Yang-Mills-Theorie: Confinement und Topologie

Dissertation

zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften

der Fakultät für Physik
der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

vorgelegt von
Alexandra Schäfke
aus Konstanz

2001

Tag der mündlichen Prüfung:	29.06.2001
Dekan:	Prof. Dr. G. J. Wagner
1. Berichterstatter:	Prof. Dr. H. Reinhardt
2. Berichterstatter:	Prof. Dr. M. Thies

meinen Eltern

Danksagung

An erster Stelle gilt mein Dank Herrn Prof. Dr. Hugo Reinhardt. Als guter Doktorvater war er auf der einen Seite immer sehr an meiner wissenschaftlichen Arbeit interessiert und stets bereit, sie zu unterstützen und zu lenken. Auf der anderen Seite ließ er mir auch genügend Freiraum, in der Physik eigene Interessen zu entwickeln und zu vertiefen.

Ganz besonders möchte ich auch Herrn Priv.-Doz. Dr. habil. Kurt Langfeld danken, der nicht minder engagiert in der Betreuung meiner Arbeit war. Durch seinen erstaunlichen Ideenreichtum und seinen Enthusiasmus war er mir stets ein Vorbild, und die Zusammenarbeit mit ihm war für mich eine ständige Quelle der Motivation.

Dem Graduiertenkolleg „Struktur und Wechselwirkung von Hadronen und Kernen“ und seinem Sprecher Herrn Prof. Dr. Herbert Müther danke ich für das mir gewährte Stipendium und die Ermöglichung arbeitsgruppenübergreifender Kontakte.

Nicht zu vergessen sind auch die Herren Systemadministratoren Dipl.-Phys. Steven Ahlig, Dipl.-Phys. Christian Fischer, Dr. Martin Oettel und Dr. Oliver Tennert. Ihrem unermüdlichen Einsatz ist es zu verdanken, daß Gitterrechnungen durchgeführt werden können, Veröffentlichungen und Doktorarbeiten geschrieben werden können und die Informationsflut des World Wide Web zur Verfügung steht.

Herrn Dr. Markus Quandt danke ich für die gute Zusammenarbeit und darüber hinaus für seine Freundschaft, die mir nach wie vor sehr wertvoll ist.

Ein großes Dankeschön geht an meinen Kollegen Herrn Dipl.-Phys. Oliver Schröder, mit dem ich mir für die gesamte Zeit meiner Promotion das Büro und viele Kannen Tee geteilt habe.

Vielen Dank auch an die fleißigen Korrekturleser Herrn Dipl.-Phys. Oliver Schröder, Herrn Dr. Torsten Tok und Herrn Dipl.-Phys. Jochen Gattnar, die so manchen Anschlag des allgegenwärtigen Fehlerteufels vereitelt haben. Ihre Anmerkungen waren mir äußerst hilfreich.

Der gesamten Arbeitsgruppe danke ich für die angenehme Atmosphäre, die anregenden Diskussionen im Kaffeeraum und den ganzen Spaß den wir miteinander hatten. Ich werde es vermissen.

Gar nicht genug danken kann ich meinen Eltern, die mich — nicht nur finanziell — immer mit ihrer ganzen Kraft und Liebe unterstützt haben.

Zusammenfassung

Ein bislang im Rahmen der QCD unverstandenes Phänomen der starken Wechselwirkung ist das des Confinement farbiger Teilchen. In der vorliegenden Dissertation werden verschiedene Aspekte zweier populärer Modelle für Confinement, das des dualen Supraleiters und das der Vortexperkolation, betrachtet. Bei beiden Modellen geht man davon aus, daß topologische Freiheitsgrade für das Confinement verantwortlich sind. Insbesondere werden in dieser Arbeit die Eigenschaften der jeweiligen topologischen Anregungen, Monopole und Vortizes, untersucht.

Im Modell des dualen Supraleiters wird Confinement durch farbelektrische Flußschläuche zwischen den Quarks erklärt, die als Konsequenz eines dualen Meißner-Effekts entstehen. Verantwortlich für den dualen Meißner-Effekt ist die Kondensation farbmagnetischer Monopole, die (nach Fixierung einer abelschen Eichung) bezüglich einer verbliebenen $U(1)$-Untergruppe der nichtabelschen Farbgruppe $SU(N)$ identifiziert werden können. Im Rahmen dieser Dissertation wird gezeigt, daß diese Monopole in der Polyakov-Eichung zusätzlich auch den Pontryagin-Index (Instanton-Zahl) einer Feldkonfiguration vollständig bestimmen [QRS99]. Der Pontryagin-Index ist von großer Bedeutung für das Verständnis der chiralen Symmetriebrechung, die das Spektrum der leichten Mesonen entscheidend bestimmt. Mit dem erarbeiteten Zusammenhang zwischen farbmagnetischen Monopolen und Pontryagin-Index ergibt sich daher die Möglichkeit, zwei charakteristische Eigenschaften des beobachteten Hadronenspektrums, Confinement farbiger Teilchen und chirale Symmetriebrechung, in einem einheitlichen Bild zu verstehen.

Ein zweites Modell für Confinement betrachtet statt farbmagnetischer Monopole geschlossene farbmagnetische Flußschläuche, sogenannte Vortizes. Confinement läßt sich in diesem Bild als Konsequenz der Perkolation von Vortizes verstehen. Ein Vortex perkoliert, wenn er sich durch das gesamte betrachtete Universum zieht. Zur Identifikation von Vortizes haben sich Zentrumseichungen als geeignet erwiesen. Durch Projektion der Eichfeldkonfigurationen auf das Zentrum der Gruppe entstehen in der Raum-Zeit singuläre P-Vortizes, die als Konsequenz ausgedehnter Vortizes der unprojizierten Konfigurationen interpretiert werden und durch Gitterrechnungen untersucht werden können.

Bei hohen Temperaturen beobachtet man eine dimensionale Reduktion der Yang-Mills-Theorie: Eine Beschreibung durch eine effektive dreidimensionale Theorie ist in diesem Bereich möglich. Im Rahmen dieser Dissertation wird gezeigt, daß das Vortexbild für Confinement in maximaler Zentrumseichung

konsistent mit der dimensionalen Reduktion ist [GLSR00]. Das Vortexmodell für das QCD-Vakuum ist daher nicht nur auf die Confinement-Phase der Yang-Mills-Theorie anwendbar, sondern behält auch in der Hochtemperaturphase seine Gültigkeit.

Zur Identifikation der für Confinement relevanten Vortizes können unterschiedliche Zentrumseichungen verwendet werden. Um festzustellen, ob die P-Vortizes einer bestimmten Zentrumseichung physikalischen Freiheitsgraden entsprechen, untersucht man in Gittersimulationen die Eigenschaften der P-Vortizes im Kontinuumslimes. Besondere Bedeutung kommt der Laplace-Zentrumseichung zu, da diese frei von Eichambiguitäten (Gribov-Kopien) fixiert werden kann. Für die Laplace-Zentrumseichung werden im Rahmen dieser Dissertation Resultate der Untersuchung von Eigenschaften der P-Vortizes vorgestellt [LRS01]. Es wird gezeigt, daß den P-Vortizes in dieser Eichung eine fraktale Dimension zugeordnet werden kann. Diese wird als Folge von UV-Fluktuationen des P-Vortex um die eigentliche Position des Vortex interpretiert.

Während die P-Vortizes nach Projektion die ausgedehnten Vortizes der vollen Theorie idealisieren sollen, gibt es daneben im QCD-Vakuum auch eine Struktur von Vortizes ohne endliche Dicke, deren Existenz allein durch das nichttriviale Zentrum der Eichgruppe bestimmt ist. Diese eichunabhängigen c-Vortizes können auf dem Gitter durch ein spezielles Kühlverfahren identifiziert werden und bilden vermutlich eine Untermenge der P-Vortizes. Im Gegensatz zur Gesamtmenge der P-Vortizes sind die c-Vortizes keine für Confinement relevanten Freiheitsgrade. Sie tragen aber eine endliche Wirkungsdichte und haben daher physikalische Bedeutung. Im Rahmen dieser Dissertation wird gezeigt, daß die c-Vortizes die 0^{++} und 2^{++} Glueballmassen der Yang-Mills-Theorie gut reproduzieren [LS00b]. Die Existenz der c-Vortizes und ihre Bedeutung für die Glueballmassen zeigt, daß das Zentrum der Eichgruppe eine wichtige Rolle spielt, die in einer Kontinuumsformulierung nur mit singulären Eichfeldern erfaßt werden kann.

Als Verallgemeinerung der maximal abelschen Eichung wird im Rahmen dieser Dissertation die m-Eichung vorgestellt [LS00a]. Die m-Eichung fixiert die Farbgruppe bis auf ihr Zentrum, ist also eine Zentrumseichung. Mit Hilfe einer Klasse von interpolierenden Eichungen wird ein kontinuierlicher Übergang von der maximal abelschen Eichung zur m-Eichung erreicht. Diese Klasse von Eichungen bietet daher die Möglichkeit, einen Zusammenhang zwischen den beiden Confinement-Modellen, dualer Supraleiter und Vortexperkolation, herzustellen. Zusätzlich zeigen Gitterrechnungen, daß aus der m-Eichung eine effektive Theorie abgeleitet werden kann, die die volle Theo-

rie auf allen Skalen sehr gut reproduziert. Durch die geringere Anzahl von Freiheitsgraden im Vergleich zur vollen Theorie ist eine Kontinuumsformulierung einer solchen effektiven Theorie eventuell besser für nichtperturbative Zugänge geeignet.

Inhaltsverzeichnis

Danksagung i

Zusammenfassung iii

1. Einleitung 1

2. Grundlagen 7

2.1 Eichtheorien 7

2.1.1 Faserbündel in der Eichtheorie 8

2.1.2 Materiefelder 9

2.1.3 Paralleltransport, Zusammenhang und Eichpotential . 10

2.1.4 Kovariante Ableitung, Krümmung und Feldstärketensor 11

2.1.5 QCD als Eichtheorie 13

2.1.6 Gribov-Kopien 16

2.2 Topologie in Eichtheorien 17

2.2.1 Klassifizierung von $SU(N)$-Eichpotentialen 18

2.2.2 Der Pontryagin-Index 19

2.2.3 Die Raum-Zeit als Torus 20

2.3 Gittereichtheorie 21

2.3.1 Eichtheorie auf dem Gitter 22

2.3.2 Monte-Carlo-Verfahren 26

2.3.3 Übergang zum Kontinuum 27

2.3.4 Confinement in der Gittereichtheorie 30
2.3.5 Gitter und Topologie 34
2.4 Confinement-Modell dualer Supraleiter 34
2.4.1 Der duale Supraleiter 35
2.4.2 Magnetische Monopole 37
2.4.3 Abelsche Eichungen 38
2.4.4 Gitterresultate 41
2.5 Confinement-Modell Vortexperkolation 42
2.5.1 Vortizes 43
2.5.2 Perkolation und Confinement 44
2.5.3 Zentrumseichungen auf dem Gitter 45

3. Monopole und Topologie in der Polyakov-Eichung 49
3.1 Die Polyakov-Eichung 50
3.2 Eichfixierungsdefekte 54
3.3 Der Pontryagin-Index in der Polyakov-Eichung 58
3.3.1 Pontryagin-Index und Windungszahl 59
3.3.2 Windungszahl und Defekte 60
3.3.3 Beispiel: Hedgehog-Konfiguration 63
3.4 Zusammenfassung und Ausblick 66

4. Dimensionale Reduktion: Vortizes in drei Dimensionen 69
4.1 Dimensionale Reduktion 70
4.2 Zentrumsprojektion und Vortizes bei hohen Temperaturen . . 72
4.3 Reine $SU(2)$ Yang-Mills-Theorie in drei Dimensionen 72
4.4 $SU(2)$ Yang-Mills-Theorie mit adjungiertem Higgs-Feld in 3 Dimensionen 76
4.5 Zusammenfassung und Ausblick 79

5. Vortizes in Laplace-Zentrumseichung 81
5.1 Laplace-Zentrumseichung 82
5.1.1 Gitterversion der Laplace-Zentrumseichung 84
5.2 Eigenschaften der Vortizes 85
5.2.1 Vortexflächendichte 86
5.2.2 Dichte von Vortexkreuzungspunkten 88
5.2.3 Vergleich mit einem Random Vortex Modell 88
5.2.4 Vortexcluster 90
5.3 Zusammenfassung und Ausblick 91

6. Vortizes mit Kühlverfahren: Glueball-Massen 93
6.1 Eichinvariante Vortexstruktur des Vakuums 94
6.1.1 Das Kühlverfahren 95
6.1.2 Eigenschaften der c-Vortizes 96
6.2 Gluebälle 97
6.2.1 Gluebälle nach $SO(3)$-Kühlung 100
6.3 Zusammenfassung und Ausblick 102

7. Eine neue Alternative: Die m-Eichung 105
7.1 Definition der Eichung 105
7.1.1 Untersuchung der Eichfixierung 106
7.2 Gitterresultate 108
7.2.1 Qualität der Projektion 111
7.2.2 Creutz ratios 112
7.2.3 Korrelationen zwischen m-Vektoren 112
7.2.4 Interpolierende Eichungen 115
7.3 Zusammenfassung und Ausblick 117

Literaturverzeichnis 119

Veröffentlichungen 131

Lebenslauf 133

Kapitel 1

Einleitung

Schon seit der Antike ist der Mensch bestrebt, die Welt, die ihn umgibt, zu verstehen und wissenschaftlich zu erklären. Besonders die Frage nach dem Aufbau der Materie hat ihn dabei immer wieder beschäftigt. Von der philosophischen Idee der vier „Elemente“ Feuer, Wasser Luft und Erde gelangte man schließlich zu einem atomistischen Weltbild, das den Aufbau der Materie aus elementaren Bausteinen beschreibt. Im Laufe der Zeit stellten sich diese als unteilbar angenommenen Bausteine doch wieder als zusammengesetzt heraus. Von Atomen, über Atomkerne und schließlich Nukleonen drang man so immer tiefer in die Struktur der Materie ein. Dabei entstand nach und nach als Ergebnis immer neuer Experimente ein wahrer Teilchenzoo aus scheinbar elementaren Teilchen, den Leptonen und Hadronen. Die Idee einiger *weniger* Bausteine der Materie schien zunächst verloren.

Im Spektrum der Hadronen fanden sich jedoch Anzeichen dafür, daß diese aus noch kleineren Bausteinen zusammengesetzt sein könnten. Mit Argumenten der Gruppentheorie postulierten Gell-Mann [Gel62], Ne'eman ([Nee61], [GN64]) und Zweig [Zwe64] die Existenz von *Quarks* mit gebrochenzahliger elektrischer Ladung. Auch die tiefinelastische Streuung von Leptonen an Hadronen deutete auf eine weitere Substruktur der Hadronen hin [Bjo69]. Die elektrisch geladenen „Partonen“ ([BP69], [Fey69], [Fey72]) wurden später mit den Quarks identifiziert. Mit ihren zusätzlichen Quantenzahlen *Flavour* und *Farbe* läßt sich das gesamte bekannte Hadronenspektrum konstruieren. Die drei Familien von je zwei Quarks (in drei Farben) und zwei Leptonen bilden zusammen mit ihren Antiteilchen den fermionischen Teil des Standardmodells der Elementarteilchen. Freie Farbladungen, also insbesondere einzelne Quarks, wurden bisher jedoch nicht beobachtet. Offenbar existiert in der Wechselwirkung farbiger Teilchen ein Mechanismus, der dafür sorgt, daß bereits auf einer Skala von etwa 1 fm alle Farbladungen zu farblosen Zuständen gebunden sein müssen. Dieses Phänomen wird als *Confinement* der Farbladungen (*dt.* Farbeinschluß) bezeichnet.

Der Aufbau des hadronischen Spektrums aus Quarks spiegelt sich in Symmetrien der Wechselwirkungen zwischen den Hadronen wider. Die zugehörige Symmetriegruppe kann zur Formulierung einer Eichtheorie [YM54] für die Wechselwirkung der Quarks herangezogen werden. Insbesondere ist die *Quantenchromodynamik* (QCD) die Eichtheorie für die Farbsymmetrie der starken Wechselwirkung (Eichgruppe $SU(3)$). Die Quarks tragen eine fundamentale Farbladung und wechselwirken über den Austausch farbiger Eichbosonen (Gluonen), die eine adjungierte Farbladung tragen.

In der Quantenelektrodynamik (QED), der quantisierten Eichtheorie der Elektrodynamik, wird für konkrete Berechnungen eine Störungsentwicklung um eine freie Theorie sehr erfolgreich angewendet. Man weiß, daß die elektrische Ladung für wachsende Abstände weiter abgeschirmt wird, die Theorie sich also immer mehr einer freien Theorie nähert. Die Physik bei großen Entfernungen wird daher durch perturbative Näherungen konsistent beschrieben. Anders sieht die Situation bei der QCD aus. Die Eichbosonen (Gluonen) tragen, im Gegensatz zu den Photonen der QED, selbst eine (Farb)ladung und wechselwirken deshalb untereinander. Mathematisch ist das durch die Tatsache ausgedrückt, daß es sich bei der QCD um eine *nichtabelsche* Eichtheorie handelt. Die Selbstwechselwirkung der Gluonen führt dazu, daß sich die QCD für *kleine* Abstände einer freien Theorie nähert. Dies bezeichnet man als *asymptotische Freiheit* ([GW73], [Pol73]). In tiefinelastischen Streuexperimenten beobachtet man, daß sich die Quarks als Bausteine eines Hadrons näherungsweise wie freie Teilchen verhalten. In der QCD ist die Störungstheorie also für kleine Abstände besonders gut anwendbar. Auf diesem Gebiet haben auch zahlreiche experimentelle Tests die QCD als die Theorie der starken Wechselwirkung etabliert (z.B. in [PDGC98]). Bei Abständen von der Größenordnung eines Hadrons brechen perturbative Rechnungen jedoch zusammen: Die aus der Störungstheorie berechnete renormierte Kopplung divergiert, die Störungsentwicklung um eine freie Theorie ist daher nicht länger selbstkonsistent.

Im Gültigkeitsbereich der Störungstheorie finden sich keine Anzeichen für das Phänomen des Confinement. Aus diesem Grund ist es wichtig, nichtperturbative Zugänge zur QCD zu finden, die eine Untersuchung der Theorie bei großen Abständen erlauben. Ein erster Schritt, der gern unternommen wird, um die Theorie einfacher zu gestalten, besteht darin, nur den gluonischen Teil der Wirkung zu betrachten. Die nichtabelsche Eichtheorie der Gluonen wird in der mathematischen Physik auch als (reine) Yang-Mills-Theorie bezeichnet. An Stelle dynamischer Quarks betrachtet man nun unendlich schwere statische Quarks, die nur noch als äußere Farbquellen an die Gluonen koppeln. Zwischen diesen statischen Quarks kann dann ein Potential

definiert werden. Anschaulich stellt man sich vor, daß durch die Wechselwirkung der Gluonen die farbelektrischen Feldlinien zu einem Flußschlauch gebündelt sind, anstatt sich, wie bei einem Coulombfeld in der Elektrodynamik, in den gesamten Raum auszudehnen. Ein Auseinanderziehen der statischen Quarks kostet dann Energie proportional zum Abstand, die beiden Quarks sind unzertrennbar verbunden. Die Betrachtung des Confinement im Rahmen der reinen Yang-Mills-Theorie, d.h. mit unendlich schweren statischen Quarks, schließt nicht das Phänomen der (spontanen) Paarerzeugung dynamischer Quarks aus dem Vakuum mit ein. Diese führt zu einem Abreißen des farbelektrischen Flußschlauches und zur Entstehung neuer farbloser Hadronen (Hadronisierung). Trotz dieser Vereinfachung hofft man, den wesentlichen Mechanismus, der für Confinement verantwortlich ist, schon in der reinen Yang-Mills-Theorie identifizieren zu können. Eine kurze Einführung in Eichtheorien findet sich in Abschnitt 2.1.

Eine Möglichkeit, Confinement in der reinen Yang-Mills-Theorie durch einen nichtperturbativen Zugang zu untersuchen, ist die Diskretisierung der Raum-Zeit [Wil74]. Für diese *Gittereichtheorien* werden dann numerische Methoden aus der statistischen Mechanik, die Monte-Carlo-Verfahren, anwendbar. Mit ihrer Hilfe ist es möglich, die Vielzahl von Freiheitsgraden numerisch auszuwerten. Tatsächlich unterstützen Gitterrechnungen die Idee der Realisierung von Confinement in der Yang-Mills-Theorie durch ein linear ansteigendes Potential. Abschnitt 2.3 ist einer kurzen Einführung in die Gittereichtheorie und ihren Resultaten für Confinement gewidmet.

Um die Ursache von Confinement besser zu verstehen, versucht man, die dafür relevanten Freiheitsgrade zu identifizieren. Da diese Freiheitsgrade sich einer perturbativen Beschreibung offenbar entziehen, liegt es nahe, sie in einem Bereich des Konfigurationsraumes zu suchen, der durch die Störungstheorie nicht erreicht wird. Das gilt beispielsweise für topologisch nichttriviale Feldkonfigurationen. Die Topologie einer Eichtheorie wird daher in Abschnitt 2.2 kurz behandelt. Durch eine effektive Theorie dieser relevanten Freiheitsgrade, die nichtperturbative Zugänge eventuell eher erlaubt als die volle Theorie, hofft man ein Bild für den Confinement-Mechanismus zu gewinnen. Die Art der Freiheitsgrade und das resultierende Confinement-Bild sind dabei immer abhängig von der gewählten Eichung.

Zwei populäre Bilder für Confinement werden im einführenden Kapitel vorgestellt: In Abschnitt 2.4 wird das Modell des dualen Supraleiters betrachtet. Die Ausbildung farbelektrischer Flußschläuche zwischen den Quarks wird in diesem Modell durch einen dualen Meißner-Effekt erklärt, der auf der Kondensation farbmagnetischer Monopole beruht. Diese Monopole können

(nach Fixierung einer abelschen Eichung) bezüglich einer $U(1)$-Untergruppe der Farbsymmetriegruppe $SU(N)$ identifiziert werden. Als zweites Modell wird in Abschnitt 2.5 das Modell der Vortexperkolation erläutert. In diesem Modell sind die für Confinement relevanten Freiheitsgrade geschlossene farbmagnetische Flußschläuche, die Vortizes. Confinement ist hier Konsequenz der Perkolation von Vortizes. Ein Vortex perkoliert, wenn er sich durch das gesamte betrachtete Universum zieht. Zur Identifikation von Vortizes haben sich Zentrumseichungen als geeignet erwiesen, die die Farbgruppe $SU(N)$ bis auf ihr Zentrum fixieren. Durch Projektion der Eichfeldkonfigurationen auf das Zentrum der Gruppe entstehen in der Raum-Zeit singuläre P-Vortizes, die als Konsequenz ausgedehnter Vortizes der unprojizierten Konfigurationen interpretiert werden und durch Gitterrechnungen untersucht werden können.

Der Hauptteil dieser Arbeit ist verschiedenen Aspekten dieser beiden Confinement-Modelle bzw. ihrer jweiligen relevanten Freiheitsgrade gewidmet. In Kapitel 3 wird in einer speziellen abelschen Eichung, der Polyakov-Eichung, gezeigt, daß die farbmagnetischen Monopole zusätzlich zu ihrer Bedeutung für Confinement auch den Pontryagin-Index (Instanton-Zahl) einer Feldkonfiguration vollständig bestimmen [QRS99]. Der Pontryagin-Index ist von großer Bedeutung für das Verständnis der chiralen Symmetriebrechung, die das Spektrum der leichten Mesonen entscheidend bestimmt. Mit dem erarbeiteten Zusammenhang zwischen farbmagnetischen Monopolen und Pontryagin-Index ergibt sich daher die Möglichkeit, zwei charakteristische Eigenschaften des beobachteten Hadronenspektrums, Confinement farbiger Teilchen und chirale Symmetriebrechung, in einem einheitlichen Bild zu verstehen.

Bei hohen Temperaturen beobachtet man eine dimensionale Reduktion der Yang-Mills-Theorie: Eine Beschreibung durch eine effektive dreidimensionale Theorie ist in diesem Bereich möglich. In Kapitel 4 wird im Rahmen von Gitterrechnungen gezeigt, daß das Vortexbild für Confinement in maximaler Zentrumseichung konsistent mit der dimensionalen Reduktion ist [GLSR00]. Das Vortexmodell für das QCD-Vakuum ist daher nicht nur auf die Confinement-Phase der Yang-Mills-Theorie anwendbar, sondern behält auch in der Hochtemperaturphase seine Gültigkeit.

Zur Identifikation der für Confinement relevanten Vortizes können unterschiedliche Zentrumseichungen verwendet werden. Um festzustellen, ob die P-Vortizes einer bestimmten Zentrumseichung physikalischen Freiheitsgraden entsprechen, untersucht man in Gittersimulationen die Eigenschaften der P-Vortizes im Kontinuumslimes. Besondere Bedeutung kommt der Laplace-Zentrumseichung zu, da diese frei von Eichambiguitäten (Gribov-Kopien)

fixiert werden kann. Für die Laplace-Zentrumseichung werden in Kapitel 5 Resultate der Untersuchung von Eigenschaften der P-Vortizes vorgestellt [LRS01]. Es wird gezeigt, daß den P-Vortizes in dieser Eichung eine fraktale Dimension zugeordnet werden kann. Diese wird als Folge von UV-Fluktuationen des P-Vortex um die eigentliche Position des Vortex interpretiert.

Während die P-Vortizes nach Projektion die ausgedehnten Vortizes der vollen Theorie idealisieren sollen, gibt es daneben im QCD-Vakuum auch eine Struktur von Vortizes ohne endliche Dicke, deren Existenz allein durch das nichttriviale Zentrum der Eichgruppe bestimmt ist. Diese eichunabhängigen c-Vortizes können auf dem Gitter durch ein spezielles Kühlverfahren identifiziert werden und bilden vermutlich eine Untermenge der P-Vortizes. Im Gegensatz zur Gesamtmenge der P-Vortizes sind die c-Vortizes keine für Confinement relevanten Freiheitsgrade. Sie tragen aber eine endliche Wirkungsdichte und haben daher physikalische Bedeutung. In Kapitel 6 wird gezeigt, daß die c-Vortizes die 0^{++} und 2^{++} Glueballmassen der Yang-Mills-Theorie gut reproduzieren [LS00b]. Die Existenz der c-Vortizes und ihre Bedeutung für die Glueballmassen zeigt, daß das Zentrum der Eichgruppe eine wichtige Rolle spielt, die in einer Kontinuumsformulierung nur mit singulären Eichfeldern erfaßt werden kann.

Als Verallgemeinerung der maximal abelschen Eichung wird in Kapitel 7 die m-Eichung vorgestellt [LS00a]. Die m-Eichung fixiert die Farbgruppe bis auf ihr Zentrum, ist also eine Zentrumseichung. Mit Hilfe einer Klasse von interpolierenden Eichungen wird ein kontinuierlicher Übergang von der maximal abelschen Eichung zur m-Eichung erreicht. Diese Klasse von Eichungen bietet daher die Möglichkeit, einen Zusammenhang zwischen den beiden Confinement-Modellen, dualer Supraleiter und Vortexperkolation, herzustellen. Zusätzlich zeigen Gitterrechnungen, daß aus der m-Eichung eine effektive Theorie abgeleitet werden kann, die die volle Theorie auf allen Skalen sehr gut reproduziert. Durch die geringere Anzahl von Freiheitsgraden im Vergleich zur vollen Theorie ist eine Kontinuumsformulierung einer solchen effektiven Theorie eventuell besser für nichtperturbative Zugänge geeignet.

Kapitel 2

Grundlagen

In diesem Kapitel soll das „Werkzeug“ zur Beantwortung der Fragestellung dieser Arbeit bereitgestellt werden. Zunächst wird die Eichtheorie als mathematische Grundlage für allgemeine Quantenfeldtheorien vorgestellt. In diesem Rahmen wird auch das Konzept des Faserbündels betrachtet. In einem weiteren Abschnitt wollen wir versuchen zu verstehen, welche Rolle die Topologie in einer Eichtheorie spielen kann. Schließlich wenden wir uns der Diskretisierung von Eichtheorien zu.

