mathcal{A}_2 eines Wahrscheinlichkeitsraumes (\mathcal{A}, ψ) drückte sich in der Faktorisierung unter dem Zustand aus, also $\psi(x_1 x_2) = \psi(x_1) \psi(x_2)$ f.a. $x_1 \in \mathcal{A}_1$, $x_2 \in \mathcal{A}_2$. Das haben wir in dem Beispiel dahingehend abgeschwächt, daß wir nun nur noch die Faktorisierung $P_0(x_1 x_2) = P_0(x_1) P_0(x_2)$ unter der bedingten Erwartung P_0 auf die Anfangsalgebra \mathcal{A}_0 fordern, also die *Unabhängigkeit über \mathcal{A}_0* (vgl. 1.3.4). In dem Beispiel ist das eine natürliche Verallgemeinerung. Die klassische Version ist der Spezialfall, in dem \mathcal{A}_0 durch \mathbb{C} und die bedingte Erwartung P_0 dann durch den Zustand ψ gegeben ist.

1.5.6 Definition. Verallgemeinertes weißes Rauschen (über \mathcal{A}_0) ist ein verallgemeinerter stationärer stochastischer Prozeß $(\mathcal{A}, \psi, S_t, (\mathcal{A}_I)_I)$ mit einer von Neumann Algebra $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$ und einer minimalen Filtrierung $(\mathcal{A}_I)_I$, die folgende Unabhängigkeitseigenschaften besitzt:

i) $S_t \circ P_0 = P_0$.

ii) \mathcal{A}_I und \mathcal{A}_J sind für disjunkte Intervalle I und J unabhängig über \mathcal{A}_0 .

Dabei ist, wie üblich, P_0 die bedingte Erwartung von (\mathcal{A}, ψ) auf \mathcal{A}_0 . Im Falle diskreter Zeit \mathbb{Z} sprechen wir von einem verallgemeinerten Bernoulli-Shift $(\mathcal{A}, \psi, S, \mathcal{A}_I)$ (über \mathcal{A}_0).

Klassisches und Poissonsches weißes Rauschen sind also kommutative, verallgemeinerte weiße Rauschen über $\mathcal{A}_0 = \mathbb{C} \cdot \mathbb{1}$. Unsere verallgemeinerten Bernoulli-Shifts stimmen mit

denjenigen *amalgamierten Bernoulli-Shifts* bei [Rup] überein, die als Markov-Dilatation (siehe 1.6.1) des diskreten W^* -dynamischen Systems $(\mathcal{A}_1, \psi, P_0)$ entstanden sind: $P_1 \circ S^n \circ P_1 = P_1 \circ P_{\{n\}} \circ S^n = P_0 \circ S^n = P_0$.

$(S_t)_{t \in \mathbb{R}}$ läßt den Wahrscheinlichkeitsraum (\mathcal{A}_0, ψ) punktweise invariant, stellt also keine Wechselwirkung zwischen dem kleinen System (\mathcal{A}_0, ψ) und dem großen (\mathcal{A}, ψ) her. Diese werden wir erst beschreiben können, nachdem wir in Abschnitt 1.7 die multiplikativen Kozyklen zum weißen Rauschen eingeführt haben. Von \mathcal{A}_0 aus gesehen ist S_t die freie Dynamik des Umgebungssystems (\mathcal{A}, ψ) .

Da die Filtrierung $(\mathcal{A}_I)_I$ abgeschlossen ist (nächstes Lemma), dürfen sich die Intervalle I und $J \subseteq \mathbb{R}$ in ii) in Randpunkten berühren. Wir schreiben dafür kurz $|I \cap J| = 0$ und meinen damit, daß der Schnitt von I und J eine Nullmenge ist. So sind also auch $\mathcal{A}_{[t,s]}$ und $\mathcal{A}_{[s,r]}$ unabhängig.

Im folgenden werden wir den Zusatz *verallgemeinert* meist weglassen und einfach von dem *weißen Rauschen*, oder dem *Bernoulli-Shift* sprechen. Wir ziehen einige Folgerungen aus unserer Definition.

1.5.7 Lemma. *Die Filtrierung $(\mathcal{A}_I)_I$ des weißen Rauschens $(\mathcal{A}, \psi, S_t, (\mathcal{A}_I)_I)$ besitzt folgende Eigenschaften:*

- i) $(\mathcal{A}_I)_I$ ist abgeschlossen.
- ii) Es gilt $\mathcal{A}_{\{t\}} = \mathcal{A}_0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}_I$ für alle Intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$.
- iii) $\bigcap_{t \in \mathbb{R}} \mathcal{A}_{(-\infty, t]} = \bigcap_{t \in \mathbb{R}} \mathcal{A}_{[t, \infty)} = \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{A}_{[t-\varepsilon, t+\varepsilon]} = \mathcal{A}_0$.

Beweis. i) folgt aus Lemma 1.4.3 i). ii) erhalten wir aus der Abgeschlossenheit der Filtrierung mit Hilfe von Lemma 1.3.5 ii) folgendermaßen: $P_{\{t\}} = P_{(-\infty, t]} \circ P_{\{t\}} = P_{(-\infty, t]} \circ P_{\{t\}} = P_0$. $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}_I$ ist bereits in der Definition der Unabhängigkeit zweier von Neumann Algebren enthalten.

iii): Für $x \in \bigcap_{t \in \mathbb{R}} \mathcal{A}_{(-\infty, t]}$ sei $z := x - P_0(x)$. Dann gilt $P_0(yz) = P_0(y)P_0(z) = 0$ f.a. $y \in \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \mathcal{A}_{[t, \infty)}$. Wegen der Minimalität der Filtrierung läßt sich z^* in der σ stop-Topologie durch solche Elemente y approximieren. Die σ stop-Stetigkeit von P_0 führt daher auf $P_0(z^*z) = 0$. Wegen der Treueit von P_0 bedeutet das $z = 0$, d.h., $x = P_0(x)$. Weiter gilt aufgrund der punktweisen σ stop-Stetigkeit von $s \mapsto P_{(-\infty, s]}$ und $s \mapsto P_{[s, \infty)}$ (Lemma 1.4.3): $\bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{A}_{[t-\varepsilon, t+\varepsilon]} \subseteq \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{A}_{(-\infty, t+\varepsilon]} \cap \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{A}_{[t-\varepsilon, \infty)} = \mathcal{A}_{(-\infty, t]} \cap \mathcal{A}_{[t, \infty)} = \mathcal{A}_0$. \square

1.5.8 Lemma. *Für ein weißes Rauschen $(\mathcal{A}, \psi, S_t, (\mathcal{A}_I)_I)$ über \mathcal{A}_0 gilt für alle $x \in \mathcal{A}$:*

$$w^* \text{-} \lim_{|t| \rightarrow \infty} S_t(x) = P_0(x).$$

Beweis. Für $x \in \mathcal{A}_I$ und $y \in \mathcal{A}_J$ gilt offensichtlich

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \psi(y S_t(x)) = \lim_{|t| \rightarrow \infty} \psi(P_0(y S_t(x))) = \psi(P_0(y) P_0(x)) = \psi(y P_0(x)),$$

wenn I und J beschränkt sind. Aus der Minimalität der Filtrierung kann man diese Identität auf alle $x \in \mathcal{A}$ und durch nochmalige Anwendung der Minimalitätseigenschaft auch auf

alle $y \in \mathcal{A}$ ausdehnen. Da die Funktionale $\{\psi(y \cdot) \mid y \in \mathcal{A}\}$ in \mathcal{A}_* $\|\cdot\|$ -dicht liegen, folgt die Behauptung mit dem üblichen $\varepsilon/2$ -Argument aus der Beschränktheit von $(S_t(x))_{t \in \mathbb{T}}$. \square

1.5.9 Der Typ des weißen Rauschens. Eine typische Methode, ein weißes Rauschen über \mathcal{A}_0 zu konstruieren besteht darin, von einem weißen Rauschen $(\mathcal{C}, \psi, S_t, (\mathcal{C}_I)_I)$ über $\mathbb{C} \cdot \mathbb{1}$ auszugehen und es mit \mathcal{A}_0 zu tensorieren (vgl. z.B. 1.5.3). Von daher läßt sich für ein weißes Rauschen jeder Typ erwarten – finit, semifinit und Typ III –, je nachdem, was man als Anfangsalgebra \mathcal{A}_0 wählt. Wenn wir den ‘eentlichen’ Typ des weißen Rauschens untersuchen wollen, also den Anteil des Rauschens, der nicht durch den Typ von \mathcal{A}_0 ‘verfälscht’ wird, dann müssen wir die relative Kommutante von \mathcal{A}_0 in \mathcal{A} betrachten. Bei ihr handelt es sich um ein weißes Rauschen über dem Zentrum $\mathcal{Z}(\mathcal{A}_0)$ von \mathcal{A}_0 , also über einer finiten von Neumann Algebra.

Satz. *Ist \mathcal{A}_0 ein Faktor, so ist die relative Kommutante $\mathcal{A}'_0 \cap \mathcal{A}$ eines weißen Rauschens $(\mathcal{A}, \psi, S_t, (\mathcal{A}_I)_I)$ über \mathcal{A}_0 entweder finit, oder vom Typ III.*

Beweis. $\mathcal{R} := \mathcal{A}'_0 \cap \mathcal{A}$ sei die relative Kommutante von \mathcal{A}_0 in \mathcal{A} und $z \in \mathcal{Z}(\mathcal{R})$ die eindeutig bestimmte zentrale Projektion, die \mathcal{R} in eine semifinite Algebra $\mathcal{R}z$ und eine Algebra $\mathcal{R}(\mathbb{1} - z)$ vom Typ III zerlegt. Da σ_s^ψ und S_t die Algebra \mathcal{A}_0 global invariant lassen, wird auch \mathcal{R} von diesen Automorphismen global invariant gelassen. Wir können also σ_s^ψ und S_t als Elemente von $\text{Aut}(\mathcal{R}, \psi)$ auffassen. Da für *jeden* Automorphismus $\alpha \in \text{Aut}(\mathcal{R}, \psi)$ die Projektion $\alpha(z)$ wieder semifinit ist, muß $\alpha(z) \leq z$ gelten (denn z ist die maximale semifinite zentrale Projektion in \mathcal{R}). Indem wir α durch α^{-1} ersetzen, erhalten wir die umgekehrte Abschätzung, also schließlich $\alpha(z) = z$. Insbesondere liegt z also auch in der Fixpunktalgebra von S_t . Daraus können wir nach Lemma 1.5.8 auf $z \in \mathcal{Z}(\mathcal{A}_0) = \mathbb{C} \cdot \mathbb{1}$ schließen.

Ist $z = 0$, so gibt es nichts mehr zu zeigen. Wir können daher annehmen, \mathcal{R} sei semifinit. Also ist die modulare Automorphismengruppe σ^ψ *inner*, d.h., es gibt eine stop-stetige unitäre Gruppe $(u_s)_{s \in \mathbb{R}} \subset \mathcal{R}$ mit der Eigenschaft $\sigma_s^\psi(x) = u_s^* x u_s$ f.a. $x \in \mathcal{R}$ ([Ped], Proposition 8.14.13). Da S_t mit σ_s^ψ vertauscht, folgt $S_t(u_s^*) x S_t(u_s) = u_s^* x u_s$ für alle $x \in \mathcal{R}$, $t \in \mathbb{T}$, $s \in \mathbb{R}$. Also liegt $S_t(u_s) u_s^*$ f.a. $t \in \mathbb{T}$ im Zentrum $\mathcal{Z}(\mathcal{R})$ von \mathcal{R} und nach Lemma 1.5.8 auch der w^* -Grenzwert $P_0(u_s) u_s^* = u_s^* P_0(u_s)$. Wegen $P_0(u_s) a = P_0(u_s a) = P_0(a u_s) = a P_0(u_s)$ f.a. $a \in \mathcal{A}_0$, liegt $P_0(u_s)$ in $\mathcal{Z}(\mathcal{A}_0)$, d.h., es gilt $P_0(u_s) = \psi(u_s) \cdot \mathbb{1}$. Da dieser Ausdruck für alle s in einer genügend kleinen Nullumgebung nicht verschwindet ($s \mapsto u_s$ ist stop-stetig), muß u_s für diese s in $\mathcal{Z}(\mathcal{R})$ liegen, also $\sigma_s^\psi = \text{id}$ gelten. Die Gruppeneigenschaft von σ^ψ zeigt dann $\sigma_s^\psi = \text{id}$ für alle $s \in \mathbb{R}$. Also ist ψ ein Spurzustand auf \mathcal{R} ([Ped], Lemma 8.14.6) und \mathcal{R} finit ([Ta1], Theorem V.2.4). \square

1.6 Markov-Prozeß

Wir erinnern daran, daß eine Filtrierung $(\mathcal{A}_I)_I$ eines Wahrscheinlichkeitsraumes (\mathcal{A}, ψ) Markov-Filtrierung heißt, wenn für die bedingte Erwartung $P_{(-\infty, 0]}$ auf die Vergangenheit,

die bedingte Erwartung $P_{[0,\infty)}$ auf die Zukunft und die bedingte Erwartung $P_{\{0\}}$ auf die Gegenwart die Beziehung $P_{(-\infty,0]} \circ P_{[0,\infty)} = P_{\{0\}}$ gilt (vgl. Definition 1.4.3).

1.6.1 Definition. Ein stationärer stochastischer Prozeß $(\mathcal{A}, \psi, T_t, \mathcal{A}_0)$ heißt Markov-Prozeß, wenn seine kanonische Filtrierung eine Markov-Filtrierung ist.

Die Markov-Eigenschaft ist für die kanonische Filtrierung äquivalent zu $P_{[-s,0]} \circ P_{[0,t]} = P_{\{0\}}$ f.a. $-s \leq 0 \leq t$ ([Küm1]). Wir interpretieren das als das Fehlen eines ‘Gedächtnisses’ des Prozesses: Das Wissen über das Verhalten des Prozesses während der vergangenen s Sekunden, kodiert in $P_{[-s,0]}$, liefert nicht mehr Information über die nächsten t Sekunden ($P_{[0,t]}$), als das Wissen zum Zeitpunkt 0, das durch $P_{\{0\}}$ repräsentiert ist.

Ein Prozeß $(\mathcal{A}, \psi, T_t, \mathcal{A}_0)$, der mit einer Markov-Filtrierung $(\mathcal{A}_I)_I$ lokal verträglich ist, – dessen Automorphismengruppe $(T_t)_{t \in \mathbb{R}}$ also gemäß Definition 1.4.3 mit $(\mathcal{A}_I)_I$ lokal verträglich ist – und für den $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_{\{0\}}$ gilt, ist ein Markov-Prozeß: Sind nämlich $(\tilde{P}_I)_I$ die bedingten Erwartungen der kanonischen und $(P_I)_I$ die bedingten Erwartungen der Markov-Filtrierung, so gilt für alle Intervalle I , die die 0 enthalten, wegen $T_t(\mathcal{A}_0) \subseteq \mathcal{A}_I$ f.a. $t \in I$, die Inklusion $\tilde{\mathcal{A}}_I \subseteq \mathcal{A}_I$. Daher folgt $\tilde{P}_{[-s,0]} \circ \tilde{P}_{[0,t]} = \tilde{P}_{[-s,0]} \circ P_{[-\infty,0]} \circ P_{[0,\infty)} \circ \tilde{P}_{[0,t]} = \tilde{P}_{[-s,0]} \circ P_{\{0\}} \circ \tilde{P}_{[0,t]} = \tilde{P}_{[-s,0]} \circ P_0 \circ \tilde{P}_{[0,t]} = P_0$, für alle $s, t \geq 0$.

1.6.2 Markov-Dilatation. Durch einen Markov-Prozeß $(\mathcal{A}, \psi, T_t, \mathcal{A}_0)$ ist auf kanonische Weise das irreversible W^* -dynamische System $(\mathcal{A}_0, \psi, R_t)$ mit der Halbgruppe der Übergangsoperatoren $R_t := P_0 \circ T_t \circ j$ definiert. Weil es den Umgang mit der Markov-Eigenschaft demonstriert, zeigen wir hier noch einmal die Halbgruppeneigenschaft von $(R_t)_{t \geq 0}$ ([Küm1]). Für alle $\alpha \in \mathcal{A}_0$ gilt (eingedenk unserer Vereinbarung, daß j lediglich die identische Abbildung von \mathcal{A}_0 nach \mathcal{A} darstellt):

$$\begin{aligned} R_{s+t}(\alpha) &= P_0 \circ T_s \circ T_t \circ j(\alpha) = P_0 \circ P_{[0,s]} \circ T_s \circ T_t \circ j(\alpha) \\ &= P_0 \circ T_s \circ P_{[-s,0]} \circ P_{[0,t]} \circ T_t \circ j(\alpha) = P_0 \circ T_s \circ P_0 \circ T_t \circ j(\alpha) \\ &= R_s \circ R_t(\alpha). \end{aligned}$$

Ein Prozeß mit dieser Eigenschaft wird auch als *Dilatation* (hier als *Markov-Dilatation*) des irreversiblen W^* -dynamischen Systems $(\mathcal{A}_0, \psi, R_t)$ bezeichnet (im Sinne von [Küm1]). Die Dilatationseigenschaft läßt sich übersichtlich durch folgendes, für alle $t \geq 0$ kommutierende Diagramm darstellen:

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{A}, \psi) & \xrightarrow{T_t} & (\mathcal{A}, \psi) \\ j \uparrow & & \downarrow P_0 \\ (\mathcal{A}_0, \psi) & \xrightarrow{R_t} & (\mathcal{A}_0, \psi) \end{array}$$

R_t vertauscht mit der modularen Gruppe σ^ψ (denn T_t , P_0 und j tun es), besitzt also eine ψ -Adjungierte R_t^* (siehe A.1.2). Man sieht leicht, daß diese durch $P_0 \circ T_{-t} \circ j$ gegeben ist. $(\mathcal{A}_0, \psi, R_t^*)$ ist also das irreversible System, das zur Vergangenheit des Prozesses gehört.

1.7 Multiplikative Kozyklen als Kopplungen

Multiplikative Kozyklen stellen im Rahmen dieser Arbeit die Verbindung zwischen einem weißen Rauschen und einem Markov-Prozeß her. Wir zeigen dies zunächst an dem allgemeinen Kozyklus-Begriff und befassen uns anschließend mit unitären Kozyklen.

1.7.1 Definition. *Ein multiplikativer (Links-)Kozyklus bzgl. dem weißem Rauschen $(\mathcal{A}, \psi, S_t, (\mathcal{A}_I)_I)$ ist eine punktweise w^* -stetige Familie $\alpha := (\alpha_t)_{t \geq 0} \subset \text{Aut}(\mathcal{A}, \psi)$ mit folgenden Eigenschaften: Für alle $s, t \geq 0$ gilt*

$$i) \quad \alpha_{s+t} = \alpha_t \circ S_t \circ \alpha_s \circ S_{-t}, \quad (\text{Kozykleneigenschaft})$$

$$ii) \quad \alpha_s(\mathcal{A}_{[0, s+t]}) = \mathcal{A}_{[0, s+t]}. \quad (\text{Adaptiertheit})$$

Aus i) folgt für $t = 0$: $\alpha_0 = \alpha_0 \circ \alpha_0$, also $\alpha_0 = \text{id}$. Der Kozyklus α ist sogar punktweise σ stop-stetig. Das liegt daran, daß die punktweise w^* -Konvergenz auf $\text{Aut}(\mathcal{A}, \psi)$ zur punktweisen σ stop-Konvergenz äquivalent ist: Aus der Automorphismeigenschaft ergibt sich nämlich sofort die $\|\cdot\|_\psi$ -Konvergenz, die auf beschränkten Mengen mit der σ stop-Konvergenz übereinstimmt.

Die Bedingung i) ist äquivalent zur Forderung, daß durch

$$T_t := \alpha_t \circ S_t \tag{1.4}$$

für $t \geq 0$ eine Halbgruppe aus $\text{Aut}(\mathcal{A}, \psi)$ definiert wird (beachte, daß aus i) bereits $\alpha_0 = \text{id}$ folgt). Diese kann durch $T_{-t} := \alpha_{-t} \circ S_{-t}$, mit $\alpha_{-t} := S_{-t} \circ \alpha_t^{-1} \circ S_t$, kanonisch zu einer Gruppe fortgesetzt werden und liefert einen stationären stochastischen Prozeß $(\mathcal{A}, \psi, T_t, \mathcal{A}_0)$ mit Werten in \mathcal{A}_0 .

Bedingung ii) ist äquivalent dazu, daß die Automorphismengruppe $(T_t)_{t \in \mathbb{R}}$ mit der Filtrierung $(\mathcal{A}_I)_I$ lokal verträglich ist (vgl. Definition 1.4.3 und die daran anschließenden Bemerkungen): Ist ii) erfüllt, so folgt nämlich $T_s \mathcal{A}_{[-s, t]} = \alpha_s S_s \mathcal{A}_{[-s, t]} = \alpha_s \mathcal{A}_{[0, s+t]} = \mathcal{A}_{[0, s+t]}$. Umgekehrt erhalten wir aus $T_s \mathcal{A}_{[-s, t]} = \mathcal{A}_{[0, s+t]}$: $\alpha_s \mathcal{A}_{[0, s+t]} = \alpha_s S_s \mathcal{A}_{[-s, t]} = \mathcal{A}_{[0, s+t]}$. Tatsächlich dürfen wir normalerweise auch keine ‘globale’ Verträglichkeit zwischen $(T_t)_{t \in \mathbb{R}}$ und $(\mathcal{A}_I)_I$ erwarten, wie sie etwa zwischen $(\mathcal{A}_I)_I$ und dem Shift $(S_t)_{t \in \mathbb{R}}$ des weißen Rauschens (laut Definition) besteht: $S_t(\mathcal{A}_I) = \mathcal{A}_{I+t}$ für *alle* Intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ und $t \in \mathbb{R}$.

Die Unabhängigkeitseigenschaft des weißen Rauschens und die Adaptiertheit von α sind dafür verantwortlich, daß es sich bei dem über (1.4) definierten Prozeß $(\mathcal{A}, \psi, T_t, \mathcal{A}_0)$ sogar um einen Markov-Prozeß handelt. Wegen $T_t(\mathcal{A}_0) = \alpha_t(\mathcal{A}_0) \subseteq \mathcal{A}_{[0, t]}$ und $T_{-t}(\mathcal{A}_0) = S_{-t} \circ \alpha_t^{-1}(\mathcal{A}_0) \subseteq S_{-t}(\mathcal{A}_{[0, t]}) = \mathcal{A}_{[-t, 0]}$ liegen nämlich die Algebren $\tilde{\mathcal{A}}_{(-\infty, 0]}$ und $\tilde{\mathcal{A}}_{[0, \infty)}$ seiner kanonischen Filtrierung in $\mathcal{A}_{(-\infty, 0]}$ bzw. $\mathcal{A}_{[0, \infty)}$. Für die zugehörigen bedingten Erwartungen $\tilde{P}_{[0, \infty)}$ und $\tilde{P}_{(-\infty, 0]}$ können wir die Markov-Eigenschaft nun leicht folgendermaßen einsehen:

$$\tilde{P}_{(-\infty, 0]} \circ \tilde{P}_{[0, \infty)} = \tilde{P}_{(-\infty, 0]} \circ P_{(-\infty, 0]} \circ P_{[0, \infty)} \circ \tilde{P}_{[0, \infty)} = \tilde{P}_{(-\infty, 0]} \circ P_0 \circ \tilde{P}_{[0, \infty)} = P_0.$$

Wir wissen bereits (vgl. 1.6.1), daß ein solcher Prozeß eine Markov-Dilatation des irreversiblen W^* -dynamischen Systems $(\mathcal{A}_0, \psi, R_t)$, $R_t := P_0 \circ T_t \circ j$, darstellt. Sehen wir uns

noch einmal die Schritte an, die zu dieser Dilatation führten:

$(\mathcal{A}, \psi, S_t, (\mathcal{A}_I)_I)$ ist ein Umgebungssystem von (\mathcal{A}_0, ψ) . Da S_t die Algebra \mathcal{A}_0 elementweise invariant läßt, besteht zunächst keine Wechselwirkung zwischen dem Wahrscheinlichkeitsraum (\mathcal{A}_0, ψ) und dem weißen Rauschen. Wir nennen deshalb $(S_t)_{t \in \mathbb{R}}$ auch *freie Dynamik* des Systems (\mathcal{A}, ψ) . α stellt nun eine Wechselwirkung zwischen den beiden Systemen her: Der Kozyklus α koppelt (\mathcal{A}_0, ψ) an $(\mathcal{A}, \psi, S_t, (\mathcal{A}_I)_I)$. Die so erhaltene Dilatation $(\mathcal{A}, \psi, T_t, \mathcal{A}_0)$ von $(\mathcal{A}_0, \psi, R_t)$ bezeichnen wir daher als *Markovsche Kopplungsdilatation* und den Kozyklus α oft auch als *Kopplung* (vgl. auch [Küm3]).

Diese Zusammenhänge stellen den allgemeinen Rahmen dieser Arbeit dar. Deshalb formulieren wir sie noch einmal in folgendem Satz:

1.7.2 Satz. *Durch einen multiplikativen Kozyklus α bzgl. einem verallgemeinerten weißen Rauschen $(\mathcal{A}, \psi, S_t, (\mathcal{A}_I)_I)$ über \mathcal{A}_0 wird durch $T_t := \alpha_t \circ S_t$ ein Markov-Prozeß $(\mathcal{A}, \psi, T_t, \mathcal{A}_0)$ mit Werten in \mathcal{A}_0 bestimmt.*

1.7.3 Unitäre Kozyklen.

Definition. *Ein unitärer (Links-)Kozyklus bzgl. weißem Rauschen $(\mathcal{A}, \psi, S_t, (\mathcal{A}_I)_I)$ ist eine w^* -stetige Familie $u := (u_t)_{t \geq 0} \subset \mathcal{A}$ unitärer Operatoren, die für alle $s, t \geq 0$ folgenden Eigenschaften besitzen:*

$$i) \quad u_{s+t} = S_t(u_s)u_t, \quad (\text{Kozykleneigenschaft})$$

$$ii) \quad u_t \in \mathcal{A}_{[0,t]}. \quad (\text{Adaptiertheit})$$

Wir stellen die wichtigsten Eigenschaften unitärer Kozyklen zusammen: Aus i) erhalten wir für $t = 0$: $u_0 = u_0^2$, also $u_0 = \mathbb{1}$. Wie für den Fall multiplikativer Kozyklen können wir die Kozyklengleichung zu negativen Zeiten w^* -stetig fortsetzen: $u_{-t} := S_{-t}(u_t^*)$, $t \geq 0$. Die zugehörigen Automorphismen $\alpha_t := \text{Ad } u_t$ erfüllen dann die Kozyklengleichung 1.7.1, i) für alle $t \in \mathbb{R}$. Da aus der w^* -Stetigkeit der unitären Familie auch die σ -stop-Stetigkeit folgt, ist $t \mapsto \alpha_t$ punktweise w^* -stetig. Um das einzusehen, brauchen wir nur die $\|\cdot\|_\psi$ -Stetigkeit von u zu zeigen. Unter Verwendung der Kozykleneigenschaft $u_{s+t} = S_t(u_s)u_t$ erhalten wir

$$\|u_{t+s} - u_t\|_\psi^2 = 2 \operatorname{Re} \psi(u_t^* S_t(\mathbb{1} - u_s)u_t) = 2 \operatorname{Re} \psi(S_{-t}(u_t^*)(\mathbb{1} - u_s)S_{-t}(u_t)).$$

Die rechte Seite verschwindet offensichtlich für $s \rightarrow 0$. Diese Rechnung zeigt auch, daß es genügt, ähnlich wie bei unitären Gruppen, die Stetigkeit von u nur für $t = 0$ zu prüfen, um sie für alle $t \in \mathbb{R}$ zu gewährleisten. Aus der Adaptiertheit von $(u_t)_{t \in \mathbb{R}}$ folgt die von $(\alpha_t)_{t \in \mathbb{R}}$, d.h., die Automorphismen α_t erfüllen alle Forderungen von Definition 1.7.1, bis auf die Invarianz des Zustandes ψ . Für diese letzte Eigenschaft ist notwendig und hinreichend, daß u_t im Zentralisator \mathcal{A}^ψ der modularen Gruppe σ^ψ liegt. In den folgenden Überlegungen gehen wir davon aus. Damit bestimmt der unitäre Kozyklus also einen multiplikativen Kozyklus $\alpha := (\alpha_t)_{t \in \mathbb{R}}$ gemäß Definition 1.7.1.

1.7.4 Die Halbgruppeneigenschaft von $t \mapsto P_0 \circ \alpha_t \circ j$ hat ein Gegenstück in $t \mapsto P_0(u_t)$: Die Kozyklengleichung und die Adaptiertheit ergibt $S_t(u_s) \in \mathcal{A}_{[t, t+s]}$ und

$$P_0(u_{t+s}) = P_0(S_t(u_s)u_t) = P_0(u_s)P_0(u_t).$$

Mit der σ stop-Stetigkeit von $t \mapsto P_0(u_t)$ erhalten wir durch $A_t := e^{Kt} := P_0(u_t)$ eine stark stetige Kontraktionshalbgruppe mit dem Generator K . $P_0(u_{-t})$ bildet die adjungierte Halbgruppe $(A_t^*)_{t \geq 0}$.

Wir werden uns in dieser Arbeit nur mit $\|\cdot\|$ -stetigen Halbgruppen $(A_t)_{t \geq 0}$ beschäftigen. Das bedeutet, daß K zur Algebra \mathcal{A}_0 , (bzw. \mathcal{A}_0^ψ , wenn $\psi \circ \alpha_t = \psi$ gelten soll) gehört, während im allgemeinen Fall K nur zu \mathcal{A}_0 (bzw. \mathcal{A}_0^ψ) affiliert ist. Die folgende Abschätzung zeigt, daß aus der $\|\cdot\|$ -Stetigkeit von $t \mapsto A_t$ auch die von $t \mapsto R_t$ folgt, daß also insbesondere der Generator von R_t beschränkt ist. Für alle $a \in \mathcal{A}_0$ gilt

$$R_t(a) - a = P_0((u_t^* - \mathbb{1}) a (u_t - \mathbb{1})) + a(A_t - \mathbb{1}) + (A_t^* - \mathbb{1})a$$

und für positive $a \in \mathcal{A}_0$

$$P_0((u_t^* - \mathbb{1}) a (u_t - \mathbb{1})) \leq \|a\|(\mathbb{1} - A_t + \mathbb{1} - A_t^*).$$

Daraus läßt sich nun leicht auf die $\|\cdot\|$ -Stetigkeit der Halbgruppe schließen.

Bemerkung. Wir haben den Begriff Kozyklus nur in der Situation kontinuierlicher Zeit eingeführt, da hier unsere Hauptanwendung liegt. Natürlich gibt es auch eine diskrete Version dieser Begriffsbildung. Wir benötigen sie im Rahmen von Kopplungen an Poisson-Prozesse (s.u.) und in Kapitel 6. Da die nötigen Modifikationen offensichtlich sind, verzichten wir auf eine explizite Ausführung (vgl. hierzu auch [Küm3]).

1.8 Beispiel einer Kopplung

Die übersichtliche und gut interpretierbare Struktur der Pfade eines Poisson-Prozesses nutzen wir, um ein Beispiel für eine Kopplung zu geben, deren Wirkungsweise den Begriff *Kopplung* sehr schön illustriert. Bei dieser Gelegenheit werden wir auch ein weißes Rauschen kennenlernen, das durch Kopplung eines Bernoulli-Shifts an den klassischen Poisson-Prozeß entsteht. Wir folgen in unserer Darstellung den Ideen aus [Küm5]. Es sei aber angemerkt, daß wir hier eine leichte Verallgemeinerung gegenüber dieser Arbeit vorgenommen haben: Wir betrachten weißes Rauschen über einer Anfangsalgebra \mathcal{A}_0 , die von $\mathbb{C} \cdot \mathbb{1}$ verschieden sein darf. Tatsächlich ist diese Verallgemeinerung aber so geringfügig, daß alle Konstruktionsideen und Beweise aus [Küm5] in kanonischer Weise übertragbar sind. Insbesondere die dortigen Beweise müssen hier nicht noch einmal vorgeführt werden.

1.8.1 Die Kopplung. Wir gehen von einem reversiblen W^* -dynamischen System (\mathcal{B}, χ, T) aus und konstruieren für das kontinuierliche, aber irreversible System $(\mathcal{B}, \chi, R_t := e^{t(T-\text{id})})$ eine Markovsche Kopplungsdilatation $(\mathcal{A}, \psi, T_t, (\mathcal{A}_I)_I)$ gemäß Satz 1.7.2:

$(\Pi, \pi, \tilde{S}_t, (\Pi_I)_I)$ sei das klassische Poissonsche weiße Rauschen der Intensität $\lambda = 1$ (vgl. 1.5.2). Wir wählen $\mathcal{A} := \mathcal{B} \otimes \Pi$ und $\psi := \chi \otimes \pi$. $Q := \text{id} \otimes \pi$ ist die tensor-bedingte Erwartung von (\mathcal{A}, ψ) auf \mathcal{B} : $Q(b \otimes f) := \pi(f) b$ f.a. $b \in \mathcal{B}$, $f \in \Pi = L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$. Die Kopplung $\tilde{\alpha} := (\tilde{\alpha}_t)_{t \geq 0}$ an das klassische Poissonsche weiße Rauschen ist durch

$$\tilde{\alpha}_t(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (\mathbf{1} \otimes p_n(0, t]) \cdot (T^n \otimes \text{id})(x), \quad x \in \mathcal{A}, \quad (1.5)$$

gegeben. $(\mathcal{A}, \psi, \tilde{T}_t, (\mathcal{A}_I)_I)$ ergibt mit $\tilde{T}_t := \tilde{\alpha}_t \circ (\text{id} \otimes \tilde{S}_t)$ eine Markovsche Kopplungsdilatation an das klassische Poissonsche weiße Rauschen. $(\mathcal{A}_I)_I$ ist dabei die kanonische Filtrierung, die durch $(\tilde{T}_t)_{t \in \mathbb{R}}$ und \mathcal{B} erzeugt wird.

Wir betrachten die Kopplung $\tilde{\alpha}$ etwas genauer: Gemäß unseren allgemeinen Voraussetzungen besitzt \mathcal{B} einen separablen Prädual. Daher kann \mathcal{A} kanonisch mit $L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu; \mathcal{B})$, dem Raum aller beschränkten, w^* - μ -meßbaren und \mathcal{B} -wertigen Funktionen, identifiziert werden ([Sak], Theorem 1.22.13). Das erlaubt es uns, für μ -fast alle $\omega \in \Omega$ den Ausdruck $\tilde{\alpha}_t(b \otimes f)(\omega)$, $b \in \mathcal{B}$, $f \in L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$, auszuwerten:

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_t(b \otimes f)(\omega) &= \sum_{n=0}^{\infty} T^n(b) p_n(0, t](\omega) f(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} T^n(b) \chi_{\{X_t=n\}}(\omega) f(\omega) \\ &= T^{X_t(\omega)}(b \otimes f)(\omega), \end{aligned}$$

also $\tilde{\alpha}_t(x)(\omega) = T^{X_t(\omega)}(x(\omega))$, f.a. $x \in \mathcal{A}$ und $\tilde{\alpha}_t(b)(\omega) = T^{X_t(\omega)}(b)$, f.a. $b \in \mathcal{B}$. Daraus können wir folgende Wirkungsweise der Kopplung α ablesen: Der klassische Poisson-Prozeß X ‘triggert’ den Automorphismus T . D.h., jeder ‘Klick’ des Prozesses (also jeder Sprung im Pfad ω), löst die Wirkung des Automorphismus T aus. Die Halbgruppe R ergibt sich dann durch Mittelung bzgl. der Poisson-Verteilung über diese Wirkungen:

$$R_t(b) = Q \circ T_t(b) = \sum_{n=0}^{\infty} T^n(b) \pi(p_n(0, t]) = \sum_{n=0}^{\infty} T^n(b) \frac{t^n}{n!} e^{-t} = e^{t(T-\text{id})}(b).$$

1.8.2 Verallgemeinertes Poissonsches weißes Rauschen. Wir koppeln, wie oben beschrieben, einen verallgemeinerten Bernoulli-Shift $(\mathcal{B}, \chi, S, \mathcal{B}_1)$ über \mathcal{A}_0 , an das klassische Poissonsche weiße Rauschen. Wir erhalten $(\mathcal{P}, \psi, S_t, (\mathcal{P}_I)_I)$ mit $\mathcal{P} := \mathcal{B} \otimes \Pi$, $\psi := \chi \otimes \pi$ und, unter Verwendung von Gleichung (1.5),

$$S_t := \sum_{n=0}^{\infty} (\mathbf{1} \otimes p_n(0, t]) \cdot (S^n \otimes \tilde{S}_t). \quad (1.6)$$

Die Filtrierung $(\mathcal{P}_I)_I$ dieses Prozesses bestimmt sich aus den Filtrierungen $(\mathcal{B}_{[0,n]})_{n \in \mathbb{Z}^+}$ und $(\mathcal{P}_I)_I$ des Bernoulli-Shifts bzw. des Poissonschen weißen Rauschens durch die Algebren $\mathcal{P}_{[0,t]} = \{x \in \mathcal{P} \mid x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n, x_n \in \mathcal{B}_{[0,n]} \otimes p_n(0, t] \Pi_{[0,t]}\}$, $t \geq 0$, $\mathcal{B}_{[0,0]} := \mathcal{A}_0$

und dem Shift $(S_t)_{t \in \mathbb{R}}$, gemäß Lemma 1.4.4. Bei diesem Prozeß handelt es sich um ein verallgemeinertes weißes Rauschen über \mathcal{A}_0 , das wir als *verallgemeinertes Poissonsches weißes Rauschen* bezeichnen. Mit der bedingten Erwartung Q_0 von (\mathcal{B}, χ) auf \mathcal{A}_0 ist die bedingte Erwartung P_0 von \mathcal{P} auf \mathcal{A}_0 durch $Q_0 \circ Q$ gegeben.

Ist das W^* -dynamische System (\mathcal{B}, χ, T) des vorigen Abschnitts selbst eine (diskrete) Markovsche Kopplungsdilatation, d.h., gilt $T^n = \alpha_n \circ S^n$ mit einer Kopplung $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ an einen verallgemeinerten Bernoulli-Shift $(\mathcal{B}, \chi, S, \mathcal{B}_1)$, so läßt sich die Markovsche Kopplungsdilatation $(\mathcal{A}, \psi, T_t, (\mathcal{A}_I)_I)$ auch als Kopplung an das verallgemeinerte Poissonsche weiße Rauschen auffassen: Aufgrund der Orthogonalität der Projektoren $p_n(0, t]$ für verschiedene $n \in \mathbb{N}_0$, läßt sich $T_t = \tilde{\alpha}_t \circ \tilde{S}_t$ auch als $T_t = \alpha_t \circ S_t$ schreiben. Dabei ist

$$\alpha_t := \sum_{n=0}^{\infty} (\mathbb{1} \otimes p_n(0, t]) \cdot (\alpha_n \otimes \text{id})$$

ein multiplikativer Kozyklus bzgl. dem verallgemeinerten Poissonschen weißen Rauschen. Ist α_n sogar inner, $\alpha_n = \text{Ad } u_n$, dann ist auch $\alpha_t = \text{Ad } u_t$ inner, mit dem unitären Kozyklus $u_t = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \otimes p_n(0, t]$. In Abschnitt 6.1 werden wir solchen Kozyklen wieder begegnen.

1.9 Ein wegweisendes Beispiel

Nachdem wir gesehen haben, daß multiplikative Kozyklen bzgl. weißem Rauschen zu Markov-Prozessen führen, stellt sich natürlich die Frage, wie wir solche Kozyklen gewinnen können. Die Idee zur Vorgehensweise läßt sich wieder über die klassische Wahrscheinlichkeitstheorie motivieren. Wie wir sehen werden, lassen sich unitäre Kozyklen in der klassischen Theorie als Lösungen bestimmter stochastischer Differentialgleichungen gewinnen (Abschnitt 1.9.2). Da eine stochastische Differentialgleichung eigentlich über eine stochastische Integralgleichung definiert ist, müssen wir die Theorie der stochastischen Integration in die nichtkommutative Wahrscheinlichkeitstheorie übertragen, um auch hier stochastische Differentialgleichungen definieren zu können.

Wir werden in diesem Abschnitt für einen sehr einfachen unitären Kozyklus die stochastische Differentialgleichung angeben, und uns überlegen, welche mathematischen Strukturen für eine nichtkommutative Verallgemeinerung herangezogen werden müssen. Diesen Abschnitt können wir also als Wegweiser durch die folgenden Kapitel benutzen.

1.9.1 Das klassische Itô-Integral. Der Zugang zu stochastischen Differentialgleichungen verläuft über stochastische Integralgleichungen, erfordert also zunächst die Konstruktion eines stochastischen Integrals. Im Gegensatz zu gewöhnlichen (Stieltjes-)Integralen wird für das Inkrement ein stochastischer Prozeß zugelassen. Beim sog. *Itô-Integral*, für das wir uns hier interessieren, handelt es sich dabei um den sog. Brownschen Bewegungsprozeß (oder einfach um die *Brownsche Bewegung*), der durch eine Familie $B := (B_t)_{t \geq 0}$ Gaußscher Zufallsvariablen aus dem GNS-Hilbertraum $L^2(\mathcal{S}', \Sigma, \mu)$ des

klassischen weißen Rauschens $(L^\infty(\mathcal{S}', \Sigma, \mu), \psi_\mu, S_t, (L^\infty(\mathcal{S}', \Sigma_I, \mu))_I)$ (vgl. 1.5.1) gebildet wird, die folgende Eigenschaften besitzt: $B_t \in L^2(\mathcal{S}', \Sigma_{[0,t]}, \mu)$, d.h., der Prozeß ist *adaptiert*, $\langle \mathbb{1} | B_t \rangle_\mu := \int_{\mathcal{S}'} B_t d\mu = 0$, d.h., er ist *zentriert* und schließlich genügt er der sog. *additiven Kozyklengleichung* bzgl. dem weißen Rauschen: $B_{t+s} = B_t + S_t B_s$ f.a. $s, t \geq 0$. Eine Realisierung der Brownsche Bewegung ist mit der Einbettung j_μ von $L^2(\mathbb{R})$ in $L^2(\mathcal{S}', \Sigma, \mu)$ aus Abschnitt 1.5.1 durch $B_t := j_\mu(\chi_{[0,t]})$ gegeben. Durch sie erhalten wir eine gute Vorstellung vom Mechanismus der Kozykleneigenschaft. Sie bedeutet letztlich einfach das Aneinandersetzen von aufeinanderfolgenden Zeitintervallen: $j_\mu(\chi_{[0,t+s]}) = j_\mu(\chi_{[0,t]}) + j_\mu(\chi_{[t,t+s]}) = j_\mu(\chi_{[0,t]}) + S_t j_\mu(\chi_{[0,s]})$. Wir sehen, daß die Inkremente $B_{t+s} - B_t$ für disjunkte Zeitintervalle $[t, t+s]$ und $[t', t'+s']$ unabhängig und, wegen der Zentriertheit, auch orthogonal sind. Damit ist eine der wichtigsten Folgerungen aus der Kozyklengleichung leicht nachzurechnen: $\|B_{t+s}\|_\mu^2 = \|B_t\|_\mu^2 + \|B_s\|_\mu^2$. Diese Funktionalgleichung hat wegen der L^2 -Stetigkeit von $t \mapsto B_t$ (die wir später in einem allgemeineren Rahmen zeigen werden), die Lösung $\|B_t\|_\mu^2 = \lambda t$ (mit einem geeigneten $\lambda > 0$, das für die klassische Brownsche Bewegung aber 1 ist).

Nun können wir das Itô-Integral für einfache, adaptierte Prozesse $X = (X_t)_{t \geq 0} \subset L^2(\mathcal{S}', \Sigma, \mu)$ als Integranden definieren. Es handelt sich dabei um Funktionen der Form $t \mapsto X_t := \sum_i \chi_{[t_i, t_{i+1})}(t) X_i \in L^2(\mathcal{S}', \Sigma_{[0,t]}, \mu)$ (d.h. $X_i \in L^2(\mathcal{S}', \Sigma_{[0,t_i]}, \mu)$), die zu Zerlegungen von \mathbb{R}^+ in disjunkte Intervalle $[t_i, t_{i+1}) \subset \mathbb{R}^+$ gehören. Das Itô-Integral für diesen Integranden definieren wir nun folgendermaßen:

$$\int_0^t X_s dB_s := \sum_i X_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}).$$

Aus der Unabhängigkeit des Integranden und des Inkrements folgt erstens, daß das Integral wieder in $L^2(\mathcal{S}', \Sigma, \mu)$ liegt und zweitens, daß die Isometriebeziehung

$$\left\| \int_0^t X_s dB_s \right\|_\mu^2 = \int_0^t \|X_s\|_\mu^2 ds,$$

gilt. Diese erlaubt eine Fortsetzung des Integrals auf größere Prozeßklassen für die Integranden $(X_t)_{t \geq 0}$.

Betrachten wir nocheinmal die Schritte, die zu diesem Integral geführt haben, so stellen wir fest, daß nur die ‘Adaptiertheit’, die ‘Zentriertheit’ (die nicht unbedingt gebraucht wird) und die Kozykleneigenschaft nötig sind, um diese Konstruktion durchzuführen. Einen Prozeß mit diesen drei Eigenschaften bezeichnen wir als *zentrierten additiven Kozyklus zum weißen Rauschen*. Das Standardbeispiel dafür ist die Brownsche Bewegung B . Aber auch der Poisson-Prozeß X , der uns in 1.5.2 begegnet ist, stellt einen (allerdings nichtzentrierten) additiven Kozyklus dar. Im weiteren Verlauf dieser Arbeit werden wir uns hauptsächlich für nichtkommutative Versionen additiver Kozyklen interessieren (Kapitel 3).

1.9.2 Ein einfacher unitärer Kozyklus. Aus der Brownsche Bewegung bilden wir den unitären Kozyklus $u_t := e^{i\lambda B_t}$, $\lambda > 0$, der folgender stochastischen Integralgleichung

genügt (vgl. z.B. [Øks]):

$$u_t = \mathbb{1} + \lambda \int_0^t u_s dB_s - \frac{\lambda^2}{2} \int_0^t u_s ds, \quad (1.7)$$

für die wir auch die symbolische Schreibweise einer *stochastischen Differentialgleichung*

$$du_t = \lambda u_t dB_t - \frac{\lambda^2}{2} u_t dt, \quad u_0 = \mathbb{1}, \quad (1.8)$$

verwenden werden. Der Existenz- und Eindeigkeitsatz, der auch für *stochastische* Differentialgleichungen gilt, erlaubt es uns, folgende einfache Beobachtung festzuhalten: Dem additiven Kozyklus $(B_t)_{t \geq 0}$ kann über die Lösung der stochastischen Differentialgleichung (1.8) eindeutig ein unitärer Kozyklus $(u_t)_{t \geq 0}$ zugeordnet werden. Von entscheidender Bedeutung ist es, daß auch eine Umkehrung dieses Zusammenhangs gilt: Zu einem unitären Kozyklus $(u_t)_{t \geq 0}$ bzgl. einem weißen Rauschen gibt es genau einen additiven Kozyklus $(B_t)_{t \geq 0}$, so daß $(u_t)_{t \geq 0}$ die Lösung der mit ihm gebildeten stochastischen Differentialgleichung (1.8) ist. Die Idee zur Konstruktion von B_t beruht auf folgender Beobachtung an $u_t = e^{i\lambda B_t}$: In der L^2 -Topologie gilt für $0 < \delta \ll 1$

$$u_\delta - e^{-\frac{\lambda^2}{2}\delta} \cdot \mathbb{1} \approx i\lambda B_\delta.$$

Wenn wir die Unabhängigkeitseigenschaften von B_t berücksichtigen, sollte

$$S_n(t) := \sum_{i=0}^{2^n-1} [S_{i\delta_n}(u_{\delta_n}) - e^{-\frac{\lambda^2}{2}\delta_n} \cdot \mathbb{1}], \quad \delta_n := t \cdot 2^{-n}, \quad (1.9)$$

gegen $i\lambda B_t$ konvergieren (beachte aber auch die Ausführungen in 3.3.3). Das ist bei diesem Beispiel einfach nachzurechnen. Wir werden das als Illustration der allgemeinen Konstruktion 3.2 in 3.3.2 tun.

Dieses Programm, daß wir hier an einem einfachen Beispiel vorgestellt haben, wurde das erste mal von J. Prin für die GNS-Darstellung eines verallgemeinerten weißen Rauschens über $\mathcal{A}_0 = \mathbb{C} \cdot \mathbb{1}$ durchgeführt ([Pri]).

1.9.3 Ausblick. Beim klassischen weißen Rauschen ist die Unabhängigkeitsstruktur in der Faktorisierung $\psi(f \cdot g) = \psi(f) \cdot \psi(g)$ unabhängiger Elemente $f, g \in L^\infty(\mathcal{S}', \Sigma, \mu)$ kodiert. Sie ist im wesentlichen für die Konvergenz der Folge (1.9) verantwortlich. Beim verallgemeinerten weißen Rauschen $(\mathcal{A}, \psi, S_t, (\mathcal{A}_I)_I)$ übernimmt P_0 die Rolle von ψ , denn unabhängige Elemente faktorisieren unter P_0 , aber i.allg. nicht mehr unter ψ (wie etwa im Beispiel 1.5.3). Der Grenzwert B_t dieser Folge lag nicht mehr in der Algebra $L^\infty(\mathcal{S}', \Sigma, \mu)$, sondern im GNS-Hilbertraum $L^2(\mathcal{S}', \Sigma, \mu)$ von ψ . Die nichtkommutative Verallgemeinerung erfordert also eine ‘GNS-Darstellung’ von P_0 , d.h., \mathcal{A} ist mit dem \mathcal{A}_0 -wertigen inneren Produkt $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \ni (x, y) \mapsto P_0(x^*y)$ zu versehen und in der induzierten Norm $\|P_0(x^*x)\|_{\frac{1}{2}}$ abzuschließen. Das mathematische Objekt, das auf diese Weise entsteht, ist ein Hilbert-C*-Modul. Wir werden das nächste Kapitel dazu verwenden, Hilbert-C*-Moduln einzuführen und – da das innere Produkt seine Werte in der W^* -Algebra

\mathcal{A}_0 annimmt – deren Erweiterung zu Hilbert- W^* -Moduln vorzunehmen. Das Hilbert- W^* -Modul zu P_0 bezeichnen wir, in Anlehnung an die Schreibweise $L^2(\mathcal{A}, \psi)$ für den GNS-Hilbertraum von ψ , mit $L^2(\mathcal{A}, P_0)$.