2.1 Eichtheorien

Wenn eine theoretische Beschreibung der Wechselwirkung von (Elementar-)teilchen aus experimentellen Beobachtungen abgeleitet werden soll, spielt das Auftreten von Symmetrien eine zentrale Rolle. Unterscheidet die betrachtete Wechselwirkung nicht zwischen verschiedenen Teilchen, ist also symmetrisch bezüglich derselben, so weiß man, daß auch die gesuchte Feldtheorie diese Eigenschaft haben muß. Beispielsweise ist von der Kernkraft bekannt, daß sie in erster Näherung auf beide Nukleonen, Proton und Neutron, gleich wirkt. Bei Anwesenheit einer derartigen Symmetrie können die N verschiedenen Teilchensorten als unterschiedliche Ausprägungen ein und desselben Materiefeldes aufgefasst werden, das in einem N-dimensionalen Vektorraum V lebt,

$$\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_N) \in V \,. \tag{2.1}$$

Man spricht dann von einem N-fachen Multiplett von Teilchen. Die N Teilchen bilden eine Basis für den Vektorraum V. Eine (innere) Symmetrie der Teilchen wird durch eine kontinuierliche Transformationsgruppe (Liesche Gruppe) G repräsentiert, die sogenannte *Eichgruppe*, die auf den Vektorraum

V wirkt. Eine auf das Materiefeld $\phi(x)$ wirkende Transformation $U \in G$ entspricht dann der Wahl einer neuen Basis im Vektorraum V,

$$U\phi = (\phi'_1, \ldots, \phi'_N)\,. \tag{2.2}$$

Die Transformation U ändert zwar die Eigenschaften des einzelnen Teilchens $\phi_i \rightarrow \phi'_i$, läßt aber per definitionem die betrachtete Wechselwirkung unverändert.

Das Grundprinzip der *Eichfeldtheorie* ist nun, für jeden Raum-Zeit-Punkt $x \in M$ mit Hilfe einer Transformation $U(x) \in G$ die Wahl einer anderen Basis für V zuzulassen. Mathematisch wird das durch das Konzept eines Hauptfaserbündels beschrieben ([Nak90], [NS83]).

2.1.1 Faserbündel in der Eichtheorie

Ein Hauptfaserbündel P ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, die lokal wie das direkte Produkt zweier differenzierbarer Mannigfaltigkeiten $M \times G$, hier Raum-Zeit und Eichgruppe, aussieht. Bildlich gesprochen kann man sich an jeden Punkt x der Raum-Zeit M genau eine Faser $F_x \simeq G$ angeklebt denken. Es existiert also eine surjektive Projektion $\pi : P \rightarrow M$ und die Faser über $x \in M$ ist dann das Urbild von x unter π,

$$F_x = \pi^{-1}(x) \simeq G\,. \tag{2.3}$$

Entlang der Faser F_x bewegt man sich mit Hilfe der Eichgruppe: Für gegebenes $u \in P$ läßt sich die gesamte Faser am Ort $x = \pi(u)$ bilden,

$$\pi(u) = x \Rightarrow F_x = \{ug | g \in G\}\,. \tag{2.4}$$

Die Raum-Zeit M kann nun durch (topologisch triviale) offene Mengen $\{U_i\}$ überdeckt werden. Der Teil des Faserbündels, der über solch einer Umgebung U_i liegt, also $\pi^{-1}(U_i)$, ist immer isomorph zu $U_i \times G$. Man sagt das Bündel ist in dieser Umgebung *trivial*. Jedes $u \in \pi^{-1}(U_i)$ kann dann durch ein Koordinatenpaar $(x \in U_i, g \in G)$ beschrieben werden. Die Wahl der Koordinaten ist nicht eindeutig.

Ein lokaler Schnitt s_i ist eine glatte Abbildung von einer Karte U_i in das Faserbündel P, genauer $s_i : U_i \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$. Jedem Element $x \in U_i$ wird dadurch ein Element $u = (x, \mathbb{1}_G)$ der Faser an diesem Punkt $\pi^{-1}(x) \simeq G$ zugeordnet. Durch den Schnitt ist eine lokale Koordinatenwahl getroffen worden.

Zwei verschiedene lokale Schnitte s und $\tilde{s}$ über $U \subset M$ definieren eine Funktion $g : U \to G$, wobei $g(x)$ definiert ist durch

$$\tilde{s}(x) = s(x)g(x)\,. \tag{2.5}$$

Der Wechsel von einem lokalen Schnitt zu einem anderen ist eine lokale Eichtransformation. Die Wahl eines Schnittes entspricht der Wahl einer lokalen Eichung.

Ebenso gilt für die beiden lokalen Schnitte s_i, s_j auf zwei Umgebungen U_i, U_j und $x \in U_i \cap U_j$

$$s_j(x) = s_i(x)t_{ij}(x)\,, \quad t_{ij}(x) \in G\,. \tag{2.6}$$

Für die *Übergangsfunktionen* $t_{ij} : U_i \cap U_j \to G$ gilt

$$t_{ii} = \mathbb{1}_G\,, \tag{2.7}$$
$$t_{ij} = t_{ji}^{-1}\,, \tag{2.8}$$
$$t_{ij}t_{jk} = t_{ik}\,, \tag{2.9}$$

wobei die letzte Gleichung als Kozyklus-Bedingung bezeichnet wird. Die Übergangsfunktionen geben an, wie das Faserbündel zusammengeklebt wird. Nur wenn das Bündel trivial ist, also global die Struktur $M \times G$ hat, können alle Übergangsfunktionen zu $\mathbb{1}_G$ gewählt werden.

2.1.2 Materiefelder

Materiefelder Φ definiert man als Abbildungen von der Bündelmannigfaltigkeit P in einen Vektorraum V,

$$\Phi : P \to V \text{ mit } \Phi(ug) = R_V(g^{-1})\Phi(u)\,. \tag{2.10}$$

Dabei ist R_V eine Darstellung der Eichgruppe G auf dem Vektorraum V. Eine lokale Darstellung des Materiefeldes $\phi_i : U_i \subset M \to V$ erhält man mit Hilfe eines lokalen Schnittes s_i durch[1]

$$\phi_i(x) = ({s_i}^*\Phi)(x) = \Phi(s_i(x))\,, \quad x \in U_i\,. \tag{2.11}$$

Die Eichabhängigkeit des Materiefeldes als Funktion auf der Raum-Zeit M zeigt sich durch die Abhängigkeit von ϕ_i vom Schnitt s_i.

[1] Der *pull-back* ${s_i}^*$ zieht ein auf dem Bündel P definiertes Feld zurück auf ein in der Raum-Zeit M definiertes.

2.1.3 Paralleltransport, Zusammenhang und Eichpotential

Um Materiefelder ϕ an unterschiedlichen Punkten der Raum-Zeit M miteinander zu vergleichen, muß auf dem Hauptfaserbündel ein Paralleltransport definiert werden. Dazu teilt man den Tangentialraum T_uP an das Bündel im Punkt $u \in P$ in einen *senkrechten* und einen *horizontalen* Anteil auf,

$$T_uP = V_uP \oplus H_uP\,. \tag{2.12}$$

Hierbei wird V_uP als der Unterraum von T_uP definiert, der tangential zur Faser $\pi^{-1}(\pi(u)) \simeq G$ ist. Dadurch ist er isomorph zur Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ der Strukturgruppe G. Der horizontale Unterraum H_uP erfüllt neben (2.12) folgende Bedingung: Bei Verschiebung von $u \in P$ entlang der Faser $\pi^{-1}(\pi(u))$, also $u \to ug$ mit $g \in G$, soll H_uP in den entsprechenden horizontalen Unterraum $H_{ug}P$ übergehen. Damit werden durch einen horizontalen Unterraum H_uP alle anderen horizontalen Unterräume in der entsprechenden Faser erzeugt.

Eine Definition von H_uP mit den oben geforderten Eigenschaften kann auch mit Hilfe der Einführung einer Zusammenhangsform (*engl.* connection form) formuliert werden. Solch eine Lie-Algebra-wertige Zusammenhangsform ω (Ehresmann-Zusammenhang) ist definiert als eine Projektion von T_uP auf den vertikalen Anteil $V_uP \simeq \mathfrak{g}$. Dann ist der horizontale Unterraum gegeben durch

$$H_uP \equiv \{X \in T_uP | \omega(X) = 0\}\,. \tag{2.13}$$

Die Zusammenhangsform ω ist global glatt auf dem ganzen Hauptfaserbündel P definiert. Auf jeder Karte U_i der Überdeckung von M kann mit Hilfe eines lokalen Schnittes s_i eine *lokale Zusammenhangsform*

$$A_i = {s_i}^*\omega \tag{2.14}$$

als pull-back von ω definiert werden Während ω auf dem gesamten Faserbündel lebt, ist A_i nur auf einem Teil U_i der Basismannigfaltigkeit M definiert. Nur wenn es einen global glatten Schnitt s gibt, das Bündel also trivial ist, ist es möglich auch einen auf ganz M glatten Zusammenhang $A = s^*\omega$ zu definieren.

Weil ω global glatt ist, muß auf $U_i \cap U_j$ gelten

$$A_j = t_{ij}^{-1} A_i t_{ij} + t_{ij}^{-1}\,\mathrm{d}t_{ij}\,, \tag{2.15}$$

wobei t_{ij} die Übergangsfunktionen sind. Ebenso läßt sich zeigen, daß bei einer anderen Wahl des lokalen Schnittes, $s_i' = s_i g$, gilt

$$A_i' = g^{-1} A_i g + g^{-1}\,\mathrm{d}g\,. \tag{2.16}$$

In der Eichfeldtheorie wird die lokale Zusammenhangsform A_i als Eichpotential bezeichnet. Gleichung (2.16) zeigt dann das Verhalten des Eichpotentials unter (passiven) Eichtransformationen.[2] Die zugehörigen Felder werden als Eichbosonen interpretiert.

Sei nun durch $\gamma : [0,1] \to M$ eine Kurve in M definiert mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = x'$. Gesucht ist eine Abbildung, die die Faser $\pi^{-1}(x)$ auf die Faser $\pi^{-1}(x')$ abbildet. Dazu definieren wir den *horizontalen Lift* von γ als eine Kurve $\bar{\gamma}$ in der Bündelmannigfaltigkeit P mit $\pi(\bar{\gamma}) = \gamma$, wobei die Tangentenvektoren an die Kurve $\bar{\gamma}$ horizontal, also Elemente von $H_u P$, sein sollen. Für eine gegebene Kurve γ und ein Element $u_0 \in P$ existiert genau ein horizontaler Lift $\bar{\gamma}$ mit $u_0 \in \bar{\gamma}$. Der *Paralleltransport*

$$\Gamma(\bar{\gamma}) : \pi^{-1}(x) \to \pi^{-1}(x') \tag{2.17}$$

einer Faser von x nach x' entlang γ ist dann wie folgt definiert: Konstruiere für jedes $u \in \pi^{-1}(x)$ den horizontalen Lift $\bar{\gamma}$ durch u. Dann folge dem horizontalen Lift bis zur Faser $\pi^{-1}(x')$. Das liefert das gesuchte paralleltransportierte Element u'. Es läßt sich nun zeigen, daß auch der Paralleltransport mit Hilfe der Zusammenhangsform geschrieben werden kann. Lokal findet man

$$u' = s_i(x') \mathcal{P} \exp\left(- \int_x^{x'} A_i \right) . \tag{2.18}$$

Hierbei ist $\mathcal{P}$ ein Pfadordnungsoperator entlang $\gamma(t)$, der dafür sorgt daß die nichtabelschen Operatoren ihre richtige Reihenfolge behalten.

2.1.4 Kovariante Ableitung, Krümmung und Feldstärketensor

So wie die Änderung eines Feldes auf M entlang einer Kurve durch die äußere Ableitung d beschrieben wird, gibt die *kovariante äußere Ableitung* D die Änderung eines Feldes auf P entlang eines horizontalen Lifts an. In lokalen Koordinaten ist die kovariante Ableitung für ein Materiefeld (2.11) definiert als

$$D_\mu \phi = \partial_\mu \phi + R'_V(A_\mu)\phi \, . \tag{2.19}$$

Hier bezeichnet R'_V die Lie-Algebrendarstellung, die durch die Gruppendarstellung R_V erzeugt wird, unter der sich das Materiefeld transformiert. Die

[2] Eichtransformationen, die die Zusammenhangsform ω invariant lassen, werden als passiv bezeichnet. Im Gegensatz dazu sind aktive Eichtransformationen Funktionen (*vertikale Bündelautomorphismen*) $f : P \to P$, die eine Äquivalenzrelation $\omega_2 \simeq f^* \omega_1$ zwischen zwei verschiedenen Zusammenhangsformen definieren.

tatsächliche Form ist vom Transformationsverhalten des betrachteten Feldes unter der Wirkung der Eichgruppe G abhängig.

Die Einführung der kovarianten Ableitung kann man auch auf einem anderen Weg verstehen: Die unter globalen Eichtransformationen invariante Wirkung verliert ihre Invarianz bei lokalen Eichtransformationen, da dann die in der Wirkung vorkommenden Ableitungen auch auf die Eichtransformationen wirken und so zusätzliche Terme entstehen. Ersetzt man nun die Ableitung durch eine kovariante Ableitung (und führt dadurch das Eichpotential $A(x)$ ein) kompensiert das genau die neu entstandenen Terme. Die Wirkung ist jetzt auch unter lokalen Eichtransformationen invariant.

Durch Anwendung der kovarianten Ableitung auf den Ehresmann-Zusammenhang ω erhält man die Krümmung

$$\Omega = \mathrm{D}\omega = \mathrm{d}\omega + \omega \wedge \omega \,. \tag{2.20}$$

Auch hier läßt sich in der Umgebung U_i mit Hilfe des lokalen Schnittes s_i eine lokale Form

$$F_i = {s_i}^* \Omega \tag{2.21}$$

definieren. Es gilt dann

$$F_i = \mathrm{d}A_i + A_i \wedge A_i \,. \tag{2.22}$$

Im Schnitt zweier Karten $U_i \cap U_j$ mit Übergangsfunktionen t_{ij} findet man

$$F_j = t_{ij}^{-1} F_i t_{ij} \,. \tag{2.23}$$

In der Eichfeldtheorie wird F als Feldstärke bezeichnet und repräsentiert beispielsweise in der QED das elektromagnetische Feld.

Die Krümmung Ω und entsprechend auch ihre lokale Form F erfüllen die Bianchi-Identität $\mathrm{D}\Omega = 0$ bzw.

$$\mathrm{D}F = \mathrm{d}F + A \wedge F = 0 \,. \tag{2.24}$$

Geometrisch hängt die Krümmung mit dem Paralleltransport um eine geschlossene Kurve $\gamma \in M$ zusammen. Betrachtet man den dazugehörigen horizontalen Lift $\bar{\gamma} \in P$, muß dieser nicht notwendig auch geschlossen sein. Die Krümmung Ω ist dann ein Maß dafür, um wieviel Anfangs- und Endpunkt von $\bar{\gamma}$ auseinander liegen.

Lokal haben wir mit (2.18) einen expliziten Ausdruck für den Paralleltransport angegeben. Der Unterschied zwischen Anfangs- und Endpunkt des ho-

rizontalen Lifts einer geschlossenen Kurve γ ist also lokal durch das Gruppenelement

$$W[\gamma] = \mathcal{P} \exp\left(- \oint\limits_{\gamma} A_i \right) \tag{2.25}$$

gegeben. Diese Größe wird in der Eichtheorie auch als *Wilson-Loop* bezeichnet. Er wird uns besonders bei der Gitterformulierung der Yang-Mills-Theorie noch häufig begegnen.

2.1.5 QCD als Eichtheorie

Eine nichtabelsche Eichtheorie bezeichnet man auch als Yang-Mills-Theorie [YM54]. Im Rahmen dieser Arbeit beschäftigt uns die Yang-Mills-Theorie der Quantenchromodynamik. Hier sind die Materiefelder die Quarks und der interne Vektorraum ist der Farbraum. Die zugehörigen Eichbosonen sind die (auch untereinander wechselwirkenden) Gluonen. Entsprechend ist die Eichgruppe durch $SU(N_\mathrm{c})$ gegeben, wobei N_c die Zahl der Farben angibt. An Stelle des realistischen Falls $N_\mathrm{c} = 3$ werden wir uns bei konkreten Rechnungen immer auf zwei Farben beschränken, also die Eichgruppe $SU(2)$ betrachten. Man erwartet, daß Confinement farbiger Teilchen in beiden Fällen auf dieselbe Art zustandekommt. Aufgrund der einfacheren Struktur sind die verantwortlichen Mechanismen aber in der $SU(2)$-Eichtheorie möglichweise einfacher zu erkennen. Ein Element U der Gruppe $SU(N_\mathrm{c})$ läßt sich schreiben als

$$U = e^{-\theta^a T^a} \in SU(N_\mathrm{c})\,, \quad \theta^a \in \mathbb{R}\,, \quad a = 1, \ldots, N_\mathrm{c}^2 - 1\,. \tag{2.26}$$

Hierbei sind die $N_\mathrm{c}^2 - 1$ spurlosen anti-hermiteschen Operatoren T^a die *Generatoren* der (fundamentalen Darstellung der) Gruppe. Die Normierung wird als

$$\mathrm{tr}\,(T^a T^b) = -\frac{1}{2}\delta^{ab} \tag{2.27}$$

gewählt. Die Generatoren spannen die Algebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(N_\mathrm{c})$ auf und erfüllen die Vertauschungsrelation

$$[T^a, T^b] = f^{abc} T^c\,, \quad SU(2) : f^{abc} = \epsilon^{abc} \tag{2.28}$$

Die f^{abc} sind die total antisymmetrischen Strukturkonstanten der Gruppe $SU(N_\mathrm{c})$.

Das Eichpotential $A(x)$, das die Gluonen repräsentiert, lebt in der Algebra,

$$A(x) = A^a(x) T^a \in \mathfrak{su}(N_\mathrm{c})\,. \tag{2.29}$$

Die Wirkung der $SU(N_\mathrm{c})$ Yang-Mills-Theorie ist auf der euklidischen Raum-Zeit M analog zur QED durch[3]

$$S_{\mathrm{YM}}[A] = -\frac{1}{g^2}\int\limits_M \mathrm{tr}\,(F\wedge *F) = -\frac{1}{2g^2}\int\limits_M \mathrm{d}^4x\ \mathrm{tr}\,(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) \tag{2.30}$$

gegeben. Aufgrund der nichtabelschen Eichgruppe $SU(N_\mathrm{c})$ treten hier auch Terme auf, die kubisch oder quartisch im Eichpotential A sind. Diese beschreiben die Selbstwechselwirkung der Gluonen, die den wesentlichen Unterschied zur QED ausmacht. Der rein topologische Term

$$S_\theta = -\frac{i\theta}{8\pi^2}\int\limits_M \mathrm{tr}\,(F\wedge F) = -\frac{i\theta}{16\pi^2}\int\limits_M \mathrm{d}^4x\ \mathrm{tr}\,(F_{\mu\nu}(*F)^{\mu\nu}) \tag{2.31}$$

kann zusätzlich zu (2.30) als Teil der Wirkung einer renormierbaren Eichtheorie auftreten. Dieser θ-Term kann lokal als totale Ableitung geschrieben werden und liefert allenfalls bei nichttrivialen Randbedingungen an die Felder einen Beitrag. Durch Definition eines elektrischen und magnetischen Feldes analog zur Elektrodynamik $E_i = F_{0i}$, $B_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}F_{jk}$ läßt sich der Integrand des θ-Terms umschreiben in $\sim E_iB_i$. Dieser Term transformiert sich gerade unter Ladungskonjugation und hat als Produkt eines Vektors und eines Axialvektors negative Parität. Ein nichtverschwindender Wert für θ ist also mit einer Verletzung der CP-Symmetrie verbunden. Von der Seite der Experimentalphysik kann daher der erlaubte Wertebereich für θ durch Messung des elektrischen Dipolmoments des Neutrons auf kleiner als 10^{-9} eingegrenzt werden (z.B. [Dar00]). Im folgenden setzen wir $\theta = 0$.

Nach dem Hamiltonschen Wirkungsprinzip der minimalen Wirkung liefern die Euler-Lagrange-Gleichungen die klassischen Bewegungsgleichungen

$$*\,\mathrm{D}*F = 0 \quad \Leftrightarrow \quad [D_\mu, F_{\mu\nu}] = 0\,. \tag{2.32}$$

Ergänzt durch die Bianchi-Identität (2.24)

$$\mathrm{D}F = 0 \quad \Leftrightarrow \quad [D_\mu, *F_{\mu\nu}] = 0 \tag{2.33}$$

entspricht das gerade einer Verallgemeinerung der Maxwell-Gleichungen aus der Elektrodynamik.

Die zugehörige euklidische Quantenfeldtheorie kann (zunächst nur formal) mit Hilfe des Funktionalintegrals

$$\mathcal{Z}[j] = \int \mathrm{d}\mu[A]\exp\Big(\int\limits_M j\wedge *A\Big), \quad \mathrm{d}\mu[A] = \mathcal{Z}[0]^{-1}\mathcal{D}A\ \exp(-S_{\mathrm{YM}}[A]) \tag{2.34}$$

[3] Hier bezeichnet $*$ die duale Abbildung. Für eine k-Form X in d euklidischen Dimensionen gilt $(*X)^{a_1\ldots a_{d-k}} = \frac{1}{k!}\epsilon^{a_1\ldots a_{d-k}b_1\ldots b_k}X_{b_1\ldots b_k}$.

formuliert werden. Physikalischen Sinn bekommt dieses *erzeugende Funktional* durch die Forderung, daß es bei einer Entwicklung um die freie Theorie die euklidischen Greenfunktionen erzeugen soll. Es ist zunächst also nur als eine formale Aufsummierung der Störungstheorie zu sehen. Durch Analogiebetrachtungen zur statistischen Mechanik findet man jedoch auch eine physikalische Interpretation, die über diese perturbativen Aspekte hinausgeht und nahelegt, das Intergal (2.34) als solches ernst zu nehmen: Die euklidischen Greenfunktionen können als Erwartungswerte von Produkten der Eichpotentiale, also als *Korrelationsfunktionen*, interpretiert werden. Die Gesamtheit aller Korrelationsfunktionen liefert ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mu[A]$. Das erzeugende Funktional mittelt über alle Feldkonfigurationen gewichtet nach diesem Maß.

Die physikalische Raum-Zeit ist nicht euklidisch, sondern ein Minkowski-Raum (reeller pseudo-euklidischer Vektorraum) mit Skalarprodukt $x \cdot y = x^\mu y_\mu = g_{\mu\nu} x^\mu y^\mu = x_0 y_0 - \boldsymbol{xy}$ und Metrik $g = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$. Prinzipiell läßt sich die Quantenfeldtheorie auch auf diesem Raum formulieren. Das Maß $\mu[A]$ im erzeugenden Funktional (2.34) ist dann durch ein komplexes, oszillierendes Pseudomaß $\mathrm{d}\mu[A] = Z_0^{-1} \mathcal{D}A \exp(iS[A])$ gegeben. Die Analogie zur statistischen Mechanik geht verloren. Wir wählen daher die euklidische Formulierung, die aus einer Definition einer komplexen Zeit $t = x_0^{\mathrm{euk}} + i x_0^{\mathrm{min}}$ (*Wick-Rotation*) resultiert ([Wic54], [Sch58], [Sym66], [Sym69]). Größen die in der euklidischen Theorie $t = x_0^{\mathrm{euk}} > 0$ berechnet wurden, können unter geeigneten Voraussetzungen (Osterwalder-Schrader-Axiome [OS73]) analytisch fortgesetzt werden und sind so insbesondere im Minkowski-Raum bekannt. Für den Fall der Yang-Mills-Theorie erwartet man, daß diese Voraussetzungen erfüllt sind, siehe z.B. [Roe94], [GJ87].

Wir wissen aus der Störungstheorie, daß Greenfunktionen Ultraviolettdivergenzen enthalten und damit mathematisch nicht wohldefiniert sind. Mit Hilfe der Methoden der Regularisierung und Renormierung wird den auftretenden Integralen schließlich doch ein mathematischer Sinn verliehen. Für eine strenge Definition des Maßes $\mu[A]$ müssen also ebenso Regularisierungs- und Renormierungsvorschriften gefunden werden, die aber unabhängig von einer perturbativen Entwicklung sind.

Dabei kommt einem neben der statistischen Mechanik auch die Theorie der Brownschen Bewegung zur Hilfe. Man findet durch analoge Betrachtungen, daß die Erwartungswerte der Felder $A(x)$ nicht durch Integrale über die Felder selbst definiert sind, sondern durch Integrale über Wahrscheinlichkeitsverteilungen $\tilde{A}$, die als Distributionen auf einem Funktionenraum gegeben sind. Die generalisierten Funktionen $\tilde{A}(x)$ auf der Raum-Zeit, können auch

für stetiges $A(x)$ beliebig unstetig sein. Wie in der Theorie der Brownschen Bewegung wird $\tilde{A}(x)$ als *Pfad*[4] des euklidischen Feldes bezeichnet. Das erzeugende Funktional (2.34) erhält den Namen Pfadintegral. Für das Beispiel eines freien skalaren Feldes läßt sich ein mathematisch wohldefinierter Ausdruck für das Pfadintegral ableiten. Man findet, daß glatte Pfade sogar eine Menge vom Maß Null bilden und damit nicht zum Pfadintegral beitragen ([GJ87], [Riv87], [Roe94], [Sch81]).

2.1.6 Gribov-Kopien

Neben dem Problem einer nichtperturbativen Regularisierung und Renormierung gibt es noch ein weiteres: Der Raum $\mathcal{A}$ aller möglichen Eichfeldkonfigurationen, über den in (2.34) integriert wird, enthält unendlich viele eichäquivalente Elemente, die ein und dieselbe physikalische Konfiguration beschreiben. Ohne Eichfixierung im Pfadintegral müßten wir also über die unendlichdimensionale nichtkompakte Gruppe $\mathcal{G}$ aller (aktiven) $SU(N)$-Eichtransformationen integrieren. Für diese Gruppenintegration benötigt man ein Haarmaß auf $\mathcal{G}$. Dessen Existenz ist für nichtkompakte Gruppen mit den Standardmethoden nicht zu beweisen. Es ist daher sinnvoll, aus dem Raum $\mathcal{A}$ einen physikalischen Konfigurationsraum $\mathcal{A}_{\text{phys}} = \mathcal{A}/\mathcal{G}$ zu konstruieren, in dem alle eichäquivalenten Konfigurationen identifiziert sind. Die Elemente von $\mathcal{A}_{\text{phys}}$ werden als Eichorbits bezeichnet. Eine Konstruktionsmöglichkeit ist die Wahl einer Eichung: Durch eine geeignete Eichfixierungsbedingung $\chi[A] = 0$ soll aus jedem Eichorbit *genau eine* Konfiguration als Repräsentant ausgewählt werden. In der Bündelsprache kann $\chi = 0$ als Schnitt in einem $\mathcal{G}$-Bündel $\mathcal{A}$ über $\mathcal{A}_{\text{phys}}$ interpretiert werden.

Es zeigt sich, daß das im allgemeinen (für glatte Eichfixierungsbedingungen χ) nur lokal möglich ist und global durch eine Eichfixierungsbedingung mehrere Eichfelder ausgewählt werden ([Gri78], [Sin78], [AJ78]). Die Freiheit von Eichtransformationen zwischen diesen *Gribov-Kopien* kann durch die Eichfixierungsbedingung nicht eliminiert werden. Es bleibt eine Resteichfreiheit bestehen, die im Pfadintegral (2.34) berücksichtigt werden muß. Die Situation ist in Abbildung 2.1 illustriert. Der physikalische Konfigurationsraum $\mathcal{A}_{\text{phys}}$ ist dann durch die maximale Untermenge der ausgewählten Eichpotentiale gegeben, die keine Gribov-Kopien enthalten. Diese Untermenge wird als *fundamentale (modulare) Domäne* bezeichnet.

Durch Diskretisierung der Raum-Zeit, also Einführung einer Gitterstruktur kann man von überabzählbar unendlich vielen Freiheitsgraden zu abzähl-

[4] Der „Pfad“ liegt dabei in einem abstrakten unendlichdimensionalen Raum.