Da additive Kozyklen nun in $L^2(\mathcal{A}, P_0)$ liegen werden, wird sich auch die Konstruktion stochastischer Integrale in diesem Raum abspielen müssen. Aussichtsreich kann das nur sein, wenn es uns gelingt, in $L^2(\mathcal{A}, P_0)$ ein Produkt zwischen unabhängigen Elementen zu definieren, um das Produkt zwischen Integrand und Inkrement der klassischen Theorie nachzubilden. Wir werden in Abschnitt 2.4 sehen, daß die Unabhängigkeitsstruktur des verallgemeinerten weißen Rauschens dafür ausreichend ist.

2. Hilbertmoduln

2.1 Hilbert-C*-Moduln

In diesem Abschnitt wird der Begriff des Hilbert-C*-Moduls (im folgenden auch kurz als Hilbertmodul bezeichnet) definiert und seine wichtigsten Eigenschaften angeführt. Wir können uns dabei auf die wesentlichen Fakten beschränken, da es zu diesem Gebiet inzwischen gute Zusammenfassungen gibt (vgl. [Lan, Sch]). Auf die kanonische Realisierung eines Hilbertmoduls in den beschränkten Operatoren über einem geeigneten Hilbertraum soll dagegen etwas ausführlicher eingegangen werden, denn sie bildet den Ausgangspunkt für unsere Definition von Hilbert-W*-Moduln. Verwandte Überlegungen zu diesem Thema findet man in [Pas, Fra, Sch, Ske].

2.1.1 Definition. Ein Prä-Hilbert-C*-Modul \mathcal{E} über einer C*-Algebra \mathcal{A} ist ein \mathcal{A} -Rechtsmodul, versehen mit einem \mathcal{A} -wertigen inneren Produkt

$$\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathcal{E}} : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{A}; \quad (x, y) \mapsto \langle x | y \rangle_{\mathcal{E}},$$

mit folgenden Eigenschaften:

- i) $\langle x | \alpha y + \beta z \rangle_{\mathcal{E}} = \alpha \langle x | y \rangle_{\mathcal{E}} + \beta \langle x | z \rangle_{\mathcal{E}},$
- ii) $\langle x | y a \rangle_{\mathcal{E}} = \langle x | y \rangle_{\mathcal{E}} a,$
- iii) $\langle x | y \rangle_{\mathcal{E}} = \langle y | x \rangle_{\mathcal{E}}^*,$
- iv) $\langle x | y \rangle_{\mathcal{E}} \geq 0,$
 $\langle x | y \rangle_{\mathcal{E}} = 0 \Leftrightarrow x = 0,$

$x, y, z \in \mathcal{E}, a \in \mathcal{A}, \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$ Ist \mathcal{E} in der von $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathcal{E}}$ erzeugten Norm $\|x\|_{\mathcal{E}} := \|\langle x | x \rangle_{\mathcal{E}}\|,$ $\|x\|_{\mathcal{E}} := \langle x | x \rangle_{\mathcal{E}}^{1/2},$ vollständig, so ist \mathcal{E} ein Hilbert-C*-Modul über $\mathcal{A}.$

Um die Notation übersichtlich zu halten, wird im Weiteren der Index ‘ \mathcal{E} ’ beim inneren Produkt $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathcal{E}},$ bei der Norm $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ und dem ‘Betrag’ $|\cdot|_{\mathcal{E}}$ auf \mathcal{E} meist weggelassen. Welches innere Produkt und welche Norm gemeint ist, läßt sich von den Elementen ablesen, auf die sie angewandt werden. Mitunter werden wir uns auf ein Hilbertmodul \mathcal{E} über \mathcal{A} mit innerem Produkt $\langle \cdot | \cdot \rangle$ durch die Schreibweise $(\mathcal{E}, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ beziehen, wenn sich die C*-Algebra \mathcal{A} aus dem Zusammenhang ergibt.

2.1.2 Die einfachsten Beispiele für Hilbertmoduln sind natürlich Hilberträume ($\mathcal{A} = \mathbb{C}$) und C*-Algebren ($\mathcal{E} = \mathcal{A}, \langle x | y \rangle = x^*y$). Ein Standardbeispiel läßt sich folgendermaßen konstruieren: Für eine (unitale) C*-Algebra $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{K})$ und eine Projektion $p \in \mathcal{L}$ sei $\mathcal{A} := p\mathcal{L}p.$ Dann ist $\mathcal{L}_p := (\mathbb{1} - p)\mathcal{L}p,$ versehen mit dem inneren Produkt

$\langle x|y \rangle_p := x^*y \in \mathcal{A}$ ein Hilbertmodul über \mathcal{A} . Eine sinnvolle Forderung an p , die verhindert, daß \mathcal{L}_p trivial wird, ist die Zyklizität bzgl. \mathcal{L} . Ein Hilbertmodul der beschriebenen Art, mit einer zyklischen Projektion, bezeichnen wir als *Hilbertmodul in Standardform*. Wir werden sehen, daß zumindest für die uns interessierenden Fälle, allen Hilbertmoduln diese Form gegeben werden kann (vgl. Satz 2.1.7).

Viele Konzepte der Hilbertraumtheorie lassen sich für Hilbertmoduln verallgemeinern. So gilt insbesondere die *Cauchy-Schwarzsche Ungleichung* in folgender Form:

$$|\langle x|y \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2, \quad x, y \in \mathcal{E}, \quad (2.1)$$

woraus wie üblich die Dreiecksungleichung für die Norm und die Beziehung $\|x\| = \sup\{\|\langle x|y \rangle\| \mid \|y\| = 1\}$ folgt. Die Ungleichung $|\langle x|a \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \|a\|^2$ zeigt die Stetigkeit der Rechtsmodulwirkung.

2.1.3 Ist \mathcal{F} ein weiteres Hilbertmodul über \mathcal{A} , dann bezeichnet $\mathcal{B}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ (bzw. $\mathcal{B}(\mathcal{E})$ für $\mathcal{E} = \mathcal{F}$) die Banachalgebra der beschränkten *Modulabbildungen*, d.h., der stetigen, (\mathbb{C} -)linearen Abbildungen T , die zusätzlich \mathcal{A} -linear sind: $Txa = (Tx)a$ f.a. $x \in \mathcal{E}$, $a \in \mathcal{A}$. Für eine beschränkte lineare Abbildung $T : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ ist die \mathcal{A} -Linearität äquivalent zur Ungleichung

$$\langle Tx|Tx \rangle \leq K \langle x|x \rangle \quad (2.2)$$

f.a. $x \in \mathcal{E}$ und ein geeignetes $K > 0$ (vgl. [Pas]). Offensichtlich ist $K = \|T\|^2$.

$\mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$, oder $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ für $\mathcal{E} = \mathcal{F}$, sei die Menge der *adjungierbaren Abbildungen*, d.h., der linearen Abbildungen $T : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$, für die es eine lineare Abbildung $T^* : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}$ mit der Eigenschaft $\langle x|Ty \rangle_{\mathcal{F}} = \langle T^*x|y \rangle_{\mathcal{E}}$ f.a. $x \in \mathcal{F}$, $y \in \mathcal{E}$ gibt. T^* ist durch T eindeutig bestimmt, so daß $(T^*)^* = T$ folgt. Solche Abbildungen sind automatisch beschränkt und \mathcal{A} -linear: $\mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$. $\mathcal{L}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{E})$ ist eine C^* -Algebra. Man beachte aber, daß diese Inklusion i.allg. echt ist, d.h., daß nicht jede beschränkte \mathcal{A} -lineare Abbildung adjungierbar sein muß (vgl. (2.10)).

Ein Hilbertmodul über \mathcal{A} wird als *voll* bezeichnet, wenn das zweiseitige $*$ -Ideal $\mathcal{J}_{\mathcal{E}} := \text{lh}\{\langle x|y \rangle \mid x, y \in \mathcal{E}\}^{\|\cdot\|} \subseteq \mathcal{A}$ mit \mathcal{A} übereinstimmt. Durch Einschränkung der Rechtsmodulwirkung auf $\mathcal{J}_{\mathcal{E}}$ kann das immer erreicht werden, so daß wir im folgenden, ohne besonders darauf hinzuweisen, nur volle Hilbertmoduln betrachten wollen.

2.1.4 Die sogenannten ‘*kompakten*’ Operatoren

$$\mathcal{K}(\mathcal{E}) := \text{lh}\{\Theta_{x,y} \mid x, y \in \mathcal{E}\}^{\|\cdot\|} \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{E}),$$

mit $\Theta_{x,y}(z) := x\langle y|z \rangle$, $x, y, z \in \mathcal{E}$, bilden ein zweiseitiges $*$ -Ideal in $\mathcal{L}(\mathcal{E})$: $\Theta_{x,y}^* = \Theta_{y,x}$, $T\Theta_{x,y}S = \Theta_{T(x),S^*(y)}$, $x, y \in \mathcal{E}$, $T, S \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$.

Durch Anpassung des Beweises von Proposition 2.2.18 in [BrRo1]) kann man zeigen, daß es eine approximative Eins $(e_{\alpha})_{\alpha \in \mathbb{I}}$ von folgender Form für $\mathcal{K}(\mathcal{E})$ gibt:

$$e_{\alpha} := \sum_{i=1}^{n_{\alpha}} \Theta_{\eta_i^{\alpha}, \eta_i^{\alpha}}, \quad \eta_i^{\alpha} \in \mathcal{E}, \alpha \in \mathbb{I}. \quad (2.3)$$

2.1.5 Der *Dualraum* \mathcal{E}' von \mathcal{E} ist durch $\mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{A})$ gegeben. Wie üblich definiert $\hat{\chi} : \mathcal{E} \ni y \mapsto \langle x | y \rangle$ eine isometrische Einbettung von \mathcal{E} in \mathcal{E}' , jedoch stimmt ihr Bild $\hat{\mathcal{E}}$ normalerweise nicht mit \mathcal{E}' überein. Hilbertmoduln \mathcal{E} , für die $\hat{\mathcal{E}} = \mathcal{E}'$ gilt, werden *selbstdual* genannt. Zumindest für den Fall einer W*-Algebra \mathcal{A} , wird in [Pas] gezeigt, daß sich das innere Produkt $\langle \cdot | \cdot \rangle$ eines Hilbertmoduls über \mathcal{A} so zu einem inneren Produkt auf \mathcal{E}' fortsetzen läßt, daß \mathcal{E}' selbstdual wird. Für den Fall, daß $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ eine von Neumann Algebra ist, werden wir im Abschnitt 2.2 einen anderen Weg beschreiten, der unseren Anwendungen angepaßt ist: Wir gelangen durch eine Abschlußprozedur zu einem selbstdualen Hilbertmodul.

2.1.6 Definition. Zwei Hilbertmoduln $(\mathcal{E}, \langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathcal{E}})$ und $(\mathcal{F}, \langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathcal{F}})$ über C*-Algebren \mathcal{A} bzw. \mathcal{B} heißen *isomorph*, falls es einen *-Isomorphismus π von \mathcal{A} auf \mathcal{B} und eine lineare Abbildung α von \mathcal{E} auf \mathcal{F} mit folgenden Eigenschaften gibt:

$$i) \quad \alpha(xa) = \alpha(x)\pi(a), \quad ii) \quad \langle \alpha(x) | \alpha(y) \rangle_{\mathcal{F}} = \pi(\langle x | y \rangle_{\mathcal{E}}),$$

$x, y \in \mathcal{E}$, $a \in \mathcal{A}$. Sind $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ und $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{K})$ auf Hilberträumen \mathcal{H} bzw. \mathcal{K} dargestellt und ist π durch eine unitäre Abbildung U von \mathcal{H} auf \mathcal{K} gegeben, so heißen die Hilbertmoduln \mathcal{E} und \mathcal{F} *unitäräquivalent*.

Von den folgenden Eigenschaften kann man sich leicht überzeugen: α ist eine Isometrie und α^{-1} ein Isomorphismus von $(\mathcal{F}, \langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathcal{F}})$ auf $(\mathcal{E}, \langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathcal{E}})$. \mathcal{E} ist genau dann voll, wenn \mathcal{F} es ist. Darüberhinaus gilt $\text{Ad } \alpha(\mathcal{L}(\mathcal{E})) = \mathcal{L}(\mathcal{F})$ mit $\text{Ad } \alpha(T) := \alpha T \alpha^{-1}$ für $T \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$.

2.1.7 Jedes Hilbertmodul \mathcal{E} über der C*-Algebra \mathcal{A} (die für unsere Zwecke als unital angenommen werden kann) läßt sich als ‘linke untere Ecke’ einer C*-Algebra, der sog. *Linking-Algebra* $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ auffassen. Damit meinen wir, daß es eine Projektion $p \in \mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ gibt, so daß \mathcal{E} zu $(\mathbb{1} - p)\mathcal{L}_{\mathcal{E}}p$ isomorph ist. Wir gewinnen $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ auf einem geeigneten Hilbertraum mit Hilfe der Kolmogorov-Zerlegung des inneren Produkts (vgl. [EvLe]). Dabei gehen wir davon aus, daß \mathcal{A} bereits auf einem Hilbertraum \mathcal{H} dargestellt ist.

Satz. Jedes Hilbertmodul \mathcal{E} über einer unitalen C*-Algebra $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ist isomorph zu einem Hilbertmodul in Standardform und unitäräquivalent zu einem Hilbertmodul in $\mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$, mit einem geeigneten Hilbertraum \mathcal{H}' .

Beweis. Das innere Produkt $\langle \cdot | \cdot \rangle$ definiert einen positiv definiten Kern $\mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{A}$; $(x, y) \mapsto \langle x | y \rangle$. Seine minimale Kolmogorov-Zerlegung sei durch $\beta : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$, $\mathcal{H}' = \text{lh}\{\beta(x)\xi \mid x \in \mathcal{E}, \xi \in \mathcal{H}\}^{-\|\cdot\|}$, mit einem geeigneten Hilbertraum \mathcal{H}' gegeben: $\langle x | y \rangle = \beta(x)^* \beta(y)$. $\beta(\mathcal{E})$ definiert ein Hilbertmodul: Die Linearität von β rechnet man nach. Genauso einfach ist $|\beta(xa) - \beta(x)a|^2 = 0$ für $x \in \mathcal{E}$ und $a \in \mathcal{A}$ einzusehen, so daß \mathcal{E} und $\beta(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ unitäräquivalent sind. Wir betten $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ und $\mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ kanonisch in $\mathcal{B}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}')$ ein:

$$\pi(a) := \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma(z) := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ z & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

$\alpha \in \mathcal{A}$, $z \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$. Für $\alpha := \gamma \circ \beta$ und π gilt offensichtlich i) und ii) von Definition 2.1.6, d.h., \mathcal{E} ist isomorph zum Hilbertmodul $\alpha(\mathcal{E})$ über $\pi(\mathcal{A})$. $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ sei die von $\alpha(\mathcal{E})$ erzeugte C^* -Algebra in $\mathcal{B}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}')$. Die Minimalität der Kolmogorov-Zerlegung hat die Zyklizität der Projektion $p := \pi(\mathbb{1})$ zur Folge, so daß $\alpha(\mathcal{E})$ also in Standardform vorliegt. $\alpha(\mathcal{E}) = (\mathbb{1} - p)\mathcal{L}_{\mathcal{E}}p$ ist aus der Konstruktion von $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ sofort ersichtlich. \square

Die Darstellung von \mathcal{E} in $\mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ über die Kolmogorov-Zerlegung des inneren Produkts werden wir auch *Kolmogorov-Darstellung* von \mathcal{E} nennen.

2.2 Hilbert- W^* -Moduln

Die Realisierung eines (Prä-)Hilbertmoduls \mathcal{E} über einer C^* -Algebra $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ durch seine Kolmogorov-Darstellung in $\mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}') \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}')$, gestattet es uns, die Techniken der Operatorentheorie zur weiteren Untersuchung von Hilbertmoduln zu nutzen. Insbesondere haben wir nun die Möglichkeit \mathcal{E} in einer der Operortopologien von $\mathcal{B}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}')$ abzuschließen. Wir bezeichnen den Abschluß einfach mit $\bar{\mathcal{E}}$, denn \mathcal{E} besitzt als konvexe Menge denselben Abschluß in der σ wop- (oder w^* -), σ stop- und der σ stop*-Topologie. Die Identifikation von \mathcal{E} mit seinem Bild in $\mathcal{B}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}')$ bedeutet, daß das innere Produkt zweier Elemente x und y aus \mathcal{E} einfach durch $\langle x | y \rangle = x^*y \in \mathcal{A}$ gegeben ist (wir identifizieren \mathcal{A} und seine Einbettung $\pi(\mathcal{A})$, vgl. (2.4)), was sich für die weiteren Untersuchungen als sehr bequem herausstellen wird. Nachdem wir eine allgemeine Definition des Begriffs *Hilbert- W^* -Modul* gegeben haben, werden wir sehen, daß wir Hilbert- W^* -Moduln, ohne etwas zu verlieren, in ihrer Kolmogorov-Darstellung untersuchen können (vorausgesetzt natürlich, daß wir nur Moduln über von Neumann Algebren betrachten, was wir, wie schon erwähnt, ja generell tun wollen). Natürlich wird es sich erweisen, daß $\bar{\mathcal{E}}$ ein Hilbert- W^* -Modul ist.

Aber zunächst identifizieren wir die Relativtopologien, die von den Operortopologien auf $\bar{\mathcal{E}}$ induziert werden (und deren Namen wir beibehalten).

2.2.1 Die w^* -Topologie auf $\bar{\mathcal{E}}$ läßt sich natürlich durch Halbnormen der Form $d_{(\xi_i), (\eta_i)}(x) := \left| \sum_{i \in \mathbb{N}} \langle \eta_i | x \xi_i \rangle \right|$ mit quadratsummierbaren Vektorfolgen $(\xi_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ und $(\eta_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{H}'$ beschreiben. Das hat aber den Nachteil, daß dabei Elemente aus dem mitunter schwer zugänglichen Hilbertraum \mathcal{H}' der Kolmogorov-Zerlegung von $\langle \cdot | \cdot \rangle$ verwendet werden. Wünschenswert wäre dagegen eine Beschreibung durch Objekte, die bei Kenntnis von \mathcal{E} direkt gegeben sind. Diesem Problem begegnen wir auch bei der stop*- und der σ stop*-, nicht aber bei der stop- und der σ stop-Topologie. Zumindest auf beschränkten Teilmengen von $\bar{\mathcal{E}}$ ist es jedoch möglich, mit 'primären' Objekten auszukommen:

Lemma. *Die stop- bzw. die σ stop-Topologie auf $\bar{\mathcal{E}}$ wird von den Halbnormen*

$$d_{\xi}(x) := \| |x| \xi \|, \quad \xi \in \mathcal{H}, \quad (2.5)$$

bzw.

$$d_{\omega}(x) := \omega(\langle x | x \rangle)^{1/2}, \quad \omega \in \mathcal{A}_*^+, \quad (2.6)$$

und die stop*- sowie die w*-Topologie auf $\overline{\mathcal{E}}_1$ durch

$$d_{\xi, \eta, \mathbf{y}}(x) := \| |x|\xi \| + \| \langle x | \mathbf{y} \rangle \eta \|, \quad \xi, \eta \in \mathcal{H}, \mathbf{y} \in \mathcal{E}, \quad (2.7)$$

bzw.

$$d_{\omega, \mathbf{y}}(x) := |\omega(\langle \mathbf{y} | x \rangle)|, \quad \omega \in \mathcal{A}_*^+, \mathbf{y} \in \mathcal{E}, \quad (2.8)$$

erzeugt.

Beweis. Die Halbnormen für die stop- bzw. σ stop-Topologie sind offensichtlich. Der Beweis für die verbleibenden Topologien beruht einfach darauf, daß $\mathcal{E}\mathcal{H}$ in \mathcal{H}' dicht liegt. \square

2.2.2 $\overline{\mathcal{E}}$ versehen mit dem inneren Produkt $\overline{\mathcal{E}} \times \overline{\mathcal{E}} \ni (x, y) \mapsto \langle x | y \rangle := x^*y \in \mathcal{A}''$ ist ein Hilbert-C*-Modul über \mathcal{A}'' . Offensichtlich ist das innere Produkt σ stop- σ wop-stetig, so daß es das innere Produkt von \mathcal{E} stetig auf $\overline{\mathcal{E}}$ fortsetzt. Es ist Routine nachzurechnen, daß das auch für die Rechtsmodulwirkung auf \mathcal{E} gilt. τ bezeichne eine der σ wop-, \dots , σ stop*-Topologien. Nach dem Satz von Šmulian ist $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ genau dann τ -abgeschlossen, wenn die Einheitskugel \mathcal{E}_1 diese Eigenschaft besitzt. Da die Topologien τ mit den primären Begriffen ‘Prädual’ und ‘inneres Produkt’ auskommen, wenn wir τ auf \mathcal{E}_1 einschränken, können wir die τ -Abgeschlossenheit von \mathcal{E}_1 zur Definition eines Hilbert-W*-Moduls benutzen.

Definition. Ein Hilbertmodul \mathcal{E} über einer W*-Algebra heißt Hilbert-W*-Modul, falls die Einheitskugel \mathcal{E}_1 τ -abgeschlossen ist.

Es läßt sich leicht einsehen, daß ein Hilbert-W*-Modul auch ein Hilbert-C*-Modul ist und daß das innere Produkt σ stop- σ wop-stetig ist. Die Eigenschaften eines Hilbert-W*-Moduls über einer von Neumann Algebra lassen sich am einfachsten in seiner Kolmogorov-Darstellung untersuchen. Dazu müssen wir uns aber zuvor davon überzeugen, daß diese Darstellung wieder zu einem Hilbert-W*-Modul führt. Das machen wir gleich in einem etwas allgemeineren Rahmen und zeigen, daß der Isomorphie-Begriff für Hilbert-C*-Moduln mit der Hilbert-W*-Modulstruktur verträglich ist.

Lemma. Sind zwei Hilbert-C*-Moduln $(\mathcal{E}, \langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathcal{E}})$ und $(\mathcal{F}, \langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathcal{F}})$ über den W*-Algebren \mathcal{A} bzw. \mathcal{B} isomorph und ist eines der beiden ein Hilbert-W*-Modul, so handelt es sich auch bei dem anderen um ein Hilbert-W*-Modul.

Beweis. Wir verwenden die Notation von Definition 2.1.6. $(\mathcal{F}, \langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathcal{F}})$ sei ein Hilbert-W*-Modul und $\mathcal{E} = \alpha(\mathcal{F})$, $\mathcal{B} = \pi(\mathcal{A})$ mit $\langle \alpha(x) | \alpha(y) \rangle_{\mathcal{F}} = \pi(\langle x | y \rangle_{\mathcal{E}})$. Der Beweis besteht nun eigentlich nur im Ausnutzen der Tatsache, daß π als Isomorphismus von \mathcal{A} auf \mathcal{B} normal ist: $(x_i)_{i \in I} \subset \mathcal{E}_1$ sei ein w*-Cauchy-Netz. Wegen $\varphi(\langle \mathbf{y} | x_i \rangle_{\mathcal{E}}) = \varphi \circ \pi^{-1}(\langle \alpha(\mathbf{y}) | \alpha(x_i) \rangle_{\mathcal{F}})$ f.a. $\varphi \in \mathcal{A}_*$ und $\mathbf{y} \in \mathcal{E}$ ist $(\alpha(x_i))_{i \in I} \subset \mathcal{F}_1$ ein w*-Cauchy-Netz in \mathcal{F}_1 und besitzt nach Voraussetzung ein Grenzelement $z \in \mathcal{F}_1$. Nun zeigt

$$\varphi(\langle \mathbf{y} | x_i - \alpha^{-1}(z) \rangle_{\mathcal{E}}) = \varphi \circ \pi^{-1}(\langle \alpha(\mathbf{y}) | \alpha(x_i) - z \rangle_{\mathcal{F}}) \xrightarrow{i} 0$$

die w^* -Konvergenz von x_i gegen $\alpha^{-1}(z) \in \mathcal{E}_1$ und damit die w^* -Vollständigkeit von \mathcal{E}_1 . \square

Ab jetzt werden wir also stillschweigend davon ausgehen, daß Hilbert- W^* -Moduln, die bei uns nur über von Neumann Algebren betrachtet werden, in Kolmogorov-Darstellung gegeben sind.

Der Begriff ‘Hilbert- W^* -Modul’ scheint sich in der Literatur noch nicht verfestigt zu haben. Manche Autoren verstehen darunter einfach ein Hilbert- C^* -Modul über einer W^* -Algebra, ohne auf dem w^* -Abschluß des Moduls zu bestehen (vgl. etwa [Fra]). In [Sch] wird im Wesentlichen der Sakaische Standpunkt eingenommen, nach dem ein Hilbert- W^* -Modul der Dualraum eines Banachraumes zu sein hat. Mit unserer Definition decken wir den für uns relevanten Bereich beider Zugänge ab.

2.2.3 Satz. *Ein Hilbert- W^* -Modul \mathcal{E} über der von Neumann Algebra \mathcal{A} besitzt den Prädual $\mathcal{E}_* = \text{lh}\{\varphi(\langle y | \cdot \rangle) \mid y \in \mathcal{E}, \varphi \in \mathcal{A}_*\}^{\|\cdot\|}$ und ist als Hilbertmodul selbstdual.*

Beweis. $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}') \subset \mathcal{B}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}')$ sei ein Hilbert- W^* -Modul über der von Neumann Algebra $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Als w^* -abgeschlossener Teilraum von $\mathcal{B}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}')$ ist \mathcal{E} der Dual des Banachraumes $\mathcal{T}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}')/\mathcal{E}^\circ$. Dabei sind $\mathcal{T}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}')$ die Spurklasseoperatoren auf $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}'$ und \mathcal{E}° die Polare von \mathcal{E} in $\mathcal{T}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}')$. Die Funktionale $x \mapsto \langle \xi' | x \xi \rangle$, $\xi \in \mathcal{H}$, $\xi' \in \mathcal{H}'$ liegen offenbar total in \mathcal{E}_* und in diesen wiederum, wegen der Minimalität der Kolmogorov-Zerlegung, die Funktionale $x \mapsto \langle y \eta | x \xi \rangle = \langle \eta | \langle y | x \xi \rangle$, $\eta, \xi \in \mathcal{H}$, $y \in \mathcal{E}$, mit denen sich jedes $x \mapsto \varphi(\langle y | x \rangle)$, $\varphi \in \mathcal{A}_*$, approximieren läßt. Also gilt $\mathcal{E}_* = \text{lh}\{\varphi(\langle y | \cdot \rangle) \mid y \in \mathcal{E}, \varphi \in \mathcal{A}_*\}^{\|\cdot\|}$.

Die Selbstdualität von \mathcal{E} zeigen wir mit Hilfe der approximativen Eins $(e_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{I}}$ von $\mathcal{K}(\mathcal{E})$ aus Abschnitt 2.1.4. Für $\psi \in \mathcal{E}'$ gilt

$$\psi(e_\alpha x) = \sum_{i=1}^{n_\alpha} \psi(\xi_i^\alpha) \langle \xi_i^\alpha | x \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n_\alpha} \xi_i^\alpha \psi(\xi_i^\alpha)^* \mid x \right\rangle =: \langle z_\alpha | x \rangle.$$

Dieser Ausdruck konvergiert in der Norm gegen $\psi(x)$, d.h., für alle $\varphi \in \mathcal{A}_*^+$ auch $\varphi(\psi(e_\alpha x))$ gegen $\varphi(\psi(x))$. Ist $(z_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{I}}$ beschränkt, so konvergiert dieses Netz nach Lemma 2.2.1 in der w^* -Topologie gegen ein $z \in \mathcal{E}$. Also gilt $\varphi(\psi(x)) = \varphi(\langle z | x \rangle)$ für alle $\varphi \in \mathcal{A}_*^+$ und alle $x \in \mathcal{E}$, d.h., $\psi = \langle z | \cdot \rangle \in \mathcal{E}'$. Die Beschränktheit des Netzes $(z_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{I}}$ läßt sich folgendermaßen einsehen:

$$\|z_\alpha\| = \|\langle z_\alpha | \cdot \rangle\| = \|\psi \circ e_\alpha\| \leq \|\psi\| \|e_\alpha\| \leq 1.$$

Damit ist $\hat{\mathcal{E}} = \mathcal{E}'$ gezeigt. \square

2.2.4 Bemerkungen. Mit Hilfe des Fortsetzungssatzes von Hahn-Banach kann man sich davon überzeugen, daß die σ wop-, die σ stop und die σ stop-Topologie auf \mathcal{E} Topologien des dualen Paares $\langle \mathcal{E}, \mathcal{E}_* \rangle$ sind.

Wir bezeichnen ein Hilbert- W^* -Modul \mathcal{E} über \mathcal{A} als *voll*, wenn $\text{lh}\{\langle x | y \rangle \mid x, y \in \mathcal{E}\}$ in \mathcal{A} τ -dicht liegt. Offensichtlich ergibt der τ -Abschluß eines vollen Hilbert- C^* -Moduls ein

volles Hilbert-W*-Modul.

Besitzt ein Hilbert-W*-Modul \mathcal{E} einen separablen Prädual, so ist es w^* -separabel, enthält also eine σ stop-dichte Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (vgl. Anhang A.2). Ist \mathcal{E} voll, so bildet $(\langle x_n | x_m \rangle)_{n, m \in \mathbb{N}}$ eine w^* -totale Menge in \mathcal{A} , d.h., \mathcal{A} ist w^* - und damit auch σ stop-separabel (oder abzählbar erzeugt, nach [Ped]). Falls \mathcal{A} σ -finit ist (wenn z.B. ein treuer normaler Zustand auf \mathcal{A} existiert), ist auch \mathcal{A}_* separabel (vgl. A.2.3). Natürlich läßt sich umgekehrt aus der Separabilität von \mathcal{A}_* normalerweise nicht auf die Separabilität von \mathcal{E}_* schließen (man nehme nur einen nichtseparablen Hilbertraum, d.h., ein Hilbert-W*-Modul über $\mathcal{A} = \mathbb{C}$). Bei dem Hilbert-W*-Modul, für das wir uns hauptsächlich interessieren werden, ist das aber möglich, vgl. Korollar 2.3.2.

Bei aufmerksamem Studium des Beweises von Satz 2.2.3 erkennt man, daß für die Selbstdualität von \mathcal{E} schon die Vollständigkeit von \mathcal{E}_1 in der Topologie w_0 , die durch die Halbnormen $\{\| \langle z | \cdot \rangle \| \mid z \in \mathcal{E}_1\}$ erzeugt wird, ausreicht. Ist andererseits \mathcal{E} selbstdual und $(z_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{I}} \subset \mathcal{E}_1$ ein w_0 -konvergentes Netz, so definiert $\psi(x) := \|\| \lim_{\alpha} \langle z_\alpha | x \rangle$ ein Element $\psi \in \mathcal{E}'$. Also gibt es ein $z \in \mathcal{E}_1$ mit der Eigenschaft $\psi = \langle z | \cdot \rangle$, d.h., $(z_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{I}}$ ist w_0 -konvergent gegen z und \mathcal{E}_1 somit w_0 -vollständig. Das ist die Äquivalenz von ii) und iii) im folgenden Satz:

2.2.5 Satz. *Für ein Hilbertmodul \mathcal{E} über einer von Neumann Algebra \mathcal{A} ist folgendes äquivalent:*

- i) \mathcal{E} ist ein Hilbert-W*-Modul,
- ii) \mathcal{E} ist selbstdual,
- iii) \mathcal{E}_1 ist w_0 -vollständig.

Beweis. i) \Rightarrow ii) ist Satz 2.2.3. Es bleibt ii) \Rightarrow i) zu zeigen. Dazu sei $(z_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{I}} \subset \mathcal{E}_1$ ein w^* -Cauchy-Netz, d.h., für alle $x \in \mathcal{E}$ existiere $\psi(x) := w^* \lim_{\alpha} \langle z_\alpha | x \rangle$ (vgl. Lemma 2.2.1). Offensichtlich liegt ψ in \mathcal{E}' , so daß es ein $z \in \mathcal{E}_1$ mit der Eigenschaft $\psi(x) = \langle z | x \rangle$ für alle $x \in \mathcal{E}$ gibt. Das bedeutet aber gerade $z = w^* \lim_{\alpha} z_\alpha$. Also ist \mathcal{E}_1 w^* -vollständig und (nach dem Satz von Šmulian) \mathcal{E} w^* -abgeschlossen. \square

2.2.6 Korollar. *Für ein Hilbert-W*-Modul \mathcal{E} gilt $\mathcal{B}(\mathcal{E}) = \mathcal{L}(\mathcal{E})$.*

Beweis. Für $T \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ und $y \in \mathcal{E}$ definiert $\mathcal{E} \ni x \mapsto \langle y | Tx \rangle$ ein Element aus \mathcal{E}' , d.h., es gibt genau ein Element $z_y \in \mathcal{E}$ mit der Eigenschaft $\langle z_y | x \rangle = \langle y | Tx \rangle$ f.a. $x \in \mathcal{E}$. Nach [Lan] ist $T^* : y \mapsto z_y$ die Adjungierte von T . Damit ist $\mathcal{B}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{E})$ gezeigt. \square

2.2.7 Korollar. *$\mathcal{E} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ sei ein Hilbert-W*-Modul über der von Neumann Algebra $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Dann folgt für ein $y \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ aus $y^*x \in \mathcal{A}$ f.a. $x \in \mathcal{E}$ bereits $y \in \mathcal{E}$.*

Beweis. $\mathcal{E} \ni x \mapsto y^*x$ definiert ein Element aus \mathcal{E}' , d.h., es gilt $y^*x\xi = \langle z | x \rangle \xi = z^*x\xi$ f.a. $x \in \mathcal{E}$, $\xi \in \mathcal{H}$ und einem Element $z \in \mathcal{E}$. Da \mathcal{H}' von $\mathcal{E}\mathcal{H}$ erzeugt wird, gilt $y^* = z^*$, also $y \in \mathcal{E}$. \square

2.2.8 Wir untersuchen nun die Struktur von $\mathcal{K}(\mathcal{E})$, $\mathcal{B}(\mathcal{E})$ bzw. $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ unter Berücksichtigung der Identifikation von \mathcal{E} mit seinem Bild in $\mathcal{B}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}')$.

Zunächst ist $\Theta_{x,y} \in \mathcal{K}(\mathcal{E})$ durch den Operator $xy^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H}')$ gegeben, denn seine Wirkung auf ein Element $z \in \mathcal{E}$ ist gegeben durch: $\Theta_{x,y}z = x\langle y|z \rangle = xy^*z$ (man erhält dieses Ergebnis auch, wenn man $\alpha \circ \Theta_{x,y} \circ \alpha^{-1}$ auswertet, vgl. Definition 2.1.6). Operatoren $T \in \mathcal{K}(\mathcal{E})$ spielen also eine Doppelrolle – zum einen in ihrer Wirkung auf \mathcal{E} und zum anderen auf Vektoren aus \mathcal{H}' – die genau genommen zu unterscheiden wäre:

$$\tilde{T}\left(\sum_{i=1}^n x_i \xi_i\right) := \sum_{i=1}^n (Tx_i)\xi_i, \quad x_i \in \mathcal{E}, \xi_i \in \mathcal{H}. \quad (2.9)$$

Wir werden gleich sehen, daß die Zuordnung $T \mapsto \tilde{T}$ einen *-Isomorphismus ist. Da aber $\mathcal{K}(\mathcal{E})$ eine Unter algebra von $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ ist, behandeln wir dieses Problem gleich für $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ selbst. Dabei ist zunächst zu klären, ob (2.9) für alle Elemente T aus $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ zu wohldefinierten Operatoren \tilde{T} führt. Wir skizzieren im folgenden die Konstruktion, die das sicherstellt und gleichzeitig die *-Isomorphismeigenschaft von $\gamma : \mathcal{L}(\mathcal{E}) \ni T \mapsto \tilde{T} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}')$ zeigt. Zunächst gilt mit Ungleichung (2.2) für alle $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{A}$ die folgende Abschätzung:

$$\sum_{i,j=1}^n a_i^* \langle Tx_i | Tx_j \rangle a_j = \left| \sum_{i=1}^n Tx_i a_i \right|^2 \leq \|T\|^2 \left| \sum_{i=1}^n x_i a_i \right|^2 = \|T\|^2 \sum_{i,j=1}^n a_i^* \langle x_i | x_j \rangle a_j,$$

woraus nach [Ta1], Lemma IV.3.2, die Ungleichung $0 \leq \|T\|^2 [\langle x_i | x_j \rangle]_{i,j} - [\langle Tx_i | Tx_j \rangle]_{i,j}$ in $\mathcal{A} \otimes M_n$ folgt. Mit ihrer Hilfe gewinnen wir die Wohldefiniertheit und die Beschränktheit von \tilde{T} :

$$\left\| \sum_{i=1}^n (Tx_i)\xi_i \right\|^2 = \langle \oplus_i^n \xi_i | [\langle Tx_i | Tx_j \rangle]_{i,j} \oplus_i^n \xi_i \rangle \leq \|T\|^2 \left\| \sum_{i=1}^n x_i \xi_i \right\|^2,$$

d.h., $\|\tilde{T}\| \leq \|T\|$. Andererseits gilt aber auch:

$$\|T\| = \sup_{x \in \mathcal{E}_1, \xi \in \mathcal{H}'_1} \|(Tx)\xi\| = \sup_{x \in \mathcal{E}_1, \xi \in \mathcal{H}'_1} \|\tilde{T}x\xi\| \leq \sup_{\xi' \in \mathcal{H}'_1} \|\tilde{T}\xi'\| = \|\tilde{T}\|.$$

Somit ist $\|T\| = \|\tilde{T}\|$. Aus (2.9) können wir nun unmittelbar die *-Isomorphismeigenschaft von γ ablesen. Wir können und werden also $\mathcal{K}(\mathcal{E})$ und $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ als C^* -Unteralgebren von $\mathcal{B}(\mathcal{H}')$ auffassen.

In unseren Überlegungen wurde nur die Beschränktheit der \mathcal{A} -linearen Abbildung T benutzt (vgl. (2.2)). Wir haben also sogar $\mathcal{B}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H}')$ gezeigt: Jeder Operator $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}')$ mit der Eigenschaft $Tx \in \mathcal{E}$ für alle $x \in \mathcal{E}$ liegt in $\mathcal{B}(\mathcal{E})$. Adjungierbar ist er genau dann, wenn diese Eigenschaft auch von T^* erfüllt wird (vgl. Korollar 2.2.6 und Korollar 2.2.7):

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\mathcal{E}) &= \{T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}') \mid Tx \in \mathcal{E} \text{ f.a. } x \in \mathcal{E}\}, \\ \mathcal{L}(\mathcal{E}) &= \{T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}') \mid Tx \in \mathcal{E}, T^*x \in \mathcal{E} \text{ f.a. } x \in \mathcal{E}\}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

2.2.9 Satz. \mathcal{E} sei ein Hilbert- C^* -Modul über einer C^* -Algebra $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\overline{\mathcal{E}}$ das zugehörige Hilbert- W^* -Modul über \mathcal{A}'' und τ eine Topologie des dualen Paares $\langle \overline{\mathcal{E}}, \overline{\mathcal{E}}_* \rangle$. Dann besitzt jedes $T \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ eine eindeutige τ - τ -stetige Fortsetzung zu einem Element aus $\mathcal{L}(\overline{\mathcal{E}})$ mit derselben Norm.

Beweis. Seien $x, y \in \overline{\mathcal{E}}$. Wir approximieren x gemäß Satz 2.2.11: $x = s\text{-}\lim_{\alpha} x_{\alpha}$, $\sup_{\alpha} \|x_{\alpha}\| < \infty$. Dann folgt aus

$$(T^*y)^*x = w^*\text{-}\lim_{\alpha} (T^*y)^*x_{\alpha} = w^*\text{-}\lim_{\alpha} \langle y | Tx_{\alpha} \rangle \in \mathcal{A}''$$

und Korollar 2.2.7, daß T^*y in $\overline{\mathcal{E}}$, also T^* in $\mathcal{B}(\overline{\mathcal{E}}) = \mathcal{L}(\overline{\mathcal{E}})$ liegt. Die Fortsetzung \overline{T} von T ist nun durch $\overline{T}^{**} = T$ gegeben (beachte dazu (2.10)). Die restlichen Eigenschaften folgen daraus, daß T auf \mathcal{E} die Multiplikation mit einem Element aus $\mathcal{B}(\mathcal{H}')$ ist (vgl. Abschnitt 2.2.8). \square

Der Beweis zeigt, daß ein $T \in \mathcal{B}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H}')$ auf einem Hilbert- C^* -Modul \mathcal{E} i.allg. deshalb keine Adjungierte besitzt, weil für $x \in \mathcal{E}$ das Bild T^*x in $\overline{\mathcal{E}}$ liegt, aber nicht unbedingt in \mathcal{E} .

2.2.10 Unter der Linking-Algebra $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ eines Hilbert- W^* -Moduls \mathcal{E} verstehen wir die von \mathcal{E} erzeugte von Neumann-Algebra in $\mathcal{B}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}')$. Als nicht ausgeartete C^* -Algebra in $\mathcal{B}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}')$ ist sie der Abschluß in einer der dualen Topologien von $\mathcal{B}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}')$. Offensichtlich entsteht $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ durch Abschluß seiner Bestandteile: \mathcal{A} für die linke obere, \mathcal{E} für die linke untere, $\mathcal{E}^* := \{x^* \mid x \in \mathcal{E}\}$ für die rechte obere und $\mathcal{K}(\mathcal{E})$ für die rechte untere Ecke. Nur $\mathcal{K}(\mathcal{E})$ ist noch abzuschließen. Die approximative Eins (2.3) im zweiseitigen $*$ -Ideal $\mathcal{K}(\mathcal{E})$ von $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ ist monoton wachsend mit σ stop-Grenzwert $\mathbb{1}$. Also ist $\mathcal{K}(\mathcal{E})'' = \mathcal{L}(\mathcal{E})$, denn aus (2.10) ist sofort zu sehen, daß $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ w^* -abgeschlossen, also eine von Neumann Algebra in $\mathcal{B}(\mathcal{H}')$ ist. Die Linking-Algebra hat somit die Form

$$\mathcal{L}_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{E}^* \\ \mathcal{E} & \mathcal{L}(\mathcal{E}) \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

2.2.11 Satz. (Kaplansky) Es sei \mathcal{E} das von einem Prä-Hilbertmodul \mathcal{E}_0 erzeugte Hilbert- W^* -Modul. Dann ist die Einheitskugel $\mathcal{E}_{0,1}$ von \mathcal{E}_0 σ stop-dicht in der Einheitskugel \mathcal{E}_{1} von \mathcal{E} .

Beweis. Folgt aus dem Satz von Kaplansky für $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ (vgl. (2.11)) und der Kontraktivität der Einbettung von \mathcal{E} in $\mathcal{B}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}')$. \square

2.3 Hilbertmoduln zu bedingten Erwartungen:

$L^2(\mathcal{A}, P_0)$

In diesem Abschnitt stellen wir die für uns zentrale Konstruktion von Hilbert- W^* -Moduln mittels von Neumann Algebren und bedingten Erwartungen vor. Dazu gehen wir von einem Wahrscheinlichkeitsraum (\mathcal{A}, ψ) und einer W^* -Unteralgebra \mathcal{A}_0 aus, für die die bedingte Erwartung $P_0 \in \text{Mor}(\mathcal{A}, \psi)$ bzgl. ψ existiert (vgl. 1.3.1). Wir geben Bedingungen

an, die es erlauben, vollständig positive Operatoren auf \mathcal{A} zu adjungierbaren Abbildungen auf dem Hilbert- W^* -Modul fortzusetzen.

2.3.1 (\mathcal{A}, ψ) sei ein nichtkommutativer Wahrscheinlichkeitsraum, \mathcal{A}_0 eine von Neumann Unteralgebra von \mathcal{A} , die von $(\sigma_t^\psi)_{t \in \mathbb{R}}$ invariant gelassen wird und P_0 die zugehörige bedingte Erwartung von \mathcal{A} auf \mathcal{A}_0 . Wir nehmen wie üblich an, daß \mathcal{A} bereits auf seinem GNS-Hilbertraum $\mathcal{H} := L^2(\mathcal{A}, \psi)$ dargestellt ist: $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Dann wird durch

$$\mathcal{A} \times \mathcal{A} \ni (a, b) \mapsto \langle a | b \rangle_0 := P_0(a^*b) \in \mathcal{A}_0$$

ein inneres Produkt auf \mathcal{A} definiert. $(\mathcal{A}, \langle \cdot | \cdot \rangle_0)$ ist ein Prä-Hilbertmodul über \mathcal{A}_0 , das nach den Überlegungen in Abschnitt 2.2 zu einem Hilbert- W^* -Modul erweitert werden kann. Den \mathcal{A}_0 -wertigen Betrag $P_0(x^*x)^{1/2}$ auf diesem Modul bezeichnen wir mit $|x|_0$ und die daraus entstehende Norm $\|x\|_0$ mit $\|x\|_0$.

Definition. Das zu (\mathcal{A}, ψ) , \mathcal{A}_0 und P_0 gehörende Hilbert- W^* -Modul wird mit $L^2(\mathcal{A}, P_0)$ bezeichnet.

Das Symbol $L^2(\mathcal{A}, P_0)$ soll dabei an den GNS-Hilbertraum $L^2(\mathcal{A}, \psi)$ von (\mathcal{A}, ψ) erinnern, der in dem Spezialfall $\mathcal{A}_0 = \mathbb{C} \cdot \mathbf{1}$ aus obiger Konstruktion hervorgeht.

2.3.2 Lemma. Ist \mathcal{A}_* separabel, so hat auch $L^2(\mathcal{A}, P_0)$ einen separablen Prädual.

Beweis. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei eine σ stop-dichte Folge in \mathcal{A} und $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine dichte Folge in \mathcal{A}_* . Mit der Ungleichung $\varphi(\langle x | y \rangle_0)^2 \leq \varphi(\langle x | x \rangle_0)\varphi(\langle y | y \rangle_0)$, die für alle $\varphi \in \mathcal{A}_*^+$ und alle $x, y \in L^2(\mathcal{A}, P_0)$ gilt, läßt sich nun leicht zeigen, daß $\{\varphi_n(\langle x_m | \cdot \rangle_0) \mid n, m \in \mathbb{N}\}$ total in $L^2(\mathcal{A}, P_0)_*$ liegt. \square

Wir gehen davon aus, daß unsere Wahrscheinlichkeitsräume generell einen separablen Prädual haben. Daher können wir alle Approximationen bzgl. Topologien des dualen Paares $\langle L^2(\mathcal{A}, P_0), L^2(\mathcal{A}, P_0)_* \rangle$ mit Folgen durchführen.

2.3.3 Für den nächsten Satz benötigen wir den Begriff der ψ -Adjungierten eines Morphismus' T (vgl. 1.2.2).

Satz. Ein Morphismus T von (\mathcal{A}, ψ) , der mit der modularen Automorphismengruppe $(\sigma_t^\psi)_{t \in \mathbb{R}}$ von ψ vertauscht und \mathcal{A}_0 punktweise fix läßt, kann eindeutig zu einem adjungierbaren Operator \bar{T} auf $L^2(\mathcal{A}, P_0)$ fortgesetzt werden. Dabei stimmt die Fortsetzung von T^* mit der Adjungierten der Fortsetzung von T überein. Darüberhinaus ist $T \mapsto \bar{T}$ punktweise w^* - w^* - und punktweise σ stop- σ stetig.

Beweis. Da \mathcal{A}_0 in der Fixpunktalgebra ([Küm2, Rob]) von T liegt, gilt $T(xy) = T(x)y$ f.a. $x \in \mathcal{A}$, $y \in \mathcal{A}_0$, also

$$\psi(P_0(T(x))y) = \psi(P_0(T(x)y)) = \psi(T(x)y) = \psi(T(xy)) = \psi(xy) = \psi(P_0(x)y).$$

Da P_0 ψ -selbstadjungiert ist, erhalten wir $P_0 T = P_0 = T^* P_0$. Insbesondere liegt \mathcal{A}_0 auch in der Fixpunktalgebra von T^* . Die Kadison-Schwarz-Ungleichung zeigt nun für alle $x \in \mathcal{A}$

$$|T(x)|_0^2 = P_0(T(x^*)T(x)) \leq P_0(T(x^*x)) = P_0(x^*x) = |x|_0^2,$$

so daß T nach (2.2) zu einem beschränkten, \mathcal{A}_0 -linearen Operator auf das von \mathcal{A} und P_0 erzeugte Hilbert- C^* -Modul fortgesetzt werden kann. Dieser kann nach Satz 2.2.9 eindeutig zu einem Element $\bar{T} \in \mathcal{L}(L^2(\mathcal{A}, P_0))$ erweitert werden. T^* erfüllt dieselben Voraussetzungen wie T (die Vertauschbarkeit von T^* mit der modularen Gruppe folgt einfach daraus, daß die ψ -Adjungierte von σ_t^ψ durch σ_{-t}^ψ gegeben ist) und besitzt daher ebenfalls eine Fortsetzung \bar{T}^* . Nun gilt zunächst für $x, y \in \mathcal{A}$: $\langle T^*(x) | y \rangle_0 = \langle x | T(y) \rangle_0$, denn für alle $z \in \mathcal{A}_0$ haben wir

$$\psi(\langle T^*(x) | y \rangle_0 z) = \psi(T^*(x^*)yz) = \psi(x^*T(yz)) = \psi(x^*T(y)z) = \psi(\langle x | T(y) \rangle_0 z).$$

Für $x = s\text{-}\lim_n x_n$, $x_n \in \mathcal{A}$, $y \in \mathcal{A}$, folgt wegen der σ stop- σ stop-Stetigkeit von \bar{T} (vgl. Satz 2.2.9)

$$\begin{aligned} \langle \bar{T}^* x | y \rangle_0 &= w^*\text{-}\lim_n \langle T^*(x_n) | y \rangle_0 = w^*\text{-}\lim_n \langle x_n | T(y) \rangle_0 \\ &= \langle x | \bar{T}y \rangle_0 = \langle \bar{T}^* x | y \rangle_0. \end{aligned}$$

Da \mathcal{A} in $L^2(\mathcal{A}, P_0)$ stop-dicht liegt, muß $\bar{T}^* = \bar{T}^*$ gelten.