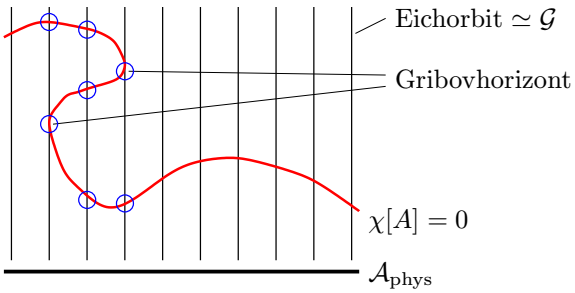


Abb. 2.1: Eichfixierung und Gribov-Kopien als Faserbündel $\mathcal{A}$. Die Eichorbits bilden die Fasern, die Eichfixierungsbedingung $\chi[A] = 0$ ist ein Schnitt durch das Bündel. Trifft der Schnitt dieselbe Faser mehr als einmal, ist die Eichung nicht vollständig fixiert. Mehrere Gribov-Kopien (Kreise) repräsentieren eichäquivalente Konfigurationen.

bar unendlich oder sogar endlich vielen übergehen. Der endliche Gitterabstand a wirkt als Regulator für Ultraviolettdivergenzen. Das Gitter bietet also einen nichtperturbativen Ansatz für Regularisierung und Renormierung. Die Renormierung geschieht dabei durch Definition einer Vorschrift für den Kontinuumslimes $a \to 0$. Für die Gruppe $\mathcal{G}$ aller Eichtransformationen auf dem Gitter kann als abzählbares Produkt kompakter Gruppen ein Haarmaß durch einen Grenzübergang von endlich zu unendlich ausgedehnten Gittern definiert werden. Eine Eichfixierung ist nicht mehr unbedingt erforderlich. Die Formulierung von Eichtheorien auf einem Raum-Zeit-Gitter wird uns in Abschnitt 2.3 beschäftigen.

2.2 Topologie in Eichtheorien

Aus gegebener Basismannigfaltigkeit M und Strukturgruppe G können unterschiedliche Hauptfaserbündel P konstruiert werden, je nachdem auf welche Weise die einzelnen $\pi^{-1}(U_i)$ miteinander verklebt werden, wie also die Übergangsfunktionen $\{t_{ij}\}$ gewählt werden (vgl. Abschnitt 2.1.1). Kann man die Menge der möglichen Bündel P in Klassen unterteilen und, wenn ja, durch was sind diese Klassen charakterisiert? Damit haben wir die Frage nach der topologischen Klassifizierung der Faserbündel gestellt ([Nak90], [NS83]).

2.2.1 Klassifizierung von $SU(N)$-Eichpotentialen

Im folgenden soll ein Beispiel für eine topologische Klassifizierung von Konfigurationen in der Yang-Mills-Theorie mit Eichgruppe $G = SU(N)$, $N \geq 2$ betrachtet werden. Als Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit nehmen wir $M = \mathbb{R}^4$ an. Da M eine offene Menge ist, ist das entsprechende Faserbündel trivial: $P = M \times G$. Topologisch interessant wird die $SU(N)$-Eichtheorie erst durch Einschränkungen an die zum Pfadintegral (2.34) zugelassenen Konfigurationen. Daher schränken wir uns im folgenden auf Konfigurationen mit endlicher Wirkung (2.30) ein. Das entspricht der Forderung, daß auf dem Rand vom M, also im Unendlichen, für die Feldstärke gelten muß,

$$|x|^2 F_{\mu\nu}(x) \to 0 \quad \text{für} \quad |x| = \sqrt{x_\mu x^\mu} \to \infty \,. \tag{2.35}$$

Für das Eichpotential $A(x)$ bedeutet das, daß es im Unendlichen eine reine Eichung werden muß, also gilt

$$A(x) \to g(x)\,\mathrm{d}g^\dagger(x) \quad \text{für} \quad |x| \to \infty \,. \tag{2.36}$$

Dadurch ist eine Abbildung $g : \partial M \simeq S^3 \to G = SU(N)$ vom Rand der Raum-Zeit im Unendlichen in die Eichgruppe definiert. Diese Abbildungen, und damit auch die Konfigurationen $A(x)$, sind durch die Elemente der Homotopiegruppe $\pi_3(SU(N)) = \mathbb{Z}$ klassifiziert.

Im Bild des Faserbündels kann man das auch folgendermaßen verstehen: Durch die zusätzliche Bedingung (2.35) im Unendlichen ist die Raum-Zeit $\mathbb{R}^4$ kompaktifiziert worden zu $\dot{\mathbb{R}}^4 \simeq S^4$. Das neue Bündel $P(S^4, SU(N))$ ist nicht länger topologisch trivial. Zur Überdeckung benötigt man mindestens zwei Umgebungen. Auf dem Durchschnitt der zwei Umgebungen, der isomorph zu einer S^3 ist, ist dann eine Übergangsfunktion definiert, die gerade der oben gefundenen Abbildung g entspricht. Sie beschreibt, auf welche Weise die beiden Umgebungen verklebt sind.

Für $N = 2$ entspricht die Klassifizierung von g wegen $SU(2) \simeq S^3$ gerade den unterschiedlichen Windungszahlen w der Abbildungen g. Für $N > 2$ läßt sich jede Abbildung g so deformieren, daß sie wieder nur als Abbildung in eine $SU(2)$ Untergruppe von $SU(N)$ wirkt. Dadurch ist auch hier wieder eine Windungszahl w definiert, die die Abbildung charakterisiert. Für die so definierte Windungszahl w einer Abbildung g gilt die Formel

$$w[g] = -\frac{1}{24\pi^2} \int\limits_{S^3} \mathrm{tr}\,(g\,\mathrm{d}g^\dagger \wedge g\,\mathrm{d}g^\dagger \wedge g\,\mathrm{d}g^\dagger) \,. \tag{2.37}$$

Für die Raum-Zeit $\mathbb{R}^4$ mit der gewählten Randbedingung (2.35) ist die gesamte topologische Information des Bündels P in dieser Windungszahl enthalten.

2.2.2 Der Pontryagin-Index

Aus der Theorie der charakteristischen Klassen weiß man, daß $SU(N)$-Bündel über der Raum-Zeit M zum Beispiel durch *Chern-Charaktere* klassifiziert werden können.[5] Dabei ist für $\dim M = 4$ und $G = SU(N)$ der 2. Chern-Charakter der einzige nichttriviale,

$$\mathrm{ch}_2[F] = -\frac{1}{8\pi^2}\,\mathrm{tr}\,(F \wedge F)\,. \tag{2.38}$$

Da $\mathrm{ch}_2[F]$ geschlossen ist, also $\mathrm{d}\,\mathrm{ch}_2[F] = 0$, kann er *lokal* als eine exakte Form geschrieben werden,

$$\mathrm{ch}_2[F] = -\frac{1}{8\pi^2}\,\mathrm{d}K[A,F] \quad \text{lokal}\,. \tag{2.39}$$

Die 3-Form $K[A,F]$ wird in der Theorie der charakteristischen Klassen als die *Chern-Simons-Form* von $\mathrm{ch}_2[F]$ bezeichnet. In der Eichtheorie bezeichnet man sie auch als *topologischen Strom*. Wir finden

$$K[A,F] = \mathrm{tr}\,(F \wedge A - \frac{1}{3}A \wedge A \wedge A)\,. \tag{2.40}$$

Für den *Pontryagin-Index*, der als Integral des 2. Chern-Charakters über die Raum-Zeit M definiert ist, findet man also mit Hilfe des Theorems von Stokes

$$\nu[F] = -\frac{1}{8\pi^2}\int\limits_M \mathrm{tr}\,(F \wedge F) = -\frac{1}{8\pi^2}\sum_i \int\limits_{\partial U_i} K[A_i, F_i]\,, \tag{2.41}$$

wobei durch $\{U_i\}$ eine Überdeckung von M gegeben sei.

Um festzustellen, in welcher Beziehung Pontryagin-Index (2.41) und Windungszahl (2.37) stehen, wenden wir (2.41) auf den oben betrachteten Fall $M = \mathbb{R}^4$ an. Unter Berücksichtigung der Randbedingung (2.36), finden wir für den Pontryagin-Index von Konfigurationen mit endlicher Wirkung

$$\nu[F] = \frac{1}{24\pi^2}\int\limits_{S^3} \mathrm{tr}\,(g\,\mathrm{d}g^\dagger \wedge g\,\mathrm{d}g^\dagger \wedge g\,\mathrm{d}g^\dagger) = -w[g]\,. \tag{2.42}$$

[5] Charakteristische Klassen sind Untermengen der Kohomologieklassen über M.

Der Pontryagin-Index ist äquivalent zur Windungszahl (2.37). Damit haben wir durch den 2. Chern-Charakter (2.38) bzw. den Pontryagin-Index (2.41) die Möglichkeit, direkt für eine auf $\mathbb{R}^4$ vorgegebenen Feldkonfiguration $A(x)$ mit endlicher Wirkung (oder äquivalent eine beliebige auf S^4 vorgegebene Feldkonfiguration) ihren gesamten topologischen Gehalt zu bestimmen.

Topologisch verschiedene Konfigurationen können nie eichäquivalent sein. Im Pfadintegral (2.34) muß daher über die verschiedenen topologischen Sektoren, also über den Pontryagin-Index ν, summiert werden.

In jedem topologischen Sektor ist die Wirkung (2.30) der Konfigurationen durch

$$S_{\mathrm{YM}} \geq \frac{8\pi^2}{g^2}\nu \tag{2.43}$$

nach unten beschränkt. Die Konfigurationen minimaler Wirkung werden als *Instantonen* bezeichnet.[6] Diese können als Ausgangspunkt für semiklassische Näherungen dienen (z.B. [Raj82]).

Auch für eine beliebige Raum-Zeit M ist durch den 2. Chern-Charakter (2.38) eine Klassifizierung der Konfigurationen gegeben. Es ist dann aber keineswegs klar, ob dadurch schon die gesamte topologische Information einer Konfiguration beschrieben wird.

2.2.3 Die Raum-Zeit als Torus

Oft wird die vierdimensionale Raum-Zeit M auch als 4-Torus $M = T^4 \equiv S^1 \times S^1 \times S^1 \times S^1$ angenommen. Diese Wahl von periodischen Randbedingungen hat gegenüber $\mathbb{R}^4$ den Vorteil, daß der Torusumfang L_μ als natürlicher Infrarotregulator dient.[7] Gegenüber anderen kompakten Mannigfaltigkeiten, wie z.B. S^4, hat der Torus den Vorteil, daß auch für endliche L_μ die Raum-Zeit-Metrik flach ist und damit die Translationsinvarianz während der Regularisierung erhalten bleibt.

Es läßt sich zeigen, daß auch für den 4-Torus die gesamte Topologie der Feldkonfigurationen in der $SU(N)$ Eichtheorie durch den Pontryagin-Index charakterisiert wird [FMTWP98]. Dazu betrachten wird den Torus zunächst als vierdimensionalen Hyperkubus, wobei gegenüberliegende dreidimensionale Seiten durch periodische Randbedingungen verknüpft sind. Feldkonfigurationen $A(x)$ müssen nur periodisch bis auf Übergangsfunktionen (Eichtrans-

[6] Entsprechend wird der Pontryagin-Index oft auch Instanton-Zahl genannt.

[7] Eventuell auftretende diskrete Nullmoden können und müssen natürlich explizit berücksichtigt werden.

formationen) sein. Fangen wir nun an, die entsprechenden Seiten zusammenzukleben. Für das erste Seitenpaar kann man durch stetige Deformation des Schnittes, der das lokale Eichpotential erzeugt, immer eine triviale Verklebung erreichen. Für das zweite Seitenpaar sind die möglichen Übergangsfunktionen charakterisiert durch $\pi_1(SU(N)) = \{0\}$, entsprechend für die beiden folgenden Seitenpaare durch $\pi_2(SU(N)) = \{0\}$ bzw. $\pi_3(SU(N)) = \mathbb{Z}$. Insgesamt finden wir also für die möglichen Übergangsfunktionen eine Charakterisierung durch $\pi_3(SU(N)) = \mathbb{Z}$. Für die $SU(N)$-Eichtheorie auf dem 4-Torus bedeutet das zunächst, daß die Topologie der Konfigurationen *höchstens* durch diese ganzen Zahlen bestimmt ist. Eine *feinere* Einteilung kann es nicht geben. Es könnte aber immer noch sein, daß die Gesamtheit der Konfigurationen durch eine Untermenge von $\mathbb{Z}$ topologisch schon vollständig beschrieben wird.

In einem zweiten Schritt sehen wir uns wieder die charakteristischen Klassen, insbesondere den Pontryagin-Index (2.41), an. Es zeigt sich, daß er wiederum durch die Übergangsfunktionen auf dem Torus ausgedrückt werden kann. Auch hier erhält man wieder eine Interpretation als Windungszahl, also eine Charakterisierung durch ganze Zahlen. Die charakteristischen Klassen haben aber gerade den Anspruch, daß durch sie die Topologie zumindest teilweise bestimmt ist. Eine *gröbere* Einteilung ist nicht möglich. Zusammen mit den Betrachtungen im obigen Absatz finden wir also, daß auch auf dem Torus der Pontryagin-Index die gesamte Topologie der Feldkonfigurationen bestimmt.

Wir haben in diesem Abschnitt gesehen, daß die Topologie entscheidend von der gewählten Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit M abhängt. Für $\mathbb{R}^4$ sind alle (uneingeschränkten) Konfigurationen topologisch trivial, für S^4 und T^4 fanden wir eine Charakterisierung durch ganze Zahlen. Für exotischere Mannigfaltigkeiten gibt es beliebig komplizierte topologische Klassifizierungen. Welche Raum-Zeit das Universum wirklich hat, kann (noch) nicht bestimmt werden. Daher haben wir (noch) die Freiheit die Raum-Zeit beliebig zu wählen. Letztlich entscheidend ist, neben den gewonnen mathematischen Erkenntnissen, nur die erreichte Übereinstimmung mit dem Experiment.

2.3 Gittereichtheorie

In Abschnitt (2.1.5) haben wir die $SU(N)$-Eichtheorie durch Einführung des Pfadintegrals (2.34) quantisiert. Dabei haben wir dem Funktionalintegral als gewichtete Summation über alle physikalischen Feldkonfigurationen einen physikalischen Sinn verliehen. Mathematisch wohldefiniert ist ein Integral

mit überabzählbar unendlich vielen Freiheitsgraden allerdings nur für wenige Ausnahmefälle (z.B. Wiener Maß). Um das Integral überhaupt behandeln zu können, muß man ihm also zunächst einen mathematischen Sinn verleihen.

Auf physikalischer Seite offenbart sich dieser Umstand auch, wenn man im Rahmen der Störungstheorie Greenfunktionen berechnen will: Es treten Ultraviolettdivergenzen in den relevanten Impulsintegralen auf. Um den perturbativen Greenfunktionen Sinn zu verleihen, regularisiert man die Integrale, macht sie also auf eine definierte Art und Weise endlich. Das geschieht zum Beispiel durch Einführung eines Impulsabschneideparameters (*engl.* cutoff) oder indem man zu $D = 4 - \varepsilon$ Dimensionen übergeht (dimensionale Regularisierung). Durch die Regularisierung wird immer eine Invarianz der Theorie gebrochen. Im Fall eines Impulscutoffs ist das die Eichinvarianz, weshalb diese Methode nur begrenzt anwendbar ist. Bei dimensionaler Regularisierung wird die Skaleninvarianz gebrochen, da beim Übergang zu D Dimensionen eine neue Massenskala Λ_{QCD} entsteht, $\mathrm{d}^4p \to (\Lambda_{\mathrm{QCD}}/\mu)^{4-D}\mu^{4-D}\,\mathrm{d}^Dp$. Die Wahl der Skala μ ist beliebig. In einem zweiten Schritt, der Renormierung, werden die Divergenzen durch die Parameter der Theorie (Kopplungskonstanten, Massen) und äußere Quellen absorbiert. Eine Theorie heißt renormierbar, wenn das zu allen Ordnungen der Störungstheorie mit Hilfe von endlich vielen Renormierungsfunktionen möglich ist. Es läßt sich zeigen, daß die $SU(N)$-Eichtheorie in vier Raum-Zeit-Dimensionen eine solche Renormierung erlaubt. Durch die Forderung der Unabhängigkeit physikalischer Größen von μ entsteht eine Impulsabhängigkeit der renormierten Parameter der Theorie. Das definiert zum Beispiel die laufende Kopplungskonstante.

Die oben beschriebene Vorgehensweise ist nur im Rahmen der Störungstheorie definiert. Die Möglichkeit einer *nichtperturbativen* Regularisierung bietet der Übergang zu einer diskreten Raum-Zeit. Das ist die Grundidee der Gittereichtheorie ([Wil74] und z.B. [Cre83], [MM94], [Rot97]). Für die resultierenden abzählbar unendlich vielen Freiheitsgrade ist das Funktionalintegral wohldefiniert. Der Renormierung entspricht in diesem Bild der Kontinuumslimes. Dabei wird auf definierte Art und Weise die Gitterstruktur wieder entfernt. Diese Konzepte sollen im folgenden genauer beleuchtet werden.

2.3.1 Eichtheorie auf dem Gitter

Die kontinuierliche Raum-Zeit wird durch eine Gitterstruktur ersetzt. Die vormals kontinuierliche Koordinate x_μ kann jetzt nur noch diskrete Werte

$$x_\mu = n_\mu a\,, \quad n_\mu \in \mathbb{Z} \tag{2.44}$$

annehmen, die Gitterpunkte (*engl.* sites). Hierbei ist a der Gitterabstand, der i.a. für alle vier Richtungen gleich gewählt wird. Die Anzahl der Gitterpunkte in μ-Richtung bezeichnen wir mit N_μ. Meist verwendet man periodische Randbedingungen. Das heißt, man fordert für alle bosonischen Felder

$$\psi(x + b_\mu) = \psi(x)\,, \tag{2.45}$$

wobei b_μ der Vektor in μ-Richtung mit Länge $N_\mu a$ ist. Im Kontinuum entspricht das einem 4-Torus als Raum-Zeit.[8] Die Vorteile dieser Wahl der Raum-Zeit haben wir schon in Abschnitt 2.2.3 kennengelernt. Für Gitter mit $N_\mu < \infty$ kommt noch hinzu, daß durch periodische Randbedingungen (2.45) unerwünschte Effekte durch die endliche Ausdehnung des Gitters minimiert werden.

Ein Materiefeld $\phi(x) \in V$ ist durch Vektoren $\phi_x \in V$ gegeben, die jeweils einem Gitterpunkt x zugeordnet sind. Wie im Kontinuum wird Invarianz der (noch zu definierenden) Wirkung unter lokalen, d.h. auf den Gitterpunkten definierten, Eichtranformationen $g_x \in SU(N)$ gefordert. Um Materiefelder an benachbarten Gitterpunkten x und $x+\hat{\mu}$ zu vergleichen[9], definiert man einen Paralleltransport $U_{x,\mu} \in SU(N)$, der der Verbindungslinie zwischen den zwei Gitterpunkten x, $x+\hat{\mu}$ zugeordnet ist. Er wird auch als Linkvariable oder oft kurz als Link bezeichnet. Ein Vergleich mit der Kontinuumsdefinition (2.18) des Paralleltransports liefert *unter der Voraussetzung glatter Eichpotentiale* $A_\mu(x) = A^a_\mu(x)T^a$ für $a \to 0$

$$U_{x,\mu} \stackrel{a\to 0}{\longrightarrow} \exp(-aA_\mu(x) + \mathcal{O}(a^2))\,. \tag{2.46}$$

Dabei haben wir verwendet, daß die Pfadordnung nur Korrekturen der Ordnung a^2 liefert, und auch das Eichpotential in erster Näherung durch seinen Wert am Anfangspunkt x beschrieben werden kann. Gleichung (2.46) stimmt überein mit der Vorstellung, daß für stetige Materiefelder der Paralleltransport zwischen benachbarten Punkten im Kontinuum gegen $\mathbb{1}$ gehen muß.

Unter Eichtransformationen g_x ändern sich die Links gemäß

$$U_{x,\mu} \to g_{x+\hat{\mu}} U_{x,\mu} g_x^\dagger\,. \tag{2.47}$$

Die Links $U_{x,\mu}$ übernehmen die Rolle des Feldes $A_\mu(x)$ und sind die fundamentalen Bausteine der Gittereichtheorie. Der Paralleltransport entlang

[8] Streng genommen genügt es im Kontinuum, Periodizität bis auf Eichtransformationen g_μ zu fordern, also $\psi(x+b_\mu) = g_\mu\psi(x)$. Darauf gehen wir kurz in Abschnitt 2.3.5 ein.

[9] Mit $\hat{\mu}$ bezeichnen wir einen Gittereinheitsvektor der Länge a in Richtung μ.

beliebiger Wege auf dem Gitter wird durch Multiplikation der entsprechenden elementaren Links beschrieben.

Im Kontinuum haben wir gesehen, daß der Feldstärketensor der Eichtheorie in Beziehung steht mit dem Paralleltransport um geschlossene Wege. Auf dem Gitter ist die entsprechende Größe die Plaquette-Variable, kurz Plaquette, $P_{x,\mu\nu}$. Sie ist definiert als Paralleltransport um ein Gitterquadrat, also

$$P_{x,\mu\nu} = U^\dagger_{x,\nu} U^\dagger_{x+\hat{\nu},\mu} U_{x+\hat{\mu},\nu} U_{x,\mu} \,. \tag{2.48}$$

Einsetzen von (2.46) und Anwendung der Formel von Baker-Campbell-Hausdorff

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\ldots} \tag{2.49}$$

zeigt (wieder unter Voraussetzung glatter Eichpotentiale) für $a \to 0$

$$P_{x,\mu\nu} \overset{a\to 0}{\longrightarrow} \exp(-a^2 F_{\mu\nu}(x) + \mathcal{O}(a^3)) \,. \tag{2.50}$$

Wie die Feldstärke transformiert sich auch die Plaquette kovariant unter Eichtransformationen,

$$P_{x,\mu\nu} \to g_x P_{x,\mu\nu} g_x^\dagger \,. \tag{2.51}$$

Die einfachste Form für eine eichinvariante Wirkung ist daher gegeben durch die *Wilson-Wirkung* [Wil74]

$$S[U] = \beta \sum_{x,\mu<\nu} \Big(1 - \frac{1}{N} \mathfrak{Re}\, \mathrm{tr}\,(P_{x,\mu\nu})\Big) \,. \tag{2.52}$$

Durch Entwicklung von (2.50) nach a sieht man, daß für die so definierte Gitterwirkung im Limes $a \to 0$ und unter Voraussetzung glatter Felder gilt

$$S[U] = -\frac{\beta a^4}{4N} \sum_{x,\mu,\nu} \mathrm{tr}\,(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) + \mathcal{O}(a^5) \,. \tag{2.53}$$

Dabei wurde benutzt, daß der Term der Ordnung a^3 in (2.50) ebenso wie die Feldstärke selbst algebrawertig und damit spurlos ist. Für $\beta = \frac{2N}{g^2}$ geht die Gitterwirkung (2.52) also im Limes $a \to 0$ wegen $a^4 \sum_x \to \int_M d^4x$ in die Kontinuumswirkung (2.30) über. Dieses Grenzverhalten bleibt offensichtlich auch bestehen, wenn man $S[U]$ um Terme ergänzt, die in (2.53) nur zu Korrekturen der Ordnung a^5 führen.

Der betrachtete Limes $a \to 0$ und alle Entwicklungen nach a sind nur unter der Voraussetzung glatter Materiefelder und Eichpotentiale gültig. Unsere Ausgangstheorie im Kontinuum erfüllte diese Vorraussetzung. Es ist aber

keineswegs klar, daß nach Einführung der Gitterstruktur als Regulator der Kontinuumslimes zu einer Theorie stetiger Felder zurückführt. Im Gegenteil hatten wir in Abschnitt 2.1.5 gesehen, daß für ein mathematisch wohldefiniertes Pfadintegral beliebig unstetige Konfigurationen (jetzt als Pfade der Felder in einem abstrakten unendlichdimensionalen Raum aufzufassen) eine entscheidende Rolle spielen. Die Gitterformulierung kann daher als eine Definition des Funktionalintegralmaßes im Kontinuum aufgefaßt werden.

Das Pfadintegral, das analog zu (2.34) die Quantisierung der Gittereichtheorie beschreibt, ist gegeben durch das erzeugende Funktional

$$\mathcal{Z}[j] = \int \mathrm{d}\mu[U] \exp\Big(\sum_{x,\mu} \mathrm{tr}\,(j_{x,\mu} U_{x,\mu})\Big) \tag{2.54}$$

mit Maß

$$\mathrm{d}\mu[U] = \mathcal{Z}[0]^{-1} \mathcal{D}U \, \exp(-S[U])\,. \tag{2.55}$$

Im Unterschied zum Kontinuum ist für diskrete x selbst bei unendlicher Gitterausdehnung eine Definition eines Haarmaßes auf dem Produkt jetzt nur *abzählbar* unendlich vieler Gruppen $SU(N)$ als Grenzwert eines Produktes endlich vieler Haarmaße möglich,

$$\mathcal{D}U = \prod_{x,\mu} \mathrm{d}U_{x,\mu}\,. \tag{2.56}$$

Dabei ist $\mathrm{d}U_{x,\mu}$ durch das Haarmaß der Gruppe $SU(N)$ gegeben. Insbesondere kann die Normierung

$$\int\limits_{SU(N)} \mathrm{d}U_{x,\mu} = 1 \tag{2.57}$$

gewählt werden. Der Erwartungswert einer Observable O ist auf dem Gitter definiert als

$$\langle O \rangle = \int \mathrm{d}\mu[U]\, O[U]\,. \tag{2.58}$$

Für das Pfadintegral im Kontinuum (2.34) haben wir die Notwendigkeit einer Eichfixierung aufgrund des fehlenden Haarmaßes betont. In der Gitterformulierung (2.58) sehen wir, daß das (endliche) Gruppenvolumen faktorisiert und aus dem Maß (2.55) herausfällt. Eine Eichfixierung ist nicht länger notwendig, um physikalische Größen auszurechnen, aber sie ist natürlich weiterhin erlaubt.

2.3.2 Monte-Carlo-Verfahren

Für analytische Rechnungen erscheint die Diskretisierung der Raum-Zeit eher hinderlich, umso nützlicher ist sie für die numerische Untersuchung der Yang-Mills-Theorie. Schon für relativ kleine Gitter, z.B. $N_\mu = 10$, besteht $\mathcal{D}U$ aber aus $4\prod_\mu N_\mu = 4 \cdot 10^4$ Gruppenintegrationen. Im Fall der Eichgruppe $\mathbb{Z}_2$ können die Integrationen exakt in eine Summe umgeschrieben werden. Allerdings besteht diese aus $2^{40000} \approx 1.58 \cdot 10^{12041}$ Termen. Eine direkte numerische Auswertung ist damit schon in diesem Fall (und erst recht für $SU(N)$) in endlicher Zeit unmöglich. Stattdessen erinnern wir uns an die Interpretation von $\mathrm{d}\mu[U]$ als Wahrscheinlichkeitsmaß. Durch das Maß ist bestimmt, welche Konfigurationen wesentlich zum Pfadintegral beitragen. Sie sind charakterisiert durch eine besonders kleine Wirkung oder eine besonders hohe Entropie. Ziel eines effizienten Algorithmus ist es also k (statistisch unabhängige) Konfigurationen $\mathcal{U} = \{U_{x,\mu}\}$ so zu erzeugen, daß sie entsprechend des Maßes $\mu[U]$ verteilt sind. Für diese gilt dann

$$\langle O \rangle = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} O[\mathcal{U}_i] \,. \tag{2.59}$$

Diese näherungsweise numerische Integration ist aus der statistischen Mechanik als Monte-Carlo-Integration bekannt.