Nun zur Stetigkeit der Fortsetzung. $(T_\alpha)_{\alpha \in I} \in \text{Mor}(\mathcal{A}, \psi)$ konvergiere in der punktweisen w^* -Topologie gegen $T \in \text{Mor}(\mathcal{A}, \psi)$. Jedes T_α und T seien fortsetzbar. Da $(\bar{T}_\alpha x)_{\alpha \in I}$ für $x \in L^2(\mathcal{A}, P_0)$ beschränkt ist, können wir von der Tatsache Gebrauch machen, daß die w^* -Topologie auf $L^2(\mathcal{A}, P_0)_1$ bereits durch die Halbnormen $d_{\omega, y}(x) = |\omega(\langle y | x \rangle_0)|$, mit $\omega \in \mathcal{A}_*^+$ und $y \in \mathcal{A}$ erzeugt wird. Nun folgt die punktweise w^* -Konvergenz der Fortsetzungen \bar{T}_α gegen \bar{T} aus $d_{\omega, y}((\bar{T}_\alpha - \bar{T})x) = |\omega(\langle (\bar{T}_\alpha - \bar{T})(y) | x \rangle_0)|$, der w^* -Stetigkeit von $\mathcal{A} \ni y \mapsto \langle y | x \rangle_0$ für alle $x \in L^2(\mathcal{A}, P_0)$ und der punktweisen w^* -Stetigkeit der Adjungiertenbildung auf $\text{Mor}(\mathcal{A}, \psi)$. Die letzte Eigenschaft gilt, weil die w^* -Topologie auf \mathcal{A}_1 schon durch die Halbnormen $\{|\psi(y \cdot)| | y \in \mathcal{A}\}$ erzeugt wird.

Jetzt sei $(T_\alpha)_{\alpha \in I}$ punktweise σ stop-konvergent gegen T . Dann ist $F_\alpha := T_\alpha - T$ punktweise σ stop-konvergent gegen 0 . Für alle $x, y \in \mathcal{A}$ gilt: $\psi(y(T_\alpha^* \circ T_\alpha - T \circ T)(x)) = \psi((T_\alpha - T)(y)T_\alpha(x)) + \psi(T(y)(T_\alpha - T)(x))$, d.h., $T_\alpha^* \circ T_\alpha$ ist punktweise w^* -konvergent gegen $T^* \circ T$. Da T w^* - w^* -stetig ist, konvergiert $F_\alpha^* \circ F_\alpha$ in der punktweisen w^* -Topologie auf \mathcal{A} gegen 0 . Für $x \in L^2(\mathcal{A}, P_0)$ und $\omega \in \mathcal{A}_*^+$ folgt, wegen $\omega(\langle \cdot | x \rangle_0) \in \mathcal{A}_*$, für alle $y \in \mathcal{A}$:

$$\omega(\langle y | \bar{F}_\alpha^* \bar{F}_\alpha x \rangle_0) = \omega(\langle F_\alpha^* \circ F_\alpha(y) | x \rangle_0) \xrightarrow{\alpha} 0,$$

d.h., $w^*\text{-}\lim_\alpha \bar{F}_\alpha^* \bar{F}_\alpha x = 0$. Daraus ergibt sich sofort die punktweise σ stop-Konvergenz von \bar{T}_α gegen \bar{T} . \square

Bemerkung. Dieses Lemma rechtfertigt es, daß wir die Fortsetzung eines Morphismus' $T \in \text{Mor}(\mathcal{A}, \psi)$ normalerweise nicht durch eine andere Schreibweise hervorheben, sondern wieder denselben Buchstaben T verwenden werden. Da unsere Überlegungen auch für den Fall $P_0 = \psi \cdot \mathbb{1}$, d.h., für die GNS-Darstellung gilt, paßt das mit unserer Vereinbarung zusammen, daß wir hier für fortsetzbare Morphismen T auch keine neuen Symbole für die Fortsetzung verwenden, sondern nur durch die multiplikative Schreibweise $T\xi$, $\xi \in \mathcal{H}_\psi$, gegenüber $T(x)$, $x \in \mathcal{A}$, auf den jeweiligen Gültigkeitsbereich Bezug nehmen.

2.3.4 In diesem Abschnitt stellen wir eine konkrete Realisierung von $L^2(\mathcal{A}, P_0)$ vor, indem wir den Kolmogorov-Hilbertraum \mathcal{H}' (vgl. Satz 2.1.7) als GNS-Hilbertraum $\mathcal{H}_\psi = L^2(\mathcal{A}, \psi)$ von ψ identifizieren. Diese Realisierung hat den weiteren Vorteil, daß die Parallelen zur GNS-Konstruktion deutlicher hervortreten.

P_0 bezeichne, gemäß unserer Übereinkunft auch die GNS-Darstellung von P_0 (d.h., die Fortsetzung von P_0 auf \mathcal{H}_ψ). $\mathcal{H}_0 := P_0\mathcal{H}_\psi$ ist der Projektionsraum von P_0 . Dann ergibt $\overline{\mathcal{A}P_0}^{\sigma\text{stop}} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H}_\psi)$, versehen mit dem inneren Produkt $(x, y) \mapsto x^*y \in \mathcal{A}_0P_0$ ein Hilbert-W*-Modul über $\mathcal{A}_0P_0 \cong \mathcal{A}_0$. Man überlegt sich leicht, daß $\overline{\mathcal{A}P_0}^{\sigma\text{stop}}$ aus der von Neumann Algebra $\{\mathcal{A}, P_0\}''$ durch Rechtsmultiplikation mit P_0 hervorgeht: $\overline{\mathcal{A}P_0}^{\sigma\text{stop}} = \{\mathcal{A}, P_0\}'' P_0$.

Satz. $L^2(\mathcal{A}, P_0)$ ist isomorph zu dem Hilbert-W*-Modul $\{\mathcal{A}, P_0\}'' P_0 \subset \mathcal{B}(\mathcal{H}_\psi)$ über \mathcal{A}_0P_0 , das mit dem inneren Produkt $(x, y) \mapsto x^*y \in \mathcal{A}_0P_0$ versehen ist.

i) Die Linking-Algebra ist durch

$$\left(\begin{array}{cc} \mathcal{A}_0P_0 & P_0\{\mathcal{A}, P_0\}'' \\ \{\mathcal{A}, P_0\}'' P_0 & \{\mathcal{A}, P_0\}'' \end{array} \right) \subset \mathcal{B}(\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_\psi)$$

gegeben.

ii) Durch

$$j : L^2(\mathcal{A}, P_0) \rightarrow L^2(\mathcal{A}, \psi); \quad x \mapsto \alpha(x)$$

ist eine kontraktive Einbettung von $L^2(\mathcal{A}, P_0)$ in $L^2(\mathcal{A}, \psi)$ mit dichtem Bild definiert. Dabei ist α der Isomorphismus zwischen $L^2(\mathcal{A}, P_0)$ und $\{\mathcal{A}, P_0\}'' P_0$.

Beweis. i): Wir müssen einen Isomorphismus gemäß Definition 2.1.6 von $L^2(\mathcal{A}, P_0)$ auf $\{\mathcal{A}, P_0\}'' P_0$ konstruieren. Dazu sei $x \in L^2(\mathcal{A}, P_0)$ durch eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ in der stop-Topologie (von $L^2(\mathcal{A}, P_0)$) approximiert (Satz 2.2.11). Dann konvergiert $(x_n P_0)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}P_0$ in der stop-Topologie von $\mathcal{B}(\mathcal{H}_\psi)$ gegen ein Element $\alpha(x) = \alpha(x)P_0 \in \{\mathcal{A}, P_0\}'' P_0$:

$$\|(x_n - x_m)P_0\xi\| = \| |x_n - x_m|_0 \xi \| = d_\xi(x_n - x_m) \xrightarrow{m, n \rightarrow \infty} 0$$

Man überlegt sich leicht, daß $\alpha(x)$ nicht von der approximierenden Folge abhängt, so daß α zu einer wohldefinierten Abbildung von $L^2(\mathcal{A}, P_0)$ in $\{\mathcal{A}, P_0\}'' P_0$ wird. Ist umgekehrt $y \in \{\mathcal{A}, P_0\}'' P_0$ gegeben, so läßt es sich, wiederum nach dem Satz von Kaplansky 2.2.11,

durch eine Folge $(x_n P_0)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A} P_0$ approximieren. Obige Rechnung zeigt dann auch die Existenz von $x := s\text{-}\lim_n x_n \in L^2(\mathcal{A}, P_0)$, d.h., $y = \alpha(x)$. Damit ist α surjektiv.

Die Abbildung $\pi : \mathcal{A}_0 \rightarrow \mathcal{A}_0 P_0; a \mapsto a P_0$ ist ein *-Isomorphismus. $P_0 \in \mathcal{A}'_0$ zeigt $\alpha(\alpha a) = \alpha(x)\pi(a)$ für alle $a \in \mathcal{A}_0$ also i) von 2.1.6. Für ii) sei $x = s\text{-}\lim_n x_n$ und $y = s\text{-}\lim_n y_n$ mit $x_n, y_n \in \mathcal{A}$. Dann folgt aus der σ stop- σ wop-Stetigkeit des inneren Produktes (2.2.2) und der σ wop- σ wop-Stetigkeit von π (als *-Isomorphismus zwischen zwei von Neumann Algebren, [BrRo1], Theorem 2.4.23):

$$\alpha(x)^* \alpha(x) = w^*\text{-}\lim_n P_0 x_n^* y_n = w^*\text{-}\lim_n \pi(\langle x_n | y_n \rangle_0) = \pi(\langle x | y \rangle_0).$$

Damit ist α ein Isomorphismus zwischen $L^2(\mathcal{A}, P_0)$ und $\{\mathcal{A}, P_0\}'' P_0$.

ii): Für $x \in L^2(\mathcal{A}, P_0)$ folgt die Kontraktivität von j aus $\|\alpha(x)\|_\psi = \psi(\pi(\langle x | x \rangle_0))^{1/2} \leq \|\langle x | x \rangle_0\|^{1/2} = \|x\|_0$. Die Injektivität von j und der Rest ist Routine. \square

$L^2(\mathcal{A}, P_0)$ ist isomorph zu einem Hilbertmodul in Standardform (vgl. 2.1.2). Aufgrund dieses Satzes werden wir nicht mehr zwischen $L^2(\mathcal{A}, P_0)$ und $\{\mathcal{A}, P_0\}'' P_0$ unterscheiden. Die Einbettung j in $L^2(\mathcal{A}, \psi)$ ist dadurch einfach die identische Abbildung. Für das innere Produkt verwenden wir weiterhin die Schreibweise $\langle x | y \rangle_0$, da sie in Formeln zur Übersichtlichkeit beiträgt. In manchen Beweisen ist es allerdings vorteilhaft, wenn wir uns daran erinnern, daß $\langle x | y \rangle_0$ einfach durch $x^* y$ gegeben ist.

2.4 Die Linksmultiplikation in $L^2(\mathcal{A}, P_0)$

Die reichhaltige Struktur des Wahrscheinlichkeitsraumes $(\mathcal{A}, \psi, \mathcal{A}_0)$ spiegelt sich in einigen Eigenschaften von $L^2(\mathcal{A}, P_0)$ wieder. So läßt sich die Linksmultiplikation mit Algebren-elementen auf das Hilbertmodul übertragen. Für unabhängige Elemente läßt sich sogar ein Produkt in $L^2(\mathcal{A}, P_0)$ definieren. Damit haben wir auch in nichtkommutativen Wahrscheinlichkeitsräumen die Entsprechung zu der bekannten Tatsache aus der klassischen Wahrscheinlichkeitstheorie, daß ein Produkt unabhängiger L^2 -Funktionen wieder im L^2 liegt. Gerade dieses Produkt wird uns in die Lage versetzen ein stochastisches Integral zu entwickeln.

2.4.1 Satz. \mathcal{B} und \mathcal{C} seien zwei W^* -Unteralgebren des Wahrscheinlichkeitsraumes $(\mathcal{A}, \psi, \mathcal{A}_0)$ und $P_{\mathcal{B}}$ bzw. $P_{\mathcal{C}}$ die zugehörigen bedingten Erwartungen. Dann gelten für das Hilbert- W^* -Modul $L^2(\mathcal{A}, P_0)$ folgende Eigenschaften:

$$i) P_{\mathcal{B}} L^2(\mathcal{A}, P_0) = L^2(\mathcal{B}, P_0).$$

ii) Es gibt eine Linksmultiplikation mit Elementen aus \mathcal{A} auf $L^2(\mathcal{A}, P_0)$

$$\mathcal{A} \times L^2(\mathcal{A}, P_0) \ni (a, y) \mapsto ay \in L^2(\mathcal{A}, P_0),$$

die die gewöhnliche Multiplikation auf \mathcal{A} fortsetzt und in beiden Komponenten gleichzeitig $\|\cdot\|$ -stetig und σ stop- σ stop-stetig ist, wenn die erste Komponente beschränkt bleibt. Sie definiert einen Operator aus $\mathcal{B}(L^2(\mathcal{A}, P_0))$, dessen Adjungierte die Linksmultiplikation mit α^* ist.

iii) Sind \mathcal{B} und \mathcal{C} P_0 -unabhängig, so läßt sich ein Produkt

$$L^2(\mathcal{B}, P_0) \times L^2(\mathcal{C}, P_0) \ni (x, y) \mapsto xy \in L^2(\mathcal{B} \vee \mathcal{C}, P_0) \quad (2.12)$$

erklären, das die Linksmultiplikation mit Elementen aus \mathcal{B} fortsetzt und dieselben Stetigkeitseigenschaften wie diese besitzt. Für das innere Produkt gilt:

$$\langle x_1 y_1 \mid x_2 y_2 \rangle_0 = \langle y_1 \mid \langle x_1 \mid x_2 \rangle_0 y_2 \rangle_0, \quad (2.13)$$

f.a. $x_1, x_2 \in L^2(\mathcal{B}, P_0)$, $y_1, y_2 \in L^2(\mathcal{C}, P_0)$. Darüberhinaus gilt folgende Fortschreibung der Moduleigenschaft der bedingten Erwartungen $P_{\mathcal{B}}$ bzw. $P_{\mathcal{C}}$:

$$P_{\mathcal{B}} xy = x P_0 y \quad \text{und} \quad P_{\mathcal{C}} xy = (P_0 x) y \quad (2.14)$$

für alle $x \in L^2(\mathcal{B}, P_0)$, $y \in L^2(\mathcal{C}, P_0)$.

Beweis. Im Lichte von Satz 2.3.4 sind die Punkte i) und ii) klar. Gleichung (2.13) ist für $x_i \in \mathcal{B}$, $y_i \in \mathcal{C}$, $i = 1, 2$, einfach (1.2). Sie bleibt richtig, wenn wir $y_i \in L^2(\mathcal{C}, P_0)$ wählen. Dazu müssen die y_i nur durch beschränkte Folgen aus \mathcal{C} approximiert und die Stetigkeitseigenschaften der Linksmultiplikation mit Elementen aus der Algebra sowie die Stetigkeit des inneren Produkts benutzt werden. Nun definieren wir für $x = \sigma\text{-}\lim_n x_n \in L^2(\mathcal{B}, P_0)$, $x_n \in \mathcal{B}$, und für $y \in L^2(\mathcal{C}, P_0)$ das Element

$$xy := \sigma\text{-}\lim_n x_n y. \quad (2.15)$$

Dafür müssen wir uns von der behaupteten Konvergenz überzeugen: Für eine weitere Approximation $x = \sigma\text{-}\lim_n \tilde{x}_n$ und alle $\omega \in \mathcal{A}_{0*}^+$ gilt

$$d_{\omega}((x_n - \tilde{x}_m)y) = \omega(\langle y \mid \langle x_n - \tilde{x}_m \mid x_n - \tilde{x}_m \rangle_0 y \rangle_0) \xrightarrow{m, n \rightarrow \infty} 0,$$

denn die Abbildung $L^2(\mathcal{A}, P_0) \ni x \mapsto \omega(\langle y \mid |x|^2 y \rangle_0)$ ist σ stop-stetig. Damit haben wir auch gleich die Unabhängigkeit des Produkts xy von der approximierenden Folge und die Gleichung (2.13) erhalten. Es bleibt die Stetigkeit des Produkts zu zeigen. Dazu sei $x = \sigma\text{-}\lim_{\alpha} x_{\alpha}$, $x_{\alpha} \in L^2(\mathcal{B}, P_0)$, $\|x_{\alpha}\|_0 \leq M$ und $y = \sigma\text{-}\lim_{\beta} y_{\beta}$, $y_{\beta} \in L^2(\mathcal{C}, P_0)$. Dann gilt

$$x_{\alpha} y_{\beta} - xy = (x_{\alpha} - x)(y_{\beta} - y) + (x_{\alpha} - x)y + x(y_{\beta} - y).$$

$\omega(\langle y \mid \cdot \rangle_0)$ liegt nach ii) f.a. $\omega \in \mathcal{A}_{0*}^+$ ebenfalls in \mathcal{A}_{0*}^+ . Damit läßt sich der erste Summand abschätzen:

$$\begin{aligned} d_{\omega}((x_{\alpha} - x)(y_{\beta} - y))^2 &= \omega(\langle y_{\beta} - y \mid |x_{\alpha} - x|_0^2 (y_{\beta} - y) \rangle_0) \\ &\leq \|x_{\alpha} - x\|_0^2 d_{\omega}(y_{\beta} - y)^2 \leq 4M^2 d_{\omega}(y_{\beta} - y)^2 \xrightarrow{\alpha, \beta} 0. \end{aligned}$$

Genauso verfahren wir mit dem dritten Summanden. Der zweite liefert den Ausdruck $\omega(\langle y \mid |x_{\alpha} - x|_0^2 y \rangle_0)$, der aufgrund der Stetigkeit von $\omega(\langle y \mid \cdot \rangle_0)$ ebenfalls gegen Null konvergiert. Schließlich ergeben sich die Beziehungen (2.14) aus der Definition (2.15) des Produktes xy und der σ stop-Stetigkeit der bedingten Erwartungen $P_{\mathcal{B}}$ bzw. $P_{\mathcal{C}}$ (vgl. A.1.1). \square

2.4.2 Bemerkung. Schon in der kommutativen Wahrscheinlichkeitstheorie folgt aus der paarweisen Unabhängigkeit dreier Algebren \mathcal{A} , \mathcal{B} und \mathcal{C} i.allg. nicht mehr die Unabhängigkeit von z.B. $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ und \mathcal{C} . Daher läßt sich in der allgemeinen Situation von Satz 2.4.1 die Multiplikation nicht ohne weiteres auf mehrere unabhängige Faktoren ausdehnen. Da wir aber unsere unabhängigen Unteralgebren normalerweise von der Filtrierung eines weißen Rauschens beziehen, haben wir die reichhaltigere Struktur einer solchen Filtrierung zur Verfügung: Sind die Intervalle I , J und K paarweise disjunkt (bis auf eventuelle gemeinsame Randpunkte), so sind nach Definition 1.5.6 die zugehörigen Algebren \mathcal{A}_I , \mathcal{A}_J und \mathcal{A}_L unabhängig über \mathcal{A}_0 . Falls $I \leq J \leq L$ gilt, wenn die Intervalle also in zeitlich aufsteigender Reihenfolge vorliegen, läßt sich für $I \cup J$ ein Intervall $K \supseteq I \cup J$ finden, das zu L immer noch disjunkt ist. Entsprechendes gilt für I und $J \cup L$. Insbesondere sind dann auch die Algebren $\mathcal{A}_I \vee \mathcal{A}_J \subseteq \mathcal{A}_K$ und \mathcal{A}_L bzw. \mathcal{A}_I und $\mathcal{A}_J \vee \mathcal{A}_L$ unabhängig über \mathcal{A}_0 . Für Elemente x aus $L^2(\mathcal{A}_I \vee \mathcal{A}_J, P_0)$ und z_L aus $L^2(\mathcal{A}_L, P_0)$ läßt sich also das Produkt (2.12) bilden: $xz_L \in L^2(\mathcal{A}_I \vee \mathcal{A}_J \vee \mathcal{A}_L, P_0)$. x kann aber selbst ein Produkt sein: $x = x_I y_J$, $x_I \in L^2(\mathcal{A}_I, P_0)$, $y_J \in L^2(\mathcal{A}_J, P_0)$. Mit den bisher entwickelten Methoden läßt sich nun leicht $(x_I y_J) z_L = x_I (y_J z_L)$ zeigen. Nach (2.13) gilt $P_0(x_I y_J) z_L = (P_0 x_I y_J)(P_0 z_L) = (P_0 x_I)(P_0 y_J)(P_0 z_L)$.

2.5 Eine Anwendung der Theorie: $\mathcal{A}_0 \bar{\otimes} \mathcal{H}_\varphi$

Wahrscheinlichkeitsräume $(\mathcal{A}, \psi, \mathcal{A}_0)$ in Tensorproduktform $(\mathcal{A}_0 \otimes \mathcal{C}, \psi_0 \bar{\otimes} \varphi, \mathcal{A}_0)$ gehören zu den wichtigsten Beispielen solcher Räume. Es lohnt sich daher, wenn wir einiges der bisher entwickelten Theorie nutzen, um das zugehörige Hilbert- W^* -Modul $\mathcal{A}_0 \bar{\otimes} \mathcal{H}_\varphi$ etwas genauer zu untersuchen. Wir erhalten einen Spezialfall des Tensorprodukts $\mathcal{E} \bar{\otimes} \mathcal{K}$ eines Hilbert- W^* -Moduls \mathcal{E} mit einem Hilbertraum \mathcal{K} , das uns bei der Fortsetzung stochastischer Integrale auf größere Prozeßklassen begegnen wird (vgl. 4.2.5). Es scheint daher ratsam, zunächst $\mathcal{A}_0 \bar{\otimes} \mathcal{H}_\varphi$ vorzustellen, seine Struktur aber gleich in dem allgemeineren Rahmen von $\mathcal{E} \bar{\otimes} \mathcal{K}$ zu untersuchen.

2.5.1 Die Kolmogorov-Darstellung. Die bedingte Erwartung P_0 von $\mathcal{A}_0 \otimes \mathcal{C}$ auf \mathcal{A}_0 ist vom Tensorstyp: $P_0(a \otimes y) = a\varphi(y)$, $a \in \mathcal{A}_0$, $y \in \mathcal{C}$ (wir identifizieren hier \mathcal{A}_0 mit $\mathcal{A}_0 \otimes \mathbf{1}$). Sehen wir uns das innere Produkt $\langle a_1 \otimes c_1 | a_2 \otimes c_2 \rangle_0 = a_1^* a_2 \varphi(c_1^* c_2)$ elementarer Tensoren $a_i \otimes c_i$, $a_i \in \mathcal{A}_0$, $c_i \in \mathcal{C}$, $i = 1, 2$, an, so ist klar, daß jeder Abschluß von $\mathcal{A}_0 \otimes \mathcal{C}$ zumindest das algebraische Tensorprodukt $\mathcal{A}_0 \otimes_{\text{alg}} \mathcal{H}_\varphi$ enthalten muß. Durch das innere Produkt $\langle a_1 \otimes \xi_1 | a_2 \otimes \xi_2 \rangle_0 = a_1^* a_2 \langle \xi_1 | \xi_2 \rangle$ und die Modulwirkung $(a_1 \otimes \xi) a_2 := a_1 a_2 \otimes \xi$, für $a_i \in \mathcal{A}_0$, $\xi, \xi_i \in \mathcal{H}_\varphi$, $i = 1, 2$, wird es zu einem Prä-Hilbertmodul. Seinen W^* -Abschluß bezeichnen wir mit $\mathcal{A}_0 \bar{\otimes} \mathcal{H}_\varphi$ und den C^* -Abschluß mit $\mathcal{A}_0 \otimes \mathcal{H}_\varphi$. Man sieht sofort, daß $a \otimes \xi$ als Operator in $\mathcal{B}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}_\varphi)$ ($\mathcal{H}_0 := \mathcal{H}_{\psi_0}$) aufgefaßt werden kann: $a \otimes \xi : \mathcal{H}_0 \ni \eta_0 \mapsto a\eta_0 \otimes \xi$. Lineare Fortsetzung und schwacher Abschluß führt zu einer minimalen Kolmogorov-Zerlegung des inneren Produkts $\langle | \rangle_0$ von $\mathcal{A}_0 \bar{\otimes} \mathcal{H}_\varphi$, mit dem Kolmogorov-Hilbertraum $\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}_\varphi$. Wie in 2.3.4 erhalten wir eine Darstellung des Hilbert- W^* -Moduls auf dem GNS-Hilbertraum von $(\mathcal{A}_0 \otimes \mathcal{C}, \psi_0 \bar{\otimes} \varphi)$.

Genauso gehen wir für $\mathcal{E} \bar{\otimes} \mathcal{K}$ vor. \mathcal{E} sei ein Hilbert- W^* -Modul über der von Neumann Algebra $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$, versehen mit einem inneren Produkt $\langle | \rangle_0$. Wir können $\mathcal{E} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H})$, $\overline{\mathcal{E}\mathcal{H}_0} = \mathcal{H}$ annehmen und fassen Elemente $x \otimes \xi$, $x \in \mathcal{E}$, $\xi \in \mathcal{K}$, als Operatoren in $\mathcal{B}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$ auf:

$$x \otimes \xi : \mathcal{H}_0 \ni \eta_0 \mapsto x\eta_0 \otimes \xi \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{K}.$$

Das innere Produkt auf $\mathcal{E} \bar{\otimes} \mathcal{K}$ wird für $x_1, x_2 \in \mathcal{E}$, $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{K}$ durch $\langle x_1 \otimes \xi_1 | x_2 \otimes \xi_2 \rangle := \langle x_1 | x_2 \rangle_0 \langle \xi_1 | \xi_2 \rangle$, die Modulwirkung durch $(x \otimes \xi)a_0 := xa_0 \otimes \xi$, für $x \in \mathcal{E}$, $\xi \in \mathcal{K}$, $a_0 \in \mathcal{A}_0$, erklärt.

2.5.2 Direkte Summendarstellung. Ähnlich wie beim Tensorprodukt von Hilberträumen, gibt es auch für $\mathcal{E} \bar{\otimes} \mathcal{K}$ eine Darstellung in Form einer direkten Summe. Dazu wählen wir ein vollständiges Orthonormalsystem $(\varepsilon_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von \mathcal{K} . Offensichtlich liegt $\text{lh}\{\mathcal{E} \otimes \varepsilon_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ σ stop-dicht in $\mathcal{E} \bar{\otimes} \mathcal{K}$. Wir orientieren uns nun an bekannten Hilbertraumtechniken, um für jedes $x \in \mathcal{E} \bar{\otimes} \mathcal{K}$ eine Darstellung $x = \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i \otimes \varepsilon_i$ mit σ stop-konvergenter Summe zu gewinnen. Dafür verwenden wir den Projektor $\theta_i := \mathbb{1} \otimes [\varepsilon_i] \in \mathcal{B}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$. Man macht sich schnell klar, daß θ_i in $\mathcal{L}(\mathcal{E} \bar{\otimes} \mathcal{K})$ liegt: Die \mathcal{A}_0 -Linearität ist offensichtlich, ebenso $\theta_i \mathcal{E} \otimes_{\text{alg}} \mathcal{K} \subseteq \mathcal{E} \otimes_{\text{alg}} \mathcal{K}$. Durch σ stop-Abschluß bleibt diese Inklusion erhalten (vgl. (2.10)). θ_i ist selbstadjungiert. Nun definieren wir x_i durch $x_i \otimes \varepsilon_i := \theta_i x$. Wir zeigen $x = \sigma\text{-}\lim_N \sum_{i=1}^N x_i \otimes \varepsilon_i$. Aus

$$\left| x - \sum_{i=1}^N x_i \otimes \varepsilon_i \right|^2 = |x|^2 - \sum_{i=1}^N |x_i|_0^2 \geq 0 \quad (2.16)$$

folgt $\sum_{i=1}^N |x_i|_0^2 \leq |x|^2$, also die Beschränktheit der Summe und daher die

σ stop-Konvergenz $\sigma\text{-}\lim_N \sum_{i=1}^N |x_i|_0^2 =: \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|_0^2 \leq |x|^2$ (*Besselsche Ungleichung*). Diese Ungleichung muß wegen der Vollständigkeit von $(\varepsilon_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Gleichung (die *Parsevalsche Gleichung*) werden. Die Projektoren $\Theta_N := \sum_{i=1}^N \theta_i$ konvergieren nämlich monoton gegen $\mathbb{1} \otimes \mathbb{1}$, so daß

$$\begin{aligned} \langle \xi_0 | \sum_{i=1}^N |x_i|_0^2 \eta_0 \rangle &= \sum_{i=1}^N \langle \xi_0 | \langle x | \theta_i x \rangle \eta_0 \rangle = \langle x \xi_0 | \Theta_N x \eta_0 \rangle \\ &\xrightarrow{N \rightarrow \infty} \langle x \xi_0 | x \eta_0 \rangle = \langle \xi_0 | |x|^2 \eta_0 \rangle, \end{aligned}$$

f.a. $\xi_0, \eta_0 \in \mathcal{H}_0$, das gewünschte Ergebnis zeigt. Da die linke Seite in (2.16) nun eine w^* -Nullfolge ist, erhalten wir $x = \sigma\text{-}\lim_N \sum_{i=1}^N x_i \otimes \varepsilon_i =: \sum_{i=1}^{\infty} x_i \otimes \varepsilon_i$. Die Eindeutigkeit dieser Darstellung ist klar. Wir fassen unsere Analyse zusammen:

Satz. *Das Hilbert- W^* -Modul $\mathcal{E} \bar{\otimes} \mathcal{K}$ ist isomorph zu*

$$\overline{\bigoplus_{\mathbb{N}} \mathcal{E}} := \left\{ (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{E} \mid \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|_0^2 \text{ existiert im } \sigma \text{ stop-Sinne} \right\},$$

versehen mit dem inneren Produkt $\langle (x_i)_{i \in \mathbb{N}} | (y_i)_{i \in \mathbb{N}} \rangle := \sum_{i=1}^{\infty} \langle x_i | y_i \rangle_0$ und der Modulwirkung $(x_i)_{i \in \mathbb{N}} a := (x_i a)_{i \in \mathbb{N}}$, $a \in \mathcal{A}_0$. Jedes $x \in \mathcal{E} \bar{\otimes} \mathcal{K}$ besitzt eine eindeutige Zerlegung $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \otimes \varepsilon_i$, mit $x_i := \mathbb{1} \otimes [\varepsilon_i] x \in \mathcal{E}$.

Korollar. Das Hilbert-W*-Modul $\mathcal{A}_0 \overline{\otimes} \mathcal{H}_\varphi$ zu $(\mathcal{A}_0 \otimes \mathcal{C}, \psi_0 \otimes \varphi, \mathcal{A}_0)$ ist isomorph zu

$$\overline{\bigoplus_{\mathbb{N}} \mathcal{A}_0} := \{ (\mathbf{a}_i)_{\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}_0 \mid \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{a}_i^* \mathbf{a}_i \text{ existiert im } \sigma \text{ stop-Sinne} \},$$

versehen mit dem inneren Produkt $\langle (\mathbf{a}_i)_{\mathbb{N}} \mid (\mathbf{b}_i)_{\mathbb{N}} \rangle_0 := \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{a}_i^* \mathbf{b}_i$ und der Modulwirkung $(\mathbf{a}_i)_{\mathbb{N}} \mathbf{b} := (\mathbf{a}_i \mathbf{b})_{\mathbb{N}}$, $\mathbf{b} \in \mathcal{A}_0$. Jedes $\mathbf{x} \in \mathcal{A}_0 \overline{\otimes} \mathcal{H}_\varphi$ besitzt eine eindeutige Zerlegung $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{a}_i \otimes \varepsilon_i$, mit $\mathbf{a}_i := \langle \mathbf{1} \otimes \varepsilon_i \mid \mathbf{x} \rangle_0 \in \mathcal{A}_0$.

Bemerkung. Der Abschluß von $\mathcal{A}_0 \otimes_{\text{alg}} \mathcal{H}_\varphi$ in der Norm ist das Hilbert-C*-Modul $\mathcal{A}_0 \otimes \mathcal{H}_\varphi = \{ (\mathbf{a}_i)_{\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}_0 \mid \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{a}_i^* \mathbf{a}_i \text{ existiert in der Norm} \}$ ([Lan]). An dieser Stelle läßt sich nun einfach einsehen, daß durch den w*-Abschluß von $\mathcal{A}_0 \otimes \mathcal{H}_\varphi$ zu $\mathcal{A}_0 \overline{\otimes} \mathcal{H}_\varphi$ normalerweise eine echte Erweiterung stattfindet. So liegt etwa eine Folge $(p_i)_{\mathbb{N}}$ paarweise orthogonaler Projektoren $p_i \in \mathcal{A}_0$ in $\mathcal{A}_0 \overline{\otimes} \mathcal{H}_\varphi$, nicht jedoch in $\mathcal{A}_0 \otimes \mathcal{H}_\varphi$. Natürlich stimmen beide Räume überein, wenn \mathcal{A}_0 endlichdimensional ist.

2.5.3 Zuletzt wollen wir noch den Fall $M_2 \otimes \mathcal{H}_\varphi$ vorstellen, weil hier das Modul eine besonders einprägsame Darstellung erlaubt. Elemente aus diesem Hilbertmodul können wie folgt realisiert werden:

$$M_2 \otimes \mathcal{H}_\varphi = \left\{ \begin{pmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \\ \xi_{21} & \xi_{22} \end{pmatrix} \mid \xi_{ij} \in \mathcal{H}_\varphi \right\}$$

mit der Modulwirkung

$$\begin{pmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \\ \xi_{21} & \xi_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{11} \xi_{11} + \mathbf{a}_{21} \xi_{12} & \mathbf{a}_{12} \xi_{11} + \mathbf{a}_{22} \xi_{12} \\ \mathbf{a}_{11} \xi_{21} + \mathbf{a}_{21} \xi_{22} & \mathbf{a}_{12} \xi_{21} + \mathbf{a}_{22} \xi_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_{ij} \in \mathbb{C},$$

dem inneren Produkt

$$\left\langle \begin{pmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} \\ \eta_{21} & \eta_{22} \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \\ \xi_{21} & \xi_{22} \end{pmatrix} \right\rangle_0 := \begin{pmatrix} \langle \eta_{11} \mid \xi_{11} \rangle + \langle \eta_{21} \mid \xi_{21} \rangle & \langle \eta_{11} \mid \xi_{12} \rangle + \langle \eta_{21} \mid \xi_{22} \rangle \\ \langle \eta_{12} \mid \xi_{11} \rangle + \langle \eta_{22} \mid \xi_{21} \rangle & \langle \eta_{12} \mid \xi_{12} \rangle + \langle \eta_{22} \mid \xi_{22} \rangle \end{pmatrix}$$

und für unabhängige Elemente des Moduls

$$\begin{pmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} \\ \eta_{21} & \eta_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \\ \xi_{21} & \xi_{22} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \eta_{11} \xi_{11} + \eta_{12} \xi_{21} & \eta_{11} \xi_{12} + \eta_{12} \xi_{22} \\ \eta_{21} \xi_{11} + \eta_{22} \xi_{21} & \eta_{21} \xi_{12} + \eta_{22} \xi_{22} \end{pmatrix}.$$

Dabei gehören η_{ij} und ξ_{ij} zu den GNS-Hilberträumen φ -unabhängiger Unterhalbgebren von \mathcal{C} , und mit $\eta_{ij} \xi_{kl}$ ist das Produkt im GNS-Hilbertraum \mathcal{H}_φ gemeint (das in unserer Konstruktion 2.4.1 enthalten ist, wenn wir als bedingte Erwartung den Zustand φ verwenden).

2.6 Drei Ebenen des weißen Rauschens

Mit den Ergebnissen der letzten Abschnitte haben wir nun drei Ebenen zur Verfügung, auf denen wir das weiße Rauschen betrachten können. Da ist zuerst die algebraische Ebene

$$(\mathcal{A}, \psi, S_t, (\mathcal{A}_I)_I), \tag{2.17}$$

auf der wir das Rauschen eingeführt haben. Die zweite Ebene ist die des zu $(\mathcal{A}, \psi, \mathcal{A}_0)$ gehörenden Hilbert- W^* -Moduls $L^2(\mathcal{A}, P_0)$:

$$(L^2(\mathcal{A}, P_0), \mathbf{1}, S_t, (L^2(\mathcal{A}_I, P_0))_I). \quad (2.18)$$

Nach Satz 2.3.3 lassen sich S_t und P_I mit allen wünschenswerten Stetigkeitseigenschaften auf $L^2(\mathcal{A}, P_0)$ ausdehnen und nach Satz 2.4.1 ist das zu \mathcal{A}_I gehörende Hilbert- W^* -Modul das Untermodul $L^2(\mathcal{A}_I, P_0)$. Die Unabhängigkeit der Algebren \mathcal{A}_I und \mathcal{A}_J für disjunkte Intervalle I und J drückt sich in (2.13) aus.

Als dritte Ebene haben wir noch die GNS-Darstellung

$$(L^2(\mathcal{A}, \psi), \mathbf{1}, S_t, (L^2(\mathcal{A}_I, \psi))_I). \quad (2.19)$$

Hier gilt dasselbe, was zur zweiten Ebene zu sagen war, denn der GNS-Hilbertraum ist ja das Hilbert- W^* -Modul zu $(\mathcal{A}, \psi, \mathbb{C} \cdot \mathbf{1})$. Allerdings gibt es einen entscheidenden Unterschied: Wir haben unter ψ für unabhängige Elemente keine Faktorisierungseigenschaft mehr zu erwarten. Das ist der Grund, warum das stochastische Integral nicht im \mathcal{H}_ψ entwickelt wird. Zwar läßt sich eine Integrationstheorie von $L^2(\mathcal{A}, P_0)$ in $L^2(\mathcal{A}, \psi)$ abbilden, aber das bedeutet, daß nur Prozesse zur Integration zugelassen werden können, die ursprünglich aus $L^2(\mathcal{A}, P_0)$ stammten.

3. Additive Kozyklen

3.1 Unitale Kozyklen

Wir gehen von der Hilbertmodul-Version $(L^2(\mathcal{A}, P_0), \mathbf{1}, S_t, (L^2(\mathcal{A}_I, P_0))_I)$ eines weißen Rauschens $(\mathcal{A}, \psi, S_t, (\mathcal{A}_I)_I)$ aus.

3.1.1 Definition. Wir bezeichnen eine w^* -stetige Familie $u := (u_t)_{t \geq 0} \subset L^2(\mathcal{A}, P_0)$ als unitalen Kozyklus (zum weißen Rauschen $(L^2(\mathcal{A}, P_0), \mathbf{1}, S_t, (L^2(\mathcal{A}_I, P_0))_I)$), wenn sie für alle $t, s \geq 0$ die folgenden Eigenschaften besitzt:

- i) $|u_t|_0 = \mathbf{1}$,
- ii) $u_t \in L^2(\mathcal{A}_{[0,t]}, P_0)$, (Adaptiertheit)
- iii) $u_{t+s} = (S_t u_s) u_t$. (Kozykleneigenschaft)

Ein unitärer Kozyklus (1.7.3) ist offensichtlich auch ein unitaler Kozyklus. Wie für unitäre Kozyklen folgt aus den geforderten Eigenschaften $u_0 = \mathbf{1}$: Aus ii) erhalten wir $u_0 \in \mathcal{A}_0$ und aus iii) $u_0 = u_0^2$, oder $u_0(u_0 - \mathbf{1}) = 0$. Schließlich bedeutet i) $u_0^* u_0 = \mathbf{1}$, also $u_0 - \mathbf{1} = u_0^* u_0 (u_0 - \mathbf{1}) = 0$.

Auch die σ stop-Stetigkeit läßt sich, analog zum unitären Fall, folgern. Dazu benötigen wir ein kleines Lemma, das eine technische Eigenschaft auf den Punkt bringt, die eigentlich klar ist, die wir aber in unseren Beweisen wiederholt benutzen werden.

Lemma. Eine w^* - bzw. σ stop-konvergente Folge aus $\mathcal{A}_0 P_0 \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$ ist auch in $\mathcal{B}(\mathcal{H}_\psi)$ w^* - bzw. σ stop-konvergent.

Beweis. Die Abbildung $\mathcal{A}_0 \ni a \mapsto a P_0 \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\psi)$ ist ein $*$ -Isomorphismus von \mathcal{A}_0 auf $\mathcal{A}_0 P_0$ und daher w^* - w^* - bzw. σ stop- σ stop-stetig. \square

Nun zur Stetigkeit von u . Es genügt die stop-Stetigkeit zu zeigen, da ein unitaler Kozyklus ja $\|\cdot\|_0$ -beschränkt ist. Es gilt (vgl. (2.13)):

$$\begin{aligned} \|u_{t+s} - u_t\|_0^2 &= \langle (S_t u_s) u_t - u_t \mid (S_t u_s) u_t - u_t \rangle_0 \\ &= \mathbf{1} - \langle u_t \mid \langle u_s \mid \mathbf{1} \rangle_0 u_t \rangle_0 - \langle u_t \mid \langle \mathbf{1} \mid u_s \rangle_0 u_t \rangle_0 + \mathbf{1} \\ &= \langle u_t \mid \langle \mathbf{1} - u_s \mid \mathbf{1} \rangle_0 u_t \rangle_0 + \langle u_t \mid \langle \mathbf{1} \mid \mathbf{1} - u_s \rangle_0 u_t \rangle_0, \end{aligned}$$

also wegen der vorausgesetzten w^* -Stetigkeit von u und obigem Lemma für $\xi \in \mathcal{H}_0$

$$d_\xi(u_{t+s} - u_t)^2 = \langle u_t \xi | \langle \mathbb{1} - u_s | \mathbb{1} \rangle_0 u_t \xi \rangle + \langle u_t \xi | \langle \mathbb{1} | \mathbb{1} - u_s \rangle_0 u_t \xi \rangle \xrightarrow{s \rightarrow 0} 0.$$

Diese Rechnung zeigt auch wieder, daß die Stetigkeit nur in $t = 0$ geprüft werden muß. Die Faktorisierung unabhängiger Elemente unter P_0 , die eben bewiesene Stetigkeit von u und iii) ergeben nun die erste wichtige Folgerung: Durch

$$A_t := \langle \mathbb{1} | u_t \rangle_0 = P_0 u_t = e^{Kt} \quad (3.1)$$

wird eine stark-stetige Kontraktionshalbgruppe $A := (A_t)_{t \geq 0} \subset \mathcal{A}_0$ mit einem zu \mathcal{A}_0 affilierten Generator K definiert. Für ein ξ , aus dem Definitionsbereich $D(K)$ von K und ein $\alpha' \in \mathcal{A}'_0$ gilt nämlich $\alpha' K \xi = \lim_{t \searrow 0} \frac{1}{t} (A_t - \mathbb{1}) \alpha' \xi$, woraus $\alpha' \xi \in D(K)$ und $\alpha' K \xi = K \alpha' \xi$ folgt. Das bedeutet $\alpha' K \subseteq K \alpha'$ für alle $\alpha' \in \mathcal{A}'_0$, also gerade die Affiliertheit von K zu \mathcal{A}_0 .

A ist genau dann $\|\cdot\|$ -stetig, wenn u $\|\cdot\|_0$ -stetig ist. Das liegt an folgender Abschätzung:

$$\begin{aligned} \|A_t - \mathbb{1}\|^2 &= \| |\langle \mathbb{1} | u_t - \mathbb{1} \rangle_0|^2 \| \leq \| |u_t - \mathbb{1}|_0^2 \| = \| u_t - \mathbb{1} \|_0^2 \\ &= \| \mathbb{1} - \langle u_t | \mathbb{1} \rangle_0 - \langle \mathbb{1} | u_t \rangle_0 + \mathbb{1} \| \\ &\leq \| A_t - \mathbb{1} \| + \| A_t^* - \mathbb{1} \|. \end{aligned}$$

Die zweite wichtige Folgerung ist, daß durch $R_t(x) := \langle u_t | x u_t \rangle_0$, $x \in \mathcal{A}_0$, eine punktweise w^* -stetige Kontraktionshalbgruppe $R := (R_t)_{t \geq 0}$ auf \mathcal{A}_0 definiert wird. Die Stetigkeit folgt sofort aus der σ stop-Stetigkeit von u und den Stetigkeitseigenschaften von $\langle \cdot | \cdot \rangle_0$. Die Halbgruppeneigenschaft ist, wie nicht anders zu erwarten, eine Folge von (2.13): Für alle $x \in \mathcal{A}_0$ haben wir

$$R_{t+s}(x) = \langle (S_t u_s) u_t | x (S_t u_s) u_t \rangle_0 = \langle u_t | \langle u_s | x u_s \rangle_0 u_t \rangle_0 = R_t \circ R_s(x).$$

Ist u $\|\cdot\|_0$ -stetig, so ist R $\|\cdot\|$ -stetig. Das ergibt sich völlig analog zum Fall unitärer Kozyklen in 1.7.4. Wir stellen unsere Überlegungen in folgendem Satz zusammen:

3.1.2 Satz. *Ein unitaler Kozyklus $u \subset L^2(\mathcal{A}, P_0)$ definiert über $A_t := P_0 u_t$ eine stark-stetige Kontraktionshalbgruppe aus \mathcal{A}_0 , die genau dann $\|\cdot\|$ -stetig ist, wenn u $\|\cdot\|_0$ -stetig ist. Durch $R_t := \langle u_t | \cdot u_t \rangle_0$ wird eine vollständig positive, punktweise w^* -stetige $\mathbb{1}$ -erhaltende Kontraktionshalbgruppe auf \mathcal{A}_0 erklärt, die für $\|\cdot\|_0$ -stetiges u $\|\cdot\|$ -stetig ist.*

Nachdem wir in 3.2 die Konstruktion additiver Kozyklen aus unitalen behandelt haben, werden wir die in 3.4.3 gewonnenen Ergebnisse nutzen, um den Generator von R anzugeben.

3.1.3 Proposition. *Für $r, s, t \geq 0$ und $\alpha \in \mathcal{A}_0$ gilt:*

- i) $\langle S_r u_s | \alpha u_t \rangle_0 = R_s(\alpha A_{t-r-s}) A_r, \quad 0 \leq s \leq t - r,$
- ii) $\langle S_r u_s | \alpha u_t \rangle_0 = R_{t-r}(A_{s-t+r}^* \alpha) A_r, \quad 0 \leq t - r \leq s.$

Beweis.

$t - r \geq 0$:

$$\begin{aligned} \langle S_r u_s \mid a u_t \rangle_0 &= \langle S_r u_s \mid (S_r a u_{t-r}) u_r \rangle_0 \stackrel{(2.13)}{=} \langle \mathbb{1} \mid \langle u_s \mid a u_{t-r} \rangle_0 u_r \rangle_0 \\ &= \langle u_s \mid a u_{t-r} \rangle_0 A_r. \end{aligned} \quad (*)$$

$0 \leq s \leq t - r$:

$$\begin{aligned} \langle S_r u_s \mid a u_t \rangle_0 &\stackrel{(*)}{=} \langle u_s \mid a (S_s u_{t-r-s}) u_s \rangle_0 A_r \stackrel{(2.13)}{=} \langle u_s \mid a \langle \mathbb{1} \mid u_{t-r-s} \rangle_0 u_s \rangle_0 A_r \\ &= R_s (a A_{t-r-s}) A_r. \end{aligned}$$

$0 \leq t - r \leq s$:

$$\begin{aligned} \langle S_r u_s \mid a u_t \rangle_0 &\stackrel{(*)}{=} \langle (S_{t-r} u_{s-(t-r)}) u_{t-r} \mid a u_{t-r} \rangle_0 A_r \stackrel{(2.13)}{=} \langle u_{t-r} \mid A_{s-t+r}^* a u_{t-r} \rangle_0 A_r \\ &= R_{t-r} (A_{s-t+r}^* a) A_r. \end{aligned} \quad \square$$

3.2 Die Standardkonstruktion

Versehen mit den Ergebnissen des vorigen Abschnittes können wir uns nun daran machen, das in 1.9.2 an einem einfachen Beispiel vorgestellte Programm zur Konstruktion additiver Kozyklen durchzuführen. Wir gehen von einem $\|\cdot\|_0$ -stetigen unitalen Kozyklus u mit $A_t := P_0 u_t = e^{Kt}$ aus.

3.2.1 Proposition. *Für einen unitalen Kozyklus $u \in L^2(\mathcal{A}, P_0)$ existiert*

$$b_t := \|\cdot\|_0\text{-}\lim_{\mathcal{Z} \in \mathcal{Z}(t)} \sum_{i=0}^{n_{\mathcal{Z}}-1} S_{t_i} u_{t_{i+1}-t_i} - A_{t_{i+1}-t_i} \in L^2(\mathcal{A}_{[0,t]}, P_0). \quad (3.2)$$

Dabei ist $\mathcal{Z} := \{t_i \geq 0 \mid 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n_{\mathcal{Z}}} = t\}$ eine Zerlegung des Intervalls $[0, t]$ mit der Feinheit $\delta_{\mathcal{Z}} := \max\{|t_{i+1} - t_i| \mid i = 0, \dots, n_{\mathcal{Z}} - 1\}$. $\mathcal{Z}(t)$ ist ein Netz von Zerlegungen des Intervalls $[0, t]$, dessen Feinheit gegen Null konvergiert. Seine Halbordnung ist durch Inklusion gegeben: $\mathcal{Z} \succeq \mathcal{W}$, falls $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{Z}$, für $\mathcal{Z}, \mathcal{W} \in \mathcal{Z}(t)$.

Der Grenzwert b_t ist unabhängig von dem verwendeten Netz.