Die Erzeugung der Konfigurationen erfolgt dabei durch einen *Markov-Prozeß*. Gestartet wird mit einer beliebigen (z.B. zufällig gewürfelten) Konfiguration von Linkvariablen. Für einen ausgewählten Link betrachtet man den Beitrag zur Wirkung (2.52) und bestimmt entsprechend einer Update-Vorschrift (siehe unten) einen neuen Wert für die Linkvariable. Auf diese Weise werden alle Links des Gitters nacheinander[10] durchlaufen. Ein Durchlauf durch das Gitter wird als *sweep* bezeichnet. Ist die Update-Vorschrift richtig gewählt, ist das Gitter nach einer (zu bestimmenden) Anzahl von sweeps *thermalisiert*. Das bedeutet, daß die in weiteren sweeps erzeugten Konfigurationen nun tatsächlich gemäß $\mu[U]$ verteilt sind und für Messungen verwendet werden können.[11]

Ein Beispiel für eine Update-Vorschrift, die besonders gut für die Gruppe $SU(2)$ funktioniert, ist der *heatbath* Algorithmus [Cre80a]. Jedes Element $U \in SU(2)$ können wir schreiben als

$$U = u_0 + i u_a \tau^a \,, \quad u^2 = u_0 u_0 + u_a u_a = 1 \,, \tag{2.60}$$

[10] Die Reihenfolge spielt dabei keine Rolle.

[11] Um Autokorrelationen zwischen den Konfigurationen zu vermeiden, führt man auch zwischen zwei Messungen wieder einige sweeps durch.

wobei $\tau^a = 2iT^a$ die drei Paulimatrizen sind. Eine Summe von mehreren $SU(2)$ Elementen ist bis auf einen Normierungsfaktor offenbar wieder ein Element der $SU(2)$. Daher können wir den möglichen Beitrag eines bestimmten Links $U_{x,\mu}$ zur Wirkung schreiben als

$$s(U_{x,\mu}) = -\frac{1}{2} \sum_{P \ni U_{x,\mu}} \operatorname{tr} P = -\frac{1}{2} \operatorname{tr} (U_{x,\mu} \cdot kB) , \quad B \in SU(2) . \tag{2.61}$$

Dabei ist kB die Summe über die $2(D-1)$ „Bügel“ aus je drei Links, die an $U_{x,\mu}$ anschließen,

$$kB = \sum_{\bar{\nu} \neq \pm\mu} U_{x,\bar{\nu}} \; \overset{U_{x+\hat{\bar{\nu}},\mu}}{\square} \; U_{x+\hat{\mu},\nu} , \quad U_{x,-\nu} = U^\dagger_{x-\hat{\nu},\nu} . \tag{2.62}$$

Nutzt man die Invarianz des Haarmaßes unter Multiplikation mit einem Gruppenelement, findet man für den entsprechenden Beitrag zum Pfadintegral

$$z_{x,\mu} \equiv \int \mathrm{d}U_{x,\mu} \exp(-\beta s(U_{x,\mu})) = \int \mathrm{d}\tilde{U}_{x,\mu} \exp\Big(\frac{\beta k}{2} \operatorname{tr} \tilde{U}_{x,\mu}\Big) \tag{2.63}$$

mit $\tilde{U}_{x,\mu} = U_{x,\mu} B$. Das Haarmaß ist wegen (2.60) gegeben durch

$$\mathrm{d}U = \mathrm{d}^4 u \, \delta(1-u^2) = \mathrm{d}u_0 \, \mathrm{d}\hat{u} \frac{1}{2} (1-u_0^2)^{\frac{1}{2}} , \tag{2.64}$$

wobei $\hat{u}_a = u_a / \sqrt{u_b u_b}$. Wir finden daher

$$z_{x,\mu} \sim \int \mathrm{d}u_0 (1-u_0^2)^{\frac{1}{2}} \exp(\beta k u_0) . \tag{2.65}$$

Da der Integrand unabhängig von $\hat{u}$ ist, wird dieser als dreidimensionaler Richtungsvektor auf der Sphäre gleichverteilt gewürfelt. Um u_0 zu bestimmen, wählt man eine gleichverteilte Zufallszahl $\zeta \in [\exp(-2\beta k), 1]$. Dann ist $u_0 \equiv 1 + (\beta k)^{-1} \ln \zeta \in [-1, 1]$ mit $\exp(\beta k u_0)$ verteilt. Jetzt fehlt nur noch die Gewichtung mit $p = (1-u_0^2)^{\frac{1}{2}}$. Dazu wählen wir eine weitere Zufallszahl $\zeta' \in [0, 1]$. Im Fall $\zeta' > p$ gehen wir wieder einen Schritt zurück und bestimmen ein neues u_0, im Fall $\zeta' < p$ akzeptieren wir das aktuelle u_0. Damit haben wir ein $\tilde{U}_{x,\mu}$ gefunden und erhalten den entsprechend dem Maß $\mu[U]$ gewählten Link als $U_{x,\mu} = \tilde{U}_{x,\mu} B^\dagger$.

2.3.3 Übergang zum Kontinuum

Wir haben das Gitter als Möglichkeit für eine nichtperturbative Regularisierung eingeführt. Der inverse Gitterabstand π/a wirkt im wesentlichen als

Cutoff für die vorkommenden Impulse.[12] Um den Regulator wieder zu entfernen, muß zunächst eine Renormierungsvorschrift festgelegt werden. Dazu betrachtet man eine beliebige Observable O. Deren Erwartungswert (2.58) hängt nicht nur vom Kopplungsparameter $\beta = 2N/g^2$ (vgl. (2.55), (2.52)), sondern auch von a ab[13],

$$\langle O \rangle = \langle O \rangle(\beta, a) = f(\beta) \cdot a^{-d} \,. \tag{2.66}$$

Hier ist d die kanonische Massendimension der Observable O und $f(\beta)$ der dimensionslose Gittermeßwert. Die Renormierungsvorschrift besteht nun in der Forderung, daß im Kontinuumslimes $a \to 0$ die Observable einen festgelegten (endlichen) physikalischen Wert annimmt,

$$\langle O \rangle(\beta, a) \stackrel{a \to 0}{\longrightarrow} O_{\text{phys}} \,. \tag{2.67}$$

Die Festlegung dieses Wertes entspricht der Wahl eines Renormierungspunktes, also einer Skala $\mu = O_{\text{phys}}^{1/d}$, während die Wahl der Observable das Renormierungsschema festlegt. Mit (2.66) wird daraus die Forderung

$$f(\beta) \stackrel{a \to 0}{\longrightarrow} a^d O_{\text{phys}} \,. \tag{2.68}$$

Aus ihr resultiert eine definierte Abhängigkeit der unrenormierten Kopplung g vom Gitterabstand a bzw. aus Dimensionsgründen von $a\mu$,

$$g = g(a\mu) \stackrel{a \to 0}{\longrightarrow} g_{\text{krit}} \,. \tag{2.69}$$

Anders ausgedrückt: Die nackte Kopplung g soll die im Limes eines unendlichen Cutoff ($a \to 0$) entstehenden Divergenzen absorbieren, damit die betrachtete Observable den endlichen Wert O_{phys} annimmt. Um das zu leisten, muß g vom inversen Cutoff a (und damit auch von μ) abhängen. In perturbativen Renormierungsverfahren betrachtet man entsprechend für festgehaltene nackte Kopplung das Laufen der renormierten Kopplung mit dem Renormierungspunkt.

Ist $g(a)$ auf diese Weise einmal festgelegt, nehmen im Fall einer renormierbaren Theorie für unrenormierte Kopplung g_{krit} alle physikalischen Observable einen endlichen Wert an. Insbesondere bedeutet das, daß eine Korrelationslänge gemessen in Einheiten des Gitterabstandes divergieren muß. In der

[12] Die Gitterregularisierung entspricht im perturbativen Bereich *nicht* genau der Regularisierung durch einen Impulscutoff. Die Integranden der Feynman-Integrale werden zusätzlich auf nichttriviale Weise modifiziert. Die Eichinvarianz wird nicht verletzt.

[13] Für endliche Gitter kommt noch eine Abhängigkeit von den Gitterausdehnungen N_μ hinzu, die wir hier vernachlässigen.

Sprache der statistischen Mechanik muß also bei g_{krit} ein Phasenübergang 2. Ordnung vorliegen.

Der Übergang von einem dimensionslosen Parameter β bzw. g zu einer dimensionsbehafteten Größe O_{phys} wird als *dimensionale Transmutation* bezeichnet. Welche Observable O zur Festlegung der Renormierung benutzt wird, muß für eine renormierbare Theorie beliebig sein. Alle anderen physikalischen Observable können dann in Einheiten der gewählten Observable angegeben werden.

Für konkrete numerische Rechnungen ist die Zahl der Gitterpunkte durch die Rechenleistung und die verfügbare Zeit stark beschränkt. Die physikalische Gitterausdehnung ist durch $L_\mu = N_\mu \cdot a$ gegeben und schrumpft für festgehaltenes N_μ im Limes $a \to 0$ immer weiter zusammen. Damit eine Observable auf dem Gitter meßbar ist, sollte ihre charakteristische physikalische Länge zwischen a und L_μ liegen. Dadurch ist ein Bereich von endlichen Gitterabständen a bzw. Kopplungen $g(a)$ bestimmt, in dem es überhaupt Sinn hat, diese Observable zu messen. Außerdem soll a möglichst klein sein, damit man nahe genug an der Kontinuumsphysik ist. Um diese „Nähe“ zur Kontinuumsphysik feststellen zu können, ist es wünschenswert, das durch (2.67) bestimmte Verhalten der Gittermeßwerte analytisch zu kennen. Stimmen die Meßwerte mit diesem Verhalten überein (die Observable *skaliert*), kann man sicher sein, daß man trotz der verhältnismäßig kleinen Gitter nahe genug am Kontinuum ist. Der entsprechende Bereich von Kopplungen $g(a)$ wird auch als *scaling window* bezeichnet.

Im Grenzfall kleiner Gitterabstände a gilt eine Renormierungsgruppengleichung

$$0 = a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}O_{\text{phys}} = a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\langle O\rangle(g(a),a) \tag{2.70}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\ln f(g)}{\mathrm{d}g}\cdot\tilde{\beta}(g) = -d\,, \quad \tilde{\beta}(g) \equiv -a\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}a} = -\mu\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\mu}\,. \tag{2.71}$$

Dabei kann die Renormierungsgruppenfunktion $\tilde{\beta}(g(a))$ aus dimensionalen Gründen nicht explizit von a abhängen.[14] Ist $\tilde{\beta}(g)$ bekannt, können wir angeben, wie sich die Gittermeßwerte $f(g)$ im Limes $a \to 0$ für eine physikalische Observable in Abhängigkeit von g verhalten müssen:

$$f(g) = f(g_0)\cdot\exp\Big(-d\cdot\int_{g_0}^{g}\mathrm{d}g'\,\tilde{\beta}^{-1}(g')\Big)\,. \tag{2.72}$$

[14] Die Renormierungsgruppenfunktion wird auch als Betafunktion bezeichnet, weshalb das Symbol $\tilde{\beta}$ gewählt wurde. Sie hat nichts zu tun mit dem Kopplungsparameter β.

Nullstellen von $\tilde{\beta}(g)$ entsprechen gerade den gesuchten kritischen Kopplungen g_{krit} an denen der Übergang zum Kontinuum möglich ist.[15] Tatsächlich kennen wir $\tilde{\beta}(g)$ aus perturbativen Rechnungen, da, wie wir oben gesehen haben, die Abhängigkeit der nackten Kopplung vom Cutoff gerade der in Störungstheorie gefundenen Abhängigkeit der renormierten Kopplung vom Renormierungspunkt entspricht. Es gilt

$$\tilde{\beta}(g) = -\tilde{\beta}_0 \frac{g^3}{16\pi^2} - \tilde{\beta}_1 \frac{g^5}{(16\pi^2)^2} + \mathcal{O}(g^6)\,. \tag{2.73}$$

Die Konstanten $\tilde{\beta}_0, \tilde{\beta}_1$ sind dabei unabhängig vom Renormierungsverfahren. Für eine reine $SU(N)$ Eichtheorie findet man

$$\tilde{\beta}_0 = \frac{11}{3}N\,, \quad \tilde{\beta}_1 = \frac{34}{3}N^2\,. \tag{2.74}$$

Für die kritische Kopplung gilt also $g_{\text{krit}} = 0$, kleine Abstände $a \to 0$ entsprechen einer kleinen Kopplung g. Aufgrund des negativen Vorzeichens in (2.73) ist dieser Fixpunkt ultraviolett stabil. [16]

Für das Verhalten der Gittermeßwerte in der Nähe des Kontinuumslimes (2.72) erhalten wir für $SU(2)$ und mit den Kopplungsparameter $\beta = 4/g^2$ in erster Näherung

$$f(\beta) \approx f(\beta_0) \cdot \exp\Big(- d\,\frac{3\pi^2}{11}(\beta - \beta_0)\Big)\,. \tag{2.75}$$

Mit (2.68) wird daraus

$$a(\beta) \approx a(\beta_0) \cdot \exp\Big(- \frac{3\pi^2}{11}(\beta - \beta_0)\Big)\,. \tag{2.76}$$

Dabei muß $a(\beta_0) = (f(\beta_0)/O_{\text{phys}})^{1/d}$ durch Wahl eines physikalischen Wertes O_{phys} einer beliebigen Observable O nur einmal bestimmt werden.

2.3.4 Confinement in der Gittereichtheorie

Ein Ansatz, um das Problem des Confinement von Farbladungen zu verstehen, ist die sehr anschauliche Vorstellung eines (linear) ansteigenden Potentials zwischen zwei Ladungen. Die Potentiallinien sind zu einem Flußschlauch gebündelt. Zieht man die Farbladungen auseinander, wird dieser

[15] Für $g \to g_{\text{krit}}$ mit $\tilde{\beta}(g_{\text{krit}}) = 0$ folgt aus (2.72) bei $d > 0$ $f(g) \to 0$ bzw. bei $d < 0$ $f(g) \to \infty$. Soll der Gittermeßwert einer endlichen physikalischen Größe mit Massendimension d entsprechen, bedeutet das $a \to 0$.

[16] In der perturbativen Renormierung folgt aus Betrachtung der Betafunktion, daß sich die $SU(N)$ Yang-Mills-Theorie bei großen Energien bzw. kleinen Abständen wie eine freie Theorie verhält. Dieses Phänomen wird als *asymptotische Freiheit* bezeichnet.

immer länger, die benötigte Energie wächst immer mehr an, und die Ladungen können nie komplett getrennt werden.

Für dynamische Quarks als Materiefelder einer Quantenfeldtheorie ist jedoch das klassische Bild eines „Potentials“ zwischen zwei „Teilchen“ zu naiv. Die Idee wird nur anwendbar im Limes unendlich schwerer Quarks. Dann treten in den Feynman-Diagrammen der Störungstheorie keine inneren Quarklinien mehr auf. Die Materiefelder werden zu statischen äußeren Quellen, die im Rahmen der reinen Yang-Mills-Theorie berücksichtigt werden können. Die Änderung der Grundzustandsenergie durch Einführung solcher äußeren statischen Quellen kann dann als Potential interpretiert werden. Man findet für das Potential zwischen zwei statischen Ladungen im Abstand R

$$V(R) = -\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathcal{W}(R,T)\,. \tag{2.77}$$

Dabei repräsentiert $\mathcal{W}(R,T)$ den Erwartungswert der Spur eines Wilson-Loops (2.25) entlang eines rechteckigen Weges mit zeitlicher Ausdehnung T und räumlicher Ausdehnung R [Wil74]. Für Details einer möglichen Herleitung sei hier zum Beispiel auf [MO81] oder [Qua99] verwiesen. Anschaulich verbindet man mit dem Wilson-Loop die Vorstellung, daß zu einem Zeitpunkt ein statisches Ladungspaar erzeugt und auf den Abstand R gebracht wird, das dann für eine Zeit T existiert und die Wechselwirkung „spürt“ und schließlich wieder vernichtet wird.

Für die QED ist das Eichpotential (Photon) ein freies Feld, und man erhält auf diese Weise tatsächlich das erwartete Coulombpotential zwischen zwei äußeren statischen elektrischen Ladungen [BBJ81]. In der QCD dagegen verhindert die Selbstwechselwirkung der Gluonen eine exakte Berechnung des Potentials. Für kleine Abstände erwartet man aufgrund der asymptotischen Freiheit wieder ein Coulombpotential. Tatsächlich läßt sich das im Rahmen der Störungstheorie ableiten [BBJ81]. Bei den für Confinement relevanten Abständen von der Größenordnung eines Hadrons bricht jedoch die Störungstheorie zusammen. Wir können daher innerhalb der Störungstheorie keine Aussagen über das Verhalten von $\mathcal{W}(R,T)$ machen.

Wird der Erwartungswert des Wilson-Loops für große R durch ein *Flächengesetz* dominiert,

$$\mathcal{W}(R,T) \to e^{-\sigma RT}\,, \tag{2.78}$$

dann folgt aus (2.77) sofort ein linear ansteigendes Potential $V(R) \to \sigma R$ und Confinement für statische Quarks ist realisiert.[17] Die Proportionalitätskonstante σ im linearen Teil des Potential wird als *string tension* bezeichnet.

[17] Es läßt sich zeigen, daß das Potential nicht stärker als linear mit R wachsen kann [Sei78].

Stattdessen könnte der Erwartungswert für große R auch von einem *Umfanggesetz*

$$\mathcal{W}(R,T) \to e^{-\alpha(R+T)} \tag{2.79}$$

dominiert werden. In diesem Fall erhalten wir aus (2.77) ein konstantes Potential $V(R) \to \alpha$, das nur die Selbstenergie der Quarks charakterisiert, und nicht zu Confinement von statischen Quarks führt. Diese Betrachtungen werden unter dem Schlagwort *Wilson-Kriterium* für Confinement zusammengefaßt.

Mit der Gitterformulierung der Yang-Mills-Theorie haben wir nun eine Möglichkeit an der Hand, auch außerhalb des Gültigkeitsbereichs der Störungstheorie Aussagen über Wilson-Loops und das Potential zu machen. Der als Paralleltransport entlang eines geschlossenen Weges definierte Wilson-Loop wird in der Gitterformulierung zum geordneten Produkt der Linkvariablen entlang des Weges, die ja elementare Paralleltransporter darstellen. Der kleinste Wilson-Loop ist die Plaquette (2.48). Die Potentialdefinition (2.77) wird auf dem Gitter zu

$$\hat{V}(\hat{R}) = -\lim_{\hat{T}a\to\infty} \frac{1}{\hat{T}} \ln \mathcal{W}(\hat{R},\hat{T})\,. \tag{2.80}$$

Dabei sind die dimensionslosen, in Einheiten des Gitterabstands gemessenen Größen durch einen Hut ($\hat{}$) gekennzeichnet. Aufgrund der Beschränkungen durch Rechenleistung und -zeit kann die Gitterausdehnung, und daher auch $\hat{R}$ und $\hat{T}$, nicht beliebig groß gewählt werden. Damit der Grenzübergang $T = \hat{T}a \to \infty$ trotzdem näherungsweise vollzogen ist und auch $R = \hat{R}a$ in der Größenordnung eines Hadrons ist (Confinement-Skala), darf der Gitterabstand a bzw. die nackte Kopplung g (2.76) nicht zu klein gewählt werden. Auf der anderen Seite sollte a jedoch auch nicht größer als diese Confinement-Skala sein.

Für große unrenormierte Kopplungen g läßt sich eine *strong coupling* Entwicklung für den Erwartungswert des Wilson-Loops durchführen [Mün81]. Tatsächlich findet man die oben angeführten Flächen- bzw. Umfangsbeiträge

$$\mathcal{W}(R,T) = \exp(-\sigma RT - \alpha(R+T) - \gamma)\,. \tag{2.81}$$

In wie weit sich dieses Verhalten (zumindest für große R) zu Kopplungen g fortsetzt, die nahe genug am Kontinuumslimes sind, und ob die string tension einen endlichen Wert $\sigma \neq 0$ annimmt, kann durch Gitterrechnungen untersucht werden.

Da die Selbstenergie α ohne Renormierung für $a \to 0$ divergiert, ist es sinnvoll eine Kombination von Erwartungswerten $\mathcal{W}(\hat{R},\hat{T})$ zu wählen, die nur den

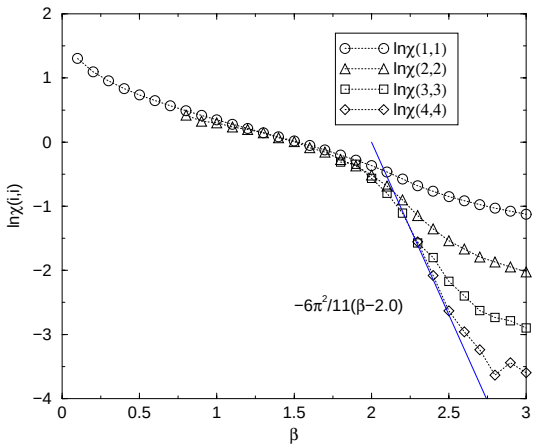


Abb. 2.2: Beispiel für Creutz ratios in der $SU(2)$ Yang-Mills-Theorie, gemessen auf einem 10^4 Gitter. Für $\beta \in [2.1, 2.5]$ finden wir für hinreichend große Wilson-Loops das bei Annäherung an das Kontinuum erwartete Skalenverhalten.

linearen Anteil des Potentials berücksichtigt. Zu diesem Zweck führt man die sogenannten *Creutz ratios*

$$\hat{\chi}(\hat{R}, \hat{T}) = -\ln \frac{\mathcal{W}(\hat{R}, \hat{T})\mathcal{W}(\hat{R}-1, \hat{T}-1)}{\mathcal{W}(\hat{R}, \hat{T}-1)\mathcal{W}(\hat{R}-1, \hat{T})} \tag{2.82}$$

ein [Cre80b]. Im Limes großer R folgt dann aus (2.80) mit dem Ansatz (2.81)

$$\lim_{T\to\infty} \hat{\chi}(R, T) = \hat{\sigma} = \sigma a^2 \,. \tag{2.83}$$

Die string tension der $SU(2)$ Gittereichtheorie wurde erstmals von Creutz gemessen ([Cre80a], [Cre80b]). Abbildung 2.2 zeigt ein Beispiel von Meßergebnissen für die Creutz ratios. Zwischen $\beta \approx 2.1$ und $\beta \approx 2.5$ ist für genügend große Wilson-Loops das scaling window zu erkennen, in dem $\hat{\chi}$ den aus (2.83) und (2.76) erwarteten exponentiellen Abfall zeigt. Für kleinere β (größere a bzw. g) ist der Gitterabstand bereits in der Größenordnung der Confinement-Skala. Dagegen macht sich für größere β die endliche Gitterausdehnung bemerkbar.

Vergleichbare Ergebnisse wurden auch für die Eichgruppe $SU(3)$ gefunden [CM82]. Die Gittermessungen bestätigen damit, daß es in der $SU(2)$ bzw. $SU(3)$ Yang-Mills-Theorie (zumindest bis zu einer durch die erreichbare physikalische Gittergröße begrenzten Skala von etwa 2 fm [BSS95]) Confinement

zwischen statischen Quarks gibt. Sie untermauern die Gültigkeit der $SU(3)$ Eichtheorie als Modell für die starke Wechselwirkung auch in Bezug auf das Phänomen des Confinement und geben Hoffnung, daß sich irgendwann auch ein analytischer Beweis dafür finden läßt.

Die bisherigen Ergebnisse waren gültig für Temperatur $T = 0$. Geht man dagegen zu endlichen Temperaturen über, erwartet man, daß ab einer kritischen Temperatur T_{krit} die Eigenschaft des Confinement verloren geht ([Pol78], [Sus79]). Bei hohen Temperaturen vermutet man, daß das Yang-Mills-Vakuum als Quark-Gluon-Plasma vorliegt. Dieser Deconfinement-Phasenübergangs ist für $SU(2)$ und $SU(3)$ durch Gitterrechnungen bestätigt worden (z.B. [MS81], [KPS81], [EKSM81], [KMP81]).

2.3.5 Gitter und Topologie

In Gleichung (2.45) haben wir streng periodische Randbedingungen

$$\psi(x + b_\mu) = \psi(x) \tag{2.84}$$

für bosonische Felder auf dem Gitter eingeführt. Andererseits haben wir in Abschnitt 2.2.3 gelernt, daß im Kontinuum die Topologie von (glatten) Eichfeldern auf dem Torus durch Übergangsfunktionen g_μ (Eichtransformationen)

$$\psi(x + b_\mu) = g_\mu \psi(x) \tag{2.85}$$

bestimmt wird. Daher sieht es auf den ersten Blick so aus, als wären Gitterkonfigurationen im Kontinuumslimes auf den trivialen topologischen Sektor beschränkt. Es ist aber zu beachten, daß wir durch die Diskretisierung der Raum-Zeit die Menge der glatten Felder verlassen haben. Durch eine singuläre Eichtransformation lassen sich aber auch für eine topologisch nichttriviale Konfiguration streng periodische Randbedingungen erreichen. Sobald wir also durch den Übergang zum Gitter beliebig singuläre Eichtransformationen zugelassen haben, stellt eine Beschränkung auf $g_\mu = \mathbb{1}$ in (2.85) keine Einschränkung an die Topologie der Konfigurationen dar.

2.4 Confinement-Modell dualer Supraleiter

Um die QCD als Modell für die starke Wechselwirkung auch im Infrarotsektor zu etablieren, fehlt eine Erklärung für das Confinement farbiger Teilchen, das in der Natur beobachtet wird. Wir haben in Abschnitt 2.3.4 gesehen,

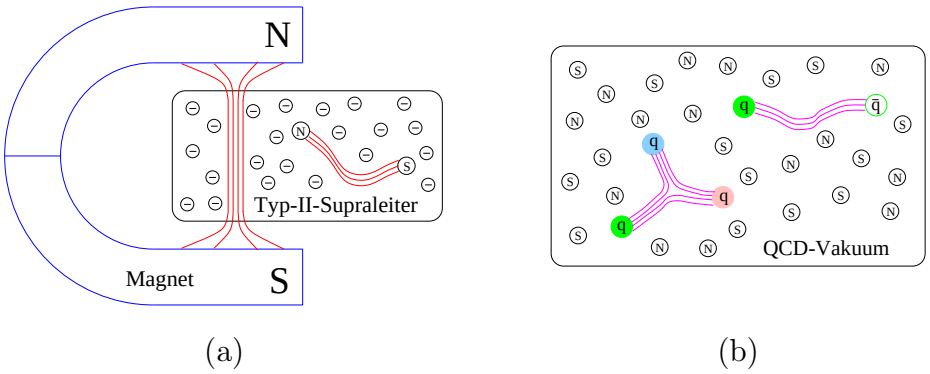
daß Gitterrechnungen tatsächlich für den Gluonanteil der QCD Confinement vorhersagen. Noch befriedigender wäre jedoch eine *analytische* Erklärung, die nicht nur sagt, *daß* Confinement eine Eigenschaft der QCD bzw. ihrer Yang-Mills-Theorie ist, sondern auch klärt *wie* es zustande kommt. Offenbar ist es kaum möglich, nichtperturbative Aussagen in der vollen Theorie zu machen. Die Idee ist daher, die Freiheitsgrade der Theorie zu isolieren, die im Infraroten relevant und daher für das Phänomen des Confinement verantwortlich sind. Eine effektive Theorie dieser Freiheitsgrade erlaubt dann eventuell einen analytischen Zugang und ermöglicht eine Untersuchung des Infrarotverhaltens.

Auf welche Weise diese relevanten Freiheitsgrade in Erscheinung treten, und welches anschauliche physikalische Bild man mit ihnen verbindet, wird im allgemeinen von der gewählten Eichung abhängen. Wenn die QCD das Phänomen des Confinement in der starken Wechselwirkung beschreiben soll, muß sie das in *jeder* Eichung tun. *Wie* sie das Phänomen beschreibt, darf aber durchaus in jeder Eichung unterschiedlich sein.

Da Confinement nicht im Rahmen der Störungstheorie auftritt, ist es naheliegend, sich nach Freiheitsgraden umzusehen, für die dasselbe gilt. Das führt uns auf die Idee, nach einem Zusammenhang zwischen Confinement und Topologie zu suchen. In Confinement-Modellen spielen daher meist die nichttrivialen Homotopiegruppen $\pi_3(SU(2)) = \mathbb{Z}$, $\pi_2(SU(2)/U(1)) = \mathbb{Z}$ oder $\pi_1(SU(2)/\mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$, bzw. ihre Entsprechungen in einer $SU(N)$ Eichgruppe, eine wichtige Rolle. Erstere steht in Zusammenhang mit den Instantonen (vgl. Abschnitt 2.2.2), die zwar die chirale Symmetriebrechung und das $U_A(1)$-Problem erklären können ([tHo76], [CDG78]), aber nicht für Confinement verantwortlich zu sein scheinen [GHK98]. Auf den beiden anderen Homotopiegruppen beruhen zwei sehr populäre Modelle für Confinement, die wir in diesem Abschnitt und in Abschnitt 2.5 näher betrachten wollen, der duale Supraleiter und die Vortexperkolation.

2.4.1 Der duale Supraleiter

In Abschnitt 2.3.4 haben wir gesehen, daß die anschauliche Vorstellung eines Flußschlauches von farbelektrischen Feldlinien zwischen zwei Farbladungen Unterstützung aus Gitterrechnungen findet. Das Wilson-Kriterium für Confinement sagt etwas darüber aus, ob sich ein lineares Potential und damit ein Flußschlauch zwischen statischen Quarks in großer Entfernung ausbildet. Auf diese Weise konnte in Gitterrechnungen Confinement auf Abständen bis zu etwa 2 fm gezeigt werden [BSS95].



(a) (b)

Abb. 2.3: (a) Schematische Darstellung des Meißner-Effekts in einem Typ-II-Supraleiter. (b) Der duale Supraleiter als Modell für das QCD-Vakuum.

Feldlinien, die zu Flußschläuchen gebündelt werden, sind uns aus einem anderen Gebiet der Physik wohlbekannt: In einem Typ-II-Supraleiter kann ein Magnetfeld nur in eben solchen Flußschläuchen (*Abrikosov-Vortizes*) den Supraleiter durchdringen, während ansonsten der *Meißner-Effekt* dafür sorgt, daß alle Magnetfelder aus dem Inneren des Supraleiters herausgedrängt werden, vgl. Abbildung 2.3a. Stellt man sich nun vor, daß ein (hypothetisches) Paar von magnetische Monopolen in einen Typ-II-Supraleiter eingebracht wird, sorgt der Meißner-Effekt dafür, daß sich an Stelle eines Coulombartigen Magnetfeldes, wie man es im Vakuum erwarten würde, ein Flußschlauch aus Magnetfeldlinien zwischen den Monopolen befindet. Voraussetzung für die Supraleitung ist die Existenz einer Energielücke im Anregungsspektrum der Elektronen. Diese entsteht dadurch, daß die Elektronen aufgrund einer Phononaustauschwechselwirkung zu *Cooper-Paaren* gebunden werden. Als Quasi-Bosonen können sie daher kondensieren und zur Erzeugung angeregter Zustände dieses Kondensats ist eine endliche Energie nötig.

Versuchen wir nun also, diesen Mechanismus für die Ausbildung von Flußschläuchen auf das QCD Vakuum anzuwenden. Offenbar sind die Rollen von elektrischem und magnetischem Feld vertauscht, weshalb vom *dualen Supraleiter* ([tHo75],[Man76] und [Par75]) gesprochen wird, vgl. Abbildung 2.3b. An die Stelle der magnetischen Monopole treten nun farbelektrische Ladungen, die Quarks. Die magnetischen Flußlinien werden zu farbelektrischen. Wenn wir ein Analogon zu den elektrisch geladenen quasi-bosonischen Cooper-Paaren suchen, die für die Supraleitung verantwortlich sind, müssen wir entsprechend Ausschau halten nach farbmagnetischen Ladungen, die ein Bosekondensat bilden können. Wir benötigen für einen dualen Supraleiter

also farbmagnetische Monopole.

2.4.2 Magnetische Monopole

Betrachten wir zunächst eine abelsche $U(1)$ Eichtheorie (z.B. Maxwell-Theorie). Bei Anwesenheit von Materiefeldern treten elektrische Ströme j in der Bewegungsgleichung (2.32) als Quellterm auf,

$$* \, \mathrm{d} * F = -j \, . \tag{2.86}$$

Eine entsprechende Definition eines magnetischen Stromes k verbietet die Bianchi-Identität (2.33),

$$* k = \mathrm{d} F = \mathrm{d}^2 A = 0 \, . \tag{2.87}$$

Die Bianchi-Identität setzt glatte Eichpotentiale A voraus. Eine Möglichkeit, doch einen magnetischen Strom k zu erhalten, ist, nichtdifferenzierbare Eichpotentiale ($\mathrm{d}^2 A \neq 0$) zuzulassen. Ein Beispiel für einen Monopol im Ursprung des durch Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ) parameterisierten Raumes $\mathbb{R}^3$ ist durch das Eichpotential

$$A_{\mathrm{N}} = \frac{1}{2}(1 - \cos\vartheta) \, \mathrm{d}\varphi \tag{2.88}$$

gegeben. Neben der Singularität im Ursprung tritt noch eine linienförmige Singularität für $\vartheta = \pi$ auf. Dieser *Dirac-String* [Dir31] ist jedoch unphysikalisch, da er durch Eichtransformationen beliebig verschoben werden kann.[18]

Alternativ zu dieser Dirac-Darstellung des Monopoles können wir zur Faserbündelformulierung mit glatten Eichpotentialen zurückkehren, wenn wir die Monopolposition aus der Mannigfaltigkeit herausnehmen. Den resultierenden topologisch nichttrivialen Raum $\mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$ müssen wir durch zwei offene Umgebungen überdecken, die wir als Nord- und Südhälfte bezeichnen wollen. In jeder Umgebung können wir nun durch geeignete Wahl des Dirac-Strings ein glattes Eichpotential angeben für das (2.87) erfüllt ist. In der Nordhälfte wählen wir A_{N} (2.88), in der Südhälfte

$$A_{\mathrm{S}} = -\frac{1}{2}(1 + \cos\vartheta) \, \mathrm{d}\varphi \, . \tag{2.89}$$

[18] Die Feldstärke $F = \mathrm{d}A_{\mathrm{N}} = \frac{1}{2} \sin\vartheta \, \mathrm{d}\vartheta \wedge \mathrm{d}\varphi$ ist auf dem Dirac-String wohldefiniert und nur am Ursprung singulär.

Auf dem Überlapp der beiden Umgebungen $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \simeq S^1$ ($\vartheta = \pi/2$) ist durch $t_{\mathrm{NS}} = \exp(i\varphi) \in U(1)$ eine Übergangsfunktion (vgl. (2.15)) definiert mit

$$A_{\mathrm{N}} = A_{\mathrm{S}} + i\, t_{\mathrm{NS}}\, \mathrm{d}t_{\mathrm{NS}}^{\dagger}\,. \tag{2.90}$$

Die Feldstärke F ist im abelschen Fall auf ganz $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ glatt (2.23). Die Windungszahl w der Übergangsfunktion t_{NS} bestimmt die magnetische Ladung q_{m}, die der Monopol am Ursprung trägt, denn

$$\begin{aligned} 2\pi q_{\mathrm{m}} &= \oint_{S^2} F = \int_{S^2_{\mathrm{N}}} \mathrm{d}A_{\mathrm{N}} + \int_{S^2_{\mathrm{S}}} \mathrm{d}A_{\mathrm{S}} && (2.91)\\ &= \oint_{S^1} (A_{\mathrm{N}} - A_{\mathrm{S}}) = i \oint_{S^1} t_{\mathrm{NS}}\, \mathrm{d}t_{\mathrm{NS}}^{\dagger} = 2\pi w\,. && (2.92) \end{aligned}$$

In unserem Beispiel ist $q_{\mathrm{m}} = w = \oint \mathrm{d}\varphi/2\pi = 1$. Diese Faserbündeldarstellung einer Monopolkonfiguration geht auf Wu und Yang zurück [WY76].

Die magnetische Ladung q_{m} kann gemäß Gleichung (2.92) auch als Element der Homotopiegruppe $\pi_1(U(1)) = \pi_2(SU(2)/U(1))$ interpretiert werden. Die Existenz von Monopolen ist daher eng mit der Topologie der betrachteten Konfiguration verknüpft, wie wir es für Confinement-relevante Freiheitsgrade erwartet hatten.

2.4.3 Abelsche Eichungen

Wir haben gesehen, auf welche Weise magnetische Monopole in abelschen Eichtheorien mit Eichgruppe $U(1)$ auftreten können und sind in der Lage, explizit Feldkonfigurationen mit beliebiger Monopolladung anzugeben. Um das Bild des dualen Supraleiters mit Hilfe solcher Monopolkonfigurationen auf die $G = SU(N)$ Yang-Mills-Theorie anwenden zu können, müssen wir uns auf eine abelsche Untergruppe beschränken.[19] Die Lie-Algebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(N)$ enthält eine größte abelsche Unteralgebra, die von den $N-1$ untereinander kommutierenden Generatoren aufgespannt wird. Die Generatoren dieser *Cartan Unteralgebra* werden im folgenden mit Indizes $a_0, b_0, \ldots$ bezeichnet, während wir die übrigen Generatoren mit Indizes $\bar{a}, \bar{b}, \ldots$ kennzeichnen wollen. Für $G = SU(N)$ können die Generatoren T^{a_0} immer diagonal gewählt werden. Der Cartan Unteralgebra entspricht eine maximale abelsche Untergruppe $H = U(1)^{N-1} \subset G$ mit Elementen $h = \exp(-\chi^{a_0} T^{a_0})$, $\chi^{a_0} \in \mathbb{R}$. Alle Elemente aus G, die sich nur um eine Eichtransformation $h \in H$ unterscheiden, bilden ein Element der Quotientenmenge (*engl.* coset) G/H.

[19] Die gesamte Eichgruppe $SU(N)$ erlaubt wegen $\pi_1(SU(N)) = \{0\}$ keine Monopole.

Jedes Element $\xi \in \mathfrak{g}$ können wir nun schreiben als[20]

$$\xi = \xi^{(\mathrm{n})} + \xi^{(\mathrm{ch})}\,, \quad \xi^{(\mathrm{n})} = \xi^{a_0} T^{a_0}\,, \quad \xi^{(\mathrm{ch})} = \xi^{\bar{a}} T^{\bar{a}}\,. \tag{2.93}$$

Eine Möglichkeit, die volle Eichgruppe G auf die Cartan Untergruppe H zu reduzieren, ist, die Eichfreiheit soweit zu fixieren, daß nur noch eine abelsche Resteichfreiheit mit Eichgruppe H verbleibt. Solche Eichungen werden als *abelsche Eichungen* bezeichnet [tHo81]. Durch *abelsche Projektion* auf die Cartan Untergruppe bzw. -algebra erhält man eine effektive abelsche Eichtheorie. Da $\pi_1(H)$ nichttrivial ist, können als Resultat der abelschen Eichfixierung und anschließenden Projektion magnetische Monopole auftreten.

Eine abelsche Eichung kann immer mittels eines Hilfsfeldes $\phi[A]$ definiert werden, das sich unter Eichtransformationen $U(x) \in SU(N)$ kovariant transformiert,

$$\phi[A](x) \to \phi[A^U](x) = U(x)\phi[A](x)U^\dagger(x)\,. \tag{2.94}$$

Die Wahl des Funktionals $\phi[A]$ bestimmt die abelsche Eichung. Dabei kann $\phi[A]$ gruppen- oder algebrawertig sein. Beispiele sind die Polyakov-Eichung (vgl. Abschnitt 3.1) mit

$$\phi[A](x) = \mathcal{P} \exp\Big(- \oint_{x_0}^{x_0+\tau} \mathrm{d}t\, A_0(t, \boldsymbol{x})\Big) \in SU(2) \tag{2.95}$$

oder die maximal abelsche Eichung, in der $\phi \in \mathfrak{su}(2)$ das Funktional

$$\int \mathrm{d}^4x\ \mathrm{tr}\,([D_\mu, \phi]^2) \tag{2.96}$$

unter der Nebenbedingung $|\phi(x)| = 1\,\forall\, x \in M$ minimiert, also

$$[D_\mu(x), [D_\mu(x), \phi(x)]] = \lambda(x)\phi(x)\,. \tag{2.97}$$

Die Eichfixierung $A \to A^V$ geschieht über die Forderung, daß das Feld ϕ in der Eichung diagonal ist,

$$\phi[A^V](x) = \Lambda(x) \quad \Leftrightarrow \quad \phi[A](x) = V^\dagger(x)\Lambda(x)V(x) \tag{2.98}$$

mit

$$\phi \in \mathfrak{su}(N): \ \ \Lambda(x) = i\ \mathrm{diag}(\lambda_1(x), \ldots, \lambda_N(x)) \tag{2.99}$$

$$\phi \in SU(N): \Lambda(x) = \exp(i\ \mathrm{diag}(\lambda_1(x), \ldots, \lambda_N(x))) \tag{2.100}$$

[20] Die Bezeichnungen (n) = neutral und (ch) = charged beziehen sich auf das Transformationsverhalten unter H.

und $\sum_i \lambda_i = 0$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Die Eichtransformation V, die in die Eichung führt, ist durch diese Forderung nur bis auf Transformationen festgelegt, die $\Lambda(x)$ wieder in eine Diagonalmatrix $\Lambda'(x)$ mit denselben Eigenwerten λ_i überführen. Neben den erwünschten abelschen Transformationen, die einfach mit $\Lambda(x)$ vertauschen, sind das die Weyl-Transformationen, die für $SU(N)$ aus Vertauschungen der Diagonalelemente von $\Lambda(x)$ bestehen. Diese können fixiert werden, indem man eine Ordnung vorschreibt, z.B. $\lambda_1(x) \geq \lambda_2(x) \geq \ldots \geq \lambda_N(x)$. Bei gruppenwertigem ϕ kann außerdem die Invarianz von Λ (2.100) unter $\lambda_i \to \lambda_i + 2\pi n_i$ fixiert werden.

Für nichtentartete Diagonalelemente $\lambda_i(x) \neq \lambda_j(x)$ ist $V(x)$ durch ein eindeutiges Element aus dem coset G/H der Eichgruppe gegeben. Im Fall einer Entartung $\lambda_i(x) = \lambda_j(x)$ vertauscht eine komplette $SU(2)$ Untergruppe von G mit $\Lambda(x)$ und die Eichtransformation V kann nicht eindeutig einem coset-Element zugeordnet werden. Nähert man sich dem Entartungspunkt x aus verschiedenen Richtungen, kann $V(x)$ als Grenzwert dieser Annäherung durch verschiedene Elemente aus G/H repräsentiert werden. Die Eichtransformation $V(x)$ ist dort unstetig und $A^V(x)$ wird singulär.

Mit Eichgruppe $SU(2)$ sind die Entartungen durch $\phi(x) = 0$ bei $\phi \in \mathfrak{su}(2)$, bzw. $\phi(x) = \pm\mathbb{1}$ bei $\phi \in SU(2)$ gegeben. Da es sich dabei um drei Bedingungen handelt, ist das Resultat i.a. eine punktförmige Singularität im dreidimensionalen Raum bzw. ihre Weltlinie in der vierdimensionalen Raum-Zeit.

Betrachtet man für $\phi \in \mathfrak{su}(2)$ das normierte Feld $\hat{\phi}(x) = \phi(x)/|\phi(x)|$, dann treten die Singularitäten an den Punkten x auf, an denen $\hat{\phi}(x)$ unstetig ist. Das ist auch die Situation im Fall der maximal abelschen Eichung, bei der das Feld $\phi(x)$ überall normiert ist.

Als generisches Beispiel für ein bei $x = 0$ singuläres $\phi(x) \in \mathfrak{su}(2)$ in drei Dimensionen betrachten wir die sogenannte *hedgehog*-Konfiguration[21] (*dt.* Igel)

$$\phi(x) = x_k T^k\,, \quad \hat{\phi}(x) = \frac{x_k}{|x|} T^k\,. \tag{2.101}$$

In Kugelkoordinaten, $\phi(r,\vartheta,\varphi) = r(\sin\vartheta\cos\varphi T^1 + \sin\vartheta\sin\varphi T^2 + \cos\vartheta T^3)$, überzeugt man sich leicht davon, daß ϕ durch

$$V(r,\vartheta,\varphi) = e^{-\varphi T^3} e^{-\vartheta T^2} e^{\varphi T^3} \tag{2.102}$$

diagonalisiert wird. Zum Eichpotential $A^V = VAV^\dagger + V\,\mathrm{d}V^\dagger$ trägt der bei $x = 0$ singuläre Anteil $V\,\mathrm{d}V^\dagger$ bei. Projiziert man auf den abelschen Anteil

[21] Taylorentwicklung um den Ort $x = 0$ einer Singularität ($\phi(0) = 0$) liefert $\phi^a(x) \approx \left.\frac{\partial\phi^a(x)}{\partial x_b}\right|_{x=0} x_b$.

von A^V, erhält man als singulären Teil $(V\,\mathrm{d}V^\dagger)^3 T^3$. Für unser Beispiel (2.102) gilt

$$(V\,\mathrm{d}V^\dagger)^3 = \frac{1}{2}(1-\cos\varphi)\,\mathrm{d}\varphi\,. \tag{2.103}$$

Das ist gerade das Eichpotential (2.88) eines Dirac-Monopols mit Dirac-String bei $\vartheta = \pi$.[22] Auf diese Weise entstehen in den abelschen Eichungen nach Projektion farbmagnetische Monopole, die für das Confinement-Modell des dualen Supraleiters benötigt werden. Man erwartet, daß diese Monopole in der Confinement-Phase kondensieren und so über den dualen Meißner-Effekt zu Confinement führen.

Die Idee, daß auf diesem Weg Confinement in der $SU(N)$ Yang-Mills-Theorie einmal analytisch bewiesen werden kann, stützt sich auf Resultate in anderen Eichtheorien: In kompakter QED wurde Confinement durch Monopolkondensation explizit gezeigt ([Pol75], [BMK77]) und auch in supersymmetrischen Yang-Mills-Theorien gelang der Beweis auf diesem Weg [SW94].

2.4.4 Gitterresultate

Eine Möglichkeit, die Vorstellung des Confinement-Szenarios als dualen Supraleiter zu überprüfen, bieten Gitterrechnungen. In Abschnitt 2.3.4 haben wir gesehen, wie sich Confinement in der vollen Theorie mittels Gitterrechnungen untersuchen läßt. An den Ergebnissen ändert sich aufgrund der Eichinvarianz auch nach Fixierung einer abelschen Eichung nichts. Jetzt hat man aber die Möglichkeit durch Projektion der Links auf ihre abelschen Anteile[23] (abelsche Projektion), die Idee numerisch zu überprüfen, daß diese die für Confinement relevanten Freiheitsgrade enthalten (abelsche Dominanz).

Dabei hat sich die maximal abelsche Eichung (2.96) als besonders vielversprechend erwiesen. Sie läßt sich auch ohne Hilfsfeld ϕ formulieren als Minimierungsvorschrift

$$S_{\mathrm{fix}}[A] = -\mu_{\mathrm{s}}^2 \int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{tr}\,(A^{(\mathrm{ch})}A^{(\mathrm{ch})})\,, \quad S_{\mathrm{fix}}[A^\Omega] \xrightarrow{\Omega} \min \tag{2.104}$$

mit einer Massenskala μ_{s} oder durch die lokale Bedingung $[D_\mu^{(\mathrm{n})}, A_\mu^{(\mathrm{ch})}] = 0$. Auf dem Gitter wird sie entsprechend definiert durch Maximierung der

[22] Für das unprojizierte Eichpotential heben sich bei Berechnung der Feldstärke gerade die Singularitäten aus dem abelschen Anteil gegen die aus den übrigen Feldstärkeanteilen auf [LRQ96]. In der vollen $SU(2)$-Eichtheorie existieren keine magnetischen Monopole ($\pi_1(SU(2)) = \{0\}$).

[23] Nur die Observablen werden vor der Messung jeweils projiziert. Die Erzeugung der Konfigurationen geschieht nach wie vor mit der Wirkung der vollen Theorie.

abelschen Anteile der Links gemäß

$$S_{\text{fix}}[U] = -\frac{2}{n_L} \sum_{x,\mu} \text{tr}\left(U_{x,\mu} T^3 U^\dagger_{x,\mu} T^3\right), \quad S_{\text{fix}}[U^\Omega] \stackrel{\Omega}{\rightarrow} \text{max}. \tag{2.105}$$

In [BBMS96] wurde gezeigt, daß die string tension der vollen Theorie bis auf 92% durch die abelsch projizierten Links reproduziert wird (abelsche Dominanz). Dort zeigt sich auch, daß man noch einen Schritt weitergehen kann: Der überwiegende Beitrag zur abelschen string tension (95%) stammt von Konfigurationen, die Monopole enthalten (Monopoldominanz).

In Gitterrechnungen kann die Dichte der Monopole in Einheiten des Gitterabstandes a gemessen werden. Damit die Dichte im Kontinuumslimes einen endlichen Wert annimmt und die auf dem Gitter bestimmten Monopole physikalischen Objekten entsprechen, müssen die dimensionslosen Meßwerte für die Dichte mit a^3 skalieren (vgl. Abschnitt 2.3.3). Anzeichen für ein solches Skalieren der Monopoldichte in maximal abelscher Eichung wurden erstmals in [BILMMSZ91] gefunden.

Das Verhalten der Monopoldichte und der Clustereigenschaften der Monopolweltlinien beim Deconfinement-Phasenübergang wurde in [FIMT98] und [IMMT98] untersucht. Nach Anwendung eines Glättungsverfahrens konnte der Übergang zur Deconfinement-Phase als Einsetzen einer Anisotropie der Monopolweltlinien beobachtet werden. In [GLMP00a] und [GLMP00b] wurde als Ordnungsparameter für den Deconfinement-Phasenübergang der Vakuumerwartungswert eines Operators betrachtet, der eine magnetische Ladung erzeugt. In Gitterrechnungen wurde so für abelsche Eichungen die im Bild des dualen Supraleiters erwartete Kondensation der magnetischen Monopole verifiziert.

2.5 Confinement-Modell Vortexperkolation

Neben dem im vorherigen Abschnitt behandelten Modell des dualen Supraleiters existieren auch andere Erklärungen für Confinement. Eine Idee, die besonders in den letzten Jahren wieder aufgegriffen wurde, ist die eines Kondensats von *Zentrumsvortizes* [NO79], [tHo79], [Mac80]. In drei Dimensionen ist ein Zentrumsvortex ein schlauchförmiges Objekt endlicher Dicke, das einen quantisierten Magnetfluß trägt. Ein Wilson-Loop

$$W(\mathcal{C}) = \frac{1}{N} \text{tr}\, \mathcal{P} \exp\left(-\oint_{\mathcal{C}} A\right), \tag{2.106}$$

der mit dem Zentrumsvortex nichttrivial verknüpft („gelinkt“) ist, erhält aus dem durch ihn laufenden Magnetfluß einen Faktor aus dem Zentrum der Eichgruppe. Das Zentrum einer Gruppe ist die Menge aller Elemente, die mit allen anderen Elementen der Gruppe vertauschen. Für $SU(N)$ ist das die zyklische Gruppe

$$\mathbb{Z}_N = \{\exp(2\pi ik/N) | k = 0, \ldots, N-1\} \,. \tag{2.107}$$

Zufällige Fluktuationen in der Zahl der Vortizes, die einen Wilson-Loop durchstechen, führen dann zu einem Flächengesetz und so zu Confinement. Diese Vorstellung zu verstehen und Anzeichen für die Realisierung in der $SU(2)$ Yang-Mills-Theorie zu suchen, ist Ziel dieses Abschnitts.

2.5.1 Vortizes

Wie beim dualen Supraleiter die Cartan-Untergruppe, so spielt auch hier mit dem Zentrum $\mathbb{Z}_N$ wieder eine Untergruppe der $SU(N)$ eine entscheidende Rolle. Schauen wir uns daher zunächst eine $\mathbb{Z}_{N=2}$ Gittereichtheorie an, wie wir sie z.B. als effektive Theorie einer $SU(2)$ Yang-Mills-Theorie erhalten könnten. Für $\mathbb{Z}_2 = \{\pm\mathbb{1}\}$ werden alle negativen Plaquetten $P_{x,\mu\nu} = -\mathbb{1}$ als Teil eines Vortex identifiziert. In einem dreidimensionalen Schnitt durch das Gitter bilden die dazu dualen Links geschlossene Linien, denn jeder negative Link trägt zu zwei Seiten eines dreidimensionalen elementaren Würfels C bei. Es gilt

$$\prod_{P_{\mu\nu}\in C} P_{\mu\nu} = \mathbb{1} \,. \tag{2.108}$$

Ebenso bilden in vier Dimensionen die zu den negativen Plaquetten dualen Plaquetten geschlossene Flächen.

Vortizes sind die einzigen nichttrivialen Feldkonfigurationen, die in einer $\mathbb{Z}_2$ Eichtheorie auftreten können. Jede Konfiguration von $\mathbb{Z}_2$-Links ist durch ihren Vortexgehalt bis auf Eichtransformationen eindeutig festgelegt.[24]

Ein Wilson-Loop (2.106), der den Magnetfluß mißt, läßt sich in einer $\mathbb{Z}_2$-Eichtheorie offenbar durch die Anzahl der von ihm eingeschlossenen negativen Plaquetten, also die Zahl n der Vortexdurchstoßpunkte durch die Kontur $\mathcal{C}$, als $W(\mathcal{C}) = (-1)^n$ angeben. Entsprechend gilt für den Erwartungswert

$$\mathcal{W}(\mathcal{C}) = \langle W(\mathcal{C})\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n p_n \,, \tag{2.109}$$

[24] $\mathbb{Z}_2$-Eichtransfomationen ändern nicht den Wert einer Plaquette und daher auch nicht den Vortexgehalt.

wobei p_n die Wahrscheinlichkeit angibt, daß der Wilson-Loop n mal durchstoßen wird.

2.5.2 Perkolation und Confinement

Wir betrachten zunächst ein einfaches Modell von N zufällig verteilten Vortexdurchstoßpunkten auf einer Fläche $\mathcal{F}$, die einen Wilson-Loop $\mathcal{C}$ mit Fläche $\mathcal{A}$ enthält. Die Vortexflächendichte ist definiert als $\rho = N/\mathcal{F}$. Die Wahrscheinlichkeit p, daß ein bestimmter Durchstoßpunkt in $\mathcal{A}$ liegt ist durch das Flächenverhältnis

$$p = \mathcal{A}/\mathcal{F} = \mathcal{A}\rho/N \tag{2.110}$$

gegeben. Die Wahrscheinlichkeit, daß genau $n \leq N$ Durchstoßpunkte in $\mathcal{A}$ liegen ist daher

$$p_n = \binom{N}{n} p^n (1-p)^{(N-n)} \,. \tag{2.111}$$

Der Erwartungswert (2.109) wird mit (2.110) zu

$$\mathcal{W}(\mathcal{C}) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \binom{N}{n} p^n (1-p)^{(N-n)} \tag{2.112}$$

$$= \lim_{N\to\infty} \left(1 - \frac{2\mathcal{A}\rho}{N}\right)^N = \exp(-2\rho\mathcal{A}) \,. \tag{2.113}$$

Damit haben wir bei zufällig verteilten Durchstoßpunkten ein Flächengesetz für den Wilson-Loop, was nach (2.77) zu einem linear ansteigenden Potential mit string tension

$$\sigma = 2\rho \tag{2.114}$$

führt [ELRT98].

In einem ähnlichen Bild können wir auch eine verschwindende string tension erklären. Dazu betrachten wir zufällig verteilte Paare von Durchstoßpunkten, wobei die Paare einen Abstand δ haben sollen, der viel kleiner als die Ausdehnung von $\mathcal{C}$ ist. Dadurch ergeben nur Paare, von denen jeweils nur ein Partner innerhalb von $\mathcal{C}$ liegt, einen nichttrivialen Beitrag. Eine Rechnung analog zu der obigen ergibt dann ein Umfanggesetz und damit ein konstantes Potential [ELRT00].

Eine effektive $\mathbb{Z}_2$-Theorie, die Confinement beschreibt, sollte also im Kontinuumslimes nicht durch viele kleine Vortizes charakterisiert sein. Vielmehr sollte es ein paar sehr große durch das gesamte Universum *perkolierende*[25]

[25] Man sagt, ein Vortex perkoliert, wenn er sich durch das gesamte Gitter zieht.

Vortizes geben. Dann kann man (bei nicht allzu großen Korrelationen zwischen den Vortizes) erwarten, daß deren Durchstoßpunkte durch eine Fläche in erster Näherung zufällig verteilt sind, und man erhält Confinement.