Beweis. Wir setzen

$$c_{\mathcal{Z}}(t) := \sum_{i=0}^{n_{\mathcal{Z}}-1} S_{t_i} u_{t_{i+1}-t_i} - A_{t_{i+1}-t_i}. \quad (3.3)$$

Wir zeigen, daß $(c_{\mathcal{Z}}(t))_{\mathcal{Z} \in \mathcal{Z}(t)}$ in $L^2(\mathcal{A}, P_0)$ ein $\|\cdot\|_0$ -Cauchy-Netz ist. Für $\mathcal{Z}, \mathcal{W} \in \mathcal{Z}(t)$ bezeichne $\mathcal{Z}\mathcal{W}$ die gemeinsame Verfeinerung von \mathcal{Z} und \mathcal{W} . Wegen

$$\|c_{\mathcal{Z}}(t) - c_{\mathcal{W}}(t)\|_0 \leq \|c_{\mathcal{Z}}(t) - c_{\mathcal{Z}\mathcal{W}}(t)\|_0 + \|c_{\mathcal{W}}(t) - c_{\mathcal{Z}\mathcal{W}}(t)\|_0 \quad (3.4)$$

genügt es, $\|c_{\mathcal{Z}}(t) - c_{\mathcal{Z}\mathcal{W}}(t)\|_0^2$ zu untersuchen, und für diesen Ausdruck wiederum ist $\langle c_{\mathcal{Z}}(t) | c_{\mathcal{Z}\mathcal{W}}(t) \rangle_0$ maßgebend. Für die Partition $\mathcal{Z}\mathcal{W}$ seien $t_i + s_{i,j}$, $j = 1, \dots, n^i - 1$ die zusätzlichen Teilungspunkte im Intervall $[t_i, t_{i+1}]$. Wir setzen $v_s := u_s - A_s$ für $s \in [0, t]$, $s_{i,0} := 0$ und $s_{i,n^i} := t_{i+1} - t_i$.

$$\begin{aligned}
\langle c_{\mathcal{Z}}(t) | c_{\mathcal{Z}\mathcal{W}}(t) \rangle_0 &= \sum_{i=0}^{n_{\mathcal{Z}}-1} \sum_{k=0}^{n_{\mathcal{Z}}-1} \sum_{j=0}^{n^k-1} \langle S_{t_i} v_{t_{i+1}-t_i} | S_{t_k+s_{k,j}} v_{s_{k,j+1}-s_{k,j}} \rangle_0 \\
&= \sum_{i=0}^{n_{\mathcal{Z}}-1} \sum_{j=0}^{n^i-1} \langle u_{t_{i+1}-t_i} - A_{t_{i+1}-t_i} | S_{s_{i,j}} u_{s_{i,j+1}-s_{i,j}} - A_{s_{i,j+1}-s_{i,j}} \rangle_0 \\
&= \sum_{i=0}^{n_{\mathcal{Z}}-1} \sum_{j=0}^{n^i-1} \langle u_{t_{i+1}-t_i} | S_{s_{i,j}} u_{s_{i,j+1}-s_{i,j}} \rangle_0 - A_{t_{i+1}-t_i}^* A_{s_{i,j+1}-s_{i,j}} \\
&= \sum_{i=0}^{n_{\mathcal{Z}}-1} \sum_{j=0}^{n^i-1} A_{s_{i,j}}^* R_{s_{i,j+1}-s_{i,j}} (A_{t_{i+1}-t_i-s_{i,j+1}}^*) - A_{t_{i+1}-t_i}^* A_{s_{i,j+1}-s_{i,j}},
\end{aligned}$$

denn $s_{i,j+1} - s_{i,j} \leq t_{i+1} - t_i - s_{i,j}$ erlaubt die Anwendung von Proposition 3.1.3, i),

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{n_{\mathcal{Z}}-1} \sum_{j=0}^{n^i-1} A_{s_{i,j}}^* (R_{s_{i,j+1}-s_{i,j}} - \text{id}) (A_{t_{i+1}-t_i-s_{i,j+1}}^* - \mathbb{1}) \\
&\quad + \sum_{i=0}^{n_{\mathcal{Z}}-1} \sum_{j=0}^{n^i-1} A_{(t_{i+1}-t_i)-(s_{i,j+1}-s_{i,j})}^* (\mathbb{1} - A_{s_{i,j+1}-s_{i,j}}^* A_{s_{i,j+1}-s_{i,j}})
\end{aligned}$$

Diese beiden Summanden werden getrennt untersucht. Zunächst folgt aus der Normstetigkeit der Halbgruppen $(R_t)_{t \geq 0}$ und $(A_t)_{t \geq 0}$ die Existenz einer Zahl $M > 0$ mit

$$\|R_t - \text{id}\| \leq M \cdot t, \quad \|A_t - \mathbb{1}\| \leq M \cdot t, \quad \|A_t^* A_t - \mathbb{1}\| \leq M \cdot t.$$

Damit läßt sich der erste Summand folgendermaßen abschätzen:

$$\begin{aligned}
&\left\| \sum_{i=0}^{n_{\mathcal{Z}}-1} \sum_{j=0}^{n^i-1} A_{s_{i,j}}^* (R_{s_{i,j+1}-s_{i,j}} - \text{id}) (A_{t_{i+1}-t_i-s_{i,j+1}}^* - \mathbb{1}) \right\| \\
&\leq M^2 \cdot \sum_{i=0}^{n_{\mathcal{Z}}-1} \sum_{j=0}^{n^i-1} (s_{i,j+1} - s_{i,j}) (t_{i+1} - t_i - s_{i,j+1}) \\
&\leq M^2 \cdot \sum_{i=0}^{n_{\mathcal{Z}}-1} \sum_{j=0}^{n^i-1} (s_{i,j+1} - s_{i,j}) (t_{i+1} - t_i) \\
&= M^2 \cdot \sum_{i=0}^{n_{\mathcal{Z}}-1} (t_{i+1} - t_i)^2 \leq M^2 \cdot \delta_{\mathcal{Z}} \sum_{i=0}^{n_{\mathcal{Z}}-1} t_{i+1} - t_i
\end{aligned}$$

$$= M^2 \cdot \delta_Z \cdot t \leq M^2 \cdot \max\{\delta_Z, \delta_W\} \cdot t.$$

Der zweite konvergiert gegen $-t \cdot (K + K^*) =: t \cdot \Lambda$:

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{i=0}^{n_Z-1} \sum_{j=0}^{n^i-1} A_{(t_{i+1}-t_i)-(s_{i,j+1}-s_{i,j})}^* (\mathbf{1} - A_{s_{i,j+1}-s_{i,j}}^* A_{s_{i,j+1}-s_{i,j}}) - t \cdot \Lambda \right\| \\ & \leq \sum_{i=0}^{n_Z-1} \sum_{j=0}^{n^i-1} \left\| A_{(t_{i+1}-t_i)-(s_{i,j+1}-s_{i,j})}^* - \mathbf{1} \right\| \cdot \left\| \mathbf{1} - A_{s_{i,j+1}-s_{i,j}}^* A_{s_{i,j+1}-s_{i,j}} \right\| \\ & \quad + \sum_{i=0}^{n_Z-1} \sum_{j=0}^{n^i-1} \left\| \frac{\mathbf{1} - A_{s_{i,j+1}-s_{i,j}}^* A_{s_{i,j+1}-s_{i,j}}}{s_{i,j+1} - s_{i,j}} - \Lambda \right\| \cdot (s_{i,j+1} - s_{i,j}) \\ & \leq \sum_{i=0}^{n_Z-1} \sum_{j=0}^{n^i-1} M^2 \cdot ((t_{i+1} - t_i) - (s_{i,j+1} - s_{i,j})) \cdot (s_{i,j+1} - s_{i,j}) \\ & \quad + \sum_{i=0}^{n_Z-1} \sum_{j=0}^{n^i-1} \varepsilon \cdot (s_{i,j+1} - s_{i,j}) \\ & \leq \sum_{i=0}^{n_Z-1} \sum_{j=0}^{n^i-1} M^2 (t_{i+1} - t_i) (s_{i,j+1} - s_{i,j}) + \varepsilon \cdot t \\ & = \sum_{i=0}^{n_Z-1} M^2 (t_{i+1} - t_i)^2 + \varepsilon \cdot t \\ & \leq (M^2 \cdot \delta_Z + \varepsilon) \cdot t \leq (M^2 \cdot \max\{\delta_Z, \delta_W\} + \varepsilon) \cdot t. \end{aligned}$$

Dabei wurde $\left\| \frac{1-A_{\delta}^* A_{\delta}}{\delta} - \Lambda \right\| \leq \varepsilon$ für alle $0 < \delta \leq \delta_{\varepsilon}$, mit geeignetem $\delta_{\varepsilon} > 0$, benutzt und angenommen, daß $\max\{\delta_Z, \delta_W\} < \delta_{\varepsilon}$ erfüllt ist. Für alle Zerlegungen $Z, W \in \mathcal{Z}(t)$ mit $\max\{\delta_Z, \delta_W\} < \min\{\delta_{\varepsilon}, \varepsilon\}$ erhalten wir somit

$$\left\| \langle c_Z(t) | c_{ZW}(t) \rangle_0 - \Lambda \cdot t \right\| \leq \varepsilon \cdot (2M^2 + 1) \cdot t, \quad (3.5)$$

also

$$\begin{aligned} \|c_Z(t) - c_{ZW}(t)\|_0^2 & \leq \| \langle c_Z(t) | c_Z(t) \rangle_0 - \Lambda \cdot t \| + \| \langle c_Z(t) | c_{ZW}(t) \rangle_0 - \Lambda \cdot t \| \\ & \quad + \| \langle c_{ZW}(t) | c_Z(t) \rangle_0 - \Lambda \cdot t \| + \| \langle c_{ZW}(t) | c_{ZW}(t) \rangle_0 - \Lambda \cdot t \| \\ & \leq 4\varepsilon \cdot (2M^2 + 1) \cdot t. \end{aligned}$$

Dieselbe Abschätzung ergibt sich natürlich auch für $\|c_W(t) - c_{ZW}(t)\|_0^2$, so daß

$$\|c_Z(t) - c_W(t)\|_0^2 \leq 16\varepsilon \cdot (2M^2 + 1) \cdot t$$

für alle Zerlegungen $Z, W \in \mathcal{Z}(t)$ mit $Z, W \succeq Z_{\varepsilon} \in \mathcal{Z}(t)$ gilt, sobald Z_{ε} eine Zerlegung mit einer Feinheit kleiner als $\min\{\delta_{\varepsilon}, \varepsilon\}$ ist. Damit ist $(c_Z(t))_{Z \in \mathcal{Z}(t)}$ ein Cauchy-Netz mit einem Grenzelement $b_t := \|\cdot\|_0\text{-}\lim_{Z \in \mathcal{Z}(t)} c_Z(t) \in L^2(\mathcal{A}, P_0)$.

Die Unabhängigkeit von b_t von dem verwendeten Netz $\mathcal{Z}(t)$ kann leicht mit Hilfe der Abschätzung (3.4) eingesehen werden. \square

3.2.2 Die Kozykleneigenschaft. Aus zwei Netzen $\mathcal{Z}(s)$ und $\mathcal{Z}(t)$ von Zerlegungen des Intervalls $[0, s]$ bzw. $[0, t]$ wie in Proposition 3.2.1 definieren wir auf folgende Weise ein Netz $\mathcal{Z}(s + t)$ von Zerlegungen für das Intervall $[0, s + t]$: Für $\mathcal{Z}_s := \{s_i \geq 0 \mid 0 = s_0 < s_1 < \dots < s_{n_s} = s\} \in \mathcal{Z}(s)$ sei $t + \mathcal{Z}_s$ die Zerlegung $\{t + s_i \mid 0 = s_0 < s_1 < \dots < s_{n_s} = s\}$ des Intervalls $[t, t + s]$. Für jede Paar $(\mathcal{Z}_t, \mathcal{Z}_s)$ von Zerlegungen $\mathcal{Z}_t \in \mathcal{Z}(t)$ und $\mathcal{Z}_s \in \mathcal{Z}(s)$ definieren wir durch $\mathcal{Z} := \mathcal{Z}_t \cup (t + \mathcal{Z}_s) = \{t_i \geq 0 \mid 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n_t} = t\} \cup \{t + s_i \mid 0 = s_0 < s_1 < \dots < s_{n_s} = s\}$ ein Element des Netzes $\mathcal{Z}(t + s)$. Die Feinheit dieses Netzes strebt offensichtlich gegen Null. Wir erhalten:

$$c_{\mathcal{Z}}(t + s) = \sum_{i=0}^{n_t-1} S_{t_i}(v_{t_{i+1}-t_i}) + \sum_{i=0}^{n_s-1} S_{t+s_i}(v_{s_{i+1}-s_i}) = c_{\mathcal{Z}_t}(t) + S_t c_{\mathcal{Z}_s}(s).$$

Aus der in 3.2.1 bewiesenen Netzkonvergenz von $(c_{\mathcal{Z}}(t + s))_{\mathcal{Z} \in \mathcal{Z}(t+s)}$, $(c_{\mathcal{Z}_t}(t))_{\mathcal{Z}_t \in \mathcal{Z}(t)}$ und $(c_{\mathcal{Z}_s}(s))_{\mathcal{Z}_s \in \mathcal{Z}(s)}$ gegen b_{t+s} , b_t bzw. b_s erhalten wir die Kozyklengleichung für $b := (b_t)_{t \geq 0} \subset L^2(\mathcal{A}, P_0)$:

$$b_{t+s} = b_t + S_t b_s, \quad t, s \geq 0. \quad (3.6)$$

Nach Gleichung (3.5) ist

$$\lim_{\mathcal{Z} \in \mathcal{Z}(t)} |c_{\mathcal{Z}}(t)|_0^2 = |b_t|_0^2 = t \cdot \Lambda = -t(K + K^*). \quad (3.7)$$

Daher ergibt sich die $\|\cdot\|_0$ -Stetigkeit von $t \mapsto b_t$ aus

$$|b_t - b_s|_0^2 = |S_{|t-s|} b_{|t-s|}|_0^2 = |b_{|t-s|}|_0^2 = |t - s| \cdot \Lambda.$$

Hier wurde die Kozykleneigenschaft (3.6) und die Unitarität von S_t auf $L^2(\mathcal{A}, P_0)$ benutzt. b_t ist zentriert, denn v_s ist es:

$$\langle \mathbb{1} | b_t \rangle_0 = \|\cdot\|_0 \lim_{\mathcal{Z} \in \mathcal{Z}(t)} \sum_{i=0}^{n_{\mathcal{Z}}-1} \langle \mathbb{1} | v_{t_{i+1}-t_i} \rangle_0 = 0.$$

Für b gilt der ‘Satz des Pythagoras’ in folgender Form:

$$|b_{t+s}|_0^2 = (t + s) \cdot \Lambda = t \cdot \Lambda + s \cdot \Lambda = |b_t|_0^2 + |b_s|_0^2.$$

Wir fassen diese Eigenschaften zur Definition eines additiven Kozyklus zusammen.

3.2.3 Definition. Eine Familie $\beta := (\beta_t)_{t \geq 0} \subset L^2(\mathcal{A}, P_0)$ heißt additiver Kozyklus (zum weißen Rauschen $(L^2(\mathcal{A}, P_0), \mathbb{1}, S_t, (L^2(\mathcal{A}_I, P_0))_I)$), wenn sie folgende Eigenschaften besitzt:

- i) $\beta_t \in L^2(\mathcal{A}_{[0,t]}, P_0)$, (Adaptiertheit)
- ii) $\beta_{t+s} = \beta_t + S_t \beta_s$, (Kozykleneigenschaft)
- iii) $t \mapsto \beta_t$ ist σ stop-stetig.

Hierbei ist $s, t \geq 0$. Gilt zusätzlich $\langle \mathbb{1} | \beta_t \rangle_0 = 0$, so nennen wir den Kozyklus zentriert.

Wir werden uns im nächsten Abschnitt davon überzeugen, daß diese Eigenschaften die ‘wesentlichen’ sind, d.h., daß durch sie die Ergebnisse aus 3.2.2 reproduziert werden können.

3.2.4 Durch die Konstruktion (3.2) haben wir also aus einem $\|\cdot\|_0$ -stetigen unitalen Kozyklus u mit zugehöriger Kontraktionshalbgruppe $A_t = P_0 u_t = e^{Kt}$ einen zentrierten additiven Kozyklus b mit $|b_t|_0^2 = -(K + K^*)t$ gewonnen. Eine kleine Abwandlung dieser Konstruktion ergibt einen nichtzentrierten additiven Kozyklus β :

$$\beta_t := \|\cdot\|_0\text{-}\lim_{Z \in Z(t)} \sum_{i=0}^{n_Z-1} S_{t_i} (u_{t_{i+1}-t_i} - \mathbb{1}), \quad (3.8)$$

denn die beiden Ansätze (3.2) und (3.8) unterscheiden sich nur durch den Term $\sum_{i=0}^{n_Z-1} A_{t_{i+1}-t_i} - \mathbb{1}$, von dem leicht einzusehen ist, daß er in der Norm gegen $K \cdot t$ konvergiert. Der Zusammenhang zwischen dem zentrierten Kozyklus b und dem nicht zentrierten β besteht demnach in $\beta_t = b_t + Kt$.

Die Konstruktion (3.2) bzw. (3.8) werden wir von jetzt an als *Standardkonstruktion* bezeichnen.

3.3 Beispiele zur Standardkonstruktion

In diesem Abschnitt wollen wir die Standardkonstruktion mit einfachen unitären Kozyklen zum klassischen und dem Poissonschen weißen Rauschen illustrieren.

3.3.1 Wir überlegen uns zunächst, auf welche Ausdrücke wir stoßen, wenn wir versuchen, den additiven Kozyklus b zu identifizieren, der zur Standardkonstruktion bzgl. eines unitären Kozyklus u gehört. Da die Konvergenz der Standardkonstruktion gesichert ist, benutzen wir für (3.2) eine ‘ 2^n -Zerlegung’ des Intervalls $[0, t]$, wie in (1.9):

$$S_n(t) = \sum_{i=0}^{2^n-1} [S_{i\delta_n} u_{\delta_n} - A_{\delta_n}],$$

mit $\delta_n := t \cdot 2^{-n}$, $A_t := P_0 u_t = e^{Kt}$. Abzuschätzen ist der folgende Ausdruck:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=0}^{2^n-1} [S_{i\delta_n} u_{\delta_n} - A_{\delta_n}] - b_t \right|_0^2 &= \left| \sum_{i=0}^{2^n-1} S_{i\delta_n} (u_{\delta_n} - A_{\delta_n} - b_{\delta_n}) \right|_0^2 \\ &= \sum_{i=0}^{2^n-1} \mathbb{1} - A_{\delta_n}^* A_{\delta_n} + \delta_n |b_1|_0^2 - 2 \operatorname{Re} \langle u_{\delta_n} | b_{\delta_n} \rangle_0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Die Summe der ersten drei Ausdrücke konvergiert gegen $-(K + K^*)t + |b_1|_0^2 t$. Der letzte Summand $\langle u_{\delta_n} | b_{\delta_n} \rangle_0$ und $|b_1|_0^2$ müssen konkret ausgerechnet werden.

3.3.2 Die Brownsche Bewegung. Wir starten mit dem unitären Kozyklus $u_t := e^{i\lambda B_t} \in L^\infty(S', \Sigma, \mu)$, mit dem Brownschen Bewegungsprozeß $(B_t)_{t \geq 0} \subset L^2(S', \Sigma, \mu)$ aus dem einführenden Abschnitt 1.9.2. P_0 ist durch den Erwartungswert $\mathbb{E}(\cdot)$ bzgl. dem Bochner-Minlos-Maß μ gegeben ($\mathcal{A}_0 = \mathbb{C} \cdot \mathbf{1}$). Als Ergebnis der Standardkonstruktion bzgl. u vermuten wir $b_t := i\lambda B_t$. Dann ist $|b_1|_0^2 = \lambda^2 \mathbb{E}(B_1^2) = \lambda^2$ und $A_t = e^{-\lambda^2 t/2}$, d.h. $K = -\frac{\lambda^2}{2}$. Den letzten Summanden in (3.9) erhalten wir folgendermaßen:

$$\langle u_t | b_t \rangle_0 = i\lambda \mathbb{E}(e^{-iB_t} B_t) = -\frac{d}{ds} \mathbb{E}(e^{-is\lambda B_t}) \Big|_{s=1} = -\frac{d}{ds} e^{-s^2 \frac{\lambda^2 t}{2}} \Big|_{s=1} = \lambda^2 t e^{-\frac{\lambda^2 t}{2}}.$$

Damit konvergiert (3.9) gegen $-(\frac{\lambda^2}{2} - \frac{\lambda^2}{2})t + \lambda^2 t - 2\lambda^2 t \lim_n e^{-\lambda^2 \delta_n/2} = 0$. Unsere Vermutung erweist sich somit als richtig.

3.3.3 Der Poisson-Prozeß. Mit Hilfe des zentrierten Poisson-Prozesses $Y_t := X_t - \lambda t$ der Intensität $\lambda > 0$ und Sprunghöhe 1 (vgl. 1.5.2) bilden wir mit beliebigem $\alpha \in \mathbb{R}$ die unitären Kozyklen $u_t := e^{i\alpha Y_t}$ und $v_t := e^{i\alpha X_t}$. Diese Beispiele zeigen, daß wir mit den Vermutungen über das Ergebnis b der Standardkonstruktion etwas vorsichtig sein müssen: Anders als im Fall der Brownschen Bewegung erhalten wir nicht etwa $i\alpha Y_t$, sondern in beiden Beispielen $b_t = (e^{i\alpha} - 1)Y_t$. Dabei ist nicht bemerkenswert, daß die Kozyklen u und v denselben additiven Kozyklus liefern, denn sie unterscheiden sich ja nur um einen Phasenfaktor $e^{-i\alpha \lambda t}$, der bei der Standardkonstruktion nur in dem harmlosen gemeinsamen Faktor $e^{-i\alpha \lambda \delta_n}$ zu Buche schlägt. An diesem Beispiel wird vielmehr deutlich, daß die Standardkonstruktion bzgl. v normalerweise nicht $b_t = i\alpha Y_t$ liefern darf: Wir müssen für α nur 2π wählen, um $v_t = 1$ und damit $b_t = 0$ zu erhalten.

Wir können den Beweis für den behaupteten Grenzwert $b_t = (e^{i\alpha} - 1)Y_t$ direkt führen, nach dem gleichen Schema, wie in 3.3.1 vorgezeichnet und werden das unten auch tun. Da aber der klassische Poisson-Prozeß einen solch übersichtlichen Pfadraum besitzt, haben wir hier die Chance, die Standardkonstruktion pfadweise verstehen zu können. Wir beginnen mit v :

$$A_t = \mathbb{E}(e^{i\alpha X_t}) = e^{(e^{i\alpha} - 1)\lambda t} =: e^{Kt}.$$

Damit erhalten wir $\omega \in \Omega$:

$$\begin{aligned} S_n(t)(\omega) &= \sum_{k=0}^{2^n-1} S_{k\delta_n}(e^{i\alpha X_{\delta_n}} - e^{K\delta_n})(\omega) = \sum_{k=0}^{2^n-1} e^{i\alpha X_{(k+1)\delta_n} - i\alpha X_{k\delta_n}}(\omega) - 2^n e^{K\delta_n} \\ &= \sum_{k=0}^{2^n-1} e^{i\alpha(\omega_{(k+1)\delta_n} - \omega_{k\delta_n})} - t\delta_n^{-1} e^{K\delta_n}. \end{aligned}$$

Die Summe enthält für fast alle $\omega \in \Omega$ und für genügend großes $n \in \mathbb{N}$ nur Summanden, für die zwischen $k\delta_n$ und $(k+1)\delta_n$ genau eine, oder keine Sprungstelle von ω liegt. Die erstgenannten summieren sich also zu $e^{i\alpha} X_t(\omega)$. Ergänzen wir das zu $(e^{i\alpha} - 1) X_t(\omega)$, so ergibt die restliche Summe genau $t\delta_n^{-1}(1 - e^{K\delta_n})$. Zusammengenommen erhalten wir:

$$(e^{i\alpha} - 1) X_t(\omega) + t\delta_n^{-1}(1 - e^{K\delta_n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty}$$

$$(e^{i\alpha} - 1) X_t(\omega) - Kt = (e^{i\alpha} - 1)(X_t(\omega) - \lambda t) = (e^{i\alpha} - 1) Y_t(\omega).$$

Nun die direkte Methode nach 3.3.1 für u : $A_t = \mathbb{E}(e^{i\alpha Y_t}) = e^{(e^{i\alpha} - i\alpha - 1)\lambda t} =: e^{Kt}$, so daß $-(K + K^*)t = 2\lambda t(1 - \cos(\alpha)) = \lambda t|e^{i\alpha} - 1|^2$. Für den vermuteten Grenzwert $b_t := (e^{i\alpha} - 1) Y_t$ gilt $|b_t|_0^2 = \mathbb{E}(b_t^* b_t) = \lambda t|e^{i\alpha} - 1|^2$ und

$$\begin{aligned} \langle u_t | b_t \rangle_0 &= \mathbb{E}(e^{-i\alpha Y_t} Y_t)(e^{i\alpha} - 1) = i \frac{d}{ds} \mathbb{E}(e^{-is Y_t}) \Big|_{s=\alpha} (e^{i\alpha} - 1) \\ &= \lambda t |e^{i\alpha} - 1|^2 \cdot e^{K^* t}. \end{aligned}$$

Damit konvergiert (3.9) gegen $2\lambda t|e^{i\alpha} - 1|^2 - 2\lambda t|e^{i\alpha} - 1|^2 \operatorname{Re} \lim_n e^{K^* \delta_n} = 0$.

Bemerkung. In 6.1 führen wir die Standardkonstruktion zu einem unitären Kozyklus des verallgemeinerten Poissonschen weißen Rauschens aus Abschnitt 1.8 durch.

3.4 Eigenschaften additiver Kozyklen

3.4.1 Stetigkeit. Wir untersuchen zunächst die Stetigkeit zentrierter additiver Kozyklen $b := (b_t)_{t \geq 0}$. Es wird sich herausstellen, daß für sie die in 3.2.3 geforderte Stetigkeit automatisch erfüllt ist, ja daß sogar $\|\cdot\|_0$ -Stetigkeit vorliegt. Die Ursache dafür ist die sog. *Martingaleigenschaft* von b :

$$P_{(-\infty, t]} b_{t+s} = b_t$$

f.a. $t, s \geq 0$. Diese kann wegen der stochastischen Unabhängigkeit von $L^2(\mathcal{A}_{[t, \infty)}, P_0)$ und $L^2(\mathcal{A}_{(-\infty, t]}, P_0)$ leicht folgendermaßen eingesehen werden: $P_{(-\infty, t]} b_{t+s} = b_t + P_{(-\infty, t]} P_{[t, \infty)} S_t b_s = b_t + P_0 b_s = b_t$. Nach Lemma 1.4.3 und Satz 2.3.3 ist die Abbildung $t \mapsto P_{(-\infty, t]}$ punktweise σ stop-stetig. Daher folgt aus

$$b_{t+s} = P_{(-\infty, t+s]} b_{t+s} \xrightarrow[\sigma \text{ stop}]{s \rightarrow 0} P_{(-\infty, t]} b_{t+s} = b_t \quad (3.10)$$

zunächst die σ stop-Stetigkeit von b . Für die behauptete $\|\cdot\|_0$ -Stetigkeit zeigen wir etwas mehr, als wir im Augenblick benötigen. Wir stellen damit, bei nur geringem Mehraufwand, ein Ergebnis bereit, das wir später für die Entwicklung des stochastischen Integrals brauchen werden (vgl. (4.3), (4.4)). Dazu sei $c := (c_t)_{t \geq 0}$ ein weiterer zentrierter Kozyklus. Für jedes $t \geq 0$ definieren wir durch $\mathcal{A}_0 \ni a \mapsto \langle b_t | a c_t \rangle_0$ eine lineare Abbildung Γ_t auf \mathcal{A}_0 . Mit der Kozyklengleichung und der Zentriertheit von b bzw. c erhalten wir $\langle b_t | a S_t c_s \rangle_0 = \langle b_t | \mathbf{1} \rangle_0 \langle \mathbf{1} | a c_s \rangle_0 = 0$ und damit

$$\begin{aligned} \Gamma_{t+s}(a) &= \langle b_{t+s} | a c_{t+s} \rangle_0 = \langle b_t + S_t b_s | a(c_t + S_t c_s) \rangle_0 = \langle b_t | a c_t \rangle_0 + \langle b_s | a c_s \rangle_0 \\ &= \Gamma_t(a) + \Gamma_s(a). \end{aligned}$$

Für alle $\omega \in \mathcal{A}_{0^*}$ ergibt sich daraus die stetige Funktionalgleichung $\omega(\Gamma_{t+s}(a)) = \omega(\Gamma_t(a)) + \omega(\Gamma_s(a))$ (denn nach unseren obigen Überlegungen ist $t \mapsto \Gamma_t(a)$ w^* -stetig), die bekanntlich die einzige Lösung $\omega(\Gamma_t(a)) = t \cdot \omega(\Gamma_1(a))$ besitzt. Da $\omega \in \mathcal{A}_{0^*}$ die

Punkte in \mathcal{A}_0 trennt, folgt $\Gamma_t(a) = \Gamma_1(a) \cdot t$ für alle $a \in \mathcal{A}_0$. Die $\|\cdot\|_0$ -Stetigkeit von b erhalten wir nun einfach für $a = \mathbb{1}$ und $c = b$ aus $|b_t|_0^2 = |b_1|_0^2 \cdot t$.

Einen nichtzentrierten additiven Kozyklus β spalten wir auf: $\beta_t =: b_t + P_0\beta_t$. $t \mapsto b_t$ ist $\|\cdot\|_0$ - und $t \mapsto P_0\beta_t$ σ stop-stetig. Dieselbe Argumentation wie für b ergibt $P_0\beta_t = K \cdot t$, mit $K := P_0\beta_1 \in \mathcal{A}_0$. Damit ist also auch β $\|\cdot\|_0$ -stetig.

Es sei an dieser Stelle bemerkt, daß für nichtzentrierte additive Kozyklen auf die Stetigkeitsforderung iii) in 3.2.3 nicht verzichtet werden kann. Man braucht ja nur eine nichtstetige Lösung der Funktionalgleichung $f(t+s) = f(t) + f(s)$ durch $\beta_t := f(t) \cdot \mathbb{1}$ zu einem additiven Kozyklus zu machen, um einzusehen, daß die Stetigkeit im nichtzentrierten Fall keine Folgerung aus den übrigen Eigenschaften des Kozyklus' ist.

Schließlich sind die Abbildungen $\mathcal{A}_0 \ni a \mapsto \Lambda(a) = b_t^* a b_t$ und $\mathcal{A}_0 \ni a \mapsto \Gamma(a) = b_t^* a c_t$ w^* - w^* -stetig (vgl. Satz 2.3.4).

Wir fixieren unsere Überlegungen in folgender Proposition:

3.4.2 Proposition. *Ein additiver Kozyklus β ist $\|\cdot\|_0$ -stetig und läßt sich gemäß $\beta_t = b_t + K \cdot t$, $K \in \mathcal{A}_0$, in einen zentrierten und einen nichtstochastischen additiven Kozyklus b_t bzw. $K \cdot t$ aufspalten. Für einen weiteren zentrierten additiven Kozyklus c und alle $a \in \mathcal{A}_0$ folgt mit der w^* - w^* -stetigen, vollständig beschränkten Abbildung $\Gamma := \langle b_1 | \cdot c_1 \rangle_0$ und der w^* - w^* -stetigen, vollständig positiven Abbildung $\Lambda := \langle b_1 | \cdot b_1 \rangle_0$ für alle $a \in \mathcal{A}_0$:*

$$\langle b_t | a c_t \rangle_0 = \Gamma(a) \cdot t, \quad (3.11)$$

$$\langle b_t | a b_t \rangle_0 = \Lambda(a) \cdot t. \quad (3.12)$$

3.4.3 Der Generator von R. Mit den Techniken aus 3.2 sind wir nun in der Lage, den Lindblad-Generator L der Halbgruppe $R_t := \langle u_t | \cdot u_t \rangle_0$, die aus einem $\|\cdot\|_0$ -stetigen unitalen Kozyklus u gebildet wird, mit dem gemäß 3.2.1 zu u gehörenden additiven Kozyklus b in Verbindung zu bringen. Dazu bestimmen wir die Abbildung Λ aus Proposition 3.4.2. Die Netzkonvergenz in Proposition 3.2.1 erlaubt es uns dabei, eine einfache, nämlich äquidistante Zerlegungsfolge $\mathcal{Z}_n := \{i\delta_n \mid \delta_n := 2^{-n}t, i = 0, \dots, 2^n\} \in \mathcal{Z}(t)$ von $[0, t]$ in der Standardkonstruktion (3.2) zu verwenden:

$$\begin{aligned} \Lambda(a) \cdot t = \langle b_t | a b_t \rangle_0 &= \lim_n \sum_{i,j=0}^{2^n-1} \langle S_{i\delta_n}(u_{\delta_n} - A_{\delta_n}) | a S_{j\delta_n}(u_{\delta_n} - A_{\delta_n}) \rangle_0 \\ &= \lim_n \sum_{i=0}^{2^n-1} \langle u_{\delta_n} - A_{\delta_n} | a(u_{\delta_n} - A_{\delta_n}) \rangle_0 \\ &= \lim_n \frac{1}{\delta_n} (R_{\delta_n}(a) - a + a - A_{\delta_n}^* a A_{\delta_n}) \cdot t \\ &= (L(a) - K^* a - a K) \cdot t. \end{aligned}$$

Damit ist der Generator L durch

$$\mathcal{A}_0 \ni a \mapsto L(a) = \Lambda(a) + K^* a + a K, \quad (3.13)$$

gegeben. Aus $L(\mathbb{1}) = 0$ ergibt sich $\Lambda(\mathbb{1}) = |b_1|_0^2 = -(K + K^*) \geq 0$.

3.4.4 Das Ergebnis dieses Kapitels können wir nun wie folgt zusammenfassen:

Theorem. Ein $\|\cdot\|_0$ -stetiger unitaler Kozyklus $u \in L^2(\mathcal{A}, P_0)$, mit zugehöriger Kontraktionshalbgruppe $A_t := P_0 u_t = e^{Kt}$, definiert durch die Standardkonstruktionen

$$\beta_t := \|\cdot\|_0\text{-}\lim_{Z \in \mathcal{Z}(t)} \sum_{i=0}^{n_Z-1} S_{t_i} u_{t_{i+1}-t_i} - \mathbb{1}, \quad (3.14)$$

bzw.

$$b_t := \|\cdot\|_0\text{-}\lim_{Z \in \mathcal{Z}(t)} \sum_{i=0}^{n_Z-1} S_{t_i} u_{t_{i+1}-t_i} - A_{t_{i+1}-t_i} \quad (3.15)$$

einen additiven, bzw. einen zentrierten additiven Kozyklus $\beta \in L^2(\mathcal{A}, P_0)$ bzw. $b \in L^2(\mathcal{A}, P_0)$. β und b hängen über $\beta_t = b_t + K \cdot t$ zusammen. Darüberhinaus gilt $\|b_t\|_0^2 = -(K + K^*) \cdot t$.

Durch $R_t = \langle u_t | \cdot u_t \rangle_0$ wird auf \mathcal{A}_0 eine $\|\cdot\|_0$ -stetige $\mathbb{1}$ -erhaltende Kontraktionshalbgruppe definiert, deren Lindblad-Generator L durch

$$L(a) = \Lambda(a) + K^*a + aK, \quad a \in \mathcal{A}_0, \quad (3.16)$$

mit $\Lambda := \langle b_1 | \cdot b_1 \rangle_0$ gegeben ist.

3.4.5 Für eine spätere Anwendung (Lemma 4.5.4) stellen wir nun noch ein technisches Ergebnis bereit.

Lemma. \mathfrak{b} sei der additive Kozyklus zu einem unitalen Kozyklus \mathfrak{u} gemäß der Standardkonstruktion. Dann gilt mit $A_t := P_0 \mathfrak{u}_t$ und $\Lambda := \langle \mathfrak{b}_1 | \cdot \mathfrak{b}_1 \rangle_0$:

$$\langle \mathfrak{b}_t | \mathfrak{a} \mathfrak{u}_t \rangle_0 = \int_0^t \Lambda(\mathfrak{a} A_{t-s}) A_s \, ds, \quad \mathfrak{a} \in \mathcal{A}_0. \quad (3.17)$$

Beweis. Für $0 \leq s \leq t-r$ und $\mathfrak{a} \in \mathcal{A}_0$ gilt nach Proposition 3.1.3, i) mit $R_t := \langle \mathfrak{u}_t | \cdot \mathfrak{u}_t \rangle_0$:

$$\langle S_r \mathfrak{u}_s | \mathfrak{a} \mathfrak{u}_t \rangle_0 = R_s(\mathfrak{a} A_{t-r-s}) A_r.$$

Der Lindblad-Generator von $(R_t)_{t \geq 0}$ ist durch (3.16) gegeben. Wir verwenden für die Standardkonstruktion (3.15) dieselbe ‘ 2^{-n} -Zerlegung’ wie in 3.4.3 und erhalten:

$$\begin{aligned} \langle \mathfrak{b}_t | \mathfrak{a} \mathfrak{u}_t \rangle_0 &= \|\|_0\text{-}\lim_n \sum_{i=0}^{2^n-1} \langle S_{i\delta_n} \mathfrak{u}_{\delta_n} - A_{\delta_n} | \mathfrak{a} \mathfrak{u}_t \rangle_0 \\ &= \|\|_0\text{-}\lim_n \sum_{i=0}^{2^n-1} \left[R_{\delta_n}(\mathfrak{a} A_{t-(i+1)\delta_n}) A_{i\delta_n} - A_{\delta_n}^* \mathfrak{a} A_{\delta_n} \right] \\ &= \|\|_0\text{-}\lim_n \sum_{i=0}^{2^n-1} \left[\frac{R_{\delta_n} - \text{id}}{\delta_n} - L \right] (\mathfrak{a} A_{t-(i+1)\delta_n}) A_{i\delta_n} \cdot \delta_n \\ &\quad + \|\|_0\text{-}\lim_n \sum_{i=0}^{2^n-1} L(\mathfrak{a} A_{t-(i+1)\delta_n}) A_{i\delta_n} \cdot \delta_n \\ &\quad + \|\|_0\text{-}\lim_n t \cdot \left[\mathfrak{a} \frac{A_{t-\delta_n} - A_t}{\delta_n} + \frac{\mathbf{1} - A_{\delta_n}^*}{\delta_n} \mathfrak{a} A_t \right] \\ &= \int_0^t L(\mathfrak{a} A_{t-s}) A_s \, ds - t \cdot (\mathfrak{a} K + K^* \mathfrak{a}) A_t \\ &\stackrel{(3.16)}{=} \int_0^t \Lambda(\mathfrak{a} A_{t-s}) A_s \, ds + t \cdot K^* \mathfrak{a} A_t \\ &\quad + \int_0^t \mathfrak{a} A_{t-s} K A_s \, ds - t \cdot (\mathfrak{a} K + K^* \mathfrak{a}) A_t \\ &= \int_0^t \Lambda(\mathfrak{a} A_{t-s}) A_s \, ds. \quad \square \end{aligned}$$

4. Stochastische Integration in Hilbertmoduln

Wir haben in den beiden vorangehenden Kapiteln das Handwerkszeug bereitgestellt, das es uns nun ermöglicht, die stochastischen Integrale im Hilbertmodul $L^2(\mathcal{A}, P_0)$ zum weißen Rauschen $(L^2(\mathcal{A}, P_0), \mathbb{1}, S_t, (L^2(\mathcal{A}_I, P_0))_I)$ einzuführen. Dabei verwenden wir das erprobte Verfahren, zunächst das Integral einfacher Prozesse zu definieren und es anschließend einer Fortsetzungsprozedur zu unterziehen. Wir haben dabei versucht, ungeachtet der im folgenden tatsächlich benötigten Prozesse, möglichst die maximale Prozeßklasse zu finden, auf die das stochastische Integral fortsetzbar ist, um auf diese Weise die Leistungsfähigkeit unseres Integrals auszuloten. Anschließend führen wir den Begriff *stochastische Differentialgleichung* (SDGL) ein und beweisen einen Existenz- und Eindeigkeitssatz für ihre Lösung. Das führt schließlich zum zentralen Ergebnis in Abschnitt 4.5 dieses Kapitels – der kanonischen Korrespondenz zwischen unitalen und additiven Kozyklen.

4.1 Das stochastische Integral von Treppenfunktionen

4.1.1 Zentrierter Integrator. Der Integrator der stochastischen Integrale ist zunächst ein zentrierter additiver Kozyklus $b \subset L^2(\mathcal{A}, P_0)$. Als Integranden wählen wir $L^2(\mathcal{A}, P_0)$ -wertige adaptierte Funktionen – *Prozesse* – d.h. Abbildungen x von \mathbb{R}_0^+ in $L^2(\mathcal{A}, P_0)$ mit der Eigenschaft

$$\mathbb{R}_0^+ \ni s \mapsto x_s \in L^2(\mathcal{A}_{(-\infty, s]}, P_0)$$

(vgl. auch die Bemerkung in 1.4.3). Natürlich müssen für solche Prozesse noch Stetigkeits- oder Meßbarkeitsforderungen verlangt werden, aber das wird erst im zweiten Konstruktionsschritt (der Fortsetzung) aktuell. Zunächst betrachten wir nur *einfache Prozesse*, d.h. adaptierte Treppenfunktionen x :

$$[0, T] \ni s \mapsto x_s := \sum_{i=0}^{n_z-1} x_{t_i} \cdot \chi_{[t_i, t_{i+1})}(s),$$

mit $x_{t_i} \in L^2(\mathcal{A}_{(-\infty, t_i]}, P_0)$ und einer Zerlegung $\mathcal{Z} := \{t_i \mid 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n_z} = T\}$ des Intervalls $[0, T]$, mit endlichem $T > 0$. Das Inkrement $b_{t_{i+1}} - b_{t_i} = S_{t_i} b_{t_{i+1}-t_i}$ des Integrators ist in die Zukunft gerichtet, d.h. unabhängig von x_{t_i} . Der nichtkommutativen Situation Rechnung tragend, definieren wir nun – unter Verwendung des Produkts $(b_{t_{i+1}} -$

$b_{t_i} x_{t_i}$ bzw. $x_{t_i} (b_{t_{i+1}} - b_{t_i})$ in $L^2(\mathcal{A}, P_0)$ der unabhängigen Elemente $b_{t_{i+1}} - b_{t_i}$ und x_{t_i} (vgl. Satz 2.4.1, iii) – ein *Links-* und ein *Rechtsintegral* des einfachen Prozesses x und des Integrators b über $[0, T]$ durch

$$\int_0^T db_t x_t := \sum_{i=0}^{n_z-1} (b_{t_{i+1}} - b_{t_i}) x_{t_i}, \quad (4.1)$$

bzw.

$$\int_0^T x_t db_t := \sum_{i=0}^{n_z-1} x_{t_i} (b_{t_{i+1}} - b_{t_i}). \quad (4.2)$$

Man macht sich leicht klar, daß diese Definition nicht von der speziellen Zerlegung \mathcal{Z} für x abhängt. Das Integral von x über ein Teilintervall $[s, t]$ von $[0, T]$ läßt sich dann kanonisch durch Integration des einfachen Prozesses $x \cdot \chi_{[s,t]}$ über $[0, T]$, wie oben vorgestellt, erklären. Es ist Routine, sich von den elementaren Eigenschaften des Integrals, wie Linearität und Additivität in den Integrationsgrenzen zu überzeugen. Nach Satz 2.4.1, iii), sind die Funktionen $t \mapsto \int_s^t db_r x_r$ und $t \mapsto \int_s^t x_r db_r$, $t \geq s$, adaptiert: $\int_s^t db_r x_r, \int_s^t x_r db_r \in L^2(\mathcal{A}_{(-\infty, t]}, P_0)$, d.h. es handelt sich wieder um Prozesse. Wegen $P_0(b_{t_{i+1}} - b_{t_i})x_{t_i} = P_0(b_{t_{i+1}} - b_{t_i})P_0x_{t_i} = 0 = P_0x_{t_i}(b_{t_{i+1}} - b_{t_i})$ sind sie auch zentriert.

Die wohl wichtigsten Eigenschaften sind die beiden folgenden ‘Isometriebeziehungen’: y sei ein weiterer einfacher Prozeß (o.B.d.A. mit demselben Träger wie x). Dann gilt für das Linksintegral

$$\begin{aligned} \left\langle \int_0^T db_t x_t \mid \int_0^T db_t y_t \right\rangle_0 &= \sum_{i>j \geq 0}^{n_z-1} \left\langle \underbrace{(b_{t_{i+1}} - b_{t_i}) x_{t_i}}_{\in L^2(\mathcal{A}_{[t_i, \infty)}, P_0)} \mid \underbrace{(b_{t_{j+1}} - b_{t_j}) y_{t_j}}_{\in L^2(\mathcal{A}_{(-\infty, t_j]}, P_0)} \right\rangle_0 \\ &+ \sum_{0 \leq i < j}^{n_z-1} \left\langle \underbrace{(b_{t_{i+1}} - b_{t_i}) x_{t_i}}_{\in L^2(\mathcal{A}_{(-\infty, t_j]}, P_0)} \mid \underbrace{(b_{t_{j+1}} - b_{t_j}) y_{t_j}}_{\in L^2(\mathcal{A}_{[t_j, \infty)}, P_0)} \right\rangle_0 \\ &+ \sum_{i=0}^{n_z-1} \left\langle (b_{t_{i+1}} - b_{t_i}) x_{t_i} \mid (b_{t_{i+1}} - b_{t_i}) y_{t_i} \right\rangle_0 \\ &\stackrel{(2.13)}{=} \sum_{i>j \geq 0}^{n_z-1} \left\langle x_{t_i} \mid \langle b_{t_{i+1}} - b_{t_i} \mid \mathbb{1} \rangle_0 (b_{t_{j+1}} - b_{t_j}) y_{t_j} \right\rangle_0 \\ &+ \sum_{0 \leq i < j}^{n_z-1} \left\langle (b_{t_{i+1}} - b_{t_i}) x_{t_i} \mid \langle \mathbb{1} \mid b_{t_{j+1}} - b_{t_j} \rangle_0 y_{t_j} \right\rangle_0 \\ &+ \sum_{i=0}^{n_z-1} \left\langle x_{t_i} \mid |b_{t_{i+1}} - b_{t_i}|_0^2 y_{t_i} \right\rangle_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\stackrel{(3.12)}{=} \sum_{i=0}^{n_z-1} \langle x_{t_i} | \Lambda(\mathbb{1}) y_{t_i} \rangle_0 \cdot (t_{i+1} - t_i) \\
&= \int_0^T \langle x_t | \Lambda(\mathbb{1}) y_t \rangle_0 dt, \tag{4.3}
\end{aligned}$$

mit Λ nach (3.12). Für das Rechtsintegral ergibt sich mit derselben Argumentationsweise

$$\begin{aligned}
\left\langle \int_0^T x_t db_t \middle| \int_0^T y_t db_t \right\rangle_0 &= \sum_{i=0}^{n_z-1} \langle b_{t_{i+1}} - b_{t_i} | \langle x_{t_i} | y_{t_i} \rangle_0 (b_{t_{i+1}} - b_{t_i}) \rangle_0 \\
&\stackrel{(3.12)}{=} \sum_{i=0}^{n_z-1} \Lambda(\langle x_{t_i} | y_{t_i} \rangle_0) \cdot (t_{i+1} - t_i) \\
&= \int_0^T \Lambda(\langle x_t | y_t \rangle_0) dt. \tag{4.4}
\end{aligned}$$

Diese ‘Isometriebeziehungen’ stellen den Ausgangspunkt für die Fortsetzung der stochastischen Integrale auf größere Prozeßklassen dar.

4.2 Modulwertige L^2 -Theorie

Für die Ausdehnung des stochastischen Integrals benötigen wir eine Hilbert- W^* -Modulwertige L^2 -Theorie, wie die Isometriebeziehungen (4.3) und (4.4) deutlich machen – also eine Theorie $L^2(\mathcal{A}, P_0)$ -wertiger, adaptierter Funktionen $J \ni t \mapsto x_t \in L^2(\mathcal{A}, P_0)$, $J \subseteq \mathbb{R}$, für die in geeigneter Weise ein Integral $\int_J |x_t|_0^2 dt \in \mathcal{A}_0$ erklärt ist. Da wir von unseren Prozessen nur das Verhalten in endlichen Zeitabschnitten untersuchen, genügt es, wenn wir eine lokale L^2 -Theorie entwickeln, also für J nur kompakte Intervalle zulassen.

Hier stellen wir zunächst die ‘eigentliche’ L^2 -Theorie modulwertiger Funktionen bereit, ohne Adaptiertheit für die integrierbaren Funktionen zu verlangen. Daher können wir von einem allgemeinen Hilbert- W^* -Modul $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}) \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H})$ über einer von Neumann Algebra $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$ mit innerem Produkt $\langle \cdot | \cdot \rangle_0$ ausgehen. Natürlich werden die Hilberträume $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}$ und der Prädual von \mathcal{A}_0 wieder als separabel vorausgesetzt. $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei eine VONB von \mathcal{H}_0 . Darüberhinaus treffen wir folgende generellen Vereinbarungen für diesen Abschnitt: Meßbarkeit bezieht sich im folgenden immer auf das Lebesgue-Maß auf J . $\mathcal{L}^2(J, \mathcal{H})$ ist der Raum der über J quadratintegrierbaren, \mathcal{H} -wertigen Funktionen und $L^2(J, \mathcal{H}) \cong L^2(J) \otimes \mathcal{H}$ der Hilbertraum der Restklassen von Funktionen, die sich nur auf Nullmengen unterscheiden. Elemente von Restklassen kennzeichnen wir durch ein hochgestelltes $\tilde{\cdot}$ und die Restklasse einer \mathcal{L}^2 -Funktion f durch $[f]$. Für das innere Produkt verwenden wir in beiden Räumen $\langle \cdot | \cdot \rangle_2$. Wir unterscheiden bei seiner Anwendung auf Elemente dieser Räume also nicht zwischen einer Funktion und ihrer Restklasse.

4.2.1 Definition. Eine \mathcal{E} -wertige Funktion $\tilde{x} : J \ni t \mapsto \tilde{x}_t \in \mathcal{E}$ heißt meßbar, wenn die Funktionen $\tilde{x}\xi_0 : J \ni t \mapsto \tilde{x}_t \xi_0 \in \mathcal{H}$ für alle $\xi_0 \in \mathcal{H}_0$ meßbar sind. Sie heißt

L^2 -integrierbar, falls $\tilde{x}\xi_0$ für alle $\xi_0 \in \mathcal{H}_0$ in $\mathcal{L}^2(J, \mathcal{H})$ liegt. $\mathcal{L}^2(J, \mathcal{E})$ bezeichne den Vektorraum der \mathcal{E} -wertigen, L^2 -integrierbaren Funktionen.

4.2.2 Eigenschaften und Folgerungen. Da \mathcal{H}_0 separabel ist, unterscheiden sich zwei meßbare Funktionen \tilde{x} und \tilde{y} , für die $[\tilde{x}\xi_0] = [\tilde{y}\xi_0]$ f.a. $\xi_0 \in \mathcal{H}_0$ gilt, höchstens auf einer Nullmenge. Der Beweis dieser Eigenschaft kann wörtlich aus [Ta1], IV, Proposition 7.13 übernommen werden. Damit ist die Restklasse von \tilde{x} durch die Funktionen $\tilde{x}\xi_0$, $\xi_0 \in \mathcal{H}_0$, bereits eindeutig festgelegt. Die Meßbarkeit von \tilde{x} überträgt sich auf die Funktion $\tilde{x}^+ : J \ni t \mapsto \tilde{x}_t^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}_0)$, die aus \tilde{x} durch punktweises Adjungieren entsteht: Für alle $\xi \in \mathcal{H}$ gilt $\tilde{x}_t^*\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \tilde{x}_t \varepsilon_n | \xi \rangle \varepsilon_n$, d.h. $\tilde{x}^*\xi$ ist als punktweiser Grenzwert der meßbaren Funktionen $(\sum_{n=1}^N \langle \tilde{x}_t \varepsilon_n | \xi \rangle \varepsilon_n)_{N \in \mathbb{N}}$ ebenfalls meßbar. Ist $\tilde{\xi} : J \ni t \mapsto \tilde{\xi}_t \in \mathcal{H}$ eine meßbare Funktion, so ist auch $\tilde{x}^*\tilde{\xi} : J \ni t \mapsto \tilde{x}_t^*\tilde{\xi}_t$ wieder meßbar ([Ta1], IV, Lemma 7.5). Insbesondere ist für eine weitere meßbare Funktion \tilde{y} und für jedes $\xi_0 \in \mathcal{H}_0$ die Funktion $\tilde{y}^+\tilde{x}\xi_0 : J \ni t \mapsto \tilde{y}_t^*\tilde{x}_t\xi_0 = \langle \tilde{y}_t | \tilde{x}_t \rangle_0 \xi_0$ meßbar. Damit handelt es sich bei $\langle \eta_0 | \tilde{y}^+\tilde{x}\xi_0 \rangle : J \ni t \mapsto \langle \eta_0 | \langle \tilde{y}_t | \tilde{x}_t \rangle_0 \xi_0 \rangle$ für jede Wahl von $\xi_0, \eta_0 \in \mathcal{H}$ um eine L^1 -Funktion, wenn wir \tilde{x} und \tilde{y} als L^2 -integrierbar voraussetzen.