2.5.3 Zentrumseichungen auf dem Gitter

Die Vortizes einer $\mathbb{Z}_2$-Theorie sind zwangsläufig *dünne* Vortizes. Sie haben die Ausdehnung einer Plaquette und schrumpfen daher im Kontinuumslimes zu singulären Linien (in drei Dimensionen) zusammen. Die Zentrumsvortizes in einer regulären Konfiguration der vollen $SU(2)$-Theorie sollten schlauchförmige Gebilde mit einer endlichen Ausdehnung, also *dicke* Vortizes, sein. Um die Confinement-Eigenschaft dieser Vortizes zu überprüfen, ist es wünschenswert eine effektive $\mathbb{Z}_2$-Theorie zu finden, in der die dicken Vortizes zu dünnen Vortizes komprimiert werden.

Als Beispiel für eine Vortexkonfiguration betrachten wir ein $SU(2)$ Eichfeld, das in einer Ebene durch eine verschwindende radiale Komponente $A_r = 0$ und einen Winkelanteil $A_\varphi = \frac{f(r)}{r} T^3$ beschrieben wird. Für die glatte Profilfunktion $f(r)$ gelte $f(0) = 0$ und $f(r > R) = 1$, wobei R die Ausdehnung des Vortex beschreibt. Ein Wilson-Loop in einem Abstand größer R um den Ursprung hat den Wert $\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,\exp(i\pi\tau_3) = -1$, ist also durch ein nichttriviales Zentrumselement gegeben. Für Abstände kleiner R hängt der Wert des Wilson-Loops vom gewählten Abstand ab. Es ist nicht mehr zu entscheiden, ob ein Zentrumsvortex vorhanden ist. Dieser Umstand erschwert die direkte Messung von Zentrumsvortizes auf dem Gitter.

Bei Abständen größer als R kann man sich den Vortex durch einen *idealen* Vortex mit $f(r) \equiv 1$ ersetzt denken. Dieser ist dann allerdings singulär am Ursprung. Ein idealer Vortex kann als Resultat einer singulären Eichtransformation interpretiert werden. Für $V = \exp(-\varphi T^3)$ trägt $V\,\mathrm{d}V^\dagger = \mathrm{d}\varphi T^3$ zum eichtransformierten Eichpotential A^V bei. Ausgehend von einer regulären Konfiguration (mit dicken Vortizes) können also durch eine singuläre Eichtransformation ideale Vortizes entstehen. Bei geeigneter Wahl der Eichung könnten diese gerade den ursprünglichen dicken Vortizes entsprechen. In einer solchen Eichung wären die Zentrumsvortizes einfach zu identifizieren.

Analog zum dualen Supraleiter, bei dem wir Eichungen ausgewählt haben, die nur die Cartan-Untergruppe unfixiert lassen, wollen wir nun Eichungen betrachten, die das Zentrum der Eichgruppe frei lassen. Diese werden als *Zentrumseichungen* bezeichnet.

Jeden Link $U_{x,\mu} \in SU(2)$ können wir zerlegen als

$$U_{x,\mu} = Z_{x,\mu}\bar{U}_{x,\mu}\,. \tag{2.115}$$

Dabei ist $Z_\mu = \mathrm{sign}(\,\mathrm{tr}\,(U_{x,\mu}))$ ein Zentrumselement. Der Rest $\bar{U}_{x,\mu}$ kann als Element des cosets $SU(2)/\mathbb{Z}_2 \simeq SO(3)$ angesehen werden und durch den Link in der adjungierten Darstellung $O^{ab}_{x,\mu} = -2\,\mathrm{tr}\,(U^\dagger_{x,\mu}T^aU_{x,\mu}T^b)$ ausgedrückt werden. Entsprechend gilt für einen Wilson-Loop aus Links U die Zerlegung

$$W[U] = w[Z]W[\bar{U}]\,. \tag{2.116}$$

Damit die Zentrumseichung zur Identifikation der Zentrumsvortizes dienen kann, sollten die eichtransformierten Links in der adjungierten Darstellung im Kontinuumslimes keine Zentrumsvortizes enthalten. Dann kann ein Zentrumsvortex gerade durch einen Wilson-Loop $w[Z[U^\Omega]] = -1$ identifiziert werden. Alle Zentrumsvortizes sind zu idealen Vortizes geworden. Diese Eigenschaft ist für jede Zentrumseichung zunächst zu überprüfen.

Nach Projektion aller Links auf ihren Zentrumsgehalt (*Zentrumsprojektion*)

$$U^\Omega_{x,\mu} \to \mathrm{sign}(\,\mathrm{tr}\,(U^\Omega_{x,\mu})) \in \{\pm 1\}\,, \tag{2.117}$$

ist die Theorie auf eine effektive $\mathbb{Z}_2$-Theorie reduziert. Diese kann bezüglich ihres Vortexgehaltes, der Anzahl der (-1)-Plaquetten, untersucht werden. Gesucht ist nun eine Zentrumseichung, in der diese projizierten *P-Vortizes* physikalische Infrarotfreiheitsgrade der vollen Theorie repräsentieren.

Erfolgreiches Beispiel einer Zentrumseichung ist die maximale Zentrumseichung [DFGO97]. Sie ist analog zur maximal abelschen Eichung (2.105) definiert durch

$$S_{\mathrm{fix}}[U] = \frac{1}{4n_L}\sum_{x,\mu}(\,\mathrm{tr}\,(U_{x,\mu}))^2\,, \quad S_{\mathrm{fix}}[U^\Omega] \xrightarrow{\Omega} \max\,. \tag{2.118}$$

In dieser Eichung werden die Links durch eine Eichtransformation Ω_x (2.47) so nahe wie möglich an ein Zentrumselement gebracht. Für den $SO(3)$-Anteil der Links bedeutet das, daß er möglichst nahe bei $\mathbb{1}$ liegt.[26]

Die Messung der zentrumsprojizierten Creutz ratios zeigt, daß die string tension der vollen Theorie reproduziert wird ([DFGO97], [DFGGO98]). Dieses Phänomen wird als *Zentrumsdominanz* bezeichnet.[27] Zu jedem Wilson-Loop

[26] Das entspricht gerade der Landau-Eichung für die Links in der adjungierten Darstellung.

[27] Da Vortizes die einzigen Freiheitsgrade der effektiven Theorie sind, ist das gleichbedeutend mit dem Begriff der *Vortexdominanz*.

in der projizierten Theorie, der von n P-Vortizes durchstochen wird, kann man den entsprechenden Wilson-Loop auch in der vollen Theorie berechnen. So erhält man einen Erwartungswert $\mathcal{W}_n$ der vollen Theorie. Die string tension der vollen Theorie verschwindet, wenn man sie nur aus Erwartungswerten $\mathcal{W}_0$ von Wilson-Loops der vollen Theorie berechnet, die bei maximaler Zentrumseichung und -projektion nicht mit P-Vortizes gelinkt sind. Berechnet man das Verhältnis $\mathcal{W}_n/\mathcal{W}_0$, findet man im Limes großer Loops $\mathcal{W}_n/\mathcal{W}_0 = (-1)^n$ ([DFGO97], [DFGGO98]). Das deutet darauf hin, daß in der vollen Theorie eine der Zahl von P-Vortizes entsprechende Anzahl von Zentrumsvortizes die Wilson-Loops linkt.

Diese Beobachtungen sprechen dafür, daß die P-Vortizes der maximalen Zentrumseichung tatsächlich die für Confinement relevanten Infrarotfreiheitsgrade sind und Zentrumsvortizes der vollen Theorie entsprechen. Als weiterer Test, ob sie physikalischen Objekten entsprechen, wurde in [LRT98] und [LTER99] die Flächendichte ρ von Vortexdurchstoßpunkten untersucht (siehe auch [Ten00]). Es zeigt sich, daß die dimensionslosen Meßwerte für ρ mit a^2 skalieren (vgl. Abschnitt 2.3.3) und sich im Kontinuumslimes eine endliche Vortexflächendichte ergibt. Das legt nahe, daß die P-Vortizes der maximalen Zentrumseichung physikalische Bedeutung haben.

Daß die Tatsache der Zentrumsdominanz bei Berechnung der string tension nicht als Bestätigung eines Vortexmodells für Confinement ausreicht, zeigt die Zentrumsprojektion *ohne* vorangehende Eichfixierung. Das Potential zwischen statischen Quarks wird hier bis auf eine additive Konstante exakt reproduziert, wie sich sogar analytisch nachprüfen läßt [FGO99]. Erst nach Fixierung einer geeigneten Zentrumseichung wird die Zentrumsdominanz nichttrivial, und die P-Vortizes können zur Identifikation von physikalischen Zentrumsvortizes dienen. Das wird bestätigt durch die Beobachtung, daß ohne Eichfixierung sämtliche oben beschriebene Tests auf einen physikalischen Inhalt (Verschwinden der string tension ohne Vortizes, Skalieren der Flächendichte, Verhältnis $(-1)^n$ der Wilson-Loop-Erwartungswerte) ein negatives Ergebnis haben [FGO99].

Für das Verhältnis zwischen string tension und Vortexdichte in maximaler Zentrumseichung wird in [LTER99]

$$\sigma = (1.4 \pm 0.1)\rho\,. \tag{2.119}$$

gemessen. Vergleicht man dieses Ergebnis mit dem Wert (2.114) aus dem Modell zufälliger Vortexdurchstoßpunkte, deutet der Unterschied auf Korrelationen zwischen den Durchstoßpunkten hin. Solche attraktiven Korrelationen wurden in [ELRT98] tatsächlich gemessen (siehe auch [Ten00]).

Eine Bestätigung des Bildes von Confinement durch Perkolation der Vortizes wurde für die P-Vortizes der maximalen Zentrumseichung in [ELRT00] erbracht (siehe auch [Ten00]). Bei endlichen Temperaturen wurden die Vortexclustergrößen in dreidimensionalen Gitterschnitten gemessen. In Schnitten mit einer konstanten Raumkoordinate zeigt sich deutlich, daß bei Temperaturen oberhalb des Deconfinement-Phasenübergangs kleine Cluster dominieren, während unterhalb die Vortizes bevorzugt große Cluster bilden. In Schnitten bei konstanter Zeit perkolieren die Vortizes bei allen Temperaturen, was konsistent ist mit einer von Null verschiedenen *räumlichen* string tension[28] [BFHKS93].

Die Bedeutung der maximalen Zentrumseichung im Kontinuum wurde in [ER00a] untersucht. Dort wurde auch eine effektive Theorie von Zentrumsvortizes formuliert, die in [ER00b] weiter analysiert wurde. Ein Zusammenhang zwischen der Topologie einer Konfiguration und den Selbstschnitten der Vortexweltflächen konnte abgeleitet werden [ER00a].

[28] Die räumliche string tension wird analog zur string tension (2.83), aber mit rein räumlichen Wilson-Loops, definiert. Sie steht nicht im Zusammenhang mit dem Potential zwischen statischen Quarks.

Kapitel 3

Monopole und Topologie in der Polyakov-Eichung

In Abschnitt 2.4 wurde das Confinement-Modell des dualen Supraleiters vorgestellt. Wir haben gesehen, daß Gitterrechnungen dafür sprechen, daß dieses Bild in abelschen Eichungen realisiert ist. In abelschen Eichungen entstehen farbmagnetische Monopole als Konsequenz einer singulären Eichtransformation und anschließender abelscher Projektion. Monopole sind langreichweitige Felder und es liegt daher nahe, daß sie einen Beitrag zu den topologischen Eigenschaften einer Feldkonfiguration liefern sollten. Entsprechend hatten wir in (2.4.2) gefunden, daß ihre magnetische Ladung durch Elemente der Homotopiegruppe $\pi_1(U(1)) = \pi_2(SU(2)/U(1)) = \mathbb{Z}$ gegeben ist.

Um das Konzept einer singulären Eichtransformation in den Faserbündelformalismus einzubetten, müssen die Orte, an denen Singularitäten — Monopole — entstehen, aus der Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit ausgenommen werden. Die nichttriviale Topologie der Feldkonfiguration wird dann (zumindest teilweise) durch eine nichttriviale Topologie der Raum-Zeit sichtbar.

Eine bestimmte abelsche Eichung hat sich für die analytische Untersuchung der magnetischen Monopole als besonders geeignet erwiesen: die Polyakov-Eichung, die äquivalent zur modifizierten Weyl-Eichung ([LNT94], [LMT95], [Rei97a]) ist. Hier hat man es mit statischen Monopolen zu tun, deren Positionen außerdem leicht zu identifizieren sind. In diesem Kapitel wollen wir uns, basierend auf [QRS99], den Zusammenhang dieser Monopole mit der Topologie der Feldkonfiguration ansehen (siehe auch [Qua99]).

3.1 Die Polyakov-Eichung

Wir betrachten eine Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit, die in Zeitrichtung kompakt ist, $\mathcal{M} = S_1 \times \mathsf{M}$. Die (endliche) Zeitausdehnung bezeichnen wir mit τ. Eichpotentiale auf $\mathcal{M}$ müssen dann periodisch bis auf eine (zeitunabhängige) Eichtransformation sein. Es ist für jedes solche Eichpotential möglich, eine zeitabhängige, nicht periodische Eichtransformation durchzuführen, so daß $A_\mu(x)$ echt periodisch in der Zeit ist,

$$A(x_0, \boldsymbol{x}) = A(x_0 + \tau, \boldsymbol{x})\,. \tag{3.1}$$

Diese zeitlich periodischen Eichpotentiale nehmen wir als Ausgangspunkt für unsere Formulierung der Polyakov-Eichung. Entsprechend sind im weiteren auch nur Eichtransformationen zugelassen, die diese Eigenschaft erhalten, also selbst periodisch in der Zeit sind. Das ist der übliche Ausgangspunkt für die Formulierung des Pfadintegrals der Quantenfeldtheorie bei endlichen Temperaturen $1/\tau$.

Betrachten wir nun analog zum Wilson-Loop (2.25) ein pfadgeordnetes Produkt entlang der Zeitrichtung, das über die periodischen Randbedingungen geschlossen ist,

$$P(x_0, \boldsymbol{x}) = \mathcal{P} \exp\left(- \int_{x_0}^{x_0+\tau} \mathrm{d}t\, A_0(t, \boldsymbol{x}) \right) \in SU(N)\,. \tag{3.2}$$

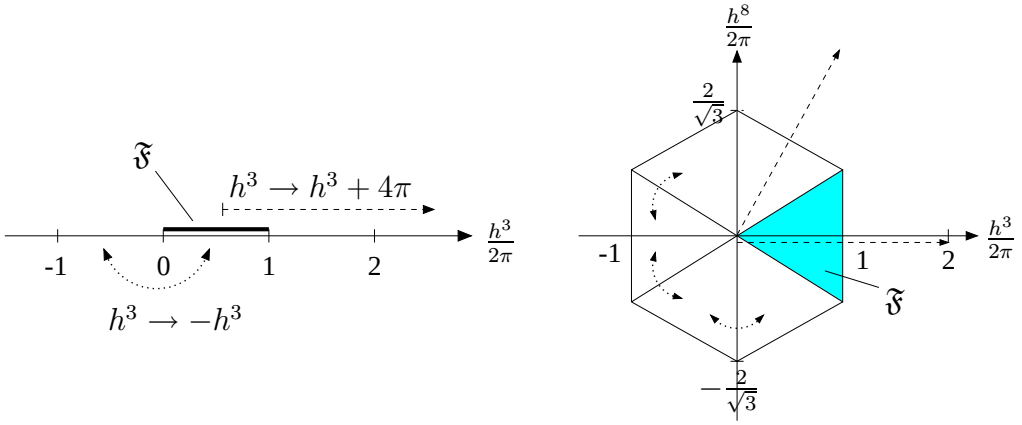
Unter periodischen Eichtransformationen $V(x)$ transformiert sich dieser *verallgemeinerte Polyakov-Loop-Operator* kovariant,

$$P^V(x) = V(x) P(x) V^\dagger(x)\,. \tag{3.3}$$

Damit erfüllt $P(x)$ die in Abschnitt 2.4.3 angegebenen Voraussetzungen, um es als Hilfsfeld zur Implementierung einer abelschen Eichung verwenden zu können. Die Eichtransformation, die die *Polyakov-Eichung* fixiert, wird bestimmt durch

$$V(x) P(x) V^\dagger(x) \stackrel{!}{=} p(\boldsymbol{x})\,, \quad p(\boldsymbol{x}) = e^{-h(\boldsymbol{x})}\,, \quad h(\boldsymbol{x}) \in \mathfrak{F} \subset \mathfrak{h} = \mathfrak{u}(1)^{N-1}\,. \tag{3.4}$$

Dabei bezeichnet $\mathfrak{F}$ eine fundamentale Domäne der Cartan-Unteralgebra $\mathfrak{h}$ von $\mathfrak{su}(N)$. Über die Exponentialabbildung $\mathcal{F} = e^{\mathfrak{F}} \subset H = U(1)^{N-1}$ ist dadurch ein fundamentaler Bereich der Cartan-Untergruppe H definiert. Ein Element der Cartan-Untergruppe H ist durch Vorgabe seiner Eigenwerte nur bis auf Weyl-Transformationen und diskrete Verschiebungen in der Algebra



(a) (b)

Abb. 3.1: (a) Die eindimensionale Cartan-Algebra der Gruppe $SU(2)$ mit Elementen $h = h^3T^3$. Markiert ist eine fundamentale Domäne (Weyl-Alkove) $\mathfrak{F}$, die unter der Exponentialabbildung in einen fundamentalen Bereich $\mathcal{F}$ überführt wird. Die Pfeile deuten die Weyl-Reflexionen bzw. diskreten Verschiebungen an. (b) Für $SU(3)$ ist die Cartan-Algebra zweidimensional, $h = h^3T^3 + h^8T^8$ mit $T^a = \lambda^a/2i$. Wieder ist eine fundamentale Domäne markiert. Auch hier sind die Weyl-Reflexionen und diskreten Verschiebungen angedeutet.

festgelegt. Im Fall der $SU(2)$ und $p = \exp(-h^3T^3) \in U(1)$ entspricht das den Transformationen $h^3 \to -h^3$ und $h^3 \to h^3 + 4\pi$. Die Einschränkung auf $\mathcal{F} \subset H$ definiert daher eindeutig, welches $p(\boldsymbol{x})$ ausgewählt werden muß und als Exponent welchen Algebraelements es repräsentiert wird. Die fundamentalen Domänen der Algebra für $SU(2)$ und $SU(3)$ sind in Abbildung 3.1 dargestellt. In der Mathematik tragen die fundamentalen Domänen der Algebra den Namen Weyl-Alkoven und spielen eine wichtige Rollen in der Theorie der Darstellungen von Gruppen.

Die Forderung, daß der diagonalisierte Operator $p(\boldsymbol{x})$ in (3.4) zeitunabhängig ist, ist eine zusätzlich zur Diagonalisierung gestellte Bedingung. Den zeitabhängigen verallgemeinerten Polyakov-Loop-Operator können wir mit der Definition $P(\boldsymbol{x}) = P(0, \boldsymbol{x})$ schreiben als

$$P(x_0, \boldsymbol{x}) = U^\dagger(x) P(\boldsymbol{x}) U(x)\,, \quad U(x) = \mathcal{P} \exp\left(-\int_0^{x_0} \mathrm{d}t\, A_0(t, \boldsymbol{x}) \right)\,. \tag{3.5}$$

Dabei haben wir unter anderem die Periodizität der Eichfelder verwendet.

Die Eichfixierungsbedingung (3.4) wird dann zu

$$\tilde{V}(x)P(\boldsymbol{x})\tilde{V}^{\dagger}(x) = p(\boldsymbol{x}) \tag{3.6}$$

mit

$$\tilde{V}(x) = V(x)U^{\dagger}(x) = v(x)V(0,\boldsymbol{x})\,, \quad v(x) \in \mathcal{F}\,. \tag{3.7}$$

Das zweite Gleichheitszeichen folgt durch Einsetzen von $x_0 = 0$ in Gleichung (3.4). Die Eichtransformation, die $A_\mu(x)$ in die Polyakov-Eichung bringt, ist also durch

$$V(x) = v(x)V(0,\boldsymbol{x})U(x) \tag{3.8}$$

gegeben. Der erste Teil $U(x)$ (3.5) bewirkt, daß die Zeitkomponente $A_0(x)$ auf Null transformiert wird,

$$A_0^U(x) = 0\,. \tag{3.9}$$

Es wird also zunächst die Weyl-Eichung fixiert. Dabei ist zu beachten, daß $U(x)$ (3.5) keine periodische Eichtransformation ist,

$$U(0,\boldsymbol{x}) = \mathbb{1}\,, \quad U(\tau,\boldsymbol{x}) = P(\boldsymbol{x})\,. \tag{3.10}$$

Sie führt uns daher aus dem Raum der zugelassenen periodischen Eichpotentiale heraus,

$$A_i^U(0,\boldsymbol{x}) = A_i(0,\boldsymbol{x}) \equiv C_i(\boldsymbol{x})\,, \quad A_i^U(\tau,\boldsymbol{x}) = C_i^{P(\boldsymbol{x})}(\boldsymbol{x})\,. \tag{3.11}$$

Der zweite Teil $V(0,\boldsymbol{x})$ der Eichtransformation (3.8) diagonalisiert den Polyakov-Loop-Operator $P(\boldsymbol{x})$, es folgt also

$$A_i^{V(0,\boldsymbol{x})U(x)}(0,\boldsymbol{x}) \equiv \tilde{C}_i(\boldsymbol{x})\,, \quad A_i^{V(0,\boldsymbol{x})U(x)}(\tau,\boldsymbol{x}) \equiv \tilde{C}_i^{p(\boldsymbol{x})}(\boldsymbol{x})\,. \tag{3.12}$$

Immer noch genügt das Eichpotential nicht periodischen Randbedingungen, und die Zeitkomponente des Eichpotentials bleibt weiterhin Null. Damit $V(x)$ (3.8) insgesamt eine periodische Eichtransformation darstellt, muß der letzte (abelsche) Teil $v(x)$ die periodischen Randbedingungen des Eichpotentials wieder herstellen. Ein rein zeitunabhängiger Anteil von $v(x)$ kann in $V(0,\boldsymbol{x})$ absorbiert werden, daher folgt (vgl. (3.4))

$$v(x) = (p(\boldsymbol{x}))^{-x_0/\tau} = \exp(\frac{x_0}{\tau}h(x))\,. \tag{3.13}$$

Durch diese Transformation wird eine neue Zeitkomponente für das Eichpotential eingeführt. Diese ist abelsch und zeitunabhängig,

$$A_0^V(x) = v(x)\partial_0 v^{\dagger}(x) = \frac{1}{\tau}\ln p(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{\tau}h(x) \equiv a_0(\boldsymbol{x})\,. \tag{3.14}$$

Funktionen $f(p)$ von Matrizen wie in (3.13) oder (3.14) sind über das Spektraltheorem definiert. Nur wenn die Funktion f auf dem Spektrum von p holomorph ist, kann sie glatt sein. Am Schnitt des Logarithmus muß man also aufpassen. Durch die Einschränkung von p auf einen fundamentalen Bereich $\mathcal{F}$ (3.4) bleibt man immer auf demselben Riemann-Blatt. Der Schnitt des Logarithmus wird nur am Rand von $\mathcal{F}$ erreicht.

Da die Zeitkomponente (3.14) des Eichpotentials in der Polyakov-Eichung über das Gruppenelement p gegeben ist, stellt a_0 eine kompakte Variable dar, die auf eine fundamentalen Domäne der Cartan-Algebra eingeschränkt ist. Für $G = SU(2)$ gilt $a_0 \in [0, 2\pi T^3/\tau]$.

Nach diesen Betrachtungen ist $V(x)$ im allgemeinen eindeutig festgelegt bis auf zeitunabhängige Eichtransformationen aus der Cartan-Untergruppe H

$$V(x) \to g(\boldsymbol{x})V(x)\,, \quad g(\boldsymbol{x}) \in H\,. \tag{3.15}$$

Es ist zu beachten, daß Weyl-Transformationen und Transformationen, die eine diskrete Verschiebung in der Algebra bewirken, durch die Beschränkung auf eine fundamentale Domäne, $p(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{F}$, ausgeschlossen wurden.

Anstatt die Polyakov-Eichung über die Diagonalisierung des Polyakov-Loops als statische abelsche Eichung zu definieren, kann man sie auch als modifizierte Weyl-Eichung interpretieren ([LNT94], [LMT95], [Rei97a]). Die Weyl-Eichung $A_0^U(x) = 0$ selbst ist nicht mit den periodischen Randbedingungen vereinbar. Die einfachste Zeitkomponente des Eichpotentials, die realisiert werden kann, ist durch

$$(A_0^V)^{(\mathrm{ch})}(x) = 0\,, \quad \partial_0 A_0(x) = 0 \tag{3.16}$$

gegeben.

In [Rei97b] wird noch eine andere Ableitung der Polyakov-Eichung gezeigt. Ausgangspunkt ist der kanonische Operatorformalismus mit $A_0 = 0$. Durch Projektion auf eichinvariante Zustände mittels Integration über die Eichgruppe wird die Zustandssumme definiert. Die Wiederherstellung der periodischen Randbedingungen führt dann eine neue A_0-Komponente ein, die diagonalisiert werden kann. Die Äquivalenz des Haarmaßes der Gruppe und der Faddeev-Popov-Determinante der Eichfixierung [Rei96] zeigt, daß die Zustandssumme dem üblichen Yang-Mills-Pfadintegral mit fixierter Polyakov-Eichung (bzw. modifizierter Weyl-Eichung) entspricht.

Der Polyakov-Loop-Operator $P(\boldsymbol{x})$ hat eine anschauliche physikalische Bedeutung. In Abschnitt 2.3.4 hatten wir mit Hilfe des Wilson-Loop-Erwartungswertes $\mathcal{W}(R,T)$ ein Potential $V(R)$ (2.77) zwischen statischen Quarks

definiert. Man interpretiert den Wilson-Loop als Paar von statischen Quarks, die zu irgendeinem Zeitpunkt im Abstand R entstehen, für eine Zeitspanne T die gegenseitige Wechselwirkung spüren und sich dann wieder vernichten. Für große T gilt

$$\mathcal{W}(R,T) = \exp(-TV(R))\,. \tag{3.17}$$

Analog läßt sich der Polyakov-Loop $\operatorname{tr} P(\boldsymbol{x})$ als Weltlinie eines einzelnen statischen Quarks interpretieren. Für seinen Erwartungswert gilt

$$\mathcal{P} \equiv \langle \operatorname{tr} P(\boldsymbol{x})\rangle = \exp(-\tau F_{\mathrm{q}})\,, \tag{3.18}$$

wobei F_{q} die freie Energie des einzelnen statischen Quarks bezeichnet. Damit ist der Polyakov-Loop-Erwartungswert ein *Ordnungparameter* für Confinement. Für $\mathcal{P} = 0$ ist die freie Energie eines einzelnen Quarks unendlich groß, wir befinden uns in der Confinement-Phase. Dagegen erhalten wir für $\mathcal{P} \neq 0$ eine endliche freie Energie F_{q} und kein Confinement.

Die Polyakov-Eichung bietet einen idealen Ausgangspunkt für analytische Untersuchungen von Polyakov-Loop-Korrelatoren, da in dieser Eichung der Polyakov-Loop-Operator für abelsches und zeitunabhängiges $A_0(x) = a_0(\boldsymbol{x})$ eine besonders einfache Form annimmt.

3.2 Eichfixierungsdefekte

Wie bei allen abelschen Eichungen, so treten auch bei der Fixierung der Polyakov-Eichung topologische Defekte auf. Betrachten wir die drei Eichfixierungsschritte (3.8) unter diesem Gesichtspunkt noch einmal. Nach dem ersten Schritt sind die Eichfelder $A^U_\mu(x)$ in der Weyl-Eichung global glatt auf der Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit $[0,\tau]\times\mathsf{M}$. Bei der darauffolgenden Diagonalisierung

$$V(0,\boldsymbol{x})P(\boldsymbol{x})V^\dagger(0,\boldsymbol{x}) = p(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{F} \subset H \tag{3.19}$$

treten am Punkt $\boldsymbol{x}$ lokale statische Eichfixierungsdefekte auf, falls der Polyakov-Loop $P(\boldsymbol{x})$ dort durch ein irreguläres Gruppenelement gegeben ist. Ein $SU(N)$ Gruppenelement wird als irregulär bezeichnet, wenn mindestens einer seiner Eigenwerte entartet ist.[1] Der diagonalisierte Operator $p(\boldsymbol{x})$ liegt dann auf dem Rand des fundamentalen Bereichs $\mathcal{F}$. Die beiden zum entarteten Eigenwert zugehörigen Eigenvektoren korrespondieren zu einer $SU(2)$-Untergruppe der $SU(N)$. Daher genügt es auch für den allgemeinen Fall

[1] Dann hat der Zentralisator, also die Menge aller Gruppenelemente, die mit dem betrachteten Element vertauschen, eine höhere Dimension als $N-1$. Er ist also nicht nur durch eine abelsche Untergruppe gegeben.

der $SU(N)$, sich bei Betrachtungen der lokalen Defekte auf die Eichgruppe $SU(2)$ zu beschränken. Hier sind die irregulären Elemente durch die beiden Zentrumselemente $\pm\mathbb{1}$ gegeben.