Lemma. Jede L^2 -integrierbare Funktion \tilde{x} definiert über $\chi : \mathcal{H}_0 \ni \xi_0 \mapsto [\tilde{x}\xi_0]$ einen Operator $\chi \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_0, L^2(J, \mathcal{H}))$.

Beweis. Der Beweis ist, ähnlich wie bei Lemma A.3.6, eine Anwendung des Satzes vom abgeschlossenen Graphen: Ist $(\xi_0^n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{H}_0$ eine Nullfolge und $(\chi\xi_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ L^2 -konvergent gegen $\eta \in L^2(J, \mathcal{H})$, so gibt es eine Teilfolge $(\xi_0^{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, für die außerhalb einer gemeinsamen Nullmenge $\lim_k \tilde{x}_t \xi_0^{n_k} = \tilde{\eta}_t$ gilt. Aufgrund der Stetigkeit von \tilde{x}_t folgt $\tilde{\eta}_t = 0$ für fast alle $t \in J$, d.h. $\eta = 0$. Als überall definierter abschließbarer Operator ist χ beschränkt. \square

4.2.3 Definition. Ein Operator $\chi \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_0, L^2(J, \mathcal{H}))$ heißt zerlegbar, wenn er durch eine $\mathcal{B}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H})$ -wertige, L^2 -integrierbare Funktion \tilde{x} gemäß Lemma 4.2.2 gegeben ist. Den Vektorraum der zerlegbaren Operatoren bezeichnen wir mit $L^2(J, \mathcal{E})$.

Diese Definition macht Sinn, denn zwei Funktionen \tilde{x} und \tilde{y} , die denselben Operator χ erzeugen, unterscheiden sich nur auf einer Nullmenge. Daher ist es gerechtfertigt, wenn wir von nun an eine L^2 -integrierbare Funktion $(x_t)_{t \in J}$ mit dem zugehörigen zerlegbaren Operator χ identifizieren. Die Wirkung von χ^* auf eine L^2 -Funktion $\xi \in L^2(J, \mathcal{H})$ wird durch das schwache Integral $\int_J x_t^* \xi_t dt \in \mathcal{H}_0$ wiedergegeben.

4.2.4 Für jedes Funktional $\omega_0 := \sum_{n=1}^N \langle \xi_0^n | \cdot \rangle \xi_0^n \in \mathcal{A}_{0^*,1}^+$ ist $\omega_0 \circ (\mathbf{y}^+\chi)$ eine L^1 -Funktion mit Norm

$$\begin{aligned} \|\omega_0 \circ (\mathbf{y}^+\chi)\|_1 &= \int_J |\omega_0(\langle \mathbf{y}_t | x_t \rangle_0)| dt \leq \sum_{n=1}^N \int_J |\langle \mathbf{y}_t \xi_0^n | x_t \xi_0^n \rangle| dt \\ &\leq \sum_{n=1}^N \|\mathbf{y} \xi_0^n\|_2 \|x \xi_0^n\|_2 \leq \|\mathbf{y}\| \|\chi\| \sum_{n=1}^N \|\xi_0^n\|^2 \leq \|\mathbf{y}\| \|\chi\|. \end{aligned}$$

Da solche Funktionale in $\mathcal{A}_{0^*,1}^+$ dicht liegen, folgt nach Lemma A.3.7, daß es sich bei y^*x um eine w^* - L^1 -integrierbare, \mathcal{A}_0 -wertige Funktion handelt. Nach Lemma A.3.6 gilt $\int_J \langle y_t | x_t \rangle_0 dt \in \mathcal{A}_0$, wobei das Integral im w^* -Sinn zu verstehen ist. Wegen $\langle \eta_0 | y^*x\xi_0 \rangle_2 = \int_J \langle \eta_0 | y_t^*x_t\xi_0 \rangle dt = \int_J \langle \eta_0 | \langle y_t | x_t \rangle_0 \xi_0 \rangle dt$ für alle $\xi_0, \eta_0 \in \mathcal{H}_0$, folgt

$$y^*x = \int_J \langle y_t | x_t \rangle_0 dt \in \mathcal{A}_0. \quad (4.5)$$

Diese Gleichung legt es nahe, den Raum $L^2(J, \mathcal{E})$ zu einem Hilbertmodul über \mathcal{A}_0 zu machen und (4.5) als inneres Produkt zu verwenden. Dem steht aber die eigentümliche Schwierigkeit entgegen, daß $L^2(J, \mathcal{E})$ kein Hilbert- W^* -Modul, ja noch nicht einmal ein Hilbert- C^* -Modul ist: $L^2(J, \mathcal{E})$ ist weder in der Topologie, die durch die Halbnormen $\int_J |\omega(|x_t|_0^2)| dt$, $\omega \in \mathcal{A}_{0^*}$, erzeugt wird und der σ stop-Topologie auf $\mathcal{B}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H})$ entspricht, noch in der Normtopologie von $\mathcal{B}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H})$ Folgen-vollständig (vgl. das Gegenbeispiel in A.4). Natürlich bleibt immer noch der Weg, $L^2(J, \mathcal{E})$ in der σ stop-Topologie abzuschließen, und dabei in Kauf zu nehmen, den Raum um Elemente zu erweitern, die nicht mehr als Funktionen angesehen werden können. Wir wollen ihn beschreiten, indem wir $L^2(J, \mathcal{E})$ dicht in das Hilbert- W^* -Modul $\mathcal{E} \bar{\otimes} L^2(J)$ einbetten (vgl. 2.5). Das hat den Vorteil, daß für dieses Modul eine konkrete Darstellung vorhanden ist (vgl. 2.5.2) und daß die für unsere Anwendung, nämlich die Fortsetzung stochastischer Integrale, so wichtige Approximierbarkeit durch Treppenfunktionen mit der Einbettung praktisch schon erledigt ist.

4.2.5 Die Einbettung. Wir zeigen, daß $L^2(J, \mathcal{E}) \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H}_0, L^2(J, \mathcal{H})) \cong \mathcal{B}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H} \otimes L^2(J))$ in $\mathcal{E} \bar{\otimes} L^2(J) \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H} \otimes L^2(J))$ enthalten ist. Zu diesem Zweck müssen wir nach Korollar 2.2.7 für alle $x \in L^2(J, \mathcal{E})$ und alle $y \in \mathcal{E} \bar{\otimes} L^2(J)$ nur $y^*x \in \mathcal{A}_0$ nachweisen. Da y eine σ stop-konvergente Reihenentwicklung $y = \sum_{n=1}^{\infty} z_n \otimes \varepsilon_n$, $z_n \in \mathcal{E}$, besitzt, wenn wir eine VONB $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ für $L^2(J)$ wählen, führen wir das zunächst für elementare Tensoren $z \otimes f$, $z \in \mathcal{E}$, $f \in L^2(J)$, durch. Aber $z \otimes f$ liegt offensichtlich in $L^2(J, \mathcal{E})$, so daß nach (4.5)

$$(z \otimes f)^*x = \int_J \overline{f(t)} \langle z | x_t \rangle_0 dt \in \mathcal{A}_0$$

sofort folgt. Daraus ergibt sich das Gewünschte: $y^*x = w^*\text{-}\lim_N \sum_{n=1}^N (z_n \otimes \varepsilon_n)^*x \in \mathcal{A}_0$.

Da die elementaren Tensoren in $\mathcal{E} \bar{\otimes} L^2(J)$ σ stop-total liegen, ist $L^2(J, \mathcal{E})$ in diesem Raum σ stop-dicht. Damit ist nun leicht einzusehen, daß jedes Element $x \in L^2(J, \mathcal{E})$ und damit auch jede Funktion $x \in L^2(J, \mathcal{E})$ durch eine Folge von Treppenfunktionen in dieser Topologie approximierbar ist, denn es genügt, wenn die Tensoren $z \otimes f$ approximiert werden können. Aus der Theorie des gewöhnlichen Lebesgue-Integrals wissen wir das für die Funktion f . Sie ist der L^2 -Grenzwert einer Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ \mathbb{C} -wertiger Treppenfunktionen f_n , die auf J punktweise fast überall gegen f konvergieren. Diese Eigenschaft überträgt sich auf $(z \otimes f_n)_{n \in \mathbb{N}}$: $\|z \otimes (f - f_n)\| = \|z\|_0 \|f - f_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ und (o.B.d.A.) $zf_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} zf(t)$ fast überall in der Norm auf \mathcal{E} .

Proposition. *Der Vektorraum der L^2 -integrierbaren, \mathcal{E} -wertigen Funktionen $L^2(J, \mathcal{E})$ liegt σ stop-dicht in dem Hilbert- W^* -Modul $\mathcal{E} \bar{\otimes} L^2(J)$. Insbesondere läßt sich jede Funktion in $L^2(J, \mathcal{E})$ in dieser Topologie durch Treppenfunktionen approximieren.*

Natürlich lassen sich alle Elemente aus $\mathcal{E} \bar{\otimes} L^2(J)$ durch Treppenfunktionen approximieren. Da es sich bei diesen aber nicht immer um Funktionen handeln muß, ist diese Aussage für uns nicht von so großer Bedeutung, wie die Tatsache, daß alle Elemente in diesem Raum, die sich als Funktionen auffassen lassen, durch Treppenfunktionen approximierbar sind.

4.3 Die Fortsetzung des Integrals

$\tilde{\Lambda}^2(\mathcal{A}, J) := L^2(\mathcal{A}, P_0) \bar{\otimes} L^2(J)$, dessen inneres Produkt durch $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\Lambda}$ bezeichnet sei, ist das Hilbert- W^* -Modul, in dem wir die Klasse der integrierbaren Prozesse abschließen wollen. Dafür bilden wir den Projektor $\mathcal{P} := (P_{(-\infty, t]})_{t \in J}$, der $\tilde{\Lambda}^2(\mathcal{A}, J)$ auf das *adaptierte Untermodul* $\Lambda^2(\mathcal{A}, J) := \mathcal{P} \tilde{\Lambda}^2(\mathcal{A}, J)$ projiziert. Anschließend zeigen wir, daß sich jedes seiner Elemente durch adaptierte Treppenfunktionen approximieren läßt. Diese Eigenschaft ist entscheidend dafür, daß wir unseren Integralbegriff von den einfachen Prozessen auf größere Prozeßklassen fortsetzen können.

4.3.1 Adaptiertheit. Wir haben bisher den Begriff ‘Adaptiertheit’ nur zur Charakterisierung einer bestimmten Eigenschaft additiver bzw. unitaler Kozyklen benutzt (vgl. 3.1.1, 3.2.3). Zur Beschreibung der Prozeßklasse, auf die wir unser stochastisches Integral fortsetzen wollen, müssen wir diesen Begriff genauer fassen.

Definition. *Eine Familie $(x_t)_{t \in \mathbb{R}} \subset L^2(\mathcal{A}, P_0)$ heißt adaptiert bzw. stark adaptiert, falls $x_t \in L^2(\mathcal{A}_{(-\infty, t]}, P_0)$ f.a. $t \in \mathbb{R}$ bzw. $x_t \in L^2(\mathcal{A}_{[0, t]}, P_0)$ f.a. $t \geq 0$ gilt.*

Bei den Elementen aus $\Lambda^2(\mathcal{A}, J)$, die sich als Funktionen interpretieren lassen, handelt es sich also um adaptierte Funktionen. Wir wollen diese von jetzt an als *Prozesse* bezeichnen und adaptierte Treppenfunktionen als *einfache Prozesse*. Die Filtrierung $(L^2(\mathcal{A}_{(-\infty, t]}, P_0))_{t \in \mathbb{R}}$, zu der sie adaptiert sind, ist gerade fein genug, um eine sinnvolle Fortschreibung des stochastischen Integralbegriffs zu gestatten. Dagegen macht die Definition additiver Kozyklen b für uns nur dann Sinn, wenn $S_t b_s$ zu $L^2(\mathcal{A}_{(-\infty, t]}, P_0)$ unabhängig ist. Dafür muß b also stark adaptiert sein. Entsprechendes gilt für unitale Kozyklen (vgl. auch 4.5.2).

4.3.2 Der Projektor \mathcal{P} . Wir müssen zeigen, daß durch die Familie $(P_{(-\infty, t]})_{t \in J}$ ein Projektor \mathcal{P} auf $\tilde{\Lambda}^2(\mathcal{A}, J)$ erklärt ist. Wegen der σ stop-Stetigkeit der Abbildung $t \mapsto P_{(-\infty, t]}$ (vgl. Lemma 1.4.3) läßt sich \mathcal{P} auf den elementaren Tensoren $x \otimes f$, $x \in L^2(\mathcal{A}, P_0)$, $f \in C(J)$, durch die σ stop-stetige Abbildung

$$t \mapsto (\mathcal{P} x \otimes f)_t := f(t) P_{(-\infty, t]} x$$

erklären und auf den linearen Aufspann solcher Elemente fortsetzen:

$$(\mathcal{P}x)_t := P_{(-\infty, t]}x_t. \quad (4.6)$$

Als Modulabbildung auf $L^2(\mathcal{A}, P_0)$ erfüllt $P_{(-\infty, t]}$ die Ungleichung (2.2): $|P_{(-\infty, t]}y|_0^2 \leq |y|_0^2$ f.a. $y \in L^2(\mathcal{A}, P_0)$. Das hat für Elemente x des linearen Aufspanns elementarer Tensoren

$$|\mathcal{P}x|_\lambda^2 = \int_J |P_{(-\infty, t]}x_t|_0^2 dt \leq \int_J |x_t|_0^2 dt = |x|_\lambda^2 \quad (4.7)$$

zur Folge. Für alle $\omega \in \mathcal{A}_{0*}^+$ folgt $\omega(|\mathcal{P}x|_\lambda^2) \leq \omega(|x|_\lambda^2)$, d.h. \mathcal{P} läßt sich unter Beibehaltung obiger Ungleichung zu einem Element aus $\mathcal{L}(\tilde{\Lambda}^2(\mathcal{A}, J))$ fortsetzen. Da \mathcal{P} nach Satz 2.2.9 σ stop-stetig ist, handelt es sich bei $\Lambda^2(\mathcal{A}, J) = \mathcal{P}\tilde{\Lambda}^2(\mathcal{A}, J)$ um ein W^* -Unterm modul von $\tilde{\Lambda}^2(\mathcal{A}, J)$ über \mathcal{A}_0 . Die Projektoreigenschaft von \mathcal{P} ist aus der Konstruktion sofort ersichtlich. Es sei an dieser Stelle noch einmal angemerkt, daß nicht zu erwarten ist, alle Elemente von $\Lambda^2(\mathcal{A}, J)$ als Prozesse, d.h., adaptierte $L^2(\mathcal{A}, P_0)$ -wertige Funktionen auffassen zu können, denn $L^2(J, L^2(\mathcal{A}, P_0))$ ist normalerweise kein Hilbert- W^* -Modul. Das ist also auch nicht für den Raum der adaptierten L^2 -Funktionen (vgl. Abschnitt 4.3.3) $\mathcal{P}L^2(J, L^2(\mathcal{A}, P_0)) \subseteq \Lambda^2(\mathcal{A}, J)$ zu erwarten. Da es sich bei $\Lambda^2(\mathcal{A}, J)$ um ein Hilbert- W^* -Modul handelt, wie wir sehen werden, muß dieser Raum i.allg. Elemente enthalten, die nicht mehr als Funktionen interpretierbar sind.

Bemerkung. $\tilde{\Lambda}^2(\mathcal{A}, J)$ ist das Hilbert- W^* -Modul, das aus dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\mathcal{A} \otimes L^\infty(J), \psi \otimes \lambda)$, wobei λ der Zustand ist, der zum Lebesgue-Maß auf J gehört, und der bedingten Erwartung $\tilde{P}_0 := P_0 \otimes \lambda$ von $\mathcal{A} \otimes L^\infty(J)$ auf \mathcal{A}_0 gemäß der Konstruktion in 2.3.1 entsteht (vgl. auch Abschnitt 2.5). $\Lambda^2(\mathcal{A}, J)$ ist dagegen ein Hilbert- W^* -Modul, das nicht durch eine bedingte Erwartung wie in 2.3.1 gebildet wird.

4.3.3 Eigenschaften. Wir machen uns zunächst klar, daß die Wirkung von \mathcal{P} auf *allen Funktionen* in $\tilde{\Lambda}^2(\mathcal{A}, J)$ durch (4.6) wiedergegeben wird, also wieder eine Funktion liefert, die nun adaptiert ist. Eine offensichtliche Anpassung des Beweises von [Ta1], IV, Lemma 7.5 zeigt, daß $\tilde{y} : t \mapsto P_{(-\infty, t]}x_t$ für jede Funktion $x \in \tilde{\Lambda}^2(\mathcal{A}, J)$ wieder meßbar ist. Die L^2 -Integrierbarkeit ergibt sich aus Ungleichung (4.7). Nun approximieren wir x durch eine Folge $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ aus dem linearen Aufspann elementarer Tensoren, auf denen die Wirkung von \mathcal{P} durch (4.6) bestimmt ist. Das ermöglicht folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} \omega(|\mathcal{P}x - \tilde{y}|_\lambda^2)^{1/2} &\leq \omega(|\mathcal{P}(x - x^{(n)})|_\lambda^2)^{1/2} + \left[\int_J \omega(|P_{(-\infty, t]}(x_t^{(n)} - x_t)|_0^2) dt \right]^{1/2} \\ &\leq \omega(|x - x^{(n)}|_\lambda^2)^{1/2} + \left[\int_J \omega(|x_t^{(n)} - x_t|_0^2) dt \right]^{1/2} \\ &= 2 \omega(|x - x^{(n)}|_\lambda^2)^{1/2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

für alle $\omega \in \mathcal{A}_{0*}^+$. Damit stimmt die Restklasse von \tilde{y} mit $\mathcal{P}x$ überein.

Nun ist auch klar, daß \mathcal{P} die Klasse der σ stop-stetigen Funktionen in sich abbildet. Das ist

für die $\|\cdot\|_0$ -stetigen Funktionen i.allg. nicht der Fall, denn $t \mapsto P_{(-\infty, t]}x$, $x \in L^2(\mathcal{A}, P_0)$, ist i.allg. nicht $\|\cdot\|_0$ -stetig, da $t \mapsto P_{(-\infty, t]}$ sonst punktweise $\|\cdot\|_0$ -stetig wäre. Die Ungleichung (4.7) zeigt aber auch, daß die sog. *Bochner-integrierbaren Funktionen*, d.h. die Funktionen $x \in \Lambda^2(\mathcal{A}, J)$, für die $\int_J \|x_t\|_0^2 dt < \infty$ gilt, in sich abgebildet wird.

4.3.4 Die Approximation durch einfache Prozesse. Wir bezeichnen im folgenden die Halbnormen, die die σ stop-Topologie auf $\Lambda^2(\mathcal{A}, J)$ erzeugen, durch $d_\omega^\wedge(x)^2 := |\omega(|x|_\lambda^2)|^{1/2}$, $\omega \in \mathcal{A}_{0*}$. Für die Prozesse aus $\Lambda^2(\mathcal{A}, J)$, also für die Elemente dieses Raumes, die sich als Funktionen interpretieren lassen, sind sie durch $d_\omega^\wedge(x)^2 = \int_J |\omega(|x_t|_0^2)| dt$ gegeben.

Satz. *Jedes Element aus $\Lambda^2(\mathcal{A}, J)$ läßt sich in der σ stop-Topologie durch eine Folge einfacher Prozesse approximieren.*

Beweis. Nach Satz 2.2.9 ist \mathcal{P} σ stop-stetig. Daher können wir auf die Approximationaleigenschaften von $\tilde{\Lambda}^2(\mathcal{A}, J)$ zurückgreifen: Nach Proposition 4.2.5 läßt sich jedes $x \in \Lambda^2(\mathcal{A}, J)$ durch Treppenfunktionen $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}} \subset \tilde{\Lambda}^2(\mathcal{A}, J)$ approximieren. Also gilt $x = \mathcal{P}x = \sigma\text{-}\lim_n \mathcal{P}x^{(n)}$, d.h. x kann auch durch die Folge $(\mathcal{P}x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ approximiert werden. Da $x^{(n)}$ im linearen Aufspann von elementaren Tensoren der Form $y \otimes \chi_I$, $y \in L^2(\mathcal{A}, P_0)$, $I \subseteq J$ liegt, reduziert sich unsere Aufgabe darauf, adaptierte Funktionen der Form $\mathcal{P}y \otimes \chi_I$ durch einfache Prozesse $y^{(n)}$ in der σ stop-Topologie zu approximieren. Die Auswertung $(\mathcal{P}y \otimes \chi_I)_t = P_{(-\infty, t]}y \chi_I(t)$ und die σ stop-Stetigkeit von $t \mapsto P_{(-\infty, t]}y$ legt folgenden Ansatz nahe:

$$y^{(n)} := \sum_{t_i \in \mathcal{Z}_n} P_{(-\infty, t_i]}y \otimes \chi_{[t_i, t_{i+1})},$$

wobei \mathcal{Z}_n eine Folge von Zerlegungen des Intervalls I ist, deren Feinheit gegen Null konvergiert. $t \mapsto \omega(|P_{(-\infty, t]}y|_0^2)$ ist für jedes $\omega \in \mathcal{A}_{0*}^+$ auf J gleichmäßig stetig. Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es also ein $\delta_\varepsilon > 0$, so daß $\omega(|P_{(-\infty, t+s]}y|_0^2) - \omega(|P_{(-\infty, t]}y|_0^2) \leq \varepsilon$ für alle $|s| \leq \delta_\varepsilon$ gilt. Damit können wir abschätzen:

$$\begin{aligned} d_\omega^\wedge(\mathcal{P}y \otimes \chi_I - y^{(n)})^2 &= \sum_{t_i \in \mathcal{Z}_n} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \omega(|(P_{(-\infty, t]} - P_{(-\infty, t_i]})y|_0^2) dt \\ &= \sum_{t_i \in \mathcal{Z}_n} \int_{t_i}^{t_{i+1}} [\omega(|P_{(-\infty, t]}y|_0^2) - \omega(|P_{(-\infty, t_i]}y|_0^2)] dt \\ &\leq \sum_{t_i \in \mathcal{Z}_n} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \varepsilon dt \leq \varepsilon |J|, \end{aligned}$$

ab einem geeigneten $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$. Das zeigt die Behauptung. \square

Bemerkung. An diesem Beweis sieht man, daß wir bei Verwendung der Projektion $(P_{[0, t]})_{t \geq 0}$ bei obiger Abschätzung Schwierigkeiten bekommen würden. Sie benutzt von

$t \mapsto P_{(-\infty, t]}$ die punktweise Stetigkeit von *oben*, die wir für $t \mapsto P_{[0, t]}$ nicht zeigen können, sondern fordern müßten. Es ist gegenwärtig noch ein offenes Problem, ob die Eigenschaften eines verallgemeinerten weißen Rauschens für die zugehörige Filtrierung schon die Stetigkeit von oben zur Folge hat. Allerdings sind alle bisher bekannten Beispiele für weiße Rauschen stetig von oben, was nach Lemma 1.4.3 für $t \mapsto P_{[0, t]}$ die gewünschte Stetigkeit bedeutet. Gehen wir von dem pragmatischen Standpunkt aus, nur stetige weiße Rauschen zu betrachten, dann läßt sich die gesamte oben ausgeführte Konstruktion des Projektors \mathcal{P} auch mit der Familie $(P_{[0, t]})_{t \geq 0}$ durchführen.

Definition. $\Lambda^2(\mathcal{A})$ ist der Abschluß in der σ stop-Topologie des Raumes der lokal- L^2 -integrierbaren Prozesse, d.h. der Prozesse, deren Einschränkung auf jedes kompakte Intervall $J \subset \mathbb{R}$ in $\Lambda^2(\mathcal{A}, J)$ liegt.

4.3.5 Die Fortsetzung. x sei ein Element aus $\Lambda^2(\mathcal{A})$ und $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ bzw. $(\tilde{x}^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen einfacher Prozesse, die x in der σ stop-Topologie auf $\Lambda^2(\mathcal{A}, J)$ approximieren. Dann gilt für alle $\omega \in \mathcal{A}_{0*}^+$ nach (4.4):

$$\begin{aligned} d_\omega \left(\int_J (x_t^{(n)} - \tilde{x}_t^{(m)}) db_t \right)^2 &= \int_J \omega(\Lambda(|x_t^{(n)} - \tilde{x}_t^{(m)}|_0^2)) dt \\ &= d_{\omega \circ \Lambda}^{\wedge} (x^{(n)} - \tilde{x}^{(m)})^2 \xrightarrow{m, n \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

denn $\omega \circ \Lambda \in \mathcal{A}_{0*}^+$. Damit ist $(\int_J x_t^{(n)} db_t)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^2(\mathcal{A}, P_0)$ eine σ stop-Cauchy Folge mit einem von der approximierenden Folge $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ unabhängigen Grenzelement in $L^2(\mathcal{A}, P_0)$. Wir definieren das *stochastische Rechtsintegral* eines Prozesses $x \in \Lambda^2(\mathcal{A})$ über ein kompaktes Intervall J durch

$$\int_J x_t db_t := \sigma\text{-}\lim_n \int_J x_t^{(n)} db_t. \quad (4.8)$$

Dieselben Überlegungen lassen sich für das *stochastische Linksintegral* anstellen:

$$\int_J db_t x_t := \sigma\text{-}\lim_n \int_J db_t x_t^{(n)}. \quad (4.9)$$

Bemerkung. Das stochastische Rechts- und Linksintegral ist auf diese Weise auch für Elemente aus $\Lambda^2(\mathcal{A})$ definiert, die nicht mehr als Prozesse interpretierbar sind. Allerdings ist dafür bisher noch keine Anwendung in Sicht.

4.3.6 Eigenschaften der stochastischen Integrale.

Satz. Das stochastische Integral besitzt folgende Eigenschaften:

- i) Die Abbildungen $\Lambda^2(\mathcal{A}) \ni x \mapsto \int_J x_t db_t$ und $\Lambda^2(\mathcal{A}) \ni x \mapsto \int_J db_t x_t$ sind linear.

ii) $\left(\int_0^t x_s db_s\right)_{t \geq 0}$ und $\left(\int_0^t db_s x_s\right)_{t \geq 0}$ bestimmen Martingale aus $\Lambda^2(\mathcal{A})$, die stark adaptiert sind, wenn der Integrand x diese Eigenschaft besitzt.

iii) Es gelten folgende 'Itô-Isometrie'-Beziehungen:

$$\left\langle \int_J x_t db_t \mid \int_J y_t db_t \right\rangle_0 = \int_J \Lambda(\langle x_t \mid y_t \rangle_0) dt, \quad (4.10)$$

$$\left\langle \int_J db_t x_t \mid \int_J db_t y_t \right\rangle_0 = \int_J \langle x_t \mid \Lambda(\mathbf{1}) y_t \rangle_0 dt. \quad (4.11)$$

Bemerkung. Die Martingaleigenschaft beziehen wir auf die Filtrierung $(\mathcal{A}_{(-\infty, t]})_{t \geq 0}$, so daß die σ stop-Stetigkeit von $t \mapsto \int_0^t x_r db_r$ bzw. $t \mapsto \int_0^t db_r x_r$ nach exakt derselben Rechnung wie in (3.10) aus der punktweisen σ stop-Stetigkeit von $t \mapsto P_{(-\infty, t]}$ folgt.

Beweis. i) ist klar. Zu ii): $\left(\int_0^t x_s db_s\right)_{t \geq 0}, \left(\int_0^t db_s x_s\right)_{t \geq 0} \in \Lambda^2(\mathcal{A})$ folgt aus der Konstruktion der Integrale und der punktweisen σ stop-Stetigkeit von $t \mapsto P_{(-\infty, t]}$, sowie der Stetigkeit von $t \mapsto b_t$. Aus i) folgt $\int_0^{t+s} x_r db_r = \int_0^t x_r db_r + \int_t^{t+s} x_r db_r$. Für eine Approximation $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}, x^{(n)} := \sum_{r_i \in \mathcal{Z}_n} x_{r_i}^{(n)} \chi_{[r_i, r_{i+1})}$, von $x = (x_t)_{t \geq 0} \in \Lambda^2(\mathcal{A})$ gilt

$$\begin{aligned} P_{(-\infty, t]} \int_t^{t+s} x_r db_r &= \sigma s\text{-lim}_n P_{(-\infty, t]} \int_t^{t+s} x_r^{(n)} db_r \\ &= \sigma s\text{-lim}_n \sum_{r_i \in \mathcal{Z}_n} P_{(-\infty, t]} \circ P_{(-\infty, r_i]} x_{r_i}^{(n)} S_{r_i} b_{r_{i+1} - r_i} \\ &= \sigma s\text{-lim}_n \sum_{r_i \in \mathcal{Z}_n} P_{(-\infty, t]} x_{r_i}^{(n)} P_0 S_{r_i} b_{r_{i+1} - r_i} = 0. \end{aligned}$$

Dabei wurde in der vorletzten Gleichung die Fortschreibung der Moduleigenschaft (2.14) für unabhängige $L^2(\mathcal{A}, P_0)$ -Elemente und dann die Zentriertheit von b benutzt. Wir erhalten die Martingaleigenschaft: $P_{(-\infty, t]} \int_0^{t+s} x_r db_r = \int_0^t x_r db_r$. Dieselben Überlegungen greifen für das Linksintegral. Die Beziehungen in iii) sind offensichtliche Fortsetzungen von (4.4) und (4.3). \square

4.4 Stochastische Differentialgleichungen

4.4.1 Definitionen. b und $c \in \Lambda^2(\mathcal{A})$ seien additive Kozyklen. Wir sagen, ein Prozeß $x \in \Lambda^2(\mathcal{A})$ habe das *stochastische Differential* (für $t \geq t_0$)

$$dx_t = \alpha_s ds + db_s \beta_s + \gamma_s dc_s, \quad (4.12)$$

falls er als stochastisches Integral aus den Prozessen $\alpha, \beta, \gamma \in \Lambda^2(\mathcal{A})$ in folgender Weise entstanden ist:

$$x_t = x_{t_0} + \int_{t_0}^t \alpha_s ds + \int_{t_0}^t db_s \beta_s + \int_{t_0}^t \gamma_s dc_s. \quad (4.13)$$

Wir nennen eine meßbare Funktion $\alpha : \mathbb{R}^+ \times L^2(\mathcal{A}, P_0) \rightarrow L^2(\mathcal{A}, P_0)$ *adaptiv verträglich*, bzw. *stark adaptiv verträglich*, wenn für alle $t \in \mathbb{R}$ bzw. $t \geq 0$ und $y \in L^2(\mathcal{A}_{(-\infty, t]}, P_0)$ bzw. $y \in L^2(\mathcal{A}_{[0, t]}, P_0)$ auch $\alpha(t, y)$ wieder in $L^2(\mathcal{A}_{(-\infty, t]}, P_0)$ bzw. $L^2(\mathcal{A}_{[0, t]}, P_0)$ liegt. Wir sagen dann, x löse die stochastische Differentialgleichung (SDGL)

$$dx_t = \alpha(t, x_t) dt + db_t \beta(t, x_t) + \gamma(t, x_t) dc_t, \quad x_{t_0} = x_0 \in L^2(\mathcal{A}_{(-\infty, t_0]}, P_0), \quad (4.14)$$

falls $(x_t)_{t \geq t_0} \in \Lambda^2(\mathcal{A})$ die Lösung folgender Integralgleichung ist:

$$x_t = x_0 + \int_{t_0}^t ds \alpha(s, x_s) + \int_{t_0}^t db_s \beta(s, x_s) + \int_{t_0}^t \gamma(s, x_s) dc_s. \quad (4.15)$$

4.4.2 Satz. (Existenz- und Eindeutigkeitsatz) $b, c \in \Lambda^2(\mathcal{A})$ seien additive Kozyklen bzgl. dem weißen Rauschen $(L^2(\mathcal{A}, P_0), \mathbf{1}, S_t, (L^2(\mathcal{A}_I, P_0))_I)$ und α, β, γ adaptiv verträgliche meßbare Funktionen von $\mathbb{R}^+ \times L^2(\mathcal{A}, P_0)$ nach $L^2(\mathcal{A}, P_0)$ mit folgenden Eigenschaften:

Für jedes kompakte Intervall $[t_0, t_1]$, $t_0 \geq 0$ und für jedes $\omega \in \mathcal{A}_{0*}^+$ gibt es eine Zahl $C_\omega = C_{\lambda, \omega} \geq 0$, f.a. $\lambda > 0$, so daß für alle $x, y \in L^2(\mathcal{A}, P_0)$, $t, s \in [t_0, t_1]$ folgende Abschätzungen erfüllt sind:

$$i) \quad d_\omega(\alpha(t, x) - \alpha(s, x)) \leq C_\omega \cdot (\|\omega\| + d_\omega(x)) \cdot |f_\omega(t) - f_\omega(s)|, \quad (4.16)$$

$$ii) \quad d_\omega(\beta(t, x) - \beta(s, x)) \leq C_\omega \cdot (\|\omega\| + d_\omega(x)) \cdot |g_\omega(t) - g_\omega(s)|, \quad (4.17)$$

$$iii) \quad d_\omega(\gamma(t, x) - \gamma(s, x)) \leq C_\omega \cdot (\|\omega\| + d_\omega(x)) \cdot |h_\omega(t) - h_\omega(s)|, \quad (4.18)$$

$$iv) \quad d_\omega(\alpha(t, x) - \alpha(t, y)) \leq C_\omega \cdot d_\omega(x - y), \quad (4.19)$$

$$v) \quad d_\omega(\beta(t, x) - \beta(t, y)) \leq C_\omega \cdot d_\omega(x - y), \quad (4.20)$$

$$vi) \quad d_\omega(\gamma(t, x) - \gamma(t, y)) \leq C_\omega \cdot d_\omega(x - y), \quad (4.21)$$

$$vii) \quad C_{\omega \circ \Gamma} \leq C_\omega \quad (4.22)$$

Dabei sind f_ω, g_ω und h_ω stetige, reellwertige Funktionen auf \mathbb{R}^+ und Γ die normale, vollständig positive Abbildung $\langle c_1 | \cdot c_1 \rangle_0$ gemäß Proposition 3.4.2.

Unter diesen Voraussetzungen gibt es genau einen Prozeß $x = (x_t)_{t \geq t_0} \in \Lambda^2(\mathcal{A})$, der die SDGL

$$dx_t = \alpha(t, x_t) dt + db_t \beta(t, x_t) + \gamma(t, x_t) dc_t, \quad x_{t_0} = x_0 \in L^2(\mathcal{A}_{(-\infty, t_0]}, P_0),$$

d.h.

$$x_t = x_0 + \int_{t_0}^t ds \alpha(s, x_s) + \int_{t_0}^t db_s \beta(s, x_s) + \int_{t_0}^t \gamma(s, x_s) dc_s. \quad (4.23)$$

löst. x ist stark adaptiert, falls x_0 in $L^2(\mathcal{A}_{[0, t_0]}, P_0)$ liegt und α, β und γ stark adaptiv verträglich sind. In beiden Fällen ist die Lösung $\|\cdot\|_0$ -stetig.

Beweis.

Vorbemerkungen:

1) Für eine σ stop-stetige Funktion $t \mapsto x_t \in L^2(\mathcal{A}, P_0)$ ist die Funktion $t \mapsto \alpha(t, x_t)$ ebenfalls σ stop-stetig:

$$\begin{aligned} d_\omega(\alpha(s, x_s) - \alpha(t, x_t)) &\leq d_\omega(\alpha(s, x_s) - \alpha(s, x_t)) + d_\omega(\alpha(s, x_t) - \alpha(t, x_t)) \\ &\leq C_\omega \cdot d_\omega(x_s - x_t) + C_\omega \cdot (1 + d_\omega(x_t)) \cdot |f_\xi(s) - f_\xi(t)|. \end{aligned}$$

Nach dem Satz von der gleichmäßigen Beschränktheit ist diese Funktion auf kompakten Intervallen $\|\cdot\|_0$ -beschränkt. Dasselbe gilt für β und γ .

2) Zum Beweisverfahren: Durch Iteration wird eine σ stop-stetige Lösung x_t der stochastischen Integralgleichung (4.23) auf dem Intervall $[t_0, t_1]$ bestimmt. Es wird gezeigt, daß die Lösung auf diesem Intervall eindeutig ist. Das Verfahren hängt nicht vom Zeitpunkt t_0 , oder vom Anfangswert x_0 ab, kann daher auf t_1 und x_{t_1} angewandt werden und liefert ein weiteres Lösungsintervall der gleichen Länge. Auf diese Weise erhält man die Existenz und die Eindeutigkeit für alle Zeiten $t > 0$.

Die Iteration auf dem Intervall $[t_0, t_1]$, mit noch näher zu bestimmenden t_1 , startet mit $x_t^0 := x_0$ f.a. $t \in [t_0, t_1]$. Die Funktionen

$$t \mapsto \alpha(t, x_t^0), \quad t \mapsto \beta(t, x_t^0), \quad t \mapsto \gamma(t, x_t^0),$$

sind nach 1) σ stop-stetig und nach Voraussetzung adaptiert bzw. stark adaptiert, falls α , β und γ stark adaptiv verträglich sind und x_0 in $L^2(\mathcal{A}_{[0, t_0]}, P_0)$ liegt. Insbesondere sind sie integrierbar. Die nächsten Iterierten sind dann wie folgt erklärt:

$$\begin{aligned} x_t^1 &:= x_0 + \int_{t_0}^t ds \alpha(s, x_s^0) + \int_{t_0}^t db_s \beta(s, x_s^0) + \int_{t_0}^t \gamma(s, x_s^0) dc_s, \\ x_t^2 &:= x_0 + \int_{t_0}^t ds \alpha(s, x_s^1) + \int_{t_0}^t db_s \beta(s, x_s^1) + \int_{t_0}^t \gamma(s, x_s^1) dc_s, \\ &\quad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ x_t^{n+1} &:= x_0 + \int_{t_0}^t ds \alpha(s, x_s^n) + \int_{t_0}^t db_s \beta(s, x_s^n) + \int_{t_0}^t \gamma(s, x_s^n) dc_s. \end{aligned}$$

Dabei sind die Funktionen $t \mapsto x_t^n$, da durch Integration entstanden, σ stop-stetig (vgl. 4.3.6, ii) und adaptiert (bzw. stark adaptiert, s.o.), was nach 1) wiederum die Integrierbarkeit von $t \mapsto \alpha(t, x_t^n)$ usw. garantiert. Der Satz von der gleichmäßigen Beschränktheit zeigt darüberhinaus, daß $t \mapsto x_t^n$ auf $[t_0, t_1]$ $\|\cdot\|_0$ -beschränkt ist. Offensichtlich setzt sich die Adaptiertheit (bzw. starke Adaptiertheit) der Approximanden $x^{(n)}$ auf den noch zu bestimmenden Grenzwert x fort.

Nun zur Konvergenz auf dem Intervall $[t_0, t_1]$. Wir benutzen wiederholt die folgende Abschätzung. Für alle $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}^+$, $s \geq 0$ und jedes $\omega \in \mathcal{A}_{0^*, 1}^+$ gilt:

$$D_\omega^{n, k}(s) := \max \{ d_\omega(x_s^n - x_s^{n-1}), \dots, d_{\omega \circ \Gamma^k}(x_s^n - x_s^{n-1}) \}$$

$$\leq \max \left\{ 1, \|\Gamma\|^{\frac{k}{2}} \right\} \max_{s \in [t_0, t_1]} \{ \|x_s^n\|_0, \|x_s^{n-1}\|_0 \}.$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} d_\omega(x_t^{n+1} - x_t^n) &\leq d_\omega \left(\int_{t_0}^t (\alpha(s, x_s^n) - \alpha(s, x_s^{n-1})) ds \right) \\ &\quad + d_\omega \left(\int_{t_0}^t db_s (\beta(s, x_s^n) - \beta(s, x_s^{n-1})) \right) \\ &\quad + d_\omega \left(\int_{t_0}^t (\gamma(s, x_s^n) - \gamma(s, x_s^{n-1})) dc_s \right) \\ &\leq \int_{t_0}^t d_\omega (\alpha(s, x_s^n) - \alpha(s, x_s^{n-1})) ds \\ &\quad + \left[\int_{t_0}^t d_\omega (\Lambda(\mathbf{1})^{\frac{1}{2}} (\beta(s, x_s^n) - \beta(s, x_s^{n-1})))^2 ds \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \left[\int_{t_0}^t \omega \circ \Gamma (|\gamma(s, x_s^n) - \gamma(s, x_s^{n-1})|_0^2) ds \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \underbrace{C_\omega \cdot ((t_1 - t_0)^{\frac{1}{2}} + \|\Lambda\|^{\frac{1}{2}} + 1)}_{=: \tilde{q}_\omega} \\ &\quad \left[\int_{t_0}^t \max \left\{ d_\omega (x_s^n - x_s^{n-1})^2, d_{\omega \circ \Gamma} (x_s^n - x_s^{n-1})^2 \right\} ds \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \tilde{q}_\omega \cdot \left[\int_{t_0}^t D_\omega^{n,1}(s)^2 ds \right]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} D_\omega^{n,1}(s)^2 &\leq \tilde{q}_\omega^2 \cdot \max \left\{ \int_{t_0}^s D_\omega^{n-1,1}(s_1)^2 ds_1, \int_{t_0}^s D_{\omega \circ \Gamma}^{n-1,1}(s_1)^2 ds_1 \right\} \\ &\leq \tilde{q}_\omega^2 \cdot \int_{t_0}^s \max \{ D_\omega^{n-1,1}(s_1)^2, D_{\omega \circ \Gamma}^{n-1,1}(s_1)^2 \} ds_1 \\ &\leq \tilde{q}_\omega^2 \cdot \int_{t_0}^s D_\omega^{n-1,2}(s_1)^2 ds_1 \end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned} \max_{t \in [t_0, t_1]} d_\omega(x_t^{n+1} - x_t^n)^2 &\leq \tilde{q}_\omega^4 \cdot \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{s_1} D_\omega^{n-1,2}(s_2)^2 ds_2 ds_1 \\ &\quad \vdots \\ &\leq \tilde{q}_\omega^{2n} \cdot \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{s_1} \dots \int_{t_0}^{s_{n-1}} D_\omega^{1,n}(s_n)^2 ds_n \dots ds_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \tilde{q}_\omega^{2n} \cdot \max\{1, \|\Gamma\|^n\} \cdot \max_{s \in [t_0, t_1]} \|\chi_s^1 - \chi_s^0\|_0^2 \cdot \frac{1}{n!} (t_1 - t_0)^n \\
&=: q_\omega^{2n} \cdot M^2 \cdot \frac{(\Delta t)^n}{n!},
\end{aligned}$$

wobei $q_\omega := \tilde{q}_\omega \max\{1, \|\Gamma\|^{\frac{1}{2}}\}$, $M := \max_{s \in [t_0, t_1]} \|\chi_s^1 - \chi_s^0\|_0$ und $\Delta t := t_1 - t_0$ gesetzt wurde. q_ω hängt also nicht vom Startwert t_0 , sondern nur vom Zeitintervall Δt ab. Wir wählen $\Delta t < 1$. Mittels Δ -Ungleichung läßt sich nun die Cauchy-Eigenschaft gewinnen: Für alle $n > \sqrt{q_\omega}$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\max_{s \in [t_0, t_1]} d_\omega(\chi_s^{n+m} - \chi_s^n) &\leq \sum_{k=0}^{m-1} \max_{s \in [t_0, t_1]} d_\omega(\chi_s^{n+k+1} - \chi_s^{n+k}) \\
&\leq M q_\omega^n \frac{(\Delta t)^{n/2}}{\sqrt{n!}} \sum_{k=0}^{m-1} \sqrt{\frac{n!}{(n+k)!}} (\Delta t)^{k/2} q_\omega^k \\
&\leq M q_\omega^n \frac{(\Delta t)^{n/2}}{\sqrt{n!}} \sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{q_\omega}{\sqrt{n}}\right)^k (\Delta t)^{k/2} \\
&\leq M q_\omega^n \frac{(\Delta t)^{n/2}}{\sqrt{n!}} \sum_{k=0}^{\infty} (\Delta t)^{k/2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.
\end{aligned}$$

Wir definieren also $x_t := \sigma\text{-}\lim_n \chi_t^n$. Die Abschätzung

$$d_\omega(x_t - \chi_t^n) = \lim_m d_\omega(\chi_t^{n+m} - \chi_t^n) \leq \lim_m \max_{t \in [t_0, t_1]} d_\omega(\chi_t^{n+m} - \chi_t^n)$$

zeigt, daß der Grenzwert x_t gleichmäßig bzgl. $t \in [t_0, t_1]$ existiert und x somit ein σ stopstetiger, adaptierter Prozeß ist. Nach 1) kann das auch für $t \mapsto \alpha(t, x_t)$ (genauso für β und γ) gefolgert werden. Stellvertretend für die beiden anderen Integrale zeigen wir

$$\begin{aligned}
d_\omega\left(\int_{t_0}^t (\gamma(s, x_s) - \gamma(s, x_s^n)) dc_s\right)^2 &\leq \int_{t_0}^t d_{\omega \circ \Gamma}(\gamma(s, x_s) - \gamma(s, x_s^n))^2 ds \\
&\leq C_{\omega \circ \Gamma}^2 (t_1 - t_0) \max_{s \in [t_0, t_1]} d_{\omega \circ \Gamma}(x_s - x_s^n)^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,
\end{aligned}$$

d.h. es gilt $\int_{t_0}^t \gamma(s, x_s) dc_s = \sigma\text{-}\lim_n \int_{t_0}^t \gamma(s, x_s^n) dc_s$ und entsprechendes für die Integrale über α und β .

Damit kann nun die Lösungseigenschaft von x für (4.23) auf $[t_0, t_1]$ nachgerechnet werden:

$$\begin{aligned}
x_t &= \sigma\text{-}\lim_n \chi_t^n \\
&= x_0 + \sigma\text{-}\lim_n \int_{t_0}^t \alpha(s, x_s^{n-1}) ds \\
&\quad + \sigma\text{-}\lim_n \int_{t_0}^t db_s \beta(s, x_s^{n-1}) + \sigma\text{-}\lim_n \int_{t_0}^t \gamma(s, x_s^{n-1}) dc_s
\end{aligned}$$

$$= x_0 + \int_{t_0}^t \alpha(s, x_s) ds + \int_{t_0}^t db_s \beta(s, x_s) + \int_{t_0}^t \gamma(s, x_s) dc_s.$$

Die σ stop-Stetigkeit der Lösung hat bereits deren $\|\cdot\|_0$ -Stetigkeit zur Folge. Für $\omega \in \mathcal{A}_{0^*,1}^+$ gilt nämlich

$$d_\omega \left(\int_s^t db_r \beta(r, x_r) \right)^2 = \int_s^t d_\omega (\beta(r, x_r))^2 dt \leq (t-s) \sup_{r \in [t_0, t_1]} \|\beta(r, x_r)\|_0^2.$$

für alle $s, t \in [t_0, t_1]$. Nach Bildung des Supremums über $\omega \in \mathcal{A}_{0^*,1}^+$ erhalten wir

$$\left\| \int_{t_0}^t db_r \beta(r, x_r) - \int_{t_0}^s db_r \beta(r, x_r) \right\|_0 \leq (t-s)^{\frac{1}{2}} \sup_{r \in [t_0, t_1]} \|\beta(r, x_r)\|_0.$$

Ähnlich können wir mit den Integralen über α und γ verfahren. Die $\|\cdot\|_0$ -Stetigkeit der Lösung folgt nun unmittelbar aus (4.23). Wie unter 2) schon bemerkt, läßt sie sich auf jedes kompakte Intervall $[t_0, t]$ fortsetzen.

Eindeutigkeit:

$\tilde{x} \in \Lambda^2(\mathcal{A})$ sei eine weitere Lösung der SDGL (4.23). \tilde{x} ist dann zumindest σ stop-stetig: Für alle $\omega \in \mathcal{A}_{0^*}^+$ bestimmt die rechte Seite folgender Abschätzung L_{loc}^2 -Funktionen :

$$\begin{aligned} d_\omega(\alpha(s, \tilde{x}_s)) &\leq d_\omega(\alpha(s, \tilde{x}_s) - \alpha(s, 0)) + d_\omega(\alpha(s, 0) - \alpha(0, 0)) + d_\omega(\alpha(0, 0)) \\ &\leq C_\omega \cdot d_\omega(\tilde{x}_s) + C_\omega \cdot (f_\omega(s) - f_\omega(0)) + d_\omega(\alpha(0, 0)). \end{aligned}$$

Für β und γ gilt dasselbe. Daher sind

$$\begin{aligned} t &\mapsto d_\omega \left(\int_{t_0}^t \alpha(s, \tilde{x}_s) ds \right) \leq \int_{t_0}^t d_\omega(\alpha(s, \tilde{x}_s)) ds \\ t &\mapsto d_\omega \left(\int_{t_0}^t db_s \beta(s, \tilde{x}_s) \right) = \left[\int_{t_0}^t d_\omega(\Lambda(\mathbf{1})^{\frac{1}{2}} \beta(s, \tilde{x}_s))^2 ds \right]^{\frac{1}{2}} \\ t &\mapsto d_\omega \left(\int_{t_0}^t \gamma(s, \tilde{x}_s) dc_s \right) = \left[\int_{t_0}^t d_{\omega \circ \Gamma}(\gamma(s, \tilde{x}_s))^2 ds \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

stetig. Nun ergibt sich die σ stop-Stetigkeit von \tilde{x} mittels Δ -Ungleichung aus der SDGL (4.23). Wie oben folgt wieder die $\|\cdot\|_0$ -Stetigkeit von \tilde{x} .

Wir erhalten für alle $t \in [t_0, t_1]$ und alle $\omega \in \mathcal{A}_{0^*}^+$

$$\begin{aligned} d_\omega(x_t - \tilde{x}_t) &\leq d_\omega \left(\int_{t_0}^t (\alpha(s, x_s) - \alpha(s, \tilde{x}_s)) ds \right) + d_\omega \left(\int_{t_0}^t db_s (\beta(s, x_s) - \beta(s, \tilde{x}_s)) \right) \\ &\quad + d_\omega \left(\int_{t_0}^t (\gamma(s, x_s) - \gamma(s, \tilde{x}_s)) dc_s \right) \\ &\leq C_\omega \cdot \left[t_1 - t_0 + (\|\Lambda\|^{\frac{1}{2}} + \|\Gamma\|^{\frac{1}{2}})(t_1 - t_0)^{\frac{1}{2}} \right] \cdot \max_{s \in [t_0, t_1]} d_\omega(x_s - \tilde{x}_s) \end{aligned}$$

$$< \max_{s \in [t_0, t_1]} d_\omega(x_s - \tilde{x}_s),$$

für genügend kleines $t_1 - t_0$. Daraus folgt $d_\omega(x_t - \tilde{x}_t) = 0$ zunächst für $t \in [t_0, t_1]$ und – durch Anwendung dieses Verfahrens auf die anschließenden Intervalle gleicher Länge – schließlich für alle $t \geq t_0$. Da ω beliebig war, muß $x = \tilde{x}$ gelten. \square

Bemerkungen. Die Ungleichung (4.22) verknüpft die Abschätzungen für den Integranden des Rechtsintegrals mit den Abschätzungen für α und β . Ihre Hauptaufgabe besteht eigentlich darin, den Satz für Rechts- und Linksintegral gemeinsam formulieren zu können. Als relevante Anwendungen, bei denen (4.22) erfüllt sind, haben wir dabei z.B. die Folgenden im Sinn: Die einfachste und wichtigste ist sicher der Fall, in dem die Konstanten C_ω unabhängig vom Zustand ω gewählt werden können: $C_\omega = C$. Dann gelten die Abschätzungen (4.16) - (4.21) in der $\|\cdot\|_0$ -Topologie. Eine andere Möglichkeit ist gegeben, wenn das Rechtsintegral in (4.23) gar nicht auftritt und damit (4.22) entfällt ($C_{\omega \circ \Gamma} := 0$). Beide Situationen werden gemeinsam erfüllt sein, wenn wir den Existenz- und Eindeutigkeitssatz in Theorem 4.5.1 benötigen werden.

4.5 Korrespondenz zwischen unitalen und additiven Kozyklen

Ziel dieses Abschnitts ist der Beweis des folgenden Theorems. Es handelt sich dabei um das zentrale Ergebnis dieses Kapitels und um eines der Hauptergebnisse dieser Arbeit. In 3.4.4 hatten wir eine Konstruktion angegeben, die jedem unitalen Kozyklus u auf kanonische Weise einen additiven Kozyklus b zuordnet. Da wir die stochastische Integration bzgl. b inzwischen zur Verfügung haben, wollen wir nun, ganz wie im einführenden Teil 1.9.2 vorgezeichnet, den unitalen Kozyklus als Lösung einer SDGL bzgl. b zurückgewinnen.

4.5.1 Theorem. $(\mathcal{A}, \psi, S_t, (A_I)_I)$ sei ein weißes Rauschen über \mathcal{A}_0 . Die zugehörige Hilbert- W^* -Modul-Version sei $(L^2(\mathcal{A}, P_0), \mathbb{1}, S_t, (L^2(A_I, P_0))_I)$. Dann gibt es eine kanonische Bijektion zwischen

- i) $\|\cdot\|_0$ -stetigen unitalen Kozyklen $u \in \Lambda^2(\mathcal{A})$ mit zugehöriger Kontraktionshalbgruppe $A_t := P_0 u_t = e^{Kt}$ und
- ii) zentrierten additiven Kozyklen $b \in \Lambda^2(\mathcal{A})$ und $K \in \mathcal{A}_0$ mit $|b_t|_0^2 = -(K + K^*)t$.

Diese Korrespondenz kommt folgendermaßen zustande: Bei gegebenen $b \in \Lambda^2(\mathcal{A})$ und $K \in \mathcal{A}_0$ ist u die Lösung der SDGL

$$u_t = \mathbb{1} + \int_0^t db_s u_s + \int_0^t dt K u_s. \quad (4.24)$$

Umgekehrt entsteht b aus u durch die Standardkonstruktion

$$b_t = \|\cdot\|_0\text{-}\lim_{\mathcal{Z} \in \mathcal{Z}(t)} \sum_{t_i \in \mathcal{Z}} S_{t_i} (u_{t_{i+1}-t_i} - A_{t_{i+1}-t_i}). \quad (4.25)$$

Dabei ist $\mathcal{Z}(t)$ das Netz der Zerlegungen des Intervalls $[0, t]$, nach Feinheit halbgeordnet.

Die Korrespondenz zwischen u und b , K ist konsistent im folgenden Sinne:

Bei gegebenen b und K ist der additive Kozyklus, der nach (4.25) zur Lösung von (4.24) gehört, wieder durch b gegeben. Andererseits entsteht jeder unitale Kozyklus als Lösung von (4.24), wobei dann b durch (4.25) definiert sein muß.

Bemerkungen. Die Forderungen in ii) lassen sich folgendermaßen verstehen: b legt über $|b_1|_0^2 = -(K + K^*)$ nur den Realteil von K fest. Um über (4.24) den unitalen Kozyklus u zu definieren, muß auch noch der Imaginärteil von K angegeben werden.

Dieser Satz läßt sich noch etwas knapper formulieren, wenn statt zentrierte additive Kozyklen b nichtzentrierte β benutzt werden. Dann besteht eine Bijektion zwischen u und β wie oben angegeben, wenn (4.24) durch

$$u_t = \mathbb{1} + \int_0^t d\beta_s u_s \quad (4.26)$$

und (4.25) durch

$$\beta_t = \|\|_0\text{-}\lim_{\mathcal{Z} \in \mathcal{Z}(t)} \sum_{t_i \in \mathcal{Z}} S_{t_i} (u_{t_{i+1}-t_i} - \mathbf{1}) \quad (4.27)$$

ersetzt wird. Dabei ist der Generator der Kontraktionshalbgruppe $P_0 u_t$ durch $P_0 \beta_1$ gegeben.

Den eigentlichen Beweis des Theorems verteilen wir auf mehrere Lemmata. Wir beginnen mit den Lösungseigenschaften der SDGL (4.24) bei gegebenem additiven Kozyklus b .

4.5.2 Lemma. *Die Lösung u der SDGL (4.24) ist eindeutig und ein $\|\|_0$ -stetiger Kozyklus mit $P_0 u_t = e^{Kt}$. u ist genau dann unital, wenn $\|b_t\|_0^2 = -(K + K^*)t$ gilt. Der nach Theorem 3.4.4 zu u gehörende additive Kozyklus ist wieder b .*

Beweis. Die SDGL (4.24) erfüllt offensichtlich die Voraussetzungen des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes 4.4.2. Damit ist klar, daß die eindeutig bestimmte Lösung u $\|\|_0$ -stetig ist. Da $u_0 = \mathbf{1}$ natürlich in \mathcal{A}_0 liegt, ist u stark adaptiert. Anwendung von P_0 auf beide Seiten von (4.24) ergibt $P_0 u_t = \mathbf{1} + \int_0^t dt KP_0 u_s$, mit der Lösung $t \mapsto P_0 u_t = e^{Kt}$. Als nächstes ist die Kozykleneigenschaft zu zeigen. Dazu bezeichne $\mathcal{Z}_n[a, b]$ eine Zerlegungsfolge des Intervalls $[a, b]$, deren Feinheit gegen Null konvergiert. Wir bestimmen zunächst für beliebiges $w \in L^2(\mathcal{A}_{[0,t]}, P_0)$

$$\begin{aligned} \left(S_t \int_0^s db_r u_r \right) w &= \sigma\text{-}\lim_n \sum_{r_i \in \mathcal{Z}_n[0,s]} (S_t(b_{r_{i+1}} - b_{r_i})) (S_t u_{r_i}) w \\ &= \sigma\text{-}\lim_n \sum_{r_i \in \mathcal{Z}_n[0,s]} (b_{t+r_{i+1}} - b_{t+r_i}) (S_t u_{t+r_i-t}) w \\ &= \sigma\text{-}\lim_n \sum_{t_i \in \mathcal{Z}_n[t,s+t]} (b_{t_{i+1}} - b_{t_i}) (S_t u_{t_i-t}) w \\ &= \int_t^{t+s} db_r (S_t u_{r-t}) w. \end{aligned}$$

Dabei haben wir die Stetigkeitseigenschaften des Produktes unabhängiger Elemente auf $L^2(\mathcal{A}, P_0)$ benutzt (Satz 2.4.1, iii) und, da die Faktoren $b_{t+r_{i+1}} - b_{t+r_i}$, $S_t u_{r_i}$, w zeitlich absteigend geordnet sind ($[t + r_i, t + r_{i+1}] \geq [t, t + r_i] \geq [0, t]$), die Möglichkeit iterierter Produkte (Bemerkung 2.4.2). Für festes $t > 0$ definieren wir dann $v_r := \begin{cases} u_r & , 0 \leq r \leq t, \\ S_t(u_{r-t})u_t & , t < r. \end{cases}$

Die Stetigkeitseigenschaften des Produktes unabhängiger Elemente liefert die σ stop-Stetigkeit von $r \mapsto v_r$ und damit die Integrierbarkeit. Für $0 \leq r \leq t$ erfüllt v_r offensichtlich die SDGL (4.24). Daher folgt

$$v_{t+s} = S_t \left(\mathbf{1} + \int_0^s db_r u_r - \int_0^s dr Ku_r \right) u_t$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{u}_t + \int_t^{t+s} db_r (S_t \mathbf{u}_{r-t}) \mathbf{u}_t + \int_0^s dr K(S_t \mathbf{u}_r) \mathbf{u}_t \\
&= \mathbf{1} + \int_0^t db_r \mathbf{u}_r + \int_t^{t+s} db_r (S_t \mathbf{u}_{r-t}) \mathbf{u}_t - \int_0^t dr K \mathbf{u}_r - \int_t^{t+s} dr K(S_t \mathbf{u}_{r-t}) \mathbf{u}_t \\
&= \mathbf{1} + \int_0^{t+s} db_r \mathbf{v}_r - \int_0^{t+s} dr K \mathbf{v}_r,
\end{aligned}$$

d.h. \mathbf{v} genügt (4.24). Aufgrund der Eindeutigkeit der Lösung gilt $\mathbf{u}_r = \mathbf{v}_r$ für alle $r \geq 0$, insbesondere also auch $\mathbf{u}_{t+s} = \mathbf{v}_{t+s} = (S_t \mathbf{u}_s) \mathbf{u}_t$.

Für alle $\mathbf{a} \in \mathcal{A}_0$ folgt mit $\Lambda := \langle \mathbf{b}_1 | \cdot \mathbf{b}_1 \rangle_0$ aus (4.24)

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{u}_t | \mathbf{a} \mathbf{u}_t \rangle_0 &= \mathbf{a} + \langle \mathbf{1} | \mathbf{a} \int_0^t db_s \mathbf{u}_s \rangle_0 + \langle \int_0^t db_s \mathbf{u}_s | \mathbf{a} \rangle_0 \\
&\quad + \langle \mathbf{1} | \mathbf{a} \int_0^t ds K \mathbf{u}_s \rangle_0 + \langle \int_0^t ds K \mathbf{u}_s | \mathbf{a} \rangle_0 \\
&\quad + \langle \int_0^t db_s \mathbf{u}_s | \mathbf{a} \int_0^t db_s \mathbf{u}_s \rangle_0 \\
&\quad + \langle \int_0^t ds K \mathbf{u}_s | \mathbf{a} \int_0^t db_s \mathbf{u}_s \rangle_0 + \langle \int_0^t db_s \mathbf{u}_s | \mathbf{a} \int_0^t ds K \mathbf{u}_s \rangle_0 \\
&\quad + \langle \int_0^t ds K \mathbf{u}_s | \mathbf{a} \int_0^t ds K \mathbf{u}_s \rangle_0 \\
&= \mathbf{a} + \int_0^t ds \langle \mathbf{1} | \mathbf{a} K \mathbf{u}_s \rangle_0 + \int_0^t ds \langle K \mathbf{u}_s | \mathbf{a} \rangle_0 \\
&\quad + \int_0^t ds \langle \mathbf{u}_s | \Lambda(\mathbf{a}) \mathbf{u}_s \rangle_0 \\
&\quad + \int_0^t ds \langle K \mathbf{u}_s | \mathbf{a} \int_0^s db_r \mathbf{u}_r \rangle_0 + \int_0^t ds \langle \int_0^s db_r \mathbf{u}_r | \mathbf{a} K \mathbf{u}_s \rangle_0 \\
&\quad + \int_0^t \int_0^s \langle K \mathbf{u}_s | \mathbf{a} K \mathbf{u}_r \rangle_0 dr ds + \int_0^t \int_0^r \langle K \mathbf{u}_s | \mathbf{a} K \mathbf{u}_r \rangle_0 ds dr.
\end{aligned}$$

Die w^* -Ableitung von $R_t(\mathbf{a}) := \langle \mathbf{u}_t | \mathbf{a} \mathbf{u}_t \rangle_0$ ist also für alle $\mathbf{a} \in \mathcal{A}_0$ erklärt:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} R_t(\mathbf{a}) &= \frac{d}{dt} \langle \mathbf{u}_t | \mathbf{a} \mathbf{u}_t \rangle_0 \\
&= \langle \mathbf{1} | \mathbf{a} K \mathbf{u}_t \rangle_0 + \langle K \mathbf{u}_t | \mathbf{a} \rangle_0 + \langle \mathbf{u}_t | \Lambda(\mathbf{a}) \mathbf{u}_t \rangle_0 \\
&\quad + \langle K \mathbf{u}_t | \mathbf{a} \int_0^t db_r \mathbf{u}_r \rangle_0 + \langle \int_0^t db_r \mathbf{u}_r | \mathbf{a} K \mathbf{u}_t \rangle_0 \\
&\quad + \langle K \mathbf{u}_t | \mathbf{a} \int_0^t dr K \mathbf{u}_r \rangle_0 + \langle \int_0^t dr K \mathbf{u}_r | \mathbf{a} K \mathbf{u}_t \rangle_0 \\
&= \langle \mathbf{1} | \mathbf{a} K \mathbf{u}_t \rangle_0 + \langle K \mathbf{u}_t | \mathbf{a} \rangle_0 + R_t(\Lambda(\mathbf{a})) \\
&\quad - \langle K \mathbf{u}_t | \mathbf{a} (\mathbf{1} - \mathbf{u}_t) \rangle_0 - \langle \mathbf{1} - \mathbf{u}_t | \mathbf{a} K \mathbf{u}_t \rangle_0
\end{aligned}$$

$$= R_t(\Lambda(\mathbf{a})) + R_t(K^* \mathbf{a} + \mathbf{a}K).$$

Damit ist $(R_t)_{t \geq 0}$ eine $\|\cdot\|$ -stetige Halbgruppe mit Generator $L(\mathbf{a}) := \Lambda(\mathbf{a}) + (K^* \mathbf{a} + \mathbf{a}K)$. u ist genau dann unital, wenn R_t $\mathbb{1}$ -erhaltend ist, wenn also $L(\mathbb{1}) = 0$ gilt. Das wiederum ist äquivalent zu $\|b_1\|_0^2 = \Lambda(\mathbb{1}) = -(K + K^*)$, d.h. nach (3.12) zu $\|b_t\|_0^2 = -(K + K^*)t$.

Die letzte Behauptung ist in dem folgenden Lemma enthalten: Nach Theorem 3.4.4 existiert die rechte Seite von (4.29), sogar für eine beliebige Zerlegungsfolge des Intervalls $[0, t]$, deren Feinheit gegen Null konvergiert. Zur Identifikation des Grenzwertes kann also die spezielle Zerlegungsfolge in (4.29) benutzt werden. \square

4.5.3 Lemma. *Für eine Lösung u der SDGL (4.24) gelten folgende Beziehungen:*

$$i) \quad \langle b_t | \mathbf{a} \int_0^t db_s u_s \rangle_0 = \int_0^t \Lambda(\mathbf{a}) A_s ds, \quad \mathbf{a} \in \mathcal{A}_0, \quad (4.28)$$

$$ii) \quad b_t = \|\cdot\|_0\text{-}\lim_n \sum_{i=0}^{2^n-1} S_{i\delta_n} (u_{\delta_n} - A_{\delta_n}), \quad \delta_n := t2^{-n}. \quad (4.29)$$

Beweis. Aus dem vorausgehenden Lemma wissen wir, daß u ein unitaler Kozyklus ist und daß $A_t := P_0 u_t$ eine $\|\cdot\|$ -stetige Kontraktionshalbgruppe definiert, deren Generator durch den Operator $K \in \mathcal{A}_0$ der SDGL (4.24) bestimmt ist. Daher haben wir die Ergebnisse von Theorem 3.4.4 zu unserer Verfügung. Wir wissen also, daß die rechte Seite von (4.29) existiert und einen additiven Kozyklus definiert, den wir nur noch als b identifizieren müssen. Im folgenden sei Λ wieder durch $\langle b_1 | \cdot b_1 \rangle_0$ gegeben.

Zu i): Wegen der $\|\cdot\|_0$ -Stetigkeit von $t \mapsto u_t$ (vgl. 4.4.2) gilt:

$$\begin{aligned} \langle b_t | \mathbf{a} \int_0^t db_s u_s \rangle_0 &= \|\cdot\|_0\text{-}\lim_n \sum_{i=0}^{2^n-1} \langle b_t | \mathbf{a} (S_{i\delta_n} b_{\delta_n}) u_{i\delta_n} \rangle_0 \\ &= \|\cdot\|_0\text{-}\lim_n \sum_{i=0}^{2^n-1} \langle S_{i\delta_n} b_{\delta_n} | \mathbf{a} (S_{i\delta_n} b_{\delta_n}) u_{i\delta_n} \rangle_0 \\ &= \|\cdot\|_0\text{-}\lim_n \sum_{i=0}^{2^n-1} \langle \langle b_{\delta_n} | \mathbf{a}^* b_{\delta_n} \rangle_0 | u_{i\delta_n} \rangle_0 \\ &= \|\cdot\|_0\text{-}\lim_n \sum_{i=0}^{2^n-1} \Lambda(\mathbf{a}) A_{i\delta_n} \delta_n = \int_0^t \Lambda(\mathbf{a}) A_s ds. \end{aligned}$$

Zu ii): Bestimme zunächst die Ordnung von $\int_0^{\delta_n} K(u_s - \mathbb{1}) ds$:

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^{\delta_n} K(u_s - \mathbb{1}) ds \right\|_0 &= \sup_{\omega \in \mathcal{A}_{0^+}^*, 1} d_\omega \left(\int_0^{\delta_n} K(u_s - \mathbb{1}) ds \right) \\ &\leq \sup_{\omega \in \mathcal{A}_{0^+}^*, 1} \int_0^{\delta_n} d_\omega(K(u_s - \mathbb{1})) ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_0^{\delta_n} \|K(\mathbf{u}_s - \mathbf{1})\|_0 \, ds \\
&\leq \int_0^{\delta_n} \sqrt{2} \|K\| \|\mathbf{1} - A_s\|^{\frac{1}{2}} \, ds \leq o(\delta_n^{3/2}).
\end{aligned}$$

Nun zur Approximation von \mathbf{b}_t :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{2^n-1} S_{i\delta_n} (\mathbf{u}_{\delta_n} - A_{\delta_n}) &= \sum_{i=0}^{2^n-1} S_{i\delta_n} (\mathbf{u}_{\delta_n} - \mathbf{1}) - \sum_{i=0}^{2^n-1} A_{\delta_n} - \mathbf{1} \\
&= \sum_{i=0}^{2^n-1} S_{i\delta_n} \int_0^{\delta_n} db_s \mathbf{u}_s - \sum_{i=0}^{2^n-1} S_{i\delta_n} \int_0^{\delta_n} ds K \mathbf{u}_s \\
&\quad - \sum_{i=0}^{2^n-1} \frac{A_{\delta_n} - \mathbf{1}}{\delta_n} \cdot \delta_n.
\end{aligned}$$

Der erste Summand konvergiert in der $\|\cdot\|_0$ -Norm gegen \mathbf{b}_t , der zweite gegen Kt und der dritte ersichtlich gegen $-\mathbf{K}t$:

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{i=0}^{2^n-1} S_{i\delta_n} \int_0^{\delta_n} db_s \mathbf{u}_s - \mathbf{b}_t \right|_0^2 &= \left| \sum_{i=0}^{2^n-1} S_{i\delta_n} \int_0^{\delta_n} db_s \mathbf{u}_s - S_{i\delta_n} \mathbf{b}_{\delta_n} \right|_0^2 \\
&= \sum_{i=0}^{2^n-1} \left| \int_0^{\delta_n} db_s \mathbf{u}_s - \mathbf{b}_{\delta_n} \right|_0^2 \\
&= \sum_{i=0}^{2^n-1} \left(\int_0^{\delta_n} R_s(\Lambda(\mathbf{1})) \, ds + \delta_n \Lambda(\mathbf{1}) \right) \\
&\quad - 2 \operatorname{Re} \sum_{i=0}^{2^n-1} \langle \mathbf{b}_{\delta_n} | \int_0^{\delta_n} db_s \mathbf{u}_s \rangle_0 \\
&= \underbrace{\sum_{i=0}^{2^n-1} \int_0^{\delta_n} R_s(\Lambda(\mathbf{1})) \, ds + \Lambda(\mathbf{1})t}_{\rightarrow 2\Lambda(\mathbf{1})t} \\
&\quad - \underbrace{2 \operatorname{Re} \sum_{i=0}^{2^n-1} \int_0^{\delta_n} \Lambda(\mathbf{1}) A_s \, ds}_{\rightarrow -2\Lambda(\mathbf{1})t} \xrightarrow[\|\cdot\|_0]{n \rightarrow \infty} 0, \\
\sum_{i=0}^{2^n-1} S_{i\delta_n} \int_0^{\delta_n} K \mathbf{u}_s \, ds - Kt &= \sum_{i=0}^{2^n-1} S_{i\delta_n} \int_0^{\delta_n} K(\mathbf{u}_s - \mathbf{1}) \, ds \xrightarrow[\|\cdot\|_0]{\leq o(\delta_n^{1/2})} 0.
\end{aligned}$$

Dabei ist $R_s := \langle \mathbf{u}_s | \cdot \mathbf{u}_s \rangle_0$ die $\|\cdot\|$ -stetige Halbgruppe gemäß Satz 3.1.2. □

Mit Lemma 4.5.2 und Theorem 3.4.4 sind, bis auf eine, alle Behauptungen von Theorem 4.5.1 abgedeckt. Was noch fehlt ist die Letzte: Wir wissen noch nicht, daß *jeder* unitale Kozyklus u als Lösung einer SDGL der Form (4.24) entsteht. Immerhin ist aus Lemma 4.5.2 ersichtlich, daß der additive Kozyklus b , den wir zur Aufstellung dieser SDGL benötigen würden, aus u gemäß der Standardkonstruktion entstehen müßte.

4.5.4 Lemma. *Jeder $\|\cdot\|_0$ -stetige unitale Kozyklus u ist die Lösung der SDGL (4.24), wobei b aus u gemäß der Standardkonstruktion (4.25) entsteht.*

Beweis. Wir stellen zunächst einige Ergebnisse zusammen, die wir im Verlaufe des Beweises zur Hand haben wollen. Wir können auf Theorem 3.4.4 zurückgreifen: $R_t := \langle u_t | \cdot u_t \rangle_0$ besitzt den Generator $\mathcal{A}_0 \ni \alpha \mapsto L(\alpha) := \Lambda(\alpha) + K^* \alpha + \alpha K$, mit $\Lambda := \langle b_1 | \cdot b_1 \rangle_0$ und $A_t := P_0 u_t = e^{Kt}$, sowie $\Lambda(\mathbf{1}) = -(K^* + K)$. Die Standardkonstruktion von b verwenden wir in der Form

$$b_t = \|\cdot\|_0\text{-}\lim_n \sum_{i=0}^{2^n-1} S_{i\delta_n}(u_{\delta_n} - A_{\delta_n}), \quad \delta_n := t2^{-n}.$$

Um die Behauptung des Lemmas zu beweisen, wird

$$\left| u_t - \mathbf{1} - \int_0^t db_s u_s - \int_0^t ds Ku_s \right|_0^2 = 0 \quad (4.30)$$

gezeigt. Dafür werden wir folgende Ausdrücke berechnen:

- i) $|u_t|_0^2 = \mathbf{1}$,
- ii) $|\mathbf{1}|_0^2 = \mathbf{1}$,
- iii) $\left| \int_0^t db_s u_s \right|_0^2 = \int_0^t R_s \Lambda(\mathbf{1}) ds$,
- iv) $\left| \int_0^t ds Ku_s \right|_0^2 = \int_0^t R_s \Lambda(\mathbf{1}) ds - \int_0^t R_s \Lambda(A_{t-s} + A_{t-s}^*) ds + \mathbf{1} - A_t + \mathbf{1} - A_t^*$,
- v) $-2 \operatorname{Re} \langle u_t | \mathbf{1} \rangle_0 = -A_t - A_t^*$,
- vi) $-2 \operatorname{Re} \langle u_t | \int_0^t db_s u_s \rangle_0 = -\int_0^t R_s \Lambda(A_{t-s} + A_{t-s}^*) ds$,
- vii) $-2 \operatorname{Re} \langle u_t | \int_0^t ds Ku_s \rangle_0 = \int_0^t R_s \Lambda(A_{t-s} + A_{t-s}^*) ds - (\mathbf{1} - A_t) - (\mathbf{1} - A_t^*)$,
- viii) $2 \operatorname{Re} \langle \mathbf{1} | \int_0^t db_s u_s \rangle_0 = 0$,
- ix) $2 \operatorname{Re} \langle \mathbf{1} | \int_0^t ds Ku_s \rangle_0 = -(\mathbf{1} - A_t) - (\mathbf{1} - A_t^*)$,
- x) $2 \operatorname{Re} \langle \int_0^t ds Ku_s | \int_0^t db_s u_s \rangle_0 = -2 \int_0^t R_s \Lambda(\mathbf{1}) ds + \int_0^t R_s \Lambda(A_{t-s} + A_{t-s}^*) ds$.

Gleichung (4.30) erhält man jetzt einfach durch Addieren von i) bis x). i), ii), iii), v) und viii), sowie ix) sind klar.

Zu iv):

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t ds Ku_s \right|_0^2 &= \int_0^t \int_0^r \langle u_s | K^* Ku_r \rangle_0 ds dr + \int_0^t \int_r^t \langle u_s | K^* Ku_r \rangle_0 ds dr \\ &\stackrel{(*)}{=} \int_0^t \int_0^r R_s(K^* KA_{r-s}) ds dr + \int_0^t R_r \left(\int_r^t \underbrace{A_{s-r}^* K^* K}_{= \frac{d}{ds} A_{s-r}^*} ds \right) dr. \end{aligned}$$

Das zweite Integral läßt sich zu $\int_0^t R_r((A_{t-r}^* - \mathbb{1})K) dr$ auswerten und das erste durch Vertauschen der Integrationsreihenfolge zu

$$\int_0^t R_s \left(\int_s^t K^* KA_{r-s} dr \right) ds = \int_0^t R_s(K^*(A_{t-s} - \mathbb{1})) ds.$$

Zusammengefaßt:

$$\left| \int_0^t ds Ku_s \right|_0^2 = \int_0^t R_s \Lambda(\mathbb{1}) ds + \int_0^t R_s(A_{t-s}^* K + K^* A_{t-s}) ds.$$

Für die nachfolgende Rechnung formen wir $-\int_0^t R_s(K^* A_{t-s}^*) ds$ um:

$$-\int_0^t R_s(K^* A_{t-s}^*) ds = \int_0^t R_s \left(\frac{d}{ds} A_{t-s}^* \right) ds = \mathbb{1} - A_t^* - \int_0^t R_s L(A_{t-s}^*) ds.$$

Genauso verfahren wir mit $-\int_0^t R_s(A_{t-s} K) ds$. Unter Berücksichtigung der Form des Generators L erhalten wir damit

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t ds Ku_s \right|_0^2 &= \int_0^t R_s \Lambda(\mathbb{1}) ds \\ &\quad + \int_0^t R_s(A_{t-s}^* K + K^* A_{t-s}^*) ds + \int_0^t R_s(A_{t-s} K + K^* A_{t-s}) ds \\ &\quad - \int_0^t R_s(K^* A_{t-s}^*) ds - \int_0^t R_s(A_{t-s} K) ds \\ &= \int_0^t R_s \Lambda(\mathbb{1}) ds \\ &\quad + \int_0^t R_s(A_{t-s}^* K + K^* A_{t-s}^*) ds + \int_0^t R_s(A_{t-s} K + K^* A_{t-s}) ds \\ &\quad - \int_0^t R_s L(A_{t-s} + A_{t-s}^*) ds + \mathbb{1} - A_t + \mathbb{1} - A_t^* \\ &= \int_0^t R_s \Lambda(\mathbb{1}) ds - \int_0^t R_s \Lambda(A_{t-s} + A_{t-s}^*) ds + \mathbb{1} - A_t + \mathbb{1} - A_t^*. \end{aligned}$$

Zu vi):

Bestimme zunächst für $0 \leq s \leq t - \delta$:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}_t | (S_s \mathbf{b}_\delta) \mathbf{u}_s \rangle_0 &= \langle (S_s \mathbf{u}_{t-s}) \mathbf{u}_s | (S_s \mathbf{b}_\delta) \mathbf{u}_s \rangle_0 \\ &= R_s \langle \mathbf{u}_{t-s} | \mathbf{b}_\delta \rangle_0 = R_s \langle \mathbf{A}_{t-s-\delta} \mathbf{u}_\delta | \mathbf{b}_\delta \rangle_0 \\ &\stackrel{(3.17)}{=} R_s \left(\int_0^\delta \mathbf{A}_r^* \Lambda(\mathbf{A}_{\delta-r}^* \mathbf{A}_{t-s-\delta}^*) dr \right) = R_s \left(\int_0^\delta \mathbf{A}_r^* \Lambda(\mathbf{A}_{t-s-r}^*) dr \right) \end{aligned}$$

und erhalte damit:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}_t | \int_0^t d\mathbf{b}_s \mathbf{u}_s \rangle_0 &= \lim_n \sum_{i=0}^{2^n-1} \langle \mathbf{u}_t | (S_{i\delta_n} \mathbf{b}_{\delta_n}) \mathbf{u}_{i\delta_n} \rangle_0 \\ &= \lim_n \sum_{i=0}^{2^n-1} R_{i\delta_n} \underbrace{\left(\frac{1}{\delta_n} \int_0^{\delta_n} \mathbf{A}_r^* \Lambda(\mathbf{A}_{t-i\delta_n-r}^*) dr - \Lambda(\mathbf{A}_{t-i\delta_n}^*) \right)}_{o(\delta_n)} \cdot \delta_n \\ &\quad + \lim_n \sum_{i=0}^{2^n-1} R_{i\delta_n} (\Lambda(\mathbf{A}_{t-i\delta_n}^*)) \cdot \delta_n \\ &= \int_0^t R_s \Lambda(\mathbf{A}_{t-s}^*) ds. \end{aligned}$$

Zu vii):

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}_t | \int_0^t ds \mathbf{K} \mathbf{u}_s \rangle_0 &= \int_0^t \langle (S_s \mathbf{u}_{t-s}) \mathbf{u}_s | \mathbf{K} \mathbf{u}_s \rangle_0 ds = \int_0^t R_s (\mathbf{A}_{t-s}^* \mathbf{K}) ds \\ &= \int_0^t R_s (\mathbf{A}_{t-s}^* \mathbf{K} + \mathbf{K}^* \mathbf{A}_{t-s}^*) ds - \int_0^t R_s (\mathbf{K}^* \mathbf{A}_{t-s}^*) ds \\ &= \int_0^t R_s \mathbf{L}(\mathbf{A}_{t-s}^*) ds - \int_0^t R_s \Lambda(\mathbf{A}_{t-s}^*) ds - \int_0^t R_s (\mathbf{K}^* \mathbf{A}_{t-s}^*) ds \\ &= \mathbf{1} - \mathbf{A}_t^* - \int_0^t R_s \Lambda(\mathbf{A}_{t-s}^*) ds. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung erhalten wir wieder, wie unter iv), durch partielle Integration.

Zu x):

Dieselbe Rechnung wie für (vi) zeigt:

$$\langle \mathbf{K} \mathbf{u}_s | \int_0^s d\mathbf{b}_r \mathbf{u}_r \rangle_0 = \int_0^s R_r \Lambda(\mathbf{K}^* \mathbf{A}_{s-r}^*) dr.$$

Damit ist

$$\langle \int_0^t ds \mathbf{K} \mathbf{u}_s | \int_0^t d\mathbf{b}_s \mathbf{u}_s \rangle_0 = \int_0^t \langle \mathbf{K} \mathbf{u}_s | \int_0^s d\mathbf{b}_r \mathbf{u}_r \rangle_0 ds = \int_0^t \int_0^s R_r \Lambda(\mathbf{K}^* \mathbf{A}_{s-r}^*) dr ds$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^t \int_r^t \mathbb{R}_r \wedge (K^* A_{s-r}^*) \, ds \, dr = \int_0^t \mathbb{R}_r \wedge (A_{t-r}^* - \mathbb{1}) \, dr \\
&= \int_0^t \mathbb{R}_r \wedge (A_{t-r}^*) \, dr - \int_0^t \mathbb{R}_r \wedge (\mathbb{1}) \, dr. \quad \square
\end{aligned}$$

Damit haben wir alle Hilfsmittel beisammen, um Theorem 4.5.1 zu beweisen.

Beweis von Theorem 4.5.1. Die eindeutige Zuordnung eines unitalen Kozyklus u bei gegebenem additiven Kozyklus $b \in \Lambda^2(\mathcal{A})$ und $K \in \mathcal{A}_0$, vermittelt durch die Lösung der SDGL (4.24), sowie der erste Teil der Konsistenzbehauptungen wurde in Lemma 4.5.2 gezeigt. Die Umkehrung ist der Inhalt von Theorem 3.4.4. Die Konsistenzbehauptungen ergeben sich aus Lemma 4.5.2 und Lemma 4.5.4. \square

5. Affilierte Operatoren

Wir hatten in Abschnitt 2.3.4 eine konkrete Realisierung des Hilbert W^* -Moduls $L^2(\mathcal{A}, P_0)$ durch Operatoren aus $\mathcal{B}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_\psi)$ kennengelernt. In dieser Realisierung ist es aber schwierig Kriterien anzugeben, die sicherstellen, daß ein konkretes Element aus $L^2(\mathcal{A}, P_0)$ bereits in \mathcal{A} liegt, oder daß es sich bei diesem Element etwa um einen unitären Operator handelt. Tatsächlich soll es einmal ein wesentlicher Bestandteil dieser Theorie sein, die unitalen Lösungen der stochastischen Differentialgleichungen (4.24) als *unitäre* Operatoren zu identifizieren. Wir benötigen demnach eine Realisierung von $L^2(\mathcal{A}, P_0)$, die es für eine gewisse Klasse von Elementen in $L^2(\mathcal{A}, P_0)$ gestattet, auch einfache algebraische Operationen, wie Quadrieren und Betragsbildung durchzuführen. Wir werden sehen, daß zumindest für den Fall, daß es sich bei \mathcal{A} um eine finite von Neumann Algebra handelt, eine Realisierung von $L^2(\mathcal{A}, P_0)$ durch bestimmte affilierte Operatoren existiert, die wir als P_0 -*affiliert* bezeichnen wollen. Bekannterweise bilden die zu einer finiten von Neumann Algebra affilierten Operatoren eine $*$ -Algebra (vgl. [KaRi2], Ex. 8.7.60).

Finite Algebren stellen in unserem Kontext keine wirkliche Einschränkung dar. Der Zustand ψ unseres Wahrscheinlichkeitsraumes (\mathcal{A}, ψ) ist zwar nicht notwendig ein Spurzustand, aber die uns hauptsächlich interessierenden unitären Kozyklen u sollten im Zentralisator \mathcal{A}^ψ von (\mathcal{A}, ψ) liegen. Nur so kann $\text{Ad } u_t \in \text{Aut}(\mathcal{A}, \psi)$ und $R_t = P_0 \circ \text{Ad } u_t \in \text{Mor}(\mathcal{A}_0, \psi)$ erfüllt sein. Über die Standardkonstruktion (4.25) folgt dann, daß der zugehörige additive Kozyklus b in $L^2(\mathcal{A}^\psi, P_0)$ liegt. Die geforderte Stationarität unserer dynamischen Systeme bringt es also mit sich, daß ein wesentlicher Teil unserer Theorie in der finiten W^* -Algebra \mathcal{A}^ψ und dem zugehörigen Hilbertmodul $L^2(\mathcal{A}^\psi, P_0)$ formuliert werden kann. Dieses Hilbertmodul läßt sich durch P_0 -affilierte Operatoren realisieren, wie wir in diesem Kapitel sehen werden. Das bedeutet jedoch nicht, daß wir uns von vornherein auf finite W^* -Algebren beschränken können, indem wir nur auf dem Zentralisator von (\mathcal{A}, ψ) arbeiten. Zwar kann mit einem unitären Kozyklus $u \subset \mathcal{A}^\psi$ der Markov-Prozeß $T_t = \text{Ad } u_t \circ S_t$ auf \mathcal{A} und daraus die Kontraktionshalbgruppe $R_t = P_0 \circ T_t$ auf \mathcal{A}_0 gewonnen werden, aber der Lindblad-Generator $L(a) = \langle b_1 | a b_1 \rangle_0 + K^* a + a K$, $a \in \mathcal{A}$, gemäß Theorem 3.4.4, läßt sich nur über die Hilbertmodul-Theorie formulieren. Die P_0 -affilierten Operatoren stellen also eine wertvolle Ergänzung der Hilbertmoduln dar, da sie ‘nah’ genug an der Algebra \mathcal{A} liegen, um die Frage nach Unitarität bestimmter Hilbertmodul-Elemente stellen zu können.

Wir werden in diesem Kapitel zunächst den Zusammenhang zwischen Hilbertmodul-Elementen bzgl. einer finiten von Neumann Algebra und P_0 -affilierten Operatoren herstellen. Dann beschreiben wir den Unterraum der adjungierbaren Hilbertmodul-Elemente. Schließlich werden wir eine Teilmenge \mathcal{E}^4 der P_0 -affilierten Operatoren bestimmen, in der

die Adjungierte und das Betragsquadrat eines Elementes wieder ein P_0 -affiliierter Operator (d.h., wieder ein Element aus $L^2(\mathcal{A}, P_0)$) ist. Dieses Kapitel geht in Teilen über das hinaus, was für die in dieser Arbeit gesteckten Ziele nötig ist. Da aber an dieser Stelle alle Hilfsmittel bereitgestellt sind, wäre es schade, sich nur auf das unbedingt Notwendige zu beschränken.

5.1 P_0 -affilierte Operatoren

In diesem Abschnitt wird eine Realisierung von $L^2(\mathcal{A}, P_0)$ durch affilierte Operatoren angegeben. Es handelt sich dabei um die Verallgemeinerung einer Konstruktion aus der Tomita-Takesaki-Theorie, wo jedem Vektor aus dem Definitionsbereich des modularen Operators ein affiliierter Operator zugeordnet werden konnte ([BrRo1], Proposition 2.5.9).

5.1.1 Proposition. $(\mathcal{A}, \psi, \mathcal{A}_0)$ sei ein finiter Wahrscheinlichkeitsraum. Dann gehört zu jedem $x \in L^2(\mathcal{A}, P_0)$ genau ein affiliierter Operator $X \eta \mathcal{A}$ mit $\mathcal{H}_0 \subseteq D(X)$, der durch

$$X a' \xi_0 := a' x \xi_0, \quad \xi_0 \in \mathcal{H}_0, a' \in \mathcal{A}', \quad (5.1)$$

definiert ist. Insbesondere ist $\mathcal{A}' \mathcal{H}_0$ ein Core für X .

Beweis. Um die Wohldefiniertheit von X zu zeigen, approximieren wir das Element $x \in L^2(\mathcal{A}, P_0)$ durch eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$: $x = s\text{-}\lim_n x_n$. Aus $a' \xi_0 = 0$ folgt dann $a' x \xi_0 = \lim_n a' x_n \xi_0 = \lim_n x_n a' \xi_0 = 0$. Offensichtlich ist X dicht definiert und hat \mathcal{H}_0 im Definitionsbereich. X ist abschließbar, da auch X^* dicht definiert ist:

$$\begin{aligned} |\langle a' \Omega | X b' \xi_0 \rangle| &= \lim_n |\langle a' x_n^* \Omega | b' \xi_0 \rangle| = \lim_n |\langle a' J x_n \Omega | b' \xi_0 \rangle| \\ &\leq \|a'\| \sup_n \|x_n \Omega\| \|b' \xi_0\| \end{aligned}$$

zeigt, daß der dichte Teilraum $\mathcal{A}' \Omega$ im Definitionsbereich von X^* enthalten ist. Den Abschluß von X bezeichnen wir wieder mit demselben Symbol. $X \eta \mathcal{A}$ ist äquivalent zu $X a' \supseteq a' X$ für alle $a' \in \mathcal{A}'$. Auf dem Core $\mathcal{A}' \mathcal{H}_0$ von X folgt diese Beziehung direkt aus (5.1): $X a' b' \xi_0 = a' b' X \xi_0 = a' X b' \xi_0$ für alle $b' \in \mathcal{A}'$, $\xi_0 \in \mathcal{H}_0$. Da die Affiliertheit eines Operators bereits auf seinem Core geprüft werden kann, ist $X \eta \mathcal{A}$ gezeigt.

Ein weiterer affiliierter Operator Y , der (5.1) erfüllt, wäre eine Fortsetzung von X . Da aber Operatoren, die zu einer finiten von Neumann Algebra affiliert sind keine echten Fortsetzungen besitzen, muß X mit Y übereinstimmen. \square

5.1.2 Bemerkung. Ein affiliierter Operator X , dessen Definitionsbereich \mathcal{H}_0 umfaßt, enthält auch Ω . Die Proposition für $\mathcal{A}_0 = \mathbb{C} \cdot \mathbb{1}$ sagt dann, daß durch $\tilde{X} a' \Omega = a' x \Omega$, $a' \in \mathcal{A}'$, genau ein affiliierter Operator \tilde{X} mit Core $\mathcal{A}' \Omega$ definiert wird. Dieser besitzt offensichtlich X als Fortsetzung und muß daher mit X übereinstimmen. Somit wird auch durch $\mathcal{A}' \Omega$ ein Core für X bestimmt. Diese Beobachtung wird uns später mitunter die Beweistechnik etwas erleichtern.

5.1.3 Definition. Ein Operator X , der zur von Neumann Algebra \mathcal{A} eines Wahrscheinlichkeitsraumes $(\mathcal{A}, \psi, \mathcal{A}_0)$ affiliert ist, heißt P_0 -affiliert zu \mathcal{A} , falls \mathcal{H}_0 im Definitionsbereich von X enthalten ist und $\mathcal{A}'\mathcal{H}_0$ ein Core für X darstellt. Ist $\mathcal{A}_0 = \mathbb{C} \cdot \mathbb{1}$, so sprechen wir auch von ψ -affilierten Operatoren.

5.1.4 Lemma. Ist der Wahrscheinlichkeitsraum $(\mathcal{A}, \psi, \mathcal{A}_0)$ finit, so folgt die P_0 -Affiliertheit eines Operators $X \eta \mathcal{A}$ bereits aus $\mathcal{H}_0 \subseteq D(X)$.

Beweis. Die Affiliertheit von X hat $\mathcal{A}'\mathcal{H}_0 \subseteq D(X)$ zur Folge. Es muß also nur noch gezeigt werden, daß $X|_{\mathcal{A}'\mathcal{H}_0}$ ein abschließbarer Operator ist (der dann X als Fortsetzung besitzt und daher mit X übereinstimmt): Aus $\langle \alpha' \Omega | X b' \xi_0 \rangle = \langle \alpha' J X \Omega | b' \xi_0 \rangle$ für alle $\alpha', b' \in \mathcal{A}'$, $\xi_0 \in \mathcal{H}_0$, ist ersichtlich, daß die Adjungierte von $X|_{\mathcal{A}'\mathcal{H}_0}$ dicht definiert und dieser Operator folglich abschließbar ist. \square

5.1.5 Satz. Für einen finiten Wahrscheinlichkeitsraum $(\mathcal{A}, \psi, \mathcal{A}_0)$ bestimmt Gleichung (5.1) eine 1-1-Beziehung zwischen Elementen aus $L^2(\mathcal{A}, P_0)$ und P_0 -affilierten Operatoren.

Beweis. Proposition 5.1.1 stellt eine injektive Abbildung von $L^2(\mathcal{A}, P_0)$ in die Menge der P_0 -affilierten Operatoren bereit, von der also nur noch die Surjektivität nachgewiesen werden muß. Zu einem P_0 -affilierten Operator X muß ein Element $x \in L^2(\mathcal{A}, P_0)$ angegeben werden, für das Gleichung (5.1) erfüllt ist. Da der abgeschlossene Teilraum \mathcal{H}_0 in $D(X)$ enthalten ist, ist $x := X|_{\mathcal{H}_0}$ ein beschränkter Operator, der in $L^2(\mathcal{A}, P_0)$ liegt, falls er in der stop-Topologie auf $L^2(\mathcal{A}, P_0)$ durch eine Folge aus \mathcal{A} approximiert werden kann (die Einheitskugel in $L^2(\mathcal{A}, P_0)$ ist stop-vollständig). Diese Folge läßt sich mit Hilfe der Polarzerlegung $X = u|X|$ von X und der Spektralprojektoren $e_n := \chi_{[0,n]}(|X|)$ in der Form $x_n := X e_n \in \mathcal{A}$ gewinnen:

$$\|(x - x_n)\xi_0\| = \|(X - X e_n)\xi_0\| = \|u(\mathbb{1} - e_n)u^* X \xi_0\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

für alle $\xi_0 \in \mathcal{H}_0$ beweist die gewünschte stop-Konvergenz der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen x . Gleichung (5.1) folgt nun direkt aus der Affiliertheit von X . \square

5.1.6 Korollar. Für einen finiten Wahrscheinlichkeitsraum $(\mathcal{A}, \psi, \mathbb{C} \cdot \mathbb{1})$ bestimmt Gleichung (5.1) – mit $\mathcal{H}_0 = \mathbb{C} \cdot \Omega$ – eine 1-1-Beziehung zwischen dem GNS Hilbertraum $L^2(\mathcal{A}, \psi)$ und den ψ -affilierten Operatoren. Darüberhinaus gilt für alle ψ -affilierten Operatoren $Jx\Omega = x^*\Omega$, d.h. mit x ist auch x^* ψ -affiliert.

Beweis. Es ist nur noch die ψ -Affiliertheit von x^* zu zeigen. Dafür sei $x\Omega = \lim_n x_n\Omega$ mit $x_n \in \mathcal{A}$. Dann gilt für alle $\alpha' \in \mathcal{A}'$:

$$\langle Jx\Omega | \alpha'\Omega \rangle = \lim_n \langle x_n^* \Omega | \alpha'\Omega \rangle = \lim_n \langle \Omega | \alpha' x_n \Omega \rangle = \langle \Omega | x \alpha' \Omega \rangle,$$

d.h. $\Omega \in D(x^*)$ und $Jx\Omega = x^*\Omega$. Insbesondere ist x^* ψ -affiliert. \square

5.1.7 Definition. Die Approximation $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ von X , die mittels der Spektralprojektoren $e_n := \chi_{[0,n]}(|X|)$ von $|X|$ durch $x_n := X e_n$ konstruiert wird, heißt Standardapproximation von X .

5.1.8 Die Menge $\mathcal{E} := \{X\eta\mathcal{A} \mid \mathcal{H}_0 \subseteq D(X)\}$ der P_0 -affilierten Operatoren kann in natürlicher Weise zu einer Realisierung von $L^2(\mathcal{A}, P_0)$ gemacht werden: Offensichtlich ist mit X auch $X\alpha_0$, $\alpha_0 \in \mathcal{A}_0$, P_0 -affiliert, d.h. die Rechtsmodulwirkung von \mathcal{A}_0 auf \mathcal{E} ist einfach die Operatormultiplikation. Die Modulabbildung $\alpha : \mathcal{E} \rightarrow L^2(\mathcal{A}, P_0)$; $X \mapsto X|_{\mathcal{H}_0}$ ist nach Satz 5.1.5 eine Bijektion. Wir definieren das innere Produkt auf \mathcal{E} durch

$$\langle X|Y \rangle_{\mathcal{E}} := \langle \alpha(X) | \alpha(Y) \rangle_0, \quad X, Y \in \mathcal{E}. \quad (5.2)$$

Auf diese Weise wird \mathcal{E} ein Hilbertmodul über \mathcal{A}_0 , das gemäß Definition 2.1.6 unitär äquivalent zu $L^2(\mathcal{A}, P_0)$ ist. Die von $L^2(\mathcal{A}, P_0)$ auf \mathcal{E} induzierte stop-Konvergenz entspricht dabei der *Konvergenz auf \mathcal{H}_0* . Darunter wollen wir folgendes verstehen: Eine Folge $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ P_0 -affiliierter Operatoren konvergiert auf \mathcal{H}_0 gegen den P_0 -affilierten Operator X , falls für alle $\xi_0 \in \mathcal{H}_0$ die Folge $(X_n \xi_0)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $X \xi_0$ konvergiert. Natürlich ist das äquivalent zur stop-Konvergenz für die zugehörige Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq L^2(\mathcal{A}, P_0)$, $x_n := X_n|_{\mathcal{H}_0}$. Entsprechend werden Cauchy-Folgen eingeführt. Satz 5.1.5 zeigt dann, daß diese einen P_0 -affilierten Grenzwert besitzen.

Satz. *Das Hilbertmodul der P_0 -affilierten Operatoren ist unitäräquivalent zu dem Hilbert- W^* -Modul $L^2(\mathcal{A}, P_0)$.*

Wir sehen also, daß Elemente aus $L^2(\mathcal{A}, P_0)$ je nach Bedarf als zu $\mathcal{B}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_\psi)$ gehörig, oder als P_0 -affilierte Operatoren aufgefaßt werden dürfen, sofern der Wahrscheinlichkeitsraum $(\mathcal{A}, \psi, \mathcal{A}_0)$ finit ist. Satz 5.1.5 zeigt ja, daß $x \in L^2(\mathcal{A}, P_0) \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_\psi)$ auf genau eine Weise zu einem P_0 -affilierten Operator fortgesetzt werden kann, den wir künftig mit demselben Symbol x bezeichnen wollen. Je nach Problemstellung kann man dann unter x einen P_0 -affilierten Operator, oder seine Einschränkung auf \mathcal{H}_0 verstehen, d.h. wir werden nicht mehr zwischen diesen beiden Realisierungen von $L^2(\mathcal{A}, P_0)$ unterscheiden. In der Notation werden wir weiterhin kleine Buchstaben für Elemente aus $L^2(\mathcal{A}, P_0)$ verwenden (und die Großbuchstaben für P_0 -affilierte Operatoren nur als Übergangslösung ansehen). Gleichung (5.1) lautet nun

$$x a' \xi_0 = a' x \xi_0, \quad \xi_0 \in \mathcal{H}_0, a' \in \mathcal{A}'. \quad (5.3)$$

Bemerkung. Tatsächlich läßt sich das Konzept der Zuordnung P_0 -affiliierter Operatoren auch auf nicht finite Wahrscheinlichkeitsräume ausdehnen, allerdings ist diese dann nicht mehr surjektiv, sondern erfaßt nur noch ein stop-dichtes Untermodul von $L^2(\mathcal{A}, P_0)$. Da wir in der vorliegenden Arbeit nur an finiten Wahrscheinlichkeitsräumen (oder genauer: am Zentralisator-Modul) interessiert sind, soll diese aufwendigere Untersuchung hier nicht vorgestellt werden. Wenn nichts anderes gesagt wird, wollen wir für den Rest dieses Kapitels generell von finiten von Neumann Algebren ausgehen.