Wir definieren einen einzelnen (statischen) Defekt D_i als die zusammenhängende Menge von Raumpunkten, an denen $P(\boldsymbol{x})$ irregulär ist,

$$\mathsf{D}_i = \{\boldsymbol{x} \in \mathsf{M} | P(\boldsymbol{x}) = \pm\mathbb{1}\} \subset \mathsf{M}\,, \quad \mathsf{D}_i \text{ zusammenhängend}\,. \tag{3.20}$$

Hier wird noch einmal der große Vorteil der Polyakov-Eichung deutlich: Alle Defekte sind statisch, $\mathsf{D}_i \times S_1$. Es genügt demzufolge, die räumliche Mannigfaltigkeit M zu betrachten. Die Art des Defekts D_i bestimmt sich durch die Homotopieklassen von $\mathsf{M} \setminus \mathsf{D}_i$.

$$\begin{aligned}
&\pi_0(\mathsf{M} \setminus \mathsf{D}_i) \neq 0\text{: geschlossene Domänenwand}^2 \\
&\pi_1(\mathsf{M} \setminus \mathsf{D}_i) \neq 0\text{: geschlossener Liniendefekt} \\
&\pi_2(\mathsf{M} \setminus \mathsf{D}_i) \neq 0\text{: isolierter Punktdefekt (magnetischer Monopol)}
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Offene Linien- und Wanddefekte sind topologisch äquivalent zu isolierten Punktdefekten. Ebenso sind dreidimensionale Defekte immer äquivalent zu einer der oben aufgeführten Defektarten.

Da $P(\boldsymbol{x}) = \pm\mathbb{1}$ drei Bedingungen darstellt, ist der allgemeine Fall der eines Punktdefekts. An den Defekten ist die Eichtransformation $V(x)$ völlig unbestimmt. Die residuelle Eichfreiheit erhöht sich hier von $H = U(1)$ auf die gesamte Eichgruppe $SU(2)$. Das räumliche Eichfeld $A_i^V(x)$ wird am Defekt durch den Term $V(x)\partial_i V^\dagger(x)$ singulär. In Abschnitt 2.4.3 haben wir gesehen, daß die abelsche Komponente des Eichpotentials dann einen magnetischen Monopol enthält.

Auch wenn $P(\boldsymbol{x})$ auf ganz M regulär ist, also nicht die Werte $\pm\mathbb{1}$ annimmt, kann es topologische Obstruktionen zur Diagonalisierung (3.19) geben. Es kann sein, daß $V(0, \boldsymbol{x})$ nicht die Randbedingungen von M erfüllt. Ein Beispiel für eine solche Mannigfaltigkeit ist der Torus $\mathsf{M} = T^3$ [FMTWP98]. Im Gegensatz dazu ist auf $\mathsf{M} = S^3$ für überall reguläres $P(\boldsymbol{x})$ immer $V(0, \boldsymbol{x})$ global glatt und wohldefiniert.

Damit die Faserbündelbeschreibung der Eichtheorie ihre Gültigkeit behält, müssen die Defekte, die bei $P(\boldsymbol{x}) = \pm\mathbb{1}$ entstehen, aus der räumliche Mannigfaltigkeit M ausgenommen werden. Dazu schließen wir die Defekte in eine infinitesimal größere ε-Umgebung ein,

$$\mathsf{D}_i \to \mathsf{D}_i^\varepsilon\,, \tag{3.22}$$

[2] Die Wand kann auch über die Randbedingungen an die Raum-Zeit geschlossen sein.

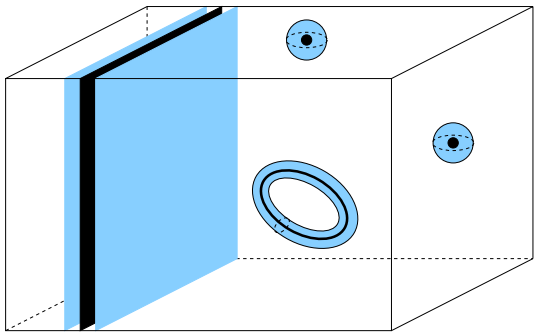


Abb. 3.2: Verschiedene Defekte, die bei der Diagonalisierung des Polyakov-Loop-Operators auftreten, und ihre einhüllenden Oberflächen. Der Wanddefekt ist über die Randbedingungen von M geschlossen.

und betrachten im folgenden die Mannigfaltigkeit

$$\mathsf{M}_\varepsilon = \mathsf{M} \setminus \bigcup_i \mathsf{D}_i^\varepsilon \,. \tag{3.23}$$

Jeder Defekt resultiert in einer zusätzlichen inneren Oberfläche der Mannigfaltigkeit M_ε an der Stelle, an welcher der Defekt ausgeschnitten wurde. Die unterschiedlichen Defekte und ihre einhüllenden Oberflächen sind in Abbildung 3.2 illustriert.

Sei nun $\{\mathsf{X}_\alpha\}$ eine Überdeckung von M_ε durch geschlossene kontrahierbare Mengen X_α,

$$\mathsf{M}_\varepsilon = \bigcup_\alpha \mathsf{X}_\alpha \,, \tag{3.24}$$

gegeben mit

$$\mathsf{X}_\alpha \cap \mathsf{X}_\beta = \partial\mathsf{X}_\alpha \cap \partial\mathsf{X}_\beta \,. \tag{3.25}$$

Die geschlossenen Mengen X_α überlappen also genau mit ihren Rändern. Die Mengen und auch ihre Schnitte haben eine Orientierung. Vertauschen der Mengen bei der Bildung des Durchschnitts führt daher zu einer Umkehrung der Orientierung. Symbolisieren wir die Orientierung mit einem Vorzeichen, dann gilt

$$\mathsf{X}_\alpha \cap \mathsf{X}_\beta = -\mathsf{X}_\beta \cap \mathsf{X}_\alpha \,. \tag{3.26}$$

Da alle X_α kontrahierbar sind, ist die Diagonalisierung (3.19) dort jeweils mit glattem $V_\alpha(0, \boldsymbol{x})$ und $p(\boldsymbol{x})$ möglich. Bei Anwesenheit von geschlossenen Domänenwänden besteht die Mannigfaltigkeit M_ε aus unverbundenen Teilen M_a mit $\mathsf{M}_\varepsilon = \bigcup_a \mathsf{M}_a$, die durch Domänenwände voneinander getrennt sind. Innerhalb eines Teils M_a kann dann $p(\boldsymbol{x})$ sogar überall glatt gewählt werden.

Um das zu sehen, erinnern wir uns, daß $P(\boldsymbol{x})$ nach Voraussetzung über den gemeinsamen Rand zweier Mengen X_α und X_β hinweg glatt ist,

$$P(\boldsymbol{x}) = V_\alpha^\dagger(\boldsymbol{x}) p_\alpha(\boldsymbol{x}) V_\alpha(\boldsymbol{x}) = V_\beta^\dagger(\boldsymbol{x}) p_\beta(\boldsymbol{x}) V_\beta(\boldsymbol{x})\,. \tag{3.27}$$

Die abelschen Polyakov-Loops hängen daher durch

$$p_\alpha(\boldsymbol{x}) = h_{\alpha\beta}(\boldsymbol{x}) p_\beta(\boldsymbol{x}) h_{\alpha\beta}^\dagger(\boldsymbol{x})\,, \quad h_{\alpha\beta} = V_\alpha(\boldsymbol{x}) V_\beta^\dagger(\boldsymbol{x}) \tag{3.28}$$

zusammen. Die abelschen Übergangsfunktionen $h_{\alpha\beta}$ erfüllen die Kozyklusbedingung

$$h_{\alpha\beta} \cdot h_{\beta\gamma} = h_{\alpha\gamma}\,. \tag{3.29}$$

Wegen (3.15) nimmt $h_{\alpha\beta}$ Werte aus dem Normalisator $N(H) = H \times W$ an. Die Diagonalisierungen p_α und p_β stimmen daher bis auf eine Weyl-Transformation überein. Da die Eichgruppe $SU(N)$ einfach zusammenhängend ist, $\pi_1(SU(N)) = \{0\}$, stellt das Bild $\mathsf{P} \subset H$ einer Weyl-Alkove unter der Exponentialabbildung einen fundamentalen Bereich für die Cartan-Untergruppe dar. Jede Weyl-Transformation führt aus P hinaus. Durch Einschränkung von p auf $\mathsf{P} \in H$ kann also immer

$$p_\alpha(\boldsymbol{x}) = p_\beta(\boldsymbol{x})\,, \quad \boldsymbol{x} \in \mathsf{X}_\alpha \cap \mathsf{X}_\beta \tag{3.30}$$

glatt auf dem Überlapp zweier Karten gewählt werden. Wir haben oben gesehen, daß der Schnitt des Logarithmus ebenfalls nur auf dem Rand der fundamentalen Domäne, also an den Defekten, erreicht wird. Da die Defekte aus M_ε ausgenommen wurden, kann innerhalb eines M_a auch

$$\ln p_\alpha = \ln p_\beta \tag{3.31}$$

auf glatte Art und Weise gewählt werden.

Anders sieht die Situation für den Übergang von einer Region M_a zu einer anderen M_b aus. Die beiden Regionen sind durch eine Domänenwand getrennt, ihre Schnittmenge ist leer. Die Diagonalisierungen p_a und p_b an infinitesimal benachbarten Punkten auf verschiedenen Seiten der Domänenwand könnten so gewählt sein, daß sie in verschiedenen Weyl-Alkoven liegen. Sie erfüllen daher nur die schwächeren Beziehungen

$$p_a = p_b \text{ oder } p_a = p_b^\dagger \tag{3.32}$$

und

$$\ln p_a = \pm \ln p_b + 2\pi i k \tau^3\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,. \tag{3.33}$$

3.3 Der Pontryagin-Index in der Polyakov-Eichung

In Gleichung (3.21) haben wir die Defekte D_i, die bei der Diagonalisierung (3.19) auftreten können, über die Homtopieklassen von $\mathsf{M}\backslash\mathsf{D}_i$ klassifiziert. Die einzelnen Defekte wurden mit einer infinitesimal größeren Umgebung D_i^ε umgeben und ausgeschnitten. Im Gegensatz zur eigentlichen Defektposition ist auf dem Rand von D_i^ε die Eichtransformation bis auf eine $U(1)$ eindeutig bestimmt. Nun kann man das $U(1)$-Hauptfaserbündel über $\partial\mathsf{D}_i^\varepsilon$ betrachten und durch seine Eigenschaften die Defekte topologisch noch weiter klassifizieren. Für einen punktartigen Defekt gilt $\partial\mathsf{D}_i^\varepsilon = S_\varepsilon^2$. Ein $U(1)$-Hauptfaserbündel über einer S^2 ist durch die erste Chern-Zahl, die magnetische Monopolladung

$$m_i = \frac{1}{2\pi} \oint\limits_{S_\varepsilon^2} F \tag{3.34}$$

klassifiziert. Im Fall eines geschlossenen ringförmigen Defekts ist die einhüllende Mannigfaltigkeit ein Torus T_ε^2. Auch hier ist eine vollständige Klassifikation durch eine Monopolladung möglich. Die dritte Defektart, Domänenwände, benötigt zwei unverbundene einhüllende Mannigfaltigkeiten $\partial\mathsf{D}_{i\,(1)}^\varepsilon$ und $\partial\mathsf{D}_{i\,(2)}^\varepsilon$. Je nach Lage der Domänenwand sind diese auch durch Sphären S^2 oder Tori T^2 gegeben. Jeder Seite einer Domänenwand kann so ebenfalls eine magnetische Ladung zugeordnet werden. Auf diese Art und Weise kann die Topologie der Defekte vollständig charakterisiert werden.

Die entscheidende Frage ist nun, in wie weit die Topologie der gesamten Konfiguration durch die Monopolladungen der Defekte ausgedrückt werden kann. Als eine Möglichkeit, Konfigurationen zu klassifizieren, hatten wir in Abschnitt 2.2.2 den Pontryagin-Index

$$\nu[A] = -\frac{1}{8\pi^2} \int\limits_{\mathcal{M}} \mathrm{tr}\,(F \wedge F) \tag{3.35}$$

kennengelernt. Für glatte Konfigurationen kann er als Integral des topologischen Stroms

$$K[A] = \mathrm{tr}\,(F \wedge A - \frac{1}{3} A \wedge A \wedge A) \tag{3.36}$$

über den Rand der Mannigfaltigkeit geschrieben werden,

$$\nu[A] = -\frac{1}{8\pi^2} \int\limits_{\partial\mathcal{M}} K\,. \tag{3.37}$$

Wir werden im folgenden Abschnitt sehen, daß der Pontryagin-Index der Konfiguration in der Polyakov-Eichung allein durch die Monopolladungen ausgedrückt werden kann.

3.3.1 Pontryagin-Index und Windungszahl

Wir wollen eine Beziehung zwischen dem Pontryagin-Index einer Konfiguration und der Windungszahl des Polyakov-Loop-Operators herstellen. Dazu betrachten wir eine Raum-Zeit $\mathcal{M} = [0,\tau]\times\mathsf{M}$, wobei $\mathsf{M} = \mathbb{R}^3\cup\{\infty\} = \dot{\mathbb{R}}^3 \simeq S^3$ der kompaktifizierte $\mathbb{R}^3$ ist. Die Kompaktifizierung von $\mathbb{R}^3$ zu S^3 ergibt sich durch Einschränkung auf Eichpotentiale mit endlicher Wirkung. Weiterhin wollen wir nur zeitlich periodische Eichpotentiale betrachten, d.h. $A(t=0) = A(t=\tau)$. Für ein glattes, zeitlich periodisches Eichpotential $A_\mu(x)$ mit endlicher Wirkung erhalten wir durch Übergang zur Weyl-Eichung $A_0^U(x) = 0$

$$\nu[A^U] = -\frac{1}{8\pi^2}\int_{S^3}(K[C^P] - K[C]) = -\frac{1}{24\pi^2}\int_{S^3}\mathrm{tr}\,(L\wedge L\wedge L)\,. \tag{3.38}$$

Dabei ist $L = P\,\mathrm{d}P^\dagger$ mit dem Polyakov-Loop-Operator $P(\boldsymbol{x})$. Zur Herleitung von Gleichung (3.38) haben wir benutzt, daß sich die Eichpotentiale A^U bei $x_0 = 0$ und $x_0 = \tau$ durch eine Eichtransformation mit dem Polyakov-Loop-Operator unterscheiden (3.11), und wegen $A_0^U = 0$ das Integral über den Rand $[0,\tau]\times\partial\mathbb{R}^3$ verschwindet.

Bevor (3.38) als Windungszahl des Polyakov-Operators $P(\boldsymbol{x})$ von der räumlichen Mannigfaltigkeit $\dot{\mathbb{R}}^3$ in die Eichgruppe $SU(N)$ interpretiert werden kann, ist zu beachten, daß P für $|\boldsymbol{x}|\to\infty$ i.a. nicht richtungsunabhängig gegen einen Wert konvergieren wird. Betrachtet man aber das asymptotische Verhalten von P, so erkennt man, daß $P_\infty : \partial\mathbb{R}^3 \to SU(N)$ eine Abbildung von S^2 in die Eichgruppe ist. Andererseits ist $\pi_2(SU(N)) = \{0\}$, d.h. die Abbildung $P : \mathbb{R}^3 \to SU(N)$ kann stetig zu einer Abbildung $\dot{\mathbb{R}}^3 \to SU(N)$ deformiert werden. Der letzte Term in Gleichung (3.38) gibt dann genau die Windungszahl n dieser Abbildung an,

$$\nu[A^U] = n[P]\,. \tag{3.39}$$

An dieser Stelle sehen wir schon die Relevanz der Eichfixierungsdefekte für die Topologie der Konfiguration. Ohne Singularitäten, also für auf ganz S^3

reguläres $V(0,\boldsymbol{x})$, könnten wir aus (3.19) folgern[3]

$$n[P] = n[V^\dagger p V] = n[V^\dagger] + n[p] + n[V] = n[p] = 0\,. \tag{3.40}$$

Mit einem überall regulären $V(0,\boldsymbol{x})$ sind offenbar nur topologisch triviale Konfigurationen vereinbar. Nach dieser Beobachtung können wir nun versuchen, die Windungszahl des Polyakov-Loop-Operators durch die Monopolzahlen der einzelnen Defekte auszudrücken.

3.3.2 Windungszahl und Defekte

Wir haben auf der räumlichen Mannigfaltigkeit mit ausgeschnittenen Defekten M_ε eine Überdeckung $\{\mathsf{X}_\alpha\}$ eingeführt. Innerhalb einer Karte X_α ist die Diagonalisierung (3.19) glatt möglich. Der Integrand der Windungszahl $n[P]$ kann hier lokal als totale Ableitung

$$\operatorname{tr}(L\wedge L\wedge L) = \mathrm{d}G[p,V_\alpha] \tag{3.41}$$

geschrieben werden. Dabei ist

$$G[p,V_\alpha] = -6\operatorname{tr}(\mathcal{A}_\alpha \wedge p\,\mathrm{d}p^\dagger) + 3\operatorname{tr}(\mathcal{A}_\alpha p^\dagger \wedge \mathcal{A}_\alpha p) \tag{3.42}$$

mit $\mathcal{A}_\alpha = V_\alpha\,\mathrm{d}V_\alpha^\dagger$. Für die Windungszahl liefert dann das Theorem von Stokes eine Summe über die Ränder aller Karten,

$$n[P] = -\frac{1}{24\pi^2}\sum_\alpha \int\limits_{\partial\mathsf{X}_\alpha} G[p,V_\alpha]\,. \tag{3.43}$$

Eine Karte grenzt immer an andere Karten oder an Defektumhüllungen $\partial\mathsf{D}_i^\varepsilon$. Wegen (3.25) können wir deshalb den Rand einer Karte zerlegen als

$$\partial\mathsf{X}_\alpha = \bigcup_{\beta\neq\alpha} \mathsf{X}_\alpha\cap\mathsf{X}_\beta + \bigcup_i \mathsf{X}_\alpha\cap\mathsf{D}_i^\varepsilon\,. \tag{3.44}$$

Durch diese Relation wird eine Orientierung für den Durchschnitt von orientierten Karten definiert. Jetzt läßt sich die Windungszahl schreiben als

$$n[P] = -\frac{1}{48\pi^2}\sum_{\alpha,\beta}\int\limits_{\mathsf{X}_\alpha\cap\mathsf{X}_\beta}(G[p,V_\alpha]-G[p,V_\beta]) - \frac{1}{24\pi^2}\sum_{\alpha,i}\int\limits_{\mathsf{X}_\alpha\cap\mathsf{D}_i^\varepsilon} G[p,V_\alpha]\,. \tag{3.45}$$

[3] Das letzte Gleichheitszeichen folgt für das abelsche p aus der Definition der Windungszahl.

Das relative Vorzeichen im ersten Integranden resultiert dabei aus der unterschiedlichen Orientierung von $\mathsf{X}_\alpha \cap \mathsf{X}_\beta$, je nachdem ob man gerade den Rand von X_α oder X_β betrachtet, vgl. (3.26). Mit den Übergangsfunktionen (3.28) folgt dann aus (3.42), daß der erste Integrand wieder als eine totale Ableitung geschrieben werden kann,

$$G[p, V_\alpha] - G[p, V_\beta] = -6\,\mathrm{d}\,\mathrm{tr}\,(h_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}h_{\alpha\beta}^\dagger \ln p)\,. \tag{3.46}$$

Wir können für das erste Integral in (3.45) also wieder das Theorem von Stokes anwenden. Den Rand von $\mathsf{X}_\alpha \cap \mathsf{X}_\beta$ können wir analog zu (3.44) zerlegen in

$$\partial(\mathsf{X}_\alpha \cap \mathsf{X}_\beta) = \bigcup_{\gamma\neq\alpha,\beta} \mathsf{X}_\alpha \cap \mathsf{X}_\beta \cap \mathsf{X}_\gamma + \bigcup_i \mathsf{X}_\alpha \cap \mathsf{X}_\beta \cap \mathsf{D}_i^\varepsilon\,. \tag{3.47}$$

Mit Hilfe der Kozyklusbedingung (3.29) finden wir

$$\int\limits_{\mathsf{X}_\alpha\cap\mathsf{X}_\beta} (G[p, V_\alpha] - G[p, V_\beta]) = -6\sum_i \int\limits_{\mathsf{X}_\alpha\cap\mathsf{X}_\beta\cap\mathsf{D}_i^\varepsilon} \mathrm{tr}\,(h_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}h_{\alpha\beta}^\dagger \ln p)\,. \tag{3.48}$$

Nun betrachten wir das zweite Integral in (3.45). Der letzte Term in (3.42) trägt nicht bei, da er für $\varepsilon \to 0$, also $p \to \pm\mathbb{1}$, verschwindet. Der erste Term in (3.42) kann umgeschrieben werden in

$$-6\,\mathrm{tr}\,(\mathcal{A}_\alpha \wedge p\,\mathrm{d}p^\dagger) = -6\,\mathrm{d}\,\mathrm{tr}\,(\mathcal{A}_\alpha \ln p) + 6\,\mathrm{tr}\,(\,\mathrm{d}\mathcal{A}_\alpha \ln p)\,. \tag{3.49}$$

Dann liefert das Theorem von Stokes für das zweite Integral in (3.42)

$$\sum_{\alpha,i} \int\limits_{\mathsf{X}_\alpha\cap\mathsf{D}_i^\varepsilon} G[p, V_\alpha] = -6\sum_{\alpha,i} \int\limits_{\partial(\mathsf{X}_\alpha\cap\mathsf{D}_i^\varepsilon)} \mathrm{tr}\,(\mathcal{A}_\alpha \ln p) + 6\sum_{\alpha,i} \int\limits_{\mathsf{X}_\alpha\cap\mathsf{D}_i^\varepsilon} \mathrm{tr}\,(\,\mathrm{d}\mathcal{A}_\alpha \ln p)\,. \tag{3.50}$$

Wieder können wir den Rand $\partial(\mathsf{X}_\alpha \cap \mathsf{D}_i^\varepsilon)$ analog zu (3.47) in

$$\partial(\mathsf{X}_\alpha \cap \mathsf{D}_i^\varepsilon) = -\bigcup_{\beta\neq\alpha} \mathsf{X}_\alpha \cap \mathsf{X}_\beta \cap \mathsf{D}_i^\varepsilon \tag{3.51}$$

zerlegen. Dabei ist auf die Orientierung (3.26) zu achten. Der erste Term auf der rechten Seite von (3.50) wird dann zu

$$-6\sum_{\alpha,i} \int\limits_{\partial(\mathsf{X}_\alpha\cap\mathsf{D}_i^\varepsilon)} \mathrm{tr}\,(\mathcal{A}_\alpha \ln p) = 3\sum_{\alpha,\beta,i} \int\limits_{\mathsf{X}_\alpha\cap\mathsf{X}_\beta\cap\mathsf{D}_i^\varepsilon} \mathrm{tr}\,((\mathcal{A}_\alpha - \mathcal{A}_\beta) \ln p)\,. \tag{3.52}$$

Beachtet man Gleichung (3.28), so stellt man fest, daß sich dieser Term gegen den Beitrag aus Gleichung (3.48) aufhebt. Der einzige Beitrag zur Windungszahl ist daher durch den zweiten Term in (3.50) gegeben,

$$n[P] = -\frac{1}{4\pi^2}\sum_{\alpha,i} \int\limits_{\mathsf{X}_\alpha\cap\mathsf{D}_i^\varepsilon} \mathrm{tr}\,(\ln p \cdot T^3)\cdot\,\mathrm{d}\mathcal{A}_\alpha^3\,. \tag{3.53}$$

An einem Defekt D_i sind $P(\boldsymbol{x})$ und $p(\boldsymbol{x})$ durch die irregulären Gruppenelemente $\pm\mathbb{1}$ gegeben,

$$p(\boldsymbol{x}) = \exp(in_i\pi) = \pm\mathbb{1}\,, \tag{3.54}$$

und sind konstant. Wir finden also

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \operatorname{tr}\left(\ln p \cdot T^3\right)\Big|_{\mathsf{D}_i^\varepsilon} = \pi n_i\,. \tag{3.55}$$

Dabei ist $n_i \in \mathbb{Z}$ durch die Wahl der Weyl-Alkove $\mathfrak{F}$ in der Region bestimmt, in der sich die Defekteinhüllende befindet. Weiterhin stellt

$$m_i = \frac{1}{4\pi}\sum_\alpha \int\limits_{\mathsf{X}_\alpha\cap\mathsf{D}_i^\varepsilon} \mathrm{d}\mathcal{A}_\alpha^3 \tag{3.56}$$

den magnetischen Fluß (bezüglich der Cartan-Untergruppe $U(1)$) durch die einhüllende Oberfläche des Defekts dar. Also ist m_i die magnetische Ladung des Defekts. Die Windungszahl (bzw. der Pontryagin-Index) ist damit allein durch die magnetischen Ladungen der Defekte gegeben,[4]

$$n[P] = -\sum_i n_i m_i\,. \tag{3.57}$$

Im Fall einer Domänenwand ist jeder ihrer Seiten eine magnetische Ladung m_i und eine Weyl-Alkove n_i zugeordnet. Sie trägt also mit zwei Summanden zu (3.57) bei. Die Beziehung (3.57) wurde in dieser Form bereits in [Rei97b] abgeleitet.

Die Weyl-Alkoven können in jeder durch Domänenwände abgegrenzten Region frei gewählt werden. Insbesondere können sie immer so bestimmt werden, daß $\ln p$ glatt über die Wand hinweg geht. Wir werden sehen, daß sich dann die beiden Beiträge der Domänenwand genau aufheben. In diesem Fall tragen Domänenwände nicht zur Windungszahl (3.57) bei.

Alternativ können wir auch in jeder Region dieselbe Weyl-Alkove wählen, z.B. $-i\ln p \in [0,\pi]$. Dann ist n_i auf die Werte 0 für $p = \mathbb{1}$ und 1 für $p = -\mathbb{1}$ beschränkt. Das führt auf die in [FMTWP98] und [JL98] gefundene Beziehung

$$n[P] = -\sum_{i(P=-\mathbb{1})} m_i\,. \tag{3.58}$$

Nur Defekte mit $P = -\mathbb{1}$ tragen zur Windungszahl bei. Allerdings ist zu beachten, daß nun $\ln p$ zwar stetig über die Wand hinweg läuft, aber nicht

[4] In [CJ80] wurde für eine Dyon-Konfiguration gezeigt, daß der Pontryagin-Index durch die magnetische Ladung des Dyons gegeben ist.

notwendigerweise glatt. Wir werden sehen, daß sich in diesem Fall die beiden (identischen) Beiträge der Domänenwand aufaddieren. Die Domänenwände müssen bei einer Formulierung gemäß (3.58) also auf jeden Fall berücksichtigt werden.

3.3.3 Beispiel: Hedgehog-Konfiguration

In Abschnitt 2.4.3 haben wir als Beispiel für eine Monopolkonfiguration in dem zu diagonalisierenden Feld ϕ, welches hier der Polyakov-Loop-Operator $P(\boldsymbol{x})$ ist, die hedgehog-Konfiguration kennengelernt. Daher wollen wir im folgenden wieder einen hedgehog

$$P(\boldsymbol{x}) = \exp(-2\chi(r)\hat{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{T}) = \mathbb{1}\,\cos\chi(r) + i\hat{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{\tau}\,\sin\chi(r)\,, \quad r = |\boldsymbol{x}| \tag{3.59}$$

als Beispielkonfiguration betrachten, um die daraus resultierenden Beiträge zu den Formeln (3.57) und (3.58) zu illustrieren. Dabei soll die Profilfunktion $\chi(r)$ glatt sein.

Damit die Abbildung $P(\boldsymbol{x})$ glatt ist, muß die Singularität am Ursprung, an dem $\hat{\boldsymbol{x}}$ nicht definiert ist, vermieden werden. Daraus folgt

$$\sin\chi(0) = 0 \Leftrightarrow \chi(0) = n_0\pi\,, \quad n_0 \in \mathbb{Z}\,. \tag{3.60}$$

Die Kompaktifizierung $\mathbb{R}^3 \to S^3$ der räumlichen Mannigfaltigkeit impliziert, daß $P(\boldsymbol{x})$ im räumlich Unendlichen $t \to \infty$ winkelunabhängig wird, also

$$\sin\chi(\infty) = 0 \Leftrightarrow \chi(\infty) = n_\infty\pi\,, \quad n_\infty \in \mathbb{Z}\,. \tag{3.61}$$

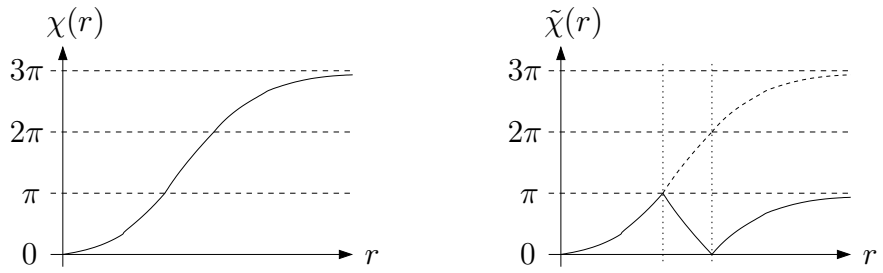
Die Windungszahl ist dann durch die Differenz der zwei ganzen Zahlen aus den Randbedingungen an das Profil gegeben, $n[P] = n_\infty - n_0$. In unserem Beispiel wählen wir konkret

$$n_0 = 0 \Rightarrow n[P] = n_\infty\,. \tag{3.62}$$

Eine mögliche Profilfunktion $\chi(r)$ ist in Abbildung 3.3a dargestellt. Der Operator $P(\boldsymbol{x})$ wird irregulär bei $\chi(r) = k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Es liegen also Punktdefekte bei $r = 0$ und $r = \infty$ vor und Domänenwände auf den Sphären um den Ursprung auf denen $\chi(r)$ ein Vielfaches von π ist. Eine stetige Diagonalisierung ist durch

$$p(\boldsymbol{x}) = p(r) = \exp(-2\tilde{\chi}(r)T^3) \tag{3.63}$$

gegeben. Das (stetige) Profil $\tilde{\chi}(r)$ hängt von der Wahl der Weyl-Alkoven in den durch Domänenwände getrennten Regionen ab.



(a) (b)

Abb. 3.3: (a) Profilfunktion für den hedgehog $P(\boldsymbol{x})$ (3.59). Wählt man die Weyl-Alkoven für die einzelnen Regionen so, daß für die Profilfunktion von $p(\boldsymbol{x})$ (3.63) gilt $\tilde{\chi(r)} = \chi(r)$, ist $\ln p(\boldsymbol{x})$ glatt an Domänenwänden. (b) Wird $\tilde{\chi}(r)$ eingeschränkt auf $[0, \pi]$, ist $\ln p(\boldsymbol{x})$ an den Domänenwänden zwar stetig aber nicht glatt.

Natürlich können wir $\tilde{\chi}(r) = \chi(r)$ wählen, dann ist $\ln p(\boldsymbol{x})$ global glatt (mit Ausnahme der Punktdefekte bei $r = 0$ und $r = \infty$). Andererseits können wir aber $\tilde{\chi}$ auch auf eine Weyl-Alkove einschränken, $\tilde{\chi}(r) \in [0, \pi]$. Dazu nutzen wir die Invarianz von $p(\boldsymbol{x})$ unter $\chi \to \chi + 2\pi$ und die Weyl-Transformation $\chi \to -\chi$, die die Eigenwerte von $p(\boldsymbol{x})$ unverändert läßt. Die resultierende Profilfunktion $\tilde{\chi}(r)$ ist in Abbildung 3.3b dargestellt. Sowohl $p(\boldsymbol{x})$ als auch $\ln p(\boldsymbol{x})$ sind zwar stetig, aber nicht glatt beim Übergang über eine der Domänenwände.

Alle Defekte können durch Sphären S^2 um den Ursprung eingeschlossen werden, die beiden Punktdefekte durch jeweils eine, die Domänenwände durch jeweils zwei. Im folgenden wechseln wir daher zu sphärischen Koordinaten $\boldsymbol{x} \to (r, \vartheta, \varphi)$. Jede zusammenhängende Region von M_ε kann dann durch jeweils zwei Karten $\mathsf{X}_\pm$ überdeckt werden, deren Schnitte mit den Einhüllenden Sphären S^2 jeweils die südliche (S^2_-) bzw. nördliche (S^2_+) Hemisphäre ergeben. In jeder dieser kontrahierbaren Karten existiert eine glatte Diagonalisierungsmatrix $V_\pm(r, \vartheta, \varphi)$.

Mit der glatten Profilfunktion $\tilde{\chi}(r) = \chi(r)$ (Abb. 3.3a) kann der hedgehog $P(\boldsymbol{x})$ für alle r durch dasselbe Paar von Matrizen $V_\pm$ diagonalisiert werden. Eine explizite Form ist [Rei97b]

$$V_+(\boldsymbol{x}) = \exp\left(-\vartheta\, \boldsymbol{e}_\varphi \boldsymbol{T}\right) , \quad V_-(\boldsymbol{x}) = h_\pm(\boldsymbol{x}) V_+(\boldsymbol{x}) , \quad h_\pm(\boldsymbol{x}) = \exp(-2\varphi T^3) . \tag{3.64}$$

Dabei ist die Übergangsfunktion $h_\pm$ auf dem Überlapp der beiden Hemisphären, dem Äquator S^1 mit $\vartheta = \pi/2$, definiert. Nun können wir den Magnetfluß

des abelschen Eichpotentials $\mathcal{A}^3_\pm = (V_\pm \, \mathrm{d}V_\pm^\dagger)^3$ berechnen. Das Magnetfeld zeigt immer nach außen in Richtung $r = \infty$. Jeder einhüllenden Sphäre um den Ursprung kommt dann eine magnetische Ladung (3.56)

$$m = -\frac{1}{4\pi} \sum_\pm \int\limits_{S^2_\pm} \mathrm{d}\mathcal{A}^3_\pm = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{S^2_+ \cap S^2_-} (\mathcal{A}^3_+ - \mathcal{A}^3_-) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{S^1} \mathrm{d}\varphi = \pm 1 \qquad (3.65)$$

zu. Das Vorzeichen dieser Ladung wird bestimmt durch die Orientierung des Schnittes $\mathsf{X}_\alpha \cap \mathsf{D}_i^\varepsilon$. Diese ist entgegengesetzt zur Orientierung der einhüllenden Oberfläche. Wenn also $\partial\mathsf{D}_i^\varepsilon$ den Defekt von außen umschließt (näher bei unendlich ist als der Defekt) zeigt die Orientierung von $\mathsf{X}_\alpha \cap \mathsf{D}_i^\varepsilon$ in die Richtung des Magnetfeldes und der Defekt trägt eine magnetische Ladung $(+1)$. Eine einhüllende Oberfläche, die näher am Ursprung ist als der entsprechende Defekt, trägt dagegen eine Ladung (-1). Diese Situation ist in Abbildung 3.4a dargestellt. Für die glatte Wahl der Profilfunktion $\tilde{\chi}(r) = \chi(r)$ heben sich die Beiträge der beiden Einhüllenden einer Domänenwand auf und die Domänenwände tragen effektiv nicht zur Windungszahl bzw. zum Pontryagin-Index bei. Der Pontryagin-Index wird vollständig durch die beiden Monopole bei $r = 0$ und $r = \infty$ bestimmt. Wegen $n_0 = 0$ trägt sogar nur der Monopol im Unendlichen bei. Setzt man die magnetische Ladung $m_\infty = -1$ dieses Monopols und $n_\infty = n[P]$ in die Formel (3.57) ein, erhält man die korrekte Windungszahl $n[P]$.

Betrachten wir nun die alternative Profilfunktion $\tilde{\chi}(r)$, die auf eine Weyl-Alkove $[0, \pi]$ eingeschränkt ist (Abb. 3.3b). Um diese Einschränkung zu erreichen, müssen die Diagonalisierungsmatrizen $V_\pm$ (3.64) beim Übergang über eine Domänenwand mit einer Weyl-Reflexion transformiert werden. Durch die Weyl-Reflexion dreht sich die Richtung des Magnetfeldes in der betroffenen Region um. Die Orientierung der Einhüllenden ist immer noch durch einen Normalenvektor in Richtung des Defekts gegeben. Da nur noch $n_i = 0, 1$ auftreten, tragen nur noch $(-\mathbb{1})$-Defekte bei. Diese Situation ist für $n = 3$ in Abbildung 3.4b dargestellt: Der $(+\mathbb{1})$-Defekt im Zentrum trägt nicht zur Windungszahl bei. Die erste Domänenwand ist ein $(-\mathbb{1})$-Defekt. Die Orientierung der inneren Einhüllenden zeigt in die gleiche Richtung wie das Magnetfeld. Wie oben erklärt, trägt sie daher magnetische Ladung $m_{\mathrm{in}} = -1$. Jetzt zeigt aber die Orientierung der äußeren Einhüllenden ebenfalls in Richtung des Magnetfeldes, das sich durch die Weyl-Reflexion umgedreht hat. Also trägt auch sie Ladung $m_{\mathrm{out}} = -1$. Insgesamt trägt die Domänenwand also mit der Ladung $m = -2$ zur Windungszahl bei. Die nächste Wand ist wieder ein $(+\mathbb{1})$-Defekt und trägt nicht bei. Sie trägt aber magnetische Ladung $+2$ und dreht das Magnetfeld zurück in die ursprüngliche Richtung nach außen. Der Monopol im Unendlichen ist wieder ein $(-\mathbb{1})$-Defekt und trägt offenbar

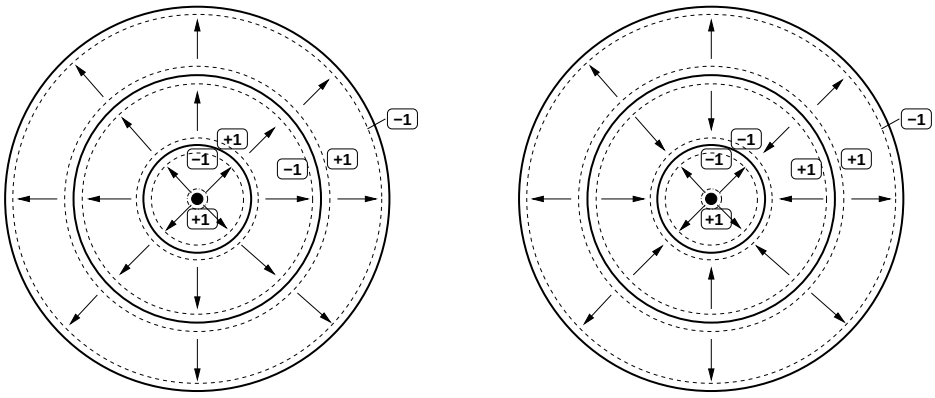


Abb. 3.4: Schnitt durch den $n = 3$ hedgehog mit (a) glatter Profilfunktion für $p(\boldsymbol{x})$ und mit (b) auf eine Weyl-Alkove eingeschränkter Profilfunktion für $p(\boldsymbol{x})$. Durchgezogene Kreise stellen Wanddefekte dar (bzw. der äußerste den Monopoldefekt im Unendlichen). Im Ursprung sitzt ein Punktdefekt. Gestrichelt sind die einhüllenden Oberflächen eingezeichnet. Die Zahlen in den Kästchen geben ihre jeweilige magnetsiche Ladung an. Sie sind bestimmt durch die Magnetfeldrichtung (Pfeile) und die zum Defekt gerichtete Orientierung der einhüllenden Oberflächen.

Ladung $m = -1$. Insgesamt finden wir also mit Formel (3.58) wieder das korrekte Resultat $n[P] = -((-2) + (-1)) = 3$. In dieser Formulierung ist es also wichtig, nicht nur die Punktdefekte zu berücksichtigen, sondern auch die Domänenwände.

3.4 Zusammenfassung und Ausblick

In diesem Kapitel, das im wesentlichen auf [QRS99] beruht, haben wir die topologische Ladung (Pontryagin-Index) von Yang-Mills-Feldern in der Polyakov-Eichung untersucht. Diese ist identisch mit der Windungszahl $n[P]$ des Polyakov-Loop-Operators. Wir haben gefunden, daß die magnetischen Ladungen der Defekte allein für die gesamte Windungszahl $n[P]$ verantwortlich sind.

Dabei haben wir gesehen, daß es entscheidend auf die Wahl der Weyl-Alkoven in den einzelnen durch Wanddefekte getrennten Regionen ankommt. Durch

diese Wahl werden die Faktoren n_i im Endresultat (3.57) und auch die Richtung des Magnetfeldes bestimmt. Sie bestimmen daher, welche Defekte effektiv zur Windungszahl beitragen und welche nicht.

Die obigen Resultate wurden in Polyakov-Eichung erzielt. Diese ist besonders einfach, da hier alle Defekte statisch sind. Auch für allgemeine abelsche Eichungen erwartet man jedoch einen Zusammenhang zwischen topologischer Ladung und den Defekten. Tatsächlich wurde in [Jah00] eine Beziehung zwischen Pontryagin-Index und einer verallgemeinerten Hopf-Invariante[5] der Monopole abgeleitet. Ebenso wurde in Gitterrechnungen für verschiedene abelsche Eichungen eine Übereinstimmung der Weltlinien von magnetischen Monopolen mit einer lokal erhöhten topologischen Ladungsdichte festgestellt [ITMM00].

Topologische Eigenschaften der Yang-Mills-Theorie, die sonst allgemein den Instantonen zugeschrieben werden, können auch durch farbmagnetische Monopole erklärt werden. Das zeigt der abgeleitete Zusammenhang zwischen Pontryagin-Index und Monopolen. In Hinblick auf den Zusammenhang der chiralen Symmetriebrechung mit Instantonen [CDG78], und daher mit einem nichtverschwindenden Pontryagin-Index, bieten magnetische Monopole eventuell die Möglichkeit, verschiedene nichtperturbative Phänomene (chirale Symmetriebrechung, Confinement) in einem einheitlichen Bild zu beschreiben.

[5] Die verallgemeinerte Hopf-Invariante charakterisiert Abbildungen $\hat{\phi} : S^2 \times S^1 \to S^2$.

Kapitel 4

Dimensionale Reduktion: Vortizes in drei Dimensionen

In Abschnitt 2.5 haben wir das Confinement-Modell der Vortexperkolation kennengelernt. Gitterrechnungen sprechen dafür, daß es für die P-Vortizes, die nach maximaler Zentrumseichung und -projektion entstehen, realisiert ist. In einem dreidimensionalen Schnitt durch das vierdimensionale Gitter beobachtet man P-Vortizes als geschlossene Linien aus (-1)-Plaquetten. Gittermessungen [ELRT00] haben bestätigt, daß auch an den P-Vortizes in einem Schnitt durch das Gitter mit einer konstant gehaltenen Raumkoordinate ein Phasenübergang bei Änderung der Temperatur beobachtet werden kann. Bei niedrigen Temperaturen liegt eine Phase von durch das ganze Gitter perkolierenden Vortexloops vor, während bei hohen Temperaturen viele kleine Vortexloops beobachtet werden. Die kritische Temperatur T_{krit} dieses Phasenübergangs stimmt mit der kritischen Temperatur des Confinement-Phasenübergangs überein. Das legt einen Zusammenhang zwischen Vortexperkolation und Confinement nahe. Tatsächlich kann man diesen Zusammenhang in einem einfachen Random Vortex Modell verstehen, vgl. Abschnitt 2.5.2.

In diesem Kapitel wollen wir uns nun nicht mit der vierdimensionalen Yang-Mills-Theorie in der Confinement-Phase, sondern mit dem Hochtemperaturverhalten der Theorie beschäftigen. Ohne Confinement erwartet man hier ein Plasma aus farbigen Quarks und Gluonen. Experimentell soll dieses Quark-Gluon-Plasma bald am RHIC und am LHC durch Kollisionen schwerer Kerne erzeugt werden. Um Ergebnisse dieser Experimente deuten zu können, ist ein detailliertes Verständnis der Hochtemperaturphase der Yang-Mills-Theorie erforderlich.

4.1 Dimensionale Reduktion

Um Yang-Mills-Theorien bei endlichen Temperaturen zu studieren, betrachtet man eine Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit mit kompaktifizierter Zeitrichtung.[1] Die Temperatur T ist dann das Inverse der endlichen Zeitausdehnung, $L_0 = 1/T$. Für Gitterrechnungen wählt man ein asymmetrisches Gitter mit $N_0 \ll N_i$. Dabei sollte $L_i = N_i a$ wesentlich größer gewählt werden als die charakteristische Länge der betrachteten Observable, um Effekte durch die endliche Gitterausdehnung zu vermeiden. Im Gegensatz dazu sollte $L_0 = N_0 a$ von der gleichen Größenordnung wie die charakteristische Länge sein, damit die Observable die endliche Temperatur spürt. Für die Temperatur ergibt sich

$$T = \frac{1}{L_0} = \frac{1}{a(\beta) N_0} \,. \tag{4.1}$$

Die Temperatur kann also sowohl mit dem Kopplungsparameter β (höheres $\beta \Rightarrow$ höhere Temperatur) als auch mit der zeitlichen Gitterausdehnung N_0 variiert werden.

Bei hohen Temperaturen wird die zeitliche Ausdehnung L_0 offenbar beliebig klein. Schon Anfang der 80er Jahre kam daher die Idee auf [AP81], daß sich die vierdimensionale Yang-Mills-Theorie bei hohen Temperaturen effektiv auf die entsprechende dreidimensionale Theorie gekoppelt an ein adjungiertes Higgs-Feld reduziert ([LMR92], [KLMPR94]). Das adjungierte Higgs-Feld entspricht dabei der Zeitkomponente des Eichpotentials $A_0(x)$ in der ursprünglichen vierdimensionalen Theorie. Unter der Annahme, daß nichtstatische Moden den Hochtemperaturlimes nicht überleben [AP81], wird die Zeitintegration zur Multiplikation mit der inversen Temperatur $L_0 = 1/T$, und wir finden zunächst für die Wirkung der dreidimensionalen Theorie

$$S_{\mathrm{YM3}} + S_{\mathrm{adj}} = -\frac{1}{2g_3^2} \int \mathrm{d}^3x \ \mathrm{tr}\,(F_{ij}F_{ij}) - \frac{1}{g_3^2} \int \mathrm{d}^3x \ \mathrm{tr}\,([D_i, A_0]^2)\,, \tag{4.2}$$

mit $g_3^2 = T g^2(T)$ wobei $g(T)$ die Kopplung der vierdimensionalen Theorie bezeichnet. Geht man etwas sorgfältiger vor und integriert die nicht-statischen Moden in 1-Loop-Näherung aus, entstehen zusätzlich ein Massenterm für das Feld A_0 und eine quartische Selbstwechselwirkung[2] [Lan89]

$$S_{\mathrm{int}} = -\frac{1}{g_3^2} \int \mathrm{d}^3x \left(m^2 \,\mathrm{tr}\,(A_0^2) + \lambda \,\mathrm{tr}\,(A_0^2)^2 \right). \tag{4.3}$$

[1] Dieser Zusammenhang folgt aus der Analogie der Euklidischen Yang-Mills-Theorie zur statistischen Mechanik ([Ber74], oder z.B. [Das97]).

[2] Höherdimensionale und nicht-lokale Operatoren wurden vernachlässigt.

Die 2-Loop-Korrekturen zu diesem Ergebnis äußern sich in kleinen Änderungen der Parameter g_3,m und λ [KLRS97], z.B.

$$g_3^2 = Tg^2(T) \cdot (1 + \mathcal{O}(g^4)) \,. \tag{4.4}$$

Aus diesen störungstheoretischen Überlegungen können wir einen nichtperturbativen Ansatz für eine effektive Theorie bei hohen Temperaturen gewinnen. Wir wählen $S_{\text{eff}}(g_3, m, \lambda) = S_{\text{YM3}}(g_3) + S_{\text{adj}}(g_3) + S_{\text{int}}(g_3, m, \lambda)$, benutzen aber g_3,m und λ in numerischen Simulationen (Gitterrechnungen) als Fit-Parameter an die vierdimensionale Theorie. Auf diese Weise findet man, daß die durch dimensionale Reduktion entstehende dreidimensionale effektive Theorie in ihrer Confinement-Phase vorliegt [KLMPR94], also eine von Null verschiedene string tension σ_3 besitzt.[3]

Gitterrechnungen zeigen ebenso, daß die räumliche string tension (gemessen mit rein räumlichen Wilson-Loops) $\sigma_{\text{s}}(T)$ in vier Dimensionen mit der Kopplung g_3^4 der effektiven dimensional reduzierten Theorie skaliert ([BFHKS93], [BSFHK93]),

$$\sigma_{\text{s}}(T) = c \cdot g_3^4 = c \cdot g^4(T)T^2 \,, \quad c = 0.136 \pm 0.011 \,, \tag{4.5}$$

wie man es aus (4.4) erwartet. Eine ähnliche Beobachtung haben wir schon in Abschnitt 2.5 erwähnt. Betrachtet man Schnitte bei konstanter Zeit durch das vierdimensionale Gitter, so perkolieren die entsprechenden Vortexloops auch für Temperaturen oberhalb T_{krit} [ELRT00]. Die nach Zentrumsprojektion aus den Vortexkonfigurationen berechnete räumliche string tension steigt mit wachsender Temperatur an, wie man es nach (4.5) erwartet. Die dimensionale Reduktion der Yang-Mills-Theorie bei hohen Temperaturen ist also mit dem Vortexbild, wie man es durch maximale Zentrumseichung und -projektion erhält, konsistent.

Dazu muß allerdings noch gezeigt werden, daß in der dimensional reduzierten Theorie (Yang-Mills-Theorie gekoppelt an adjungiertes Higgs-Feld in $D = 3$) entsprechende P-Vortizes mit einer physikalischen Flächendichte[4] existieren. Weiterhin müssen diese die volle string tension σ_3 reproduzieren. Diese Problemstellung wurde von uns in [GLSR00] untersucht und soll im folgenden dargestellt werden.

[3] Um in der dreidimensionalen Theorie von string tension und Confinement sprechen zu können, muß eine Dimension als Zeit interpretiert werden.

[4] Eine Flächendichte bezeichnet man als physikalisch, wenn sie in Einheiten des Gitterabstandes a im Limes $a \to 0$ wie a^2 skaliert und daher gegen einen festen endlichen Wert strebt.

4.2 Zentrumsprojektion und Vortizes bei hohen Temperaturen

In Abschnitt 2.5.3 haben wir die maximale Zentrumseichung kennengelernt. Durch die Eichbedingung (2.118) werden die Linkvariablen $U_{x,\mu}$ durch Wahl einer Eichtransformation Ω_x so nahe wie möglich an ein Element aus dem Zentrum $\mathbb{Z}_2 = \{\pm\mathbb{1}\}$ der Eichgruppe $SU(2)$ gebracht. Nach Fixierung der maximalen Zentrumseichung erfolgt eine Projektion (2.117) auf das Zentrum. Vortizes werden dann durch negative Plaquetten in der projizierten Theorie identifiziert.

Wir wollen nun einen Zusammenhang zwischen den Vortexflächen in der vierdimensionalen $SU(2)$ Theorie bei hohen Temperaturen und den Vortexloops der dimensional reduzierten dreidimensionalen Theorie herstellen. Dazu sehen wir uns zunächst an, wie die Eichbedingung (2.118) für einen Schnitt durch das Gitter bei konstanter Zeit $x = (x_0 = \text{const}, \boldsymbol{x})$ und damit für zeitunabhängige Eichtransformationen $\Omega_{\boldsymbol{x}}$ aussieht. Wir zerlegen (2.118) als

$$S_{\text{fix}}[U] = \frac{1}{4n_{L_\text{s}}} \sum_{x,k} \left(\text{tr}\,(U_{x,k}) \right)^2 + \frac{1}{4n_{L_\text{t}}} \sum_{x} \left(\text{tr}\,(U_{x,0}) \right)^2 , \quad k = 1 \ldots 3 . \tag{4.6}$$

Der zweite Summand spielt keine Rolle für die Eichfixierung, da $\text{tr}\,(U_{x,0})$ invariant unter zeitunabhängigen Eichtransformationen ist. Die Eichbedingung auf dem Schnitt bei konstanter Zeit entspricht daher genau der Eichbedingung für maximale Zentrumseichung, die man in einer dreidimensionalen Theorie $x = \boldsymbol{x}$ stellen würde,

$$S'_{\text{fix}}[U] = \frac{1}{4n_L} \sum_{x,k} \left(\text{tr}\,(U_{x,k}) \right)^2 , \quad S'_{\text{fix}}[U^\Omega] \xrightarrow{\Omega} \max , \quad k = 1 \ldots 3 . \tag{4.7}$$

Die Vortexloops, die bei Zentrumsprojektion der dimensional reduzierten Theorie in drei Dimensionen entstehen, entsprechen daher genau den Vortexloops der ursprünglichen Theorie (bei hohen Temperaturen) in einem Schnitt durch das Gitter bei konstanter Zeit.

4.3 Reine $SU(2)$ Yang-Mills-Theorie in drei Dimensionen

In einem ersten Schritt wollen wir die Kopplung an das adjungierte Higgs-Feld $A_{x,0}$ ganz vernachlässigen und die reine $SU(2)$ Yang-Mills-Theorie in

drei Dimensionen betrachten. Auch wenn diese nur eine Näherung der dimensional reduzierten Theorie darstellt, können wir unabhängig davon die Frage nach dem Confinement-Mechanismus in dieser Theorie stellen.[5] Insbesondere können wir analog zu den Betrachtungen in vier Dimensionen ([DFGO97], [LRT98], [LTER99]) die Relevanz von P-Vortizes untersuchen. Dazu betrachten wir die Gitterversion der superrenormierbaren dreidimensionalen Yang-Mills-Theorie mit Wilson-Wirkung (2.52). Einziger Parameter der Gittertheorie ist der dimensionsbehaftete Gitterkopplungsparameter β. Aus einem Vergleich mit der Kontinuumswirkung folgt für den Gitterabstand als Funktion von β

$$a = \frac{4}{g_3^2 \beta}\,. \tag{4.8}$$

Für unsere Simulationen benutzen wir ein 20^3 Gitter. Um den Effekt des praktischen Gribov-Problems[6] bei Fixierung der maximalen Zentrumseichung zu reduzieren, unternehmen wir jeweils drei Versuche, das globale Maximum von (4.7) zu finden.

Durch Berechnung der Creutz ratios (2.82) in der vollen und der zentrumsprojizierten Version der dreidimensionalen Theorie erhalten wir Meßwerte für die jeweilige erste Ableitung des Potentials. Die Daten für $\beta \in [3.0, 11.0]$ sind in Abbildung 4.1 dargestellt. Vergleich mit dem Ansatz $V'(r) = \sigma_3 + \alpha/r$ liefert für die volle Theorie

$$\sigma_3 = 0.11 g_3^4\,. \tag{4.9}$$

Dieser Wert ist in guter Übereinstimmung mit den in [Tep99] durchgeführten Monte-Carlo-Simulationen. Diese lieferten durch Messung der Korrelationen von Polyakov-Loops[7]

$$\sigma_3 a^2 = \frac{1.788}{\beta^2}\left(1 + \frac{1.414}{\beta} + \ldots\right) \overset{(4.8)}{\approx} 0.112 g_3^4 a^2\,, \quad \beta \geq 3\,. \tag{4.10}$$

Das Ergebnis für die string tension σ_3 unterscheidet sich nicht wesentlich von dem Wert der räumlichen string tension σ