5.1.9 Da jeder finite Wahrscheinlichkeitsraum $(\mathcal{A}, \psi, \mathcal{A}_0)$ auch den finiten Raum $(\mathcal{A}, \psi, \mathbb{C} \cdot \mathbf{1})$ umfaßt, muß noch der Zusammenhang zwischen P_0 -affilierten und ψ -affilierten Operatoren geklärt werden. Nach Lemma 5.1.4 ist ein affiliierter Operator

genau dann ψ -affiliert, wenn Ω in seinem Definitionsbereich enthalten ist. Jeder P_0 -affilierte Operator ist also auch ψ -affiliert. Eine später mitunter nützliche Bedingung an einen ψ -affilierten Operator (d.h. an einen Vektor des GNS Hilbertraums, vgl. Korollar 5.1.6), die die P_0 -Affiliertheit zur Folge hat, stellt das folgende Lemma bereit.

Lemma. *Eine $\|\cdot\|_0$ -beschränkte Folge aus $L^2(\mathcal{A}, P_0)$, die in der ψ -Norm gegen ein Element aus $L^2(\mathcal{A}, \psi)$ konvergiert, ist auch stop-konvergent und besitzt dasselbe Grenzelement (aus $L^2(\mathcal{A}, P_0)$). Insbesondere ist ein ψ -affiliierter Operator genau dann P_0 -affiliert, wenn er eine $\|\cdot\|_0$ -beschränkte, $\|\cdot\|_\psi$ -konvergente Approximation aus \mathcal{A} besitzt.*

Beweis. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^2(\mathcal{A}, P_0)$ sei in der $\|\cdot\|_0$ -Norm durch $M > 0$ nach oben beschränkt und $\|\cdot\|_\psi$ -konvergent gegen $x \in L^2(\mathcal{A}, \psi)$. Um die stop-Konvergenz dieser Folge zu zeigen, wählen wir zu gegebenen $\varepsilon > 0$ und $\xi_0 \in \mathcal{H}_0$ ein $a' \in \mathcal{A}'$ mit der Eigenschaft $\|\xi_0 - a'\Omega\| < \frac{\varepsilon}{4M}$ und schätzen ab:

$$\begin{aligned} \|(x_n - x_m)\xi_0\| &\leq \|(x_n - x_m)\|_0 \|\xi_0 - a'\Omega\| + \|a'\| \|(x_n - x_m)\Omega\| \\ &\leq 2M \cdot \frac{\varepsilon}{4M} + \|a'\| \|x_n - x_m\|_\psi \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

für eine geeignete Zahl $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ und alle $n, m \geq n_\varepsilon$. Das ist die stop-Cauchy-Bedingung für die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Da $L^2(\mathcal{A}, P_0)$ stop-folgentvollständig ist, besitzt sie ein Grenzelement $\tilde{x} \in L^2(\mathcal{A}, P_0)$. Aus $\Omega \in D(\tilde{x})$ folgt $\tilde{x}a'\Omega = \lim_n a'x_n\Omega = a'x\Omega = xa'\Omega$ für alle $a' \in \mathcal{A}'$, d.h. \tilde{x} ist eine Fortsetzung von x und stimmt daher mit diesem überein. Damit ist der erste Teil des Lemmas bewiesen. Für den zweiten Teil ist nur noch zu zeigen, daß ein ψ -affiliierter Operator x eine $\|\cdot\|_0$ -beschränkte, $\|\cdot\|_\psi$ -konvergente Approximation aus \mathcal{A} besitzt. Das wird aber durch die Standardapproximation von x sichergestellt (vgl. Definition 5.1.7 und den Beweis von Satz 5.1.5). \square

5.1.10 Satz. *Ein zu \mathcal{A} affilierter Operator gehört genau dann zu $L^2(\mathcal{A}, P_0)$, wenn seine Standardapproximation $\|\cdot\|_0$ -beschränkt ist.*

Beweis. Für ein $x \in L^2(\mathcal{A}, P_0)$ zeigt der Beweis von Satz 5.1.5 die stop-Konvergenz der Standardapproximation und daher auch deren $\|\cdot\|_0$ -Beschränktheit. Ist diese andererseits gegeben, so zeigt die folgende Abschätzung für alle $\xi_0 \in \mathcal{H}_0$, $\eta \in D(x)$,

$$|\langle \xi_0 | x | \eta \rangle| = \lim_n |\langle |x| e_n \xi_0 | \eta \rangle| \leq \sup_n \| |x| e_n \xi_0 \| \|\eta\| \leq \sup_n \|x_n\|_0 \|\xi_0\| \|\eta\|,$$

daß \mathcal{H}_0 in $D(x)$ enthalten ist und somit x in $L^2(\mathcal{A}, P_0)$ liegt. \square

Dieser Satz zeigt insbesondere die Verwandtschaft mit der nichtkommutativen Integrationstheorie, wie sie E. Nelson entwickelt hat (vgl. [Nel, Ter]). Für $\mathcal{A}_0 = \mathbb{C} \cdot \mathbf{1}$, d.h. für $L^2(\mathcal{A}, \psi)$ stimmt sie mit ihr überein (vgl. auch Korollar 5.1.6).

5.1.11 Diese Zusammenstellung allgemeiner Eigenschaften P_0 -affilierter Operatoren beenden wir mit ihrer Einbettungseigenschaft in den GNS-Hilbertraum $L^2(\mathcal{A}, \psi)$.

Lemma. *Durch die Abbildung*

$$j : L^2(\mathcal{A}, P_0) \rightarrow L^2(\mathcal{A}, \psi); \quad x \mapsto x\Omega$$

wird eine kontraktive, stop-stetige Einbettung definiert.

Beweis. $\|x\Omega\|^2 = \langle \Omega | P_0(x^*x)\Omega \rangle \leq \|x\|_0^2$, $x \in L^2(\mathcal{A}, P_0)$, zeigt die Kontraktivität von j . Die stop-Stetigkeit ist klar. Die Injektivität von j folgt aus Satz 5.1.1 für den Fall $\mathcal{A}_0 = \mathbb{C} \cdot \mathbb{1}$ und Bemerkung 5.1.2. \square

5.2 Adjungierbare P_0 -affilierte Operatoren

Wir charakterisieren die Elemente x aus $L^2(\mathcal{A}, P_0)$, deren Adjungierte x^* ebenfalls zu $L^2(\mathcal{A}, P_0)$ gehört. Wir nennen sie die *adjungierbaren* Elemente von $L^2(\mathcal{A}, P_0)$. Der folgende Satz kann als eine Verallgemeinerung von [Ta1], Lemma V.2.27 angesehen werden.

5.2.1 Satz. *Die Adjungierte x^* eines Elements $x \in L^2(\mathcal{A}, P_0)$ gehört genau dann zu $L^2(\mathcal{A}, P_0)$, wenn es eine stop-Approximation $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ von x gibt, mit der Eigenschaft*

$$\sup_n \|x_n^*\|_0 < \infty.$$

In diesem Falle gilt $x^ = s\text{-}\lim_n x_n^*$.*

Beweis. Wir zeigen zuerst, daß ein P_0 -affiliierter Operator x , der eine Approximation $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ der geforderten Art besitzt, eine P_0 -affilierte Adjungierte hat. Dazu seien $\eta_0, \xi_0 \in \mathcal{H}_0$ und $a' \in \mathcal{A}'$. Dann folgt aus

$$\begin{aligned} |\langle \eta_0 | x a' \xi_0 \rangle_0| &= \lim_n |\langle \eta_0 | a' x_n \xi_0 \rangle_0| = \lim_n |\langle x_n^* \eta_0 | a' \xi_0 \rangle_0| \\ &\leq \sup_n \|x_n^* \eta_0\| \|a' \xi_0\| \leq \sup_n \|x_n^*\|_0 \|\eta_0\| \|a' \xi_0\|, \end{aligned}$$

daß \mathcal{H}_0 in $D(x^*)$ enthalten ist. Nach Lemma 5.1.4 ist x^* P_0 -affiliert.

Nun sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ irgendeine stop-Approximation von x , deren adjungierte Folge $(x_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ in der $\|\cdot\|_0$ -Norm durch eine Zahl $M > 0$ beschränkt ist. Um die stop-Konvergenz dieser Folge gegen x^* zu zeigen, reicht es nach Lemma 5.1.9 die $\|\cdot\|_\psi$ -Konvergenz nachzurechnen. Diese folgt aber leicht aus Korollar 5.1.6 und der Isometrie-eigenschaft der modularen Konjugation J . \square

5.2.2 Korollar. *\mathcal{B} und \mathcal{C} seien P_0 -unabhängige von Neumann Untermodulen von \mathcal{A} und $L^2(\mathcal{B}, P_0)$ bzw. $L^2(\mathcal{C}, P_0)$ die zugehörigen Untermoduln von $L^2(\mathcal{A}, P_0)$. Für ein adjungierbares Element $x \in L^2(\mathcal{B}, P_0)$ gehört die Adjungierte x^* ebenfalls zu $L^2(\mathcal{B}, P_0)$. Für ein weiteres adjungierbares Element $y \in L^2(\mathcal{C}, P_0)$ gilt: xy ist adjungierbar und $(xy)^* = y^*x^* \in L^2(\mathcal{B} \vee \mathcal{C}, P_0)$.*

5.2.3 Gegenbeispiel. Für $\mathcal{A}_0 = \mathbb{C} \cdot \mathbb{1}$ sind die Voraussetzungen von Satz 5.2.1 automatisch erfüllt: Die stop-Konvergenz von $(x_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ ist dann einfach die ψ -Konvergenz, die leicht aus der Isometrie-eigenschaft von J folgt. Dagegen stellt die $\|\cdot\|_0$ -Beschränktheit der Folge $(x_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ für den Fall $\dim(\mathcal{A}_0) = \infty$ i.allg. eine echte Bedingung an die Adjungierbarkeit eines Elements x innerhalb von $L^2(\mathcal{A}, P_0)$ dar. Es ist instruktiv, dafür ein einfaches Beispiel an der Hand zu haben:

Wir wählen für \mathcal{A} die Algebra $M_2 \otimes L^\infty \otimes L^\infty$ und für ψ den Spurzustand $\frac{1}{2} \text{tr} \otimes \lambda \otimes \lambda$, mit $\lambda := \int_0^1 \cdot d\lambda$, $L^\infty := L^\infty([0, 1], d\lambda)$. \mathcal{A}_0 sei die (kommutative) Diagonalalgebra $\begin{bmatrix} 1 \otimes L^\infty & 0 \\ 0 & L^\infty \otimes 1 \end{bmatrix}$, deren zugehörige bedingte Erwartung durch $P_0 := \text{Ad } e_{11} \otimes \varphi \otimes \text{id} + \text{Ad } e_{22} \otimes \text{id} \otimes \varphi$ bestimmt ist ($(e_{ij})_{i,j=1,\dots,4}$ bezeichne die kanonische Matrix-Einheit von M_2). Das Hilbertmodul $L^2(\mathcal{A}, P_0)$ und der Teilraum \mathcal{H}_0 sind folgendermaßen gegeben:

$$L^2(\mathcal{A}, P_0) = \begin{bmatrix} L^2 \otimes L^\infty & L^\infty \otimes L^2 \\ L^2 \otimes L^\infty & L^\infty \otimes L^2 \end{bmatrix} \otimes \mathbb{1}_2, \quad \mathcal{H}_0 = e_1 \otimes \mathbb{1}_2 \otimes L^2 \vee e_4 \otimes L^2 \otimes \mathbb{1}_2.$$

Dabei fassen wir die Funktionen in $L^2 := L^2([0, 1], d\lambda)$ als Multiplikationsoperatoren auf $((e_i)_{i=1,\dots,4}$ bezeichne die kanonischen Basisvektoren in \mathbb{C}^4). Von den Operatoren

$$x := \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{1} \otimes f \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes \mathbb{1}_2, \quad x^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathbb{1} \otimes f & 0 \end{bmatrix} \otimes \mathbb{1}_2$$

$f = f^* \in L^2$, $f \notin L^\infty$, gehört x offensichtlich zu $L^2(\mathcal{A}, P_0)$, nicht aber x^* .

5.3 Die Multiplikation in $L^2(\mathcal{A}, P_0)$

Das Hilbertmodul $L^2(\mathcal{A}, P_0)$ verhält sich bzgl. der Multiplikation wesentlich ungünstiger als bzgl. der Adjungierung. Ein mögliches Substitut für die L^4 -Räume ist die Teilmenge

$$\mathcal{E}^4 := \{x \in L^2(\mathcal{A}, P_0) \mid x^*x \in L^2(\mathcal{A}, P_0), xx^* \in L^2(\mathcal{A}, P_0)\} \quad (5.4)$$

von $L^2(\mathcal{A}, P_0)$. Um es gleich vorweg zu sagen: \mathcal{E}^4 ist ein schlechtes Substitut, da es sich bei diesem Raum i.allg. noch nicht einmal um einen Vektorraum handelt.

5.3.1 Satz. \mathcal{E}^4 ist eine *-invariante Teilmenge von $L^2(\mathcal{A}, P_0)$. Ein Element $x \in L^2(\mathcal{A}, P_0)$ gehört genau dann zu \mathcal{E}^4 , wenn es eine stop-Approximation $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ von x mit folgender Eigenschaft gibt:

$$\sup_n \{\|x_n x_n^*\|_0, \|x_n^* x_n\|_0\} < \infty. \quad (5.5)$$

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß die Standardapproximation $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ (vgl. Definition 5.1.7) eines Elements $x \in \mathcal{E}^4$ die Bedingung (5.5) des Satzes erfüllt:

$$\begin{aligned} \|x_n^* x_n \xi_0\| &= \||x|^2 e_n \xi_0\| = \|e_n |x|^2 \xi_0\| \leq \|x^* x \xi_0\| \leq \|x^* x\|_0 \|\xi_0\|, \\ \|x_n x_n^* \xi_0\| &= \||x| e_n x^* \xi_0\| = \|e_n |x| x^* \xi_0\| \leq \||x| x^* \xi_0\| = \|x x^* \xi_0\| \leq \|x x^*\|_0 \|\xi_0\|. \end{aligned}$$

Außerdem liegt \mathcal{H}_0 in $D(xx^*) \subseteq D(x^*)$, was nach Lemma 5.1.4 $x^* \in L^2(\mathcal{A}, P_0)$ zur Folge hat. Also liegt x^* ebenfalls in \mathcal{E}^4 .

Nun zur Umkehrung: $x \in L^2(\mathcal{A}, P_0)$ besitze eine stop-Approximation $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$, die (5.5) erfüllt. Dann ist $(x_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ $\|\cdot\|_0$ -beschränkt:

$$\begin{aligned} \sup_n \|x_n x_n^*\|_0^2 &= \sup_n \|P_0(|x_n^*|^4)\| \geq \sup_n \|P_0(|x_n^*|^2)^2\| = \sup_n \|P_0(x_n x_n^*)\|^2 \\ &= \sup_n \|x_n^*\|_0^4. \end{aligned}$$

Nach Satz 5.2.1 gilt $x^* \in L^2(\mathcal{A}, P_0)$ und $x^* = s\text{-}\lim_n x_n^*$. Daß $\sup_n \|x_n\|_0 < \infty$ gilt, kann auf dieselbe Weise eingesehen werden. $x^*x \in L^2(\mathcal{A}, P_0)$ und $xx^* \in L^2(\mathcal{A}, P_0)$ ergibt sich nun aus dem nächsten Lemma. \square

5.3.2 Lemma. Für zwei Elemente $x, y \in L^2(\mathcal{A}, P_0)$, deren stop-Approximationen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ die Eigenschaften

$$\sup_n \|x_n^*\|_0 < \infty, \quad \sup_n \|x_n y_n\|_0 < \infty$$

besitzen, gehört xy wieder zu $L^2(\mathcal{A}, P_0)$.

Beweis. Wir zeigen $y(\mathcal{H}_0) \subseteq D(x)$, woraus $\mathcal{H}_0 \subseteq D(xy)$ und nach Lemma 5.1.4 $xy \in L^2(\mathcal{A}, P_0)$ folgt. Für $\xi_0, \eta_0 \in \mathcal{H}_0$ und $a' \in \mathcal{A}'$ gilt (unter Verwendung von Satz 5.2.1):

$$\begin{aligned} |\langle x^* a' \eta_0 | y \xi_0 \rangle| &= \lim_n |\langle a' x_n^* \eta_0 | y_n \xi_0 \rangle| \leq \|a' \eta_0\| \sup_n \|x_n y_n \xi_0\| \\ &\leq \|a' \eta_0\| \sup_n \|x_n y_n\|_0 \|\xi_0\|. \end{aligned}$$

Da $\mathcal{A}'\mathcal{H}_0$ ein Core für x^* bildet (vgl. Satz 5.2.1 und 5.1.1), liegt $y\xi_0$ in $D(x)$. \square

5.3.3 Gegenbeispiel. Für $\mathcal{A}_0 = \mathbb{C} \cdot \mathbf{1}$ handelt es sich bei \mathcal{E}^4 um den bekannten $L^4(\mathcal{A}, \psi)$, wie er in der nichtkommutativen Integrationstheorie auf finiten von Neumann Algebren von E. Nelson [Nel, Ter, Kös] entwickelt wurde. Dagegen ist \mathcal{E}^4 für $\mathcal{A}_0 \neq \mathbb{C} \cdot \mathbf{1}$ i.allg. nicht einmal mehr ein Vektorraum. Diese Situation liegt im Beispiel 5.2.3 vor: Wir wählen

$$x := \begin{bmatrix} f \otimes \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{1}_2, \quad y := \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{1}_2,$$

mit einer reellen Funktion $f \in L^4([0, 1], d\lambda)$. Offensichtlich liegt x in \mathcal{E}^4 , y in \mathcal{A} , aber $xy \notin L^2(\mathcal{A}, P_0)$. Wäre \mathcal{E}^4 ein Vektorraum, dann müßte $xy = \frac{1}{4} \sum_0^3 i^k (x + i^k y)^* (x + i^k y)$ in $L^2(\mathcal{A}, P_0)$ liegen. Dieses Beispiel zeigt auch, daß eine Verschärfung der Definition von \mathcal{E}^4 (indem man z.B. verlangt, daß auch gemischte Potenzen von x und x^* zu $L^2(\mathcal{A}, P_0)$ gehören sollen) die Vektorraumstruktur von \mathcal{E}^4 i.allg. nicht sicherstellen wird, denn die beiden Elemente x und y sollten auf jeden Fall in \mathcal{E}^4 enthalten sein.

Nach diesen Überlegungen ist es ein wenig überraschend, daß für endlichdimensionale Anfangsalgebren \mathcal{A}_0 der Raum \mathcal{E}^4 dennoch ein Vektorraum ist. Das ist auch der Grund, warum \mathcal{E}^4 trotz seiner offensichtlichen Mängel in unsere Überlegungen mit einbezogen wurde.

5.3.4 Satz. *Bei endlichdimensionaler Anfangsalgebra \mathcal{A}_0 sind die Räume $L^2(\mathcal{A}, P_0)$ und $L^2(\mathcal{A}, \psi)$ homöomorph und *-invariant. \mathcal{E}^4 ist ein *-invarianter Untervektorraum von $L^2(\mathcal{A}, P_0)$, und für je zwei Elemente $x, y \in \mathcal{E}^4$ liegt xy wieder in $L^2(\mathcal{A}, P_0)$.*

Beweis. Sei $x \in L^2(\mathcal{A}, \psi)$, d.h. $\Omega \in D(x)$ nach Lemma 5.1.4. Da \mathcal{A}_0 endlichdimensional ist, gilt

$$\mathcal{H}_0 = \mathcal{A}_0\Omega = J\mathcal{A}_0J\Omega \subseteq \mathcal{A}'\Omega \subseteq D(x),$$

d.h. nach nämlichen Lemma liegt x in $L^2(\mathcal{A}, P_0)$. Damit stimmen $L^2(\mathcal{A}, \psi)$ und $L^2(\mathcal{A}, P_0)$ als Vektorräume überein. Die *-Invarianz von $L^2(\mathcal{A}, P_0)$ folgt aus der von $L^2(\mathcal{A}, \psi)$ (vgl. Korollar 5.1.6).

Die identische Abbildung von $L^2(\mathcal{A}, \psi)$ auf $L^2(\mathcal{A}, P_0)$ ist ein Homöomorphismus:

$$\|x\|_\psi \leq \sup_{\substack{\|\xi_0\|=1 \\ \xi_0 \in \mathcal{H}_0}} \|x\xi_0\| = \|x\|_0 = \sup_{\substack{\|\alpha\Omega\|=1 \\ \alpha \in \mathcal{A}_0}} \|J\alpha Jx\Omega\| \leq \sup_{\substack{\|\alpha\|_\psi=1 \\ \alpha \in \mathcal{A}_0}} \|\alpha\| \|x\Omega\| \leq \lambda \|x\|_\psi$$

für ein geeignetes $\lambda > 0$ und alle $x \in L^2(\mathcal{A}, P_0)$, denn die Operatornorm und die ψ -Norm auf der endlichdimensionalen Algebra \mathcal{A}_0 sind äquivalent.

Nun seien $x, y \in \mathcal{E}^4$. Falls wir daraus bereits $xy \in L^2(\mathcal{A}, P_0)$ folgern können, ist die Vektorraumeigenschaft von \mathcal{E}^4 leicht einzusehen:

$$(x+y)^*(x+y) = x^*x + x^*y + y^*x + y^*y \in L^2(\mathcal{A}, P_0)$$

und genauso $(x+y)(x+y)^* \in L^2(\mathcal{A}, P_0)$, wenn wir uns vergegenwärtigen, daß nach Satz 5.3.1 \mathcal{E}^4 *-invariant ist. Für Approximationen $x = s\text{-}\lim_n x_n$ und $y = s\text{-}\lim_n y_n$ mit der Eigenschaft (5.5) von Satz 5.3.1 gilt aber:

$$\begin{aligned} \|x_n y_n\|_\psi^2 &= \langle \Omega | y_n^* x_n^* x_n y_n \Omega \rangle = \langle y_n y_n^* \Omega | x_n^* x_n \Omega \rangle \\ &\leq \|y_n y_n^*\|_\psi \|x_n^* x_n\|_\psi \leq \sup_n \{ \|y_n y_n^*\|_0 \|x_n^* x_n\|_0 \} < \infty. \end{aligned}$$

Lemma 5.3.2 auf $L^2(\mathcal{A}, \psi)$ angewandt zeigt $xy \in L^2(\mathcal{A}, \psi)$, nach unseren bisherigen Überlegungen also auch $xy \in L^2(\mathcal{A}, P_0)$. \square

6. Anwendungen

6.1 Additive Kozyklen zum Poissonschen weißen Rauschen

Unser Ausgangspunkt in diesem Abschnitt ist ein verallgemeinertes Poissonsches weißes Rauschen $(\mathcal{P}, \psi, S_t, (\mathcal{P}_I)_I)$ über \mathcal{A}_0 , wie es in 1.8.2 als Kopplung eines verallgemeinerten Bernoulli-Shifts $(\mathcal{B}, \chi, S, \mathcal{B}_1)$ über \mathcal{A}_0 an das klassische Poissonsche weiße Rauschen $(\Pi, \pi, \tilde{S}_t, (\Pi_I)_I)$ eingeführt wurde. Wir übernehmen die Notation von dort. $u_m \in \mathcal{B}$, $m \in \mathbb{N}_0$, sei ein unitärer Kozyklus bzgl. dem Bernoulli-Shift S und $u_t := \sum_{m=0}^{\infty} u_m \otimes p_m(0, t]$ der zugehörige unitäre Kozyklus bzgl. S_t . Mit der bedingten Erwartung Q_0 von \mathcal{B} auf \mathcal{A}_0 gilt $R^m = Q_0(u_m)$. Dabei ist $R := Q_0(u)$ und $u := u_1 \in \mathcal{B}_1$. Wir erhalten $A_t := P_0(u_t) = \sum_{m=0}^{\infty} R^m \pi(p_m(0, t]) = \sum_{m=0}^{\infty} R^m \frac{t^m}{m!} e^{-t} = e^{t(R-1)}$.

6.1.1 Satz. Die Standardkonstruktion bzgl. dem unitären Kozyklus $(u_t)_{t \geq 0}$ ergibt den additiven Kozyklus $(b_t)_{t \geq 0} \subset L^2(\mathcal{P}, P_0)$

$$b_t := \sum_{\ell=0}^{\infty} B_{\ell} \otimes p_{\ell}(0, t] - t \cdot (R - \mathbf{1}). \quad (6.1)$$

Darin ist B der additive Kozyklus zum Bernoulli-Shift $(\mathcal{B}, \chi, S, \mathcal{B}_1)$, der für $\ell \geq 1$ durch $B_{\ell} := \sum_{k=0}^{\ell-1} S^k(u - \mathbf{1})$ und für $\ell = 0$ durch $B_0 := 0$ definiert ist.

Beweis. Nach Proposition 3.2.1 können wir für die Standardkonstruktion eine 2^{-n} -Zerlegung des Intervalls $[0, t]$ verwenden. Wir müssen also den stop-Grenzwert in $L^2(\mathcal{P}, P_0)$ von

$$S_n(t) := \sum_{i=0}^{2^n-1} (S_{i\delta_n}(u_{\delta_n}) - A_{\delta_n}),$$

$\delta_n := t \cdot 2^{-n}$, bestimmen, d.h. wir müssen die Konvergenz von $S_n(t)$ auf \mathcal{H}_0 untersuchen (vgl. 5.1.8). Dazu spalten wir $S_n(t)$ in drei Ausdrücke auf, die getrennt behandelt werden können. Unter Verwendung von Gleichung (1.6) für den Shift S_t des Poissonschen weißen Rauschens erhalten wir:

$$S_n(t) = \sum_{i=0}^{2^n-1} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{1} \otimes p_k(0, i\delta_n] \cdot S^k \otimes \tilde{S}_{i\delta_n} \left(\sum_{m=0}^{\infty} u_m \otimes p_m(0, \delta_n] \right) - 2^n A_{\delta_n}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{2^n-1} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} S^k(\mathbf{u}_m) \otimes p_k(0, i\delta_n] p_m(i\delta_n, (i+1)\delta_n] - 2^n A_{\delta_n} \\
&= \sum_{i=0}^{2^n-1} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} S^k(\mathbf{u}_m - \mathbf{1}) \otimes p_k(0, i\delta_n] p_m(i\delta_n, (i+1)\delta_n] \\
&\quad + \sum_{i=0}^{2^n-1} \mathbf{1} \otimes \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} p_k(0, i\delta_n] p_m(i\delta_n, (i+1)\delta_n] - 2^n A_{\delta_n} \\
&= \sum_{i=0}^{2^n-1} \sum_{k=0}^{\infty} S^k(\mathbf{u} - \mathbf{1}) \otimes p_k(0, i\delta_n] p_m(i\delta_n, (i+1)\delta_n] \quad =: \eta_n \\
&\quad + \sum_{i=0}^{2^n-1} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=2}^{\infty} S^k(\mathbf{u}_m - \mathbf{1}) \otimes p_k(0, i\delta_n] p_m(i\delta_n, (i+1)\delta_n] \quad =: \rho_n \\
&\quad + \frac{t}{\delta_n} (\mathbf{1} - A_{\delta_n}).
\end{aligned}$$

Der letzte Summand konvergiert gegen $t \cdot (\mathbf{1} - R)$. Wir werden zeigen, daß ρ_n gegen Null konvergiert. Dann bestimmen wir den Grenzwert von η_n .

Die entscheidenden Beobachtungen dafür sind:

$$\|\|_{\pi} \lim_n \sum_{i=0}^{2^n-1} p_k(0, i\delta_n] p_m(i\delta_n, (i+1)\delta_n] = \delta_{1,m} \cdot \sum_{\ell=k+1}^{\infty} p_{\ell}(0, t],$$

wobei die Konvergenzgeschwindigkeit für $m = 1$ durch

$$\left\| \sum_{i=0}^{2^n-1} p_k(0, i\delta_n] p_1(i\delta_n, (i+1)\delta_n] - \sum_{\ell=k+1}^{\infty} p_{\ell}(0, t] \right\|_{\pi}^2 \leq D_k(t) \cdot \frac{\delta_n}{k!}, \quad (6.2)$$

mit $D_k(t) := M t^{k+1} + t^k$, $M > 0$, gegeben ist. Außerdem gilt

$$\left\| \sum_{i=0}^{2^n-1} p_k(0, i\delta_n] p_m(i\delta_n, (i+1)\delta_n] \right\|_{\pi}^2 = \sum_{i=0}^{2^n-1} \frac{(i\delta_n)^k}{k!} e^{-i\delta_n} \cdot \delta_n \cdot \frac{\delta_n^{m-1}}{m!} e^{-\delta_n}. \quad (6.3)$$

Das ist der sehr technische Teil des Beweises, der im Anhang A.5 zu finden ist. Mit diesen Beobachtungen zeigen wir als erstes, daß $\rho_n \xi_0$ f.a. $\xi_0 \in \mathcal{H}_0$ gegen Null konvergiert. Wir verwenden (6.3):

$$\begin{aligned}
\|\rho_n \xi_0\| &= \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=2}^{\infty} S^k(\mathbf{u}_m - \mathbf{1}) \xi_0 \otimes \sum_{i=0}^{2^n-1} p_k(0, i\delta_n] p_m(i\delta_n, (i+1)\delta_n] \right\| \\
&\leq 2 \|\xi_0\| \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=2}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{2^n-1} \frac{(i\delta_n)^k}{k!} e^{-i\delta_n} \cdot \delta_n \right)^{1/2} \cdot \sqrt{\frac{\delta_n^{m-1}}{m!}} \cdot e^{-\delta_n/2} \\
&\leq 2 \|\xi_0\| \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{\frac{t^{k+1}}{k!}} \sum_{m=2}^{\infty} \sqrt{\frac{\delta_n^{m-2}}{m!}} \cdot \sqrt{\delta_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0
\end{aligned}$$

Nun zum Grenzwert von $\eta_n \xi_0$. Dafür verwenden wir (6.2):

$$\begin{aligned} & \left\| \eta_n \xi_0 - \sum_{k=0}^{\infty} S^k(\mathbf{u} - \mathbf{1}) \xi_0 \otimes \sum_{\ell=k+1}^{\infty} p_{\ell}(0, t] \right\| \\ & \leq 2 \|\xi_0\| \sum_{k=0}^{\infty} \left\| \sum_{i=0}^{2^n-1} p_k(0, i\delta_n] p_1(i\delta_n, (i+1)\delta_n] - \sum_{\ell=k+1}^{\infty} p_{\ell}(0, t] \right\|_{\pi} \\ & \leq 2 \|\xi_0\| \cdot \sqrt{\delta_n} \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{\frac{D_k(t)}{k!}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Durch die Vertauschung der beiden Summen in dem Grenzwert $\sum_{k=0}^{\infty} S^k(\mathbf{u} - \mathbf{1}) \xi_0 \otimes \sum_{\ell=k+1}^{\infty} p_{\ell}(0, t]$ ergibt sich $\sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\ell-1} S^k(\mathbf{u} - \mathbf{1}) \xi_0 \otimes p_{\ell}(0, t] = \sum_{\ell=0}^{\infty} B_{\ell} \xi_0 \otimes p_{\ell}(0, t]$, wenn wir $B_{\ell} := \sum_{k=0}^{\ell-1} S^k(\mathbf{u} - \mathbf{1})$ für $\ell \geq 1$ und $B_0 := 0$ setzen. Offensichtlich gilt $\|B_{\ell}\| \leq \|\mathbf{u} - \mathbf{1}\| \cdot \ell$ und daher $\left\| \sum_{\ell=0}^{\infty} B_{\ell} \xi_0 \otimes p_{\ell}(0, t] \right\| \leq \|\mathbf{u} - \mathbf{1}\| \sum_{\ell=1}^{\infty} \ell \cdot \frac{t^{\ell}}{\ell!} e^{-t} \cdot \|\xi_0\| = t \cdot \|\mathbf{u} - \mathbf{1}\| \cdot \|\xi_0\|$. Also definiert $\sum_{\ell=0}^{\infty} B_{\ell} \otimes p_{\ell}(0, t]$ einen beschränkten Operator auf \mathcal{H}_0 mit Werten im GNS-Hilbertraum \mathcal{H}_{ψ} , der auf \mathcal{H}_0 (und damit in der stop-Topologie von $L^2(\mathcal{P}, P_0)$, vgl. 5.1.8) durch die Folge $(\sum_{\ell=0}^n B_{\ell} \otimes p_{\ell}(0, t])_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}$ approximiert wird. Also ist $b_t := \sum_{\ell=0}^{\infty} B_{\ell} \otimes p_{\ell}(0, t] - t \cdot (\mathbf{R} - \mathbf{1}) \in L^2(\mathcal{P}, P_0)$ der Grenzwert der Standardkonstruktion. \square

6.1.2 Bemerkungen. Tatsächlich wurde in der Konstruktion nirgends benutzt, daß $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1$ (und damit \mathbf{u}_m) unitär ist. Wichtig war nur $\mathbf{u} \in \mathcal{B}_1$ und $\|\mathbf{u}\| \leq 1$ (woraus auch $\|\mathbf{u}_m\| = \|S^{m-1}(\mathbf{u})S^{m-2}(\mathbf{u}) \cdots S(\mathbf{u})\mathbf{u}\| \leq 1$ folgt). Für jeden solchen Operator definiert (6.1) einen additiven Kozyklus. Lassen wir die Konstruktion außer acht, so können wir auch direkt nachrechnen, daß f.a. $\nu \in \mathcal{B}_1 \otimes \mathbf{1}$ durch

$$B_t(\nu) := \sum_{\ell=1}^{\infty} B_{\ell}(\nu) \otimes p_{\ell}(0, t] - t \cdot P_0(\nu)$$

$B_{\ell}(\nu) := \sum_{k=0}^{\ell-1} S^k(\nu)$, ein zentrierter additiver Kozyklus definiert wird. Für $\nu = \mathbf{1}$ erhalten wir den klassischen Poisson-Prozeß $X_t - t$ aus 1.5.2 zurück.

Wählen wir einen ‘trivialen’ Bernoulli-Shift, d.h. $\mathcal{B} = \mathbb{C} \cdot \mathbf{1}$, so wird $\mathbf{u} = e^{i\alpha} = Q_0(\mathbf{u})$, mit einem geeigneten $\alpha \in \mathbb{R}$. Der unitäre Kozyklus \mathbf{u}_t ist dann durch $\sum_{m=0}^{\infty} e^{im\alpha} p_m(0, t] = e^{i\alpha X_t}$ gegeben, mit dem klassischen Poisson-Prozeß $(X_t)_{t \geq 0}$. (6.1) ergibt $b_t = (e^{i\alpha} - 1)(X_t - t)$, also gerade das Ergebnis der Standardkonstruktion beim klassischen Poisson-schen weißen Rauschen, wie wir es als Beispiel in 3.3.3 vorgeführt haben.

6.2 Additive Kozyklen und die detailed balance-Bedingung

Die *detailed balance*-Bedingung wird in vielen Teilen der statistischen Physik benutzt, denn sie wird zur Beschreibung von Modellen verwendet, die einer besonders ‘guten’

Gleichgewichtsbedingung genügen. Es handelt sich dabei um stationäre stochastische Prozesse, die sich durch genauen (mikroskopischen) Ausgleich der Übergänge zwischen den einzelnen Zuständen des Systems auszeichnen. Für einen klassischen Markov-Prozeß mit endlichem Zustandsraum $\Omega := \{1, \dots, n\}$ besagt diese Bedingung, daß es eine stationäre Verteilung $\mu := (p_1, \dots, p_n)$ auf Ω gibt, für die die Übergangswahrscheinlichkeit vom Zustand i in den Zustand j genauso groß ist, wie für den Übergang von j nach i . Ist $R_t := e^{Dt} \in M_n$ die Halbgruppe der Übergangsooperatoren dieses Prozesses, mit dem Generator $D := [D_{ij}]_{i,j=1,\dots,n}$ der Übergangsraten D_{ij} , so besagt die detailed balance-Bedingung

$$D_{ik}p_k = D_{ki}p_i,$$

f.a. $i, k \in \Omega$. Für den Zustand $\psi_\mu := \int_\Omega \cdot d\mu$ bedeutet das $\psi_\mu(fD(g)) = \psi_\mu(D(f)g)$ f.a. $f, g \in L^\infty(\Omega, \mu)$, d.h., D und damit R_t ist ψ_μ -selbstadjungiert (vgl. Anhang A1). Das ist die Formulierung, die in [KFGV] zur Fortschreibung auf die nichtkommutative Situation der Quantenmechanik verwendet wurde. In unserer Sprache läßt sie sich folgendermaßen formulieren: Ein irreversibles W^* -dynamisches System (\mathcal{A}_0, ψ, R) besitzt die detailed balance-Eigenschaft, falls die Übergangsooperatoren R_t ψ -selbstadjungiert sind. Meist wird für das System (\mathcal{A}_0, ψ, R) noch ein reversibler Anteil der Dynamik zugelassen. Ist R $\|\cdot\|$ -stetig, so bedeutet das für den Lindblad-Generator L von R die Existenz der ψ -Adjungierten L^* (vgl. Satz A.1.2) und

$$L(a) - L^*(a) = i[H, a]$$

f.a. $a \in \mathcal{A}_0$, mit einem geeigneten $H \in \mathcal{A}_0^\psi$. In dieser Formulierung wird die detailed balance-Bedingung in [ApFr] verwendet.

Im folgenden Satz gehen wir von einem weißen Rauschen $(\mathcal{A}, \psi, S_t, (\mathcal{A}_I)_I)$ über \mathcal{A}_0 aus und geben eine Bedingung an einen additiven Kozyklus $b \subset L^2(\mathcal{A}^\psi, P_0)$ an, die dazu führt, daß das zugehörige reduzierte W^* -dynamische System (vgl. Theorem 4.5.1 und Theorem 3.4.4) die detailed balance-Bedingung erfüllt.

6.2.1 Satz. $b \subset L^2(\mathcal{A}^\psi, P_0)$ sei ein adjungierbarer additiver Kozyklus mit der Eigenschaft

$$b_t^* = -b_t \tag{6.4}$$

f.a. $t \geq 0$. $K \in \mathcal{A}_0^\psi$ sei ein Operator, der die Gleichung $|b_t|_0^2 = -(K + K^*)t$ erfüllt (z.B. $K := -\frac{1}{2}|b_1|_0^2$). Ist u der unitale Kozyklus, der als Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$u_t = \mathbb{1} + \int_0^t db_s u_s + \int_0^t ds K u_s$$

entsteht, so besitzt das reduzierte W^* -dynamische System (\mathcal{A}_0, ψ, R) mit $R_t := \langle u_t | \cdot u_t \rangle_0$ die detailed balance-Eigenschaft.

Beweis. Nach Satz 5.2.1 besitzt b_1 eine Approximation $(c_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq L^2(\mathcal{A}^\psi, P_0)$ in der stop-Topologie von $L^2(\mathcal{A}^\psi, P_0)$ mit der Eigenschaft $b_1^* = s\text{-}\lim_n c_n^*$. Daraus erhalten wir für alle $a_1, a_2 \in \mathcal{A}^\psi$

$$\begin{aligned} \psi(a_1 \langle b_1 | a_2 b_1 \rangle_0) &= \lim_n \psi(a_1 c_n^* a_2 c_n) \\ &= \lim_n \psi(c_n a_1 c_n^* a_2) \\ &= \psi(\langle b_1^* | a_1 b_1^* \rangle_0 a_2). \end{aligned}$$

Nach Satz A.1.2 ist die vollständig positive Abbildung $\langle b_1^* | \cdot b_1^* \rangle_0$ auf \mathcal{A}_0 die ψ -Adjungierte von $\Lambda := \langle b_1 | \cdot b_1 \rangle_0$. Der Lindblad-Generator L von \mathcal{R} hat nach Satz 5.2.1 die Form

$$L(a) = \Lambda(a) + K^* a + a K.$$

Er besitzt daher die ψ -Adjungierte

$$L^*(a) = \Lambda(a) + K a + a K^*.$$

Wir erhalten damit $L(a) - L^*(a) = i[H, a]$, mit $H := i(K - K^*)$, also die detailed balance-Eigenschaft für $(\mathcal{A}_0, \psi, \mathcal{R})$. \square

Anhang

A.1 Anhang zu Kapitel 1

A.1.1 Satz. Sei (\mathcal{A}, ψ) ein Wahrscheinlichkeitsraum und $T : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ eine vollständig positive Abbildung mit der Eigenschaft: Es gibt ein (notwendigerweise eindeutig bestimmtes) $\alpha \in \mathcal{A}$, so daß f.a. $x \in \mathcal{A}$

$$\psi(T(x)) = \psi(x \alpha) \quad (\text{A.1})$$

gilt. Dann ist T σ wop- σ wop- (d.h. normal), σ stop- σ stop- und σ stop*- σ stop*-stetig. Das gilt insbesondere für alle Morphismen T von (\mathcal{A}, ψ) .

Beweis. Die Positivität von $\psi \circ T$ und (A.1) haben nach [Ta1], Proposition III.4.8 die Ungleichung

$$|\psi(T(x))| \leq \|\alpha\| \psi(x) \quad (\text{A.2})$$

f.a. $x \in \mathcal{A}^+$ zur Folge. Verwenden wir die Kadison-Schwarz-Ungleichung für T , so erhalten wir $\|T(x)\|_{\psi} \leq \|\alpha\|^{1/2} \|x\|_{\psi}$. Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung zeigt dann die σ stop-Stetigkeit von

$$\mathcal{A} \ni y \mapsto \psi_x(T(y)) := \psi(xT(y))$$

f.a. $x \in \mathcal{A}$. Da die Funktionale $\{\psi_x \mid x \in \mathcal{A}\}$ in \mathcal{A}_* norm-dicht liegen (Bipolarensatz), erhalten wir mit dem üblichen $\varepsilon/2$ -Argument die stop-Stetigkeit der Abbildungen $\mathcal{A} \ni y \mapsto \varphi(T(y))$, $\varphi \in \mathcal{A}_*$, auf beschränkten Mengen von \mathcal{A} . Nach [Ta1], Theorem II.2.6, folgt $\varphi \circ T \in \mathcal{A}_*$ f.a. $\varphi \in \mathcal{A}_*$, d.h. T ist normal.

Die σ stop- σ stop-Stetigkeit: Aus $x_{\alpha} \xrightarrow{\sigma \text{ stop}} x$ folgt $(x_{\alpha} - x)^*(x_{\alpha} - x) \xrightarrow{\sigma \text{ wop}} 0$ und daraus mit der Kadison-Schwarz Ungleichung

$$\varphi(T(x_{\alpha} - x)^*T(x_{\alpha} - x)) \leq \varphi(T(x_{\alpha} - x)^*(x_{\alpha} - x)) \longrightarrow 0,$$

f.a. $\varphi \in \mathcal{A}_*^+$. Die σ stop*- σ stop*-Stetigkeit zeigt man analog. □

Der folgende Satz ist ein Ergebnis aus der Arbeit [Küm2], wo er im Rahmen allgemeinerer Fragestellungen gewonnen wird. Wir geben einen etwas anderen Beweis.

A.1.2 Satz. (B. Kümmerer) Für eine vollständig positive Abbildung T auf (\mathcal{A}, ψ) mit der Eigenschaft (A.1) ist folgendes äquivalent:

i) Es existiert genau eine vollständig positive Abbildung T^* auf (\mathcal{A}, ψ) mit der Eigenschaft $\psi(xT(y)) = \psi(T^*(x)y)$ f.a. $x, y \in \mathcal{A}$.

ii) T vertauscht mit der modularen Automorphismengruppe σ^ψ von ψ .

Der Operator α aus (A.1) ist dann durch $T^*(\mathbb{1})$ gegeben und liegt im Zentralisator von ψ .

T^* ist die ψ -adjungierte Abbildung von T , meist einfach als die ψ -Adjungierte von T bezeichnet.

Beweis. Eine vollständig positive Abbildung T mit der Eigenschaft (A.1) besitzt eine kanonische Fortsetzung zu einem beschränkten Operator \tilde{T} auf den GNS-Hilbertraum \mathcal{H}_ψ : $\tilde{T}x\Omega := T(x)\Omega$ f.a. $x \in \mathcal{A}$:

$$\|\tilde{T}x\Omega\|^2 \leq \psi(T(x^*x)) \stackrel{(A.2)}{\leq} \|\alpha\| \|x\Omega\|^2.$$

ii) \Rightarrow i): Die Vertauschbarkeit von T mit σ^ψ hat zur Folge, daß T den stop-dichten Teilraum der ganz-analytischen Elemente von σ^ψ in sich abbildet. Für jedes solche Element y besitzt die Funktion $\mathbb{R} \ni t \mapsto \tilde{T}\Delta^{it}y^*\Omega = \Delta^{it}\tilde{T}y^*\Omega$ eine ganz-analytische Fortsetzung, die an der Stelle $t = -i/2$ ausgewertet,

$$\tilde{T}Jy\Omega = \tilde{T}\Delta^{\frac{1}{2}}y^*\Omega = \Delta^{\frac{1}{2}}\tilde{T}y^*\Omega = \Delta^{\frac{1}{2}}T(y^*)\Omega = JT(y)\Omega = J\tilde{T}y\Omega$$

ergibt. Das zeigt die Vertauschbarkeit von \tilde{T} mit J auf einer dichten Menge und wegen der Beschränktheit der beteiligten Operatoren auch $[\tilde{T}, J] = 0$. Diese Eigenschaft und die Positivität von T benötigen wir, um $\tilde{T}^*\mathcal{A}^+\Omega \subseteq \mathcal{A}^+\Omega$ nachzuweisen:

$$\langle Jx\Omega | \tilde{T}^*y\Omega \rangle = \langle JT(x)\Omega | y\Omega \rangle = \langle T(x)^{\frac{1}{2}}\Omega | JyJT(x)^{\frac{1}{2}}\Omega \rangle \geq 0,$$

f.a. $x, y \in \mathcal{A}^+$, also $\tilde{T}^*y\Omega \in \overline{\mathcal{A}^+\Omega}$ ([BrRo1], Proposition 2.5.27). Das positive lineare Funktional $x \mapsto \langle Jx\Omega | \tilde{T}^*y\Omega \rangle$ wird durch ψ dominiert: Für $x \in \mathcal{A}^+$ gilt

$$\langle T(x)^{\frac{1}{2}}\Omega | JyJT(x)^{\frac{1}{2}}\Omega \rangle \leq \|y\| \langle \Omega | T(x)\Omega \rangle \stackrel{(A.2)}{\leq} \|y\| \|\alpha\| \psi(x).$$

Nach dem Satz von Radon-Nikodym ([BrRo1], Theorem 2.3.19) gibt es also genau ein $z \in \mathcal{A}^+$ mit der Eigenschaft $\langle Jx\Omega | \tilde{T}^*y\Omega \rangle = \langle Jz\Omega | x\Omega \rangle = \langle Jx\Omega | z\Omega \rangle$ f.a. $x \in \mathcal{A}$, also $\tilde{T}^*y\Omega = z\Omega \in \mathcal{A}^+\Omega$. Damit wird durch $T^*(y)\Omega := \tilde{T}^*y\Omega$, $y \in \mathcal{A}$, eine positive lineare Abbildung T^* auf \mathcal{A} definiert. Die Gleichung $\psi(xT(y)) = \psi(T^*(x)y)$ f.a. $x, y \in \mathcal{A}$ ist offensichtlich erfüllt. Aus ihr folgt sofort $\alpha = T^*(\mathbb{1}) \geq 0$. Die Eindeutigkeit von T^* ist klar. Es fehlt nur noch die vollständige Positivität von T^* .

Betrachte dazu $T_{(n)} := \text{id}_n \otimes T$ auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(M_n \otimes \mathcal{A}, \Psi_{(n)})$, mit $\Psi_{(n)} := \tau_n \otimes \psi$ und der normierten Spur τ_n auf M_n . $T_{(n)}$ erfüllt (A.1) bzgl. $\Psi_{(n)}$, wenn wir α durch $\mathbb{1} \otimes \alpha$ ersetzen. Die modulare Konjugation $J_{(n)}$ und der modulare Operator $\Delta_{(n)}$ zu $\Psi_{(n)}$ sind durch $J_n \otimes J$ bzw. $\mathbb{1}_n \otimes \Delta$ gegeben. Dabei ist J_n die modulare Konjugation bzgl.

τ_n . Offensichtlich vertauscht $T_{(n)}$ mit der modularen Automorphismengruppe von $\Psi_{(n)}$, und es ist elementar nachzurechnen, daß die Adjungierte $T_{(n)}^*$ von $T_{(n)}$ bzgl. $\Psi_{(n)}$ – gemäß obiger Konstruktion – mit $\mathbb{1}_n \otimes T^*$ übereinstimmt. Insbesondere ist $T_{(n)}^*$ positiv, also T^* vollständig positiv.

i) \Rightarrow ii): Sei $y \in D(\Delta)$ und $x \in \mathcal{A}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \langle x\Omega | \widetilde{T}\Delta y\Omega \rangle &= \langle \Delta^{\frac{1}{2}}T^*(x)\Omega | \Delta^{\frac{1}{2}}y\Omega \rangle = \langle JT^*(x^*)\Omega | Jy^*\Omega \rangle \\ &= \langle y^*\Omega | T^*(x^*)\Omega \rangle = \langle T(y^*)\Omega | x^*\Omega \rangle \\ &= \langle J\Delta^{\frac{1}{2}}T(y)\Omega | J\Delta^{\frac{1}{2}}x\Omega \rangle = \langle \Delta^{\frac{1}{2}}x\Omega | \Delta^{\frac{1}{2}}\widetilde{T}y\Omega \rangle. \end{aligned}$$

Da $\mathcal{A}\Omega$ ein Core für $\Delta^{\frac{1}{2}}$ ist, liegt $\Delta^{\frac{1}{2}}\widetilde{T}y\Omega$ im Definitionsbereich von $\Delta^{\frac{1}{2}}$, und es gilt: $\Delta\widetilde{T}y\Omega = \widetilde{T}\Delta y\Omega$. Also vertauscht \widetilde{T} stark mit Δ und dann auch mit Δ^{it} , was schließlich $T \circ \sigma_t^\psi = \sigma_t^\psi \circ T$ bedeutet. \square

A.2 Abzählbar erzeugte von Neumann Algebren

In diesem Abschnitt stellen wir einige Eigenschaften für von Neumann Algebren zusammen, die allgemein bekannt, in dieser Form in der Literatur aber eher über mehrere Quellen verstreut sind.

Wir nennen einen topologischen Raum (E, τ) τ -separabel, wenn es eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X gibt, die bzgl. der Topologie τ in X dicht liegt. Unter τ -Separabilität einer von Neumann Algebra \mathcal{A} , oder eines Hilbert- W^* -Moduls \mathcal{E} (vergl. Definition 2.2), verstehen wir Separabilität in einer der Topologien τ des dualen Paares $\langle \mathcal{A}, \mathcal{A}_* \rangle$ bzw. $\langle \mathcal{E}, \mathcal{E}_* \rangle$ (eine von Neumann Algebra, die σ stop-separabel ist, heißt auch *abzählbar erzeugt*, vergl. [Ped]). Es genügt die Separabilität in einer dieser Topologien nachzuweisen, um sie auch für alle anderen Topologien des dualen Paares zur Verfügung zu haben (denn Abschlüsse sind in jeder dieser Topologien gleich). Die τ -Separabilität reicht jedoch i.allg. noch nicht aus, um jedes $x \in \mathcal{A}$ (bzw. $\in \mathcal{E}$) durch eine Teilfolge von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ approximieren zu können. Die Separabilität des Präduals wird das aber sicherstellen.

A.2.1 Lemma. *Ist E ein separabler Banachraum, dann sind E^* und E_1^* $\sigma(E, E^*)$ -separabel (w^* -separabel). Jedes $x^* \in E^*$ kann durch eine Teilfolge der in E^* w^* -dichten Folge approximiert werden.*

Beweis. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei eine $\|\cdot\|$ -dichte Folge in E . Betrachte für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Abbildung

$$L_n : E_1^* \ni x^* \mapsto (\langle x_1, x^* \rangle, \dots, \langle x_n, x^* \rangle) \in \mathbb{C}^n.$$

Mit \mathbb{C}^n ist auch das Bild $L_n(E_1^*)$ separabel. Damit existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine Folge $(x_{n,k}^*)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq E_1^*$, so daß $(L_n(x_{n,k}^*))_{k \in \mathbb{N}}$ in $L_n(E_1^*)$ dicht liegt. Daher kann für jedes $x^* \in E_1^*$ eine Teilfolge $(x_{n,k_n}^*)_{n \in \mathbb{N}}$ gefunden werden, mit der Eigenschaft

$$|\langle x_i, x^* - x_{n,k_n}^* \rangle| \leq 1/n, \quad i = 1, \dots, n.$$

Also gilt $\lim_n \langle x_i, x_{n,k_n}^* \rangle = \langle x_i, x^* \rangle$ für alle $i \in \mathbb{N}$, d.h. die beschränkte Teilfolge $(x_{n,k_n}^*)_{n \in \mathbb{N}}$ der Folge $(x_{n,k}^*)_{n,k \in \mathbb{N}}$ konvergiert auf einer dichten Menge von E und damit auf ganz E . Daher ist $(x_{n,k}^*)_{n,k \in \mathbb{N}}$ w^* -dicht in E_1^* . Also besitzt $E^* = \bigcup_{\mathbb{N}} n \cdot E_1^*$ eine w^* -dichte Folge und ist somit w^* -separabel. \square

Der Beweis dieses Lemmas wurde der Vollständigkeit halber mit aufgenommen. Man findet ihn z.B. bei [Yos] im Beweis zu Pettis Theorem.

A.2.2 Satz. *Jeder Teilraum \mathcal{E} einer von Neumann Algebra \mathcal{A} mit separablem Prädual ist $\sigma \text{ stop}^{(*)}$ -separabel. Insbesondere gibt es für jedes $x \in \mathcal{E}$ eine beschränkte Teilfolge der in \mathcal{E} σ stop-dichten Folge, die x in dieser Topologie approximiert.*

Beweis. Nach Lemma A.2.1 ist \mathcal{A}_1 w^* - und damit auch $\sigma \text{ stop}^{(*)}$ -separabel. Die $\sigma \text{ stop}^{(*)}$ -Topologie auf \mathcal{A}_1 bzw. $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{E}$ ist metrisierbar. Also ist $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{E}$, als Teilmenge eines separablen metrisierbaren Raumes, selbst separabel mit dichter Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Insbesondere gibt es zu jedem $x \in \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{E}$ eine Teilfolge, die in der Metrik, also in der $\sigma \text{ stop}^{(*)}$ -Topologie gegen x konvergiert. Faßt man die so konstruierbaren Folgen in $n \cdot \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{E}$, $n \in \mathbb{N}$, zu einer Folge zusammen, so liegt diese $\sigma \text{ stop}^{(*)}$ -dicht in $\mathcal{E} = \bigcup_{\mathbb{N}} n \cdot \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{E}$ und leistet das Gewünschte. \square

A.2.3 Die Standardsituation, in der die Existenz eines separablen Präduals gesichert und A.2.2 anwendbar ist, wird im folgenden Satz beschrieben.

Satz. *Für eine von Neumann Algebra \mathcal{A} ist folgendes äquivalent:*

- i) \mathcal{A} ist σ -finit und $\sigma \text{ stop}$ -separabel,
- ii) \mathcal{A} besitzt eine treue normale Darstellung auf einem separablen Hilbertraum,
- iii) \mathcal{A} besitzt einen separablen Prädual.

Beweis. Für i) \Leftrightarrow ii) siehe [Ped] 3.8.4. Für iii) \Rightarrow i): $\mathcal{A}_{*,1}^+$ besitzt eine dichte Folge $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die durch $\omega := \sum_{\mathbb{N}} 2^{-n} \omega_n$ einen treuen normalen Zustand definiert. Nun zeigt Satz A.2.2 und [Ta1], II.3.19 die Behauptung. ii) \Rightarrow iii): \mathcal{A} besitzt einen treuen normalen Zustand ψ (z.B. $\psi(x) := \sum 2^{-n} \langle \xi_n | \cdot \xi_n \rangle$, $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ VONS von \mathcal{H}). Dann ist nach dem Bipolarensatz $\{\psi(\cdot a) \mid a \in \mathcal{A}\}$ dicht in \mathcal{A}_* . Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine $\sigma \text{ stop}$ -dichte Folge in \mathcal{A} , dann bildet $(\psi(\cdot a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ eine dichte Folge in \mathcal{A}_* (wiederum nach dem Bipolarensatz). \square

Dieser Satz ist vor allen Dingen auf Wahrscheinlichkeitsräume (\mathcal{A}, ψ) anwendbar, wenn \mathcal{A}_* separabel ist. Das bedeutet, daß wir Approximationen in \mathcal{A} (z.B. bei Anwendung des Dichtesatzes von Kaplansky) mit Folgen, statt mit Netzen durchführen können.

A.3 Integration \mathcal{A} -wertiger Funktionen

In diesem Abschnitt soll eine Integrationstheorie \mathcal{A} -wertiger Funktionen entwickelt werden, die wir zur Fortsetzung der stochastischen Integrale auf größere Integrationsklassen

benötigen. Da es sich dabei um eine etwas technische Angelegenheit handelt, beschränken wir uns auf das unumgänglich Nötige. Wir gehen von einem Maßraum (Γ, Σ, μ) mit einem kompakten Grundraum Γ , der Borelschen σ -Algebra Σ und einem regulären finiten Borelmaß μ , sowie einer W^* -Algebra \mathcal{A} mit separablem Prädual \mathcal{A}_* aus. $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei eine dichte Folge in $\mathcal{A}_{*,1}$. Unser Ziel ist es, für geeignete \mathcal{A} -wertige Funktionen f ein Integral $\int_{\Gamma} f(t) d\mu(t) \in \mathcal{A}$ zu definieren.

A.3.1 Definition. Wir nennen eine \mathcal{A} -wertige Funktion $\Gamma \ni t \mapsto f(t) \in \mathcal{A}$ w^* - μ -meßbar, falls die skalarwertigen Funktionen $\Gamma \ni t \mapsto \omega(f(t))$ für alle $\omega \in \mathcal{A}_*$ μ -meßbar sind.

Da \mathcal{A}_* separabel ist, genügt es, wenn diese Eigenschaft auf der dichten Folge $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}_{*,1}$ getestet wird. In einer Realisierung von $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ als von Neumann Algebra genügt es also, wenn die w^* - μ -Meßbarkeit mit den Funktionalen $\langle \xi | \cdot \eta \rangle$, $\xi, \eta \in \mathcal{H}$, getestet wird. Wegen $\|f(t)\| = \sup_n |\omega_n(f(t))|$ ist $t \mapsto \|f(t)\|$ der punktweise Grenzwert der μ -meßbaren Funktionen $t \mapsto \max_{i=1, \dots, n} |\omega_i(f(t))|$, also selbst wieder μ -meßbar.

Wir stellen nun den Zusammenhang zur üblichen Definition der μ -Meßbarkeit Banachraum-wertiger Funktionen her, wie man sie z.B. in [Lng] findet.

A.3.2 Lemma. Für jede w^* - μ -meßbare Funktion f gibt es eine μ -Nullmenge in Γ , auf deren Komplement f in der $\|\cdot\|$ -Topologie von \mathcal{A} Borel-meßbar ist. Ist das Bild $f(\Gamma)$ $\|\cdot\|$ -separabel, dann ist f μ -meßbar, d.h., in der $\|\cdot\|$ -Topologie von \mathcal{A} der μ -f.ü.-Grenzwert von Treppenfunktionen.

Beweis. Es gibt eine gemeinsame Nullmenge, auf deren Komplement alle Funktionen $\omega_n \circ f$, $n \in \mathbb{N}$, Borel-meßbar sind (vgl. [Lng]). Durch Abänderung von f auf dieser Menge können wir erreichen, daß diese Eigenschaft auf ganz Γ erfüllt ist. Also gilt für alle $x \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$:

$$\{t \in \Gamma \mid |\omega_n(f(t) - x)| \leq \varepsilon\} \in \Sigma.$$

Für $U_\varepsilon(x) := \{y \in \mathcal{A} \mid \|y - x\| \leq \varepsilon\}$ folgt wegen $\|y\| = \sup_n |\omega_n(y)|$, $y \in \mathcal{A}$:

$$f^{-1}(U_\varepsilon(x)) = \{t \in \Gamma \mid \|f(t) - x\| \leq \varepsilon\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{t \in \Gamma \mid |\omega_n(f(t) - x)| \leq \varepsilon\} \in \Sigma,$$

d.h., f ist in der $\|\cdot\|$ -Topologie auf \mathcal{A} Borel-meßbar. Der Rest ist nun z.B. in [Lng], X.1 zu finden. \square

A.3.3 Proposition. Eine w^* - μ -meßbare Funktion f auf Γ besitzt folgende Eigenschaft: Zu jeder kompakten Teilmenge $K \subseteq \Gamma$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine weitere kompakte Menge $K_\varepsilon \subseteq K$, auf der f w^* -stetig ist und für die $\mu(K \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon$ gilt.

Beweis. $K \subseteq \Gamma$ sei eine kompakte Teilmenge. Nach dem Satz von Lusin ist i) für jede der skalarwertigen Funktionen $\omega_n \circ f$ erfüllt. Mit dem üblichen ‘ 2^{-n} -Trick’ zeigt man, daß es zu $\varepsilon > 0$ eine kompakte Menge $K_\varepsilon \subseteq K$ mit $\mu(K \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon$ gibt, auf der alle diese Funktionen stetig sind. Da nach Lemma A.3.2 auch $t \mapsto \|f(t)\|$ μ -meßbar ist, läßt sich sogar erreichen, daß auch diese Funktion auf K_ε stetig ist. Für ein beliebiges $\omega \in \mathcal{A}_{*,1}$

sei nun $(\omega_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ die Teilfolge von $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die ω approximiert. Dann ist $\omega \circ f$ auf K_ε , wegen

$$|\omega - \omega_{n_k}(f(t))| \leq \|\omega - \omega_{n_k}\| \max_{t \in K_\varepsilon} \|f(t)\|,$$

als gleichmäßiger Grenzwert stetiger Funktionen stetig. \square

A.3.4 Satz. Eine Funktion $f : \Gamma \rightarrow \mathcal{A}$ ist genau dann w^* - μ -meßbar, wenn sie μ -f.ü. der w^* -Grenzwert einer Folge von Treppenfunktionen ist.

Beweis. Nach Lemma A.3.3 ist f auf einer kompakten Menge K_n mit $\mu(\Gamma \setminus K_n) < 1/n$ w^* -stetig (o.B.d.A. $K_n \subseteq K_{n+1}$). Nach dem Satz von der gleichmäßigen Beschränktheit ist f auf dieser Menge $\|\cdot\|$ -beschränkt. Da die w^* -Topologie auf beschränkten Mengen von \mathcal{A} metrisierbar ist, bestimmt $f|_{K_{n+1} \setminus K_n}$ eine w^* -stetige Funktion in einen vollständigen, separablen metrisierbaren Raum, die nach [LNg] in dieser Metrik, d.h., in der w^* -Topologie, μ -f.ü. der Grenzwert einer Folge $(g_{n,m})_{m \in \mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen ist. Die Funktionen $g_n := \sum_{i=1}^n g_{i,n}$ konvergieren nun in der w^* -Topologie μ -f.ü. gegen f . Die Umkehrung ist klar. \square

A.3.5 Definition. Eine w^* - μ -meßbare Funktion $f : \Gamma \rightarrow \mathcal{A}$ heißt w^* - L^1 -integrierbar, falls die skalarwertigen Funktionen $\omega \circ f$ für alle $\omega \in \mathcal{A}_*$ $L^1(\Gamma, \mu)$ -integrierbar sind.

A.3.6 Lemma. Für jede w^* - L^1 -integrierbare Funktion $f : \Gamma \rightarrow \mathcal{A}$ wird durch $\mathcal{A}_* \ni \omega \mapsto \int_\Gamma \omega \circ f \, d\mu$ genau ein Element aus \mathcal{A} definiert, das wir durch $\int_\Gamma f \, d\mu$ bezeichnen.

Beweis. Wir zeigen, daß die lineare Abbildung $T_f : \mathcal{A}_* \rightarrow L^1(\Gamma, \mu); \omega \mapsto \omega \circ f$ stetig ist: $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}_*$ sei eine Nullfolge und $(T_f(\omega_n))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen ein Element $h \in L^1(\Gamma, \mu)$ konvergent. Insbesondere konvergiert also $\omega_n(f(t))$ für alle $t \in \Gamma$ gegen Null. Andererseits gibt es eine Teilfolge $(T_f(\omega_{n_k}))_{k \in \mathbb{N}}$, die punktweise μ -f.ü. gegen h konvergiert. Also muß μ -f.ü. $h(t) = 0$, d.h., $h = 0$ gelten. Nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen ist T_f stetig. Daher definiert $\mathcal{A}_* \ni \omega \mapsto \int_\Gamma \omega(f(t)) \, d\mu(t) =: \omega(\alpha)$ genau ein Element $\alpha := \int_\Gamma f \, d\mu$ aus $\mathcal{A}_*^* = \mathcal{A}$. \square

A.3.7 Die Separabilität von \mathcal{A}_* hat $\|\int_\Gamma f \, d\mu\| = \sup_n \int_\Gamma |\omega_n \circ f| \, d\mu = \sup_n \|\omega_n \circ f\|_1$ zur Folge. Ähnlich wie bei der Meßbarkeit, muß auch die w^* - L^1 -Integrierbarkeit nur auf einer dichten Folge in \mathcal{A}_* geprüft werden. Allerdings ist zusätzlich eine Beschränktheitseigenschaft erforderlich.

Lemma. $f : \Gamma \rightarrow \mathcal{A}$ ist genau dann w^* - L^1 -integrierbar, wenn für eine dichte Folge $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus $\mathcal{A}_{*,1}^+$ (oder $\mathcal{A}_{*,1}$) folgendes gilt:

i) $\omega_n \circ f \in L^1(\Gamma, \mu)$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

ii) $\sup_n \|\omega_n \circ f\|_1 < \infty$.

In diesem Fall gibt es zu jedem $\omega \in \mathcal{A}_{*,1}^+$ (bzw. $\omega \in \mathcal{A}_{*,1}$) eine Teilfolge $(\omega_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit $\omega \circ f = L^1\text{-}\lim_k \omega_{n_k} \circ f$.

Beweis. Es gilt $\omega = \lim_k \omega_{n_k}$ für eine geeignete Teilfolge $(\omega_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ von $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und somit $\omega \circ f = \lim_k \omega_{n_k} \circ f$ punktweise. Eigenschaft ii) und das Lemma von Fatou zeigen $\omega \circ f \in L^1(\Gamma, \mu)$ für alle $\omega \in \mathcal{A}_{*,1}^+$ und damit auch für alle $\omega \in \mathcal{A}_*$. Also ist f w^* - L^1 -integrierbar. Aus der Stetigkeit der Abbildung $\mathcal{A}_* \ni \omega \mapsto \omega \circ f$ folgt die letzte Behauptung. \square

A.3.8 Das folgende Ergebnis ist eine Version des Satzes von der dominierten Konvergenz.

Satz. f sei eine w^* - μ -meßbare Funktion und $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge w^* - L^1 -integrierbarer Funktionen auf (Γ, Σ, μ) mit folgenden Eigenschaften:

- i) Für eine dichte Folge $(\omega_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}_{*,1}$ konvergieren $\omega_i \circ f_n$ punktweise μ -f.ü. gegen $\omega_i \circ f$, $i \in \mathbb{N}$.
- ii) Es gibt eine L^1 -beschränkte Folge $(g_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset L^1(\Gamma, \mu)$ mit $|\omega_i \circ f_n| \leq g_i$ f.a. $i, n \in \mathbb{N}$.

Dann ist f w^* - L^1 -integrierbar, und es gilt $\omega \circ f = L^1\text{-}\lim_n \omega \circ f_n$ f.a. $\omega \in \mathcal{A}_*$.

Beweis. Aus i) und ii) erhalten wir mit dem klassischen Satz von Lebesgue: $\omega_i \circ f \in L^1(\Gamma, \mu)$ und $\omega_i \circ f = L^1\text{-}\lim_n \omega_i \circ f_n$. Damit gilt $\|\omega_i \circ f\|_1 = \lim_n \|\omega_i \circ f_n\|_1 \leq \sup_i \|g_i\|_1$. Nach Lemma A.3.7 ist f w^* - L^1 -integrierbar. Für die Abbildungen T_{f_n} aus dem Beweis von Lemma A.3.6 gilt $\|T_{f_n}\| = \sup_i \|\omega_i \circ f_n\|_1 \leq \sup_i \|g_i\|_1 =: M$. Also erhalten wir für eine Teilfolge $(\omega_{i_k})_{k \in \mathbb{N}}$, die $\omega \in \mathcal{A}_{*,1}$ approximiert:

$$\begin{aligned} \|(\omega - \omega_{i_k}) \circ (f - f_n)\|_1 &\leq (\|T_f\| + \|T_{f_n}\|) \|\omega - \omega_{i_k}\| \\ &\leq (\|T_f\| + M) \|\omega - \omega_{i_k}\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

gleichmäßig in $n \in \mathbb{N}$. Für $\varepsilon > 0$ ergibt sich also bei geeignetem $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \|\omega \circ (f - f_n)\|_1 &\leq \|(\omega - \omega_{i_k}) \circ (f - f_n)\|_1 + \|\omega_{i_k} \circ (f - f_n)\|_1 \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \|\omega_{i_k} \circ (f - f_n)\|_1 \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

ab einem $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, denn nach dem Satz von der dominierten Konvergenz gilt $\omega_{i_k} \circ f = L^1\text{-}\lim_n \omega_{i_k} \circ f_n$. Damit ist alles gezeigt. \square

A.3.9 Satz. Jede w^* - L^1 -integrierbare Funktion läßt sich im w^* - L^1 -Sinne durch eine Folge von Treppenfunktionen approximieren.

Beweis. $(\omega_i)_{i \in \mathbb{N}}$ sei eine dichte Folge in $\mathcal{A}_{*,1}$. Wir versehen \mathbb{C}^n mit der max-Norm und definieren für eine w^* - L^1 -integrierbare Funktion f und jedes $n \in \mathbb{N}$ die Abbildung

$$\Phi_n(f) : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}^n; \quad t \mapsto [\omega_1(f(t)), \dots, \omega_n(f(t))]$$

Durch Abänderung auf einer Nullmenge kann Φ_n f.a. $n \in \mathbb{N}$ als Borel-meßbar angenommen werden. $B_k := \{t \in \Gamma \mid \|f(t)\| \leq k\}$ ist μ -meßbar. Wegen $\bigcup_{\mathbb{N}} B_k = \Gamma$, konvergieren $f \cdot \chi_{B_k}$ und $\Phi_n(f \cdot \chi_{B_k})$ in der Norm punktweise gegen f bzw. $\Phi_n(f)$. Nun

überdecken wir \mathbb{C}^n mit disjunkten Würfeln $W_{n,m}$ der Seitenlänge 2^{-n} und bilden mit $t_{n,m} \in A_{n,m} := \{t \in \Gamma \mid \Phi_n(f)(t) \in W_{n,m}\}$ die Funktion

$$\tilde{f}_n := \sum_{m \in \mathbb{Z}} f(t_{n,m}) \cdot \chi_{A_{n,m} \cap B_n}. \quad (\text{A.3})$$

Da f und $\Phi_n(f)$ auf B_n beschränkt sind, tragen zur Summe auf der rechten Seite nur endlich viele Summanden bei, so daß \tilde{f}_n eine Treppenfunktion ist. Nun definieren wir die Approximation f_n von f endgültig durch

$$f_n(t) := \begin{cases} \tilde{f}_n(t) & \text{für } |\omega_i(\tilde{f}_n(t))| \leq |\omega_i(f(t))| + g(t), \quad i = 1, \dots, n, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dabei ist g eine strikt positive, L^1 -Funktion auf Γ (da Γ kompakt ist, könnten wir die konstante Funktion $\mathbb{1}$ wählen). Jedes $t \in \Gamma$ liegt ab einem genügend großen $n_t \in \mathbb{N}$ in B_n , $n \geq n_t$ und erfüllt $2^{-n} \leq g(t)$, d.h., es gilt f.a. $i = 1, \dots, n$:

$$|\omega_i(\tilde{f}_n(t))| \leq |\omega_i(f(t))| + 2^{-n} \leq |\omega_i(f(t))| + g(t).$$

Damit haben wir $f_n(t) = \tilde{f}_n(t)$ und $|\omega_i(f_n(t) - f(t))| \leq 2^{-n}$ f.a. $n \geq n_t$, $i = 1, \dots, n$, also die punktweise Konvergenz von $\omega_i \circ f_n$ gegen $\omega_i \circ f$ f.a. $i \in \mathbb{N}$. Nach Konstruktion besitzen die Approximanden $\omega_i \circ f_n$ die Majoranten $g_i := |\omega_i \circ f| + g$ mit $\sup_n \|g_i\|_1 \leq \|T_f\| + \|g\|_1$ (vgl. den Beweis von Lemma A.3.6). Satz A.3.8 zeigt nun die w^* - L^1 -Konvergenz von f_n gegen f .

Um für den Fall $\Gamma = [0, T] \subset \mathbb{R}$ eine Approximation mit Treppenfunktionen im engeren Sinne (also Funktionen die nicht nur auf endlich vielen μ -meßbaren Teilmengen von $[0, T]$, sondern auf Intervallen konzentriert sind) zu erhalten, muß nur noch $\chi_{A_{n,m} \cap B_n}$ in (A.3) im L^1 -Sinne durch solche Funktionen approximiert werden, was durch die gewöhnliche L^1 -Theorie bereitgestellt wird. \square

A.4 Ein Gegenbeispiel

Wir schließen an die Notation von 4.2 an und zeigen, daß die modulwertigen L^2 -Funktionen $L^2([0, 1], \mathcal{E}) \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H}_0, L^2([0, 1], \mathcal{H}))$, $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H})$, normalerweise nicht einmal in der Norm von $\mathcal{B}(\mathcal{H}_0, L^2([0, 1], \mathcal{H}))$ vollständig sind. Dafür genügt es, wenn wir $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}$ wählen und die zerlegbaren Operatoren (vgl. Definition 4.2.3) $L^2([0, 1], \mathcal{B}(\mathcal{H})) \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H}, L^2([0, 1], \mathcal{H}))$ selbst betrachten. Wir wählen $\mathcal{H} := L^2([0, 1])$, also $L^2([0, 1], \mathcal{H}) \cong L^2([0, 1]^2) \cong L^2((0, 1)) \bar{\otimes} L^2([0, 1]) \cong \int_{[0,1]}^{\oplus} L^2([0, 1]) dt$.

Wir gehen so vor, daß wir zunächst einen unbeschränkten selbstadjungierten Operator \hat{x} auf $L^2([0, 1]) \bar{\otimes} L^2([0, 1])$ definieren, dessen Definitionsbereich den Teilraum $L^2([0, 1]) \otimes \mathbb{1}$ umfaßt. Durch $x\xi := \hat{x}(\xi \otimes \mathbb{1})$, $\xi \in L^2([0, 1])$, läßt sich dann eine Operator x aus $\mathcal{B}(L^2([0, 1]), L^2([0, 1]^2))$ definieren. x wird eine Faserung $\tilde{x} := (x_t)_t$ wie ein zerlegbarer Operator besitzen, nur werden fast alle Operatoren x_t unbeschränkt sein. Anschließend

zeigen wir, daß χ in der Operatornorm von $\mathcal{B}(L^2([0, 1]), L^2([0, 1]^2))$ durch zerlegbare Operatoren approximierbar ist und gelangen auf diese Weise zur Unvollständigkeit dieser Operatoren.

Wir wählen für χ_t , $t \in (0, 1]$, den unbeschränkten Multiplikationsoperator auf $L^2([0, 1])$ mit der L^2 -Funktion $[0, 1] \ni s \mapsto 1/\sqrt[4]{t-s} \cdot \chi_{[0,t]}$ und $\chi_0 := 0$. Nach [ReSi4], Theorem XIII.85, wird durch $\hat{\chi} := \int_{[0,1]}^{\oplus} \chi_t \, dt$ ein selbstadjungierter Operator mit Definitionsbereich $D(\hat{\chi}) := \{(\xi_t)_t \in \int_{[0,1]}^{\oplus} L^2([0, 1]) \, dt \mid \xi_t \in D(\chi_t) \text{ f.ü.}; \int_{[0,1]} \|\chi_t \xi_t\|^2 \, dt < \infty\}$ definiert. Wir zeigen, daß die konstanten Funktionen $(\xi_t)_t$, $\xi_t := \xi \in L^2([0, 1])$ in $D(\hat{\chi})$ enthalten sind: Für alle $s \in [0, 1]$ ist $t \mapsto f_s(t) := |\chi_t \xi|^2(s)$ eine L^1 -Funktion und

$$s \mapsto \int_0^1 f_s(t) \, dt = |\xi(s)|^2 \int_s^1 \frac{1}{\sqrt{t-s}} \, dt = 2|\xi(s)|^2 \sqrt{1-s}$$

definiert ebenfalls eine L^1 -Funktion. Nach dem Satz von Fubini liegt dann auch $s \mapsto f_s(t)$ für fast alle $t \in [0, 1]$ im L^1 , und es gilt

$$\int_0^1 \|\chi_t \xi\|^2 \, dt = \int_0^1 \int_0^1 |\chi_t \xi|^2(s) \, dt \, ds = \int_0^1 2|\xi(s)|^2 \sqrt{1-s} \, ds \leq 2\|\xi\|^2 < \infty.$$

Für fast alle $t \in [0, 1]$ liegt also ξ in $D(\chi_t)$ (eine Funktion ξ , die nicht in allen Definitionsbereichen $D(\chi_t)$ liegt, ist z.B. $s \mapsto 1/\sqrt[4]{|a-s|}$, $a \in [0, 1]$). Damit ist durch $\chi \xi := \hat{\chi}(\xi \otimes \mathbb{1})$, $\xi \in L^2([0, 1])$, ein beschränkter Operator χ definiert, der alle Anzeichen eines zerlegbaren Operators gemäß Definition 4.2.3 besitzt, nur daß seine Faserung $(\chi_t)_t$ aus lauter unbeschränkten Operatoren χ_t besteht. χ gehört also nicht zu den zerlegbaren Operatoren.

Nun zeigen wir, daß die zerlegbaren Operatoren nicht vollständig sind. Die Spektralprojektionen $p_t(\lambda) := \chi_{[0, t-\frac{1}{\lambda}]}$ von χ_t definieren Spektralprojektionen $p(\lambda) := (p_t(\lambda))_t$ von $\hat{\chi}$ zu den Intervallen $[0, \sqrt[4]{\lambda}]$, $\lambda > 0$. Die zerlegbaren Operatoren $\chi_\lambda := \hat{\chi} p_\lambda|_{\mathcal{H} \otimes \mathbb{1}} \in L^2([0, 1], \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ bilden eine $\|\cdot\|$ -Cauchy-Folge, deren Grenzwert χ aber nicht mehr zu den zerlegbaren Operatoren gehört (die Operatoren χ_λ konvergieren, wegen der Abgeschlossenheit von $\hat{\chi}$, für $\lambda \rightarrow \infty$ in der stop-Topologie gegen χ). Für $\gamma > \lambda$ gilt nämlich folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} \|(\chi_\gamma - \chi_\lambda)\xi\|^2 &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t-s}} (\chi_{[0, t-\frac{1}{\gamma}]}(s) - \chi_{[0, t-\frac{1}{\lambda}]}(s)) |\xi(s)|^2 \, ds \, dt \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t-s}} \chi_{[t-\frac{1}{\lambda}, t-\frac{1}{\gamma}]}(s) |\xi(s)|^2 \, ds \, dt \\ &= \int_0^1 |\xi(s)|^2 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t-s}} \chi_{[s+\frac{1}{\gamma}, s+\frac{1}{\lambda}]}(t) \, dt \, ds \\ &\leq \int_0^1 |\xi(s)|^2 \int_{s+\frac{1}{\gamma}}^{s+\frac{1}{\lambda}} \frac{1}{\sqrt{t-s}} \, dt \, ds \end{aligned}$$

$$= 2 \int_0^1 |\xi(s)|^2 \left[\sqrt{\frac{1}{\lambda}} - \sqrt{\frac{1}{\gamma}} \right] ds = 2 \|\xi\|^2 \left[\sqrt{\frac{1}{\lambda}} - \sqrt{\frac{1}{\gamma}} \right] \xrightarrow{\gamma > \lambda \rightarrow \infty} 0,$$

gleichmäßig bzgl. ξ in der Einheitskugel $L^2([0, 1])_1$ von $L^2([0, 1])$.

A.5 Anhang zu Kapitel 6

Wir müssen den Beweis von Satz 6.1 noch vervollständigen. Es handelt sich um die Bestätigung der Abschätzungen (6.2) und (6.3). Die dafür nötigen Rechnungen sind ziemlich lang, aber nicht besonders schwer. Daher versuchen wir, nur die wesentlichen Schritte vorzuführen. Wir benutzen dabei mehrfach die Beziehung $p_n(0, s+t) = \sum_{k=0}^n p_k(0, t) p_{n-k}(s, s+t)$ und $\sum_{\ell=k+1}^{\infty} \frac{t^\ell}{\ell!} e^{-t} = \int_0^t \frac{x^k}{k!} e^{-x} dx$. Wir berechnen zunächst für $m \geq 1$:

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{i=0}^{2^n-1} p_k(0, i\delta_n] p_m(i\delta_n, (i+1)\delta_n] \right\|_{\pi}^2 \\ &= \sum_{i=0}^{2^n-1} \pi(p_k(0, i\delta_n]) \pi(p_m(i\delta_n, (i+1)\delta_n]) \\ &+ \sum_{i>j=0}^{2^n-1} \underbrace{\pi(p_k(0, i\delta_n] p_k(0, j\delta_n] p_m(j\delta_n, (j+1)\delta_n] p_m(i\delta_n, (i+1)\delta_n])}_{=0} \\ &+ \sum_{i<j=0}^{2^n-1} \dots \\ &= \sum_{i=0}^{2^n-1} \frac{(i\delta_n)^k}{k!} e^{-i\delta_n} \cdot \delta_n \cdot \frac{\delta_n^{m-1}}{m!} e^{-\delta_n} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{cases} \int_0^t \frac{x^k}{k!} e^{-x} dx = \sum_{\ell=k+1}^{\infty} \frac{t^\ell}{\ell!} e^{-t} & , m = 1, \\ 0 & , m > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{i=0}^{2^n-1} p_k(0, i\delta_n] p_m(i\delta_n, (i+1)\delta_n] - \sum_{\ell=k+1}^{\infty} p_\ell(0, t] \right\|_{\pi}^2 \\ &= \left\| \sum_{i=0}^{2^n-1} p_k(0, i\delta_n] p_m(i\delta_n, (i+1)\delta_n] \right\|_{\pi}^2 + \sum_{\ell=k+1}^{\infty} \frac{t^\ell}{\ell!} e^{-t} \\ &- 2 \operatorname{Re} \sum_{i=0}^{2^n-1} \sum_{\ell=k+1}^{\infty} \pi(p_k(0, i\delta_n] p_1(i\delta_n, (i+1)\delta_n] p_{\ell-(k+1)}((i+1)\delta_n, t]) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^t \frac{x^k}{k!} e^{-x} dx - \sum_{i=0}^{2^n-1} \frac{(i\delta_n)^k}{k!} e^{-i\delta_n} \cdot \delta_n e^{-\delta_n} \\
&\leq \sum_{i=0}^{2^n-1} \int_{i\delta_n}^{(i+1)\delta_n} \left| \frac{(i\delta_n)^k}{k!} e^{-(i+1)\delta_n} - \frac{(i\delta_n + (x - i\delta_n))^k}{k!} e^{-(i\delta_n + (x - i\delta_n))\delta_n} \right| dx \\
&\stackrel{(*)}{\leq} \sum_{i=0}^{2^n-1} \int_{i\delta_n}^{(i+1)\delta_n} \left(M \frac{(i\delta_n)^k}{k!} + k \cdot \frac{x^{k-1}}{k!} \right) dx \cdot \delta_n \\
&\leq (M t^{k+1} + t^k) \cdot \frac{\delta_n}{k!} =: D_k(t) \cdot \frac{\delta_n}{k!}.
\end{aligned}$$

Für (*) haben wir dabei die folgende Abschätzung verwendet. Es sei $z \geq 0$ und $0 \leq y \leq \delta$, $k \geq 1$:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{k!} \left| z^k e^{-(z+\delta)} - (z+y)^k e^{-(z+y)} \right| \\
&\leq \frac{z^k}{k!} e^{-z} \underbrace{\left| \frac{e^{-\delta} - e^{-y}}{y - \delta} \right|}_{\leq M} \cdot \underbrace{|y - \delta|}_{\leq \delta} + \underbrace{y}_{\leq \delta} \sum_{\ell=0}^{k-1} \frac{z^\ell}{\ell!} \frac{y^{k-1-\ell}}{(k-1-\ell)!} \cdot \underbrace{\frac{1}{k-\ell}}_{\leq 1} e^{-(z+y)} \\
&\leq \delta \cdot \left(M \frac{z^k}{k!} + k \cdot \frac{(z+y)^{k-1}}{k!} \right).
\end{aligned}$$

Diese Ungleichung bleibt auch für $k = 0$ richtig.

Literaturverzeichnis

- [Acc] L. Accardi, *Nonrelativistic Quantum Mechanics as a Noncommutative Markov Process*. Advances in Math. 20, 329–366, 1976.
- [AFL] L. Accardi, A. Frigerio, J.T. Lewis, *Quantum Stochastic Processes*. Publ. RIMS. Kyoto Univ. 18, 97–133, 1982.
- [AFQ] L. Accardi, F. Fagnola, J. Quaegebeur, *A Representation Free Quantum Stochastic Calculus*. Journal Funct. Anal. 104, 149–197, 1992.
- [ApFr] D. Applebaum, A. Frigerio, *Stationary Dilations of W^* -Dynamical Systems Constructed via Quantum Stochastic Differential Equations*. In: From local times to global geometry, control and physics (Coventry, 1984/85), Pitman Res. Notes Math. Ser. 150, 1–38, Longman Sci. Tech., Harlow 1986.
- [ApHu] D.B. Applebaum, R.L. Hudson, *Fermion Ito's Formula and Stochastic Evolutions*. Comm. Math. Phys. 96, 473–496, 1984.
- [BrRo1] O. Bratteli, D.W. Robinson, *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics I*. Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1979.
- [BrRo2] O. Bratteli, D.W. Robinson, *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics II*. Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1981.
- [BSW] C. Barnett, R. Streater, I.F. Wilde *Quasi-free Quantum Stochastic Integrals for the CAR and CCR*. Journal Funct. Anal. 52, 19–44, 1983.
- [Dav1] E.B. Davies, *Markovian Master Equations*. Comm. Math. Phys. 39, 91–110, 1974.
- [Dav2] E.B. Davies, *Markovian Master Equations. II*. Math. Annalen 219, 147–158, 1976.
- [Dav3] E.B. Davies, *Markovian Master Equations. III*. Ann. Inst. Henri Poincaré 11, 265–273, 1975.
- [Dav4] E.B. Davies, *Quantum Theory of Open Systems*. Academic Press, London, 1976.
- [Ein] A. Einstein, *Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen*. Ann. Physik 17, 549–560, 1905.

- [EvLe] D.E. Evans, J.T. Lewis, *Dilations of Irreversible Evolutions in Algebraic Quantum Theory*. Comm. Dublin Inst. Advanced Studies, Series A, 24, 1978.
- [Fra] M. Frank, *Self-Duality and C^* -Reflexivity of Hilbert C^* -Moduli*. Zeitschr. Anal. Anw. 9, 165–176, 1990.
- [GeVi] I.M. Gel'fand, N.Ya. Vilenkin, *Generalized Functions*. Vol. 4, *Applications of Harmonic Analysis*. Academic Press, New York, London, 1964.
- [GHJ] F.M. Goodman, P. de la Harpe, V.F.R. Jones, *Coxeter Graphs and Towers of Algebras*. Springer Verlag, New York, 1989.
- [HKK] J. Hellmich, C. Köstler, B. Kümmerer, *Stationary Quantum Markov Processes as Solutions of Stochastic Differential Equations*. in R. Alicki, M. Bożejko, W.A. Majewski (Eds.), *Quantum Probability*, Banach Center Publications 43, 217-229, Warszawa, 1998.
- [HKR] J. Hellmich, R. Honegger, C. Köstler, B. Kümmerer, A. Rieckers, *The Quantum Stochastic Calculus of Classical and Non-Classical Squeezed White Noise*. Publ. RIMS. Kyoto Univ. 38, 2002.
- [Hid] T. Hida, *Brownian Motion*. Springer Verlag, New York, 1980.
- [HuLi] R.L. Hudson, J.M. Lindsay, *Uses of Non-Fock Quantum Brownian Motion and a Quantum Martingal Representation Theorem*. *Quantum Probability and Applications II*, Proc. Workshop., Heidelberg 1984, Lect. Notes Math. 1136, 276–305, 1984.
- [HuPa1] R.L. Hudson, K.R. Parthasarathy, *Quantum Ito's Formula and Stochastic Evolutions*. Comm. Math. Phys. 93, 301–323, 1984.
- [HuPa2] R.L. Hudson, K.R. Parthasarathy, *Stochastic Dilations of Uniformly Continuous Completely Positive Semigroups*. Acta Applicandae Math. 2, 353–378, 1984.
- [Itô] K. Itô, *On Stochastic Differential Equations*. Mem. Amer. Math. Soc. 4, 1–51, 1951.
- [KaRi1] K.V. Kadison, J.R. Ringrose, *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras, Vol. 1*. Academic Press, 1983.
- [KaRi2] K.V. Kadison, J.R. Ringrose, *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras, Vol. 2*. Academic Press, 1986.
- [KFGV] A. Kossakowski, A. Frigerio, V. Gorini, M. Verri, *Quantum Detailed Balance and KMS Condition*. Comm. Math. Phys. 57, 97–110, 1977.
- [Kös] C. Köstler, *Quanten-Markoff-Prozesse und Quanten-Brownsche Bewegungen*. Dissertation, Stuttgart, 2000.

- [Küm1] B. Kümmerer, *Markov Dilations on W^* -Algebras*. Journal Funct. Anal. 63, 139–177, 1985.
- [Küm2] B. Kümmerer, *Adjoints of Operators on W^* -Algebras*. Preprint, 1984.
- [Küm3] B. Kümmerer, *Stochastic Processes with Values in M_n as Couplings to Free Evolutions*. Preprint, 1993.
- [Küm4] B. Kümmerer, *Survey on a Theory of Non-Commutative Stationary Markov Processes*. Quantum Probability and Applications III, Proc. Conf., Oberwolfach/FRG 1987, Lect. Notes Math. 1303, 154–182, 1988.
- [Küm5] B. Kümmerer, *Markov Dilations and Non-Commutative Poisson Processes*. Preprint, 1987.
- [KüMa] B. Kümmerer, H. Maassen, *The Essentially Commutative Dilations of Dynamical Semigroups on M_n* . Comm. Math. Phys. 109, 1–22, 1987.
- [KüSp] B. Kümmerer, R. Speicher, *Stochastic Integration on the Cuntz Algebra O_∞* . Journal Funct. Anal. 103, 372–408, 1992.
- [Lan] E.C. Lance, *Hilbert C^* -Modules*. London Mathematical Society Lecture Notes Series 210, Cambridge University Press, Cambridge 1995.
- [Lgv] P. Langevin, *Sur la theorie du mouvement brownien*. C. R. Acad. Sci. 146, 530–533, 1908.
- [LiWi] J.M. Lindsay, I.F. Wilde, *On non-Fock Boson Stochastic Integrals*. Journal Funct. Anal. 65, 77–82, 1986.
- [Lng] S. Lang, *Real Analysis*. Addison-Wesley, 1969.
- [Nel] E. Nelson, *Notes on Non-Commutative Integration*. Journal Funct. Anal. 15, 103–116, 1974.
- [Øks] B. Øksendal, *Stochastic Differential Equations*. Springer Verlag, 1995.
- [Par] K.R. Parthasarathy, *An Introduction to Quantum Stochastic Calculus*. Birkhäuser, Basel, 1992.
- [Pas] W.L. Paschke, *Inner Product Modules over B^* -Algebras*. Trans. Amer. Math. Soc. 182, 443–468, 1973.
- [Ped] G.K. Pedersen, *C^* -Algebras and their Automorphism Groups*. Academic Press, 1979.
- [Pri] J. Prin, *Verallgemeinertes weißes Rauschen und nichtkommutative stochastische Integration*. Diplomarbeit, Tübingen, 1989.

- [ReSi1] M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics I*. Academic Press, 1973.
- [ReSi4] M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics IV*. Academic Press, 1978.
- [Rob] D.W. Robinson, *Strongly Positive Semigroups and Faithful Invariant States*. Comm. Math. Phys. 85, 129–142, 1982.
- [Rup] C. Rupp, *Non-Commutative Bernoulli Shifts on Towers of von Neumann Algebras*. Dissertation, Tübingen, 1995.
- [Sak] S. Sakai, *C*-Algebras and W*-Algebras*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1971.
- [Sch] J. Schweizer, *Interplay between Noncommutative Topology and Operators on C*-Algebras*. Dissertation, Tübingen, 1996.
- [Ske] M. Skeide, *Hilbert Modules in Quantum Electro Dynamics and Quantum Probability*. Commun. Math. Phys. 192, 569–604, 1998.
- [Spe] R. Speicher, *Stochastic Integration on the Full Fock Space with the Help of a Kernel Calculus*. Publ. RIMS. Kyoto Univ. 27, 149–184, 1991.
- [Sto] M.H. Stone, *Linear Transformations in Hilbert Space and their Applications to Analysis*. Amer. Math. Soc. 1932.
- [Ta1] M. Takesaki, *Theory of Operator Algebras I*. Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1979.
- [Ta2] M. Takesaki, *States and Automorphisms of Operator Algebras, Standard Representations and the Kubo-Martin-Schwinger Boundary Condition*. Lecture Notes in Physics 20, 205–246, 1971.
- [Ter] M. Terp, *L^p-Spaces Associated with von Neumann Algebras*. Notes, Københavns Universitet, Matematisk Institut, Rapport No. 3a/3b, 1981.
- [UhOr] G.E. Uhlenbeck, L.S. Ornstein, *On the Theory of the Brownian Motion*. Phys. Rev. 36, 823–841, 1930.
- [Wie] N. Wiener, *Differential Space*. Journal of Math. and Physics 2, 131–174, 1923.
- [Yos] K. Yosida, *Functional Analysis*. Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1980.

Index

- adaptiert, 64
 - stark, 64
- ψ -Adjungierte, 4, 5, 38, 102
- $\mathcal{A}_0 \bar{\otimes} \mathcal{H}_\varphi$, 43
- Approximation
 - durch einfache Prozesse, 66
 - durch Treppenfunktionen
 - im L^2 -Sinne, 64
 - im w^* - L^1 -Sinne, 107
- Automorphismus, 4

- bedingte Erwartung, 4
 - vom Tensortyp, 15, 43
- Bernoulli-Shift
 - verallgemeinerter, 16
- Besselsche Ungleichung, 44
- Brownsche Bewegung, iii, 24

- Cauchy-Schwarz-Ungleichung, 30
- commuting squares, 6

- detailed balance, 97
- Differentialgleichung
 - stochastische, iv, 26, 68–74
- Dilatation, 19, 21, 23
- duales Paar, 2, 34, 37, 38, 103

- Filtrierung, 10
 - abgeschlossene, 10, 11, 17
 - des weißen Rauschens, 17
 - kanonische, 11
 - Konstruktion verträglicher, 12
 - lokal verträgliche, 10, 20
 - Markov, 10, 19
 - minimale, 10, 12
 - stetig von oben, 10, 11
 - stetig von unten, 10, 11
 - verträgliche, 10–12, 14
- Fluß auf \mathcal{A}_0 , 12

- Funktion
 - \mathcal{A} -wertige, 105
 - Bochner-integrierbare, 66
 - modulwertige, 62
 - L^2 -integrierbare, 62
 - meßbare, 62
 - w^* - L^1 -integrierbare, 63, 106
 - w^* - μ -meßbare, 105

- Gegenbeispiel, 63, 91, 92, 108
- GNS-Darstellung, 3

- Hilbertmodul
 - C^* , 29
 - direkte Summendarstellung, 44
 - isomorphes, 31
 - Kolmogorov-Darstellung, 32, 34, 43
 - selbstduales, 31, 34
 - Standardform, 30–32, 41
 - W^* , 32, 33
- *-Homomorphismus
 - injektiver, 4, 8

- Integral
 - stochastisches, 59–68
 - Fortsetzung, 64
- Itô-
 - Integral
 - klassisches, 24
 - Isometrie, 68
 - Tabelle, v, vi

- Kadison-Schwarz-Ungleichung, 4, 101
- Kolmogorov-Zerlegung, 31
- Kommutante, 2
- Kopplung, 22
 - Poissonsche, 23
- Kopplungsdilatation, 21, 23
- Korrelation, 9

- Korrespondenz
 - zwischen u und b , 75–83
- Kozyklus
 - additiver, 14, 25, 52, 55, 98
 - zentrierter, 52, 56, 57, 75
 - multiplikativer, 20, 21
 - unitärer, 21, 26
 - unitaler, 47, 57, 75
- Lindblad-Generator, 4, 56, 57, 98
- Linking-Algebra, 31, 37, 40
- Linksintegral, 67
- Linksmultiplikation, 41, 45
- $L^2(\mathcal{A}, P_0)$, 38
 - adjungierbare Elemente, 90
 - Multiplikation, 91
- Markov-
 - Dilatation, 19, 20
 - Filtrierung, 10, 19
 - Prozeß, 19–21
- Martingaleigenschaft, 55
- Modulabbildung, 30
 - adjungierbare, 30
 - Fortsetzung auf $\bar{\mathcal{E}}$, 37
- modulare
 - Gruppe, 3, 5, 102
 - Konjugation, 3, 102
- modularer Operator, 3, 102
- Moduleigenschaft, 5, 42
- Morphismus, 3
 - Fortsetzung auf \mathcal{H}_ψ , 4
 - Fortsetzung auf $L^2(\mathcal{A}, P_0)$, 38
 - GNS-Darstellung, 4
- Multiplikation auf $L^2(\mathcal{A}, P_0)$, 41
- $M_2 \otimes \mathcal{H}_\varphi$, 45
- von Neumann Algebra, 2
 - abzählbar erzeugt, 103
 - σ stop-separable, 103, 104
- Operator
 - affiliierter, 85
 - kompakter, 30
 - modularer, 3, 102
 - P_0 -affiliierter, 86–93
 - adjungierbarer, 90
 - zerlegbarer, 62
- Parzevalsche Gleichung, 44
- Poisson-
 - Prozeß, 14, 22, 23
- Prädual, 2
 - eines Hilbert- W^* -Moduls, 34
 - separabler, 2, 35, 103, 104
- Prozeß, 8, 12, 64
 - adaptierter, 25
 - einfacher, 64
 - lokal- L^2 -integrierbarer, 67
 - Markov, 19–21
 - minimaler, 9
 - Poissonscher, 14, 22, 23
 - stationärer stochastischer, 9
 - verallgemeinerter, 13, 16
 - zentrierter, 25
- Rechtsintegral, 67
- Satz von
 - Bochner-Minlos, 13
 - der dominierten Konvergenz, 107
 - Kaplansky, 37
 - Lebesgue, 107
 - Lusin, 105
 - Šmulian, 35
- Standardkonstruktion, 49–55, 75
 - Beispiele, 53–55, 95–97
- Topologie
 - σ stop, σ wop, w^* , σ stop*, 2, 32
 - stop, wop, 2, 32
- W^* -dynamisches System, 4
 - irreversibles, 4
 - reversibles, 4, 9
- Wahrscheinlichkeitsraum, 3
 - nichtkommutativer, 3, 5
- Wechselwirkung, 21
- weißes Rauschen, 13–18
 - CCR-, 15

- klassisches (Gaußsches), 13
- Poissonsches, 14, 23
- verallgemeinertes, 16
- Poissonsches, 23
- Wiener-Itô-Zerlegung, 14
- w^* - L^1 -integrierbar, 63, 106
- w^* - μ -meßbar, 105

- Zentralisator, 2, 102
- Zentrum, 2
- Zufallsvariable, 7
 - nichtkommutative, 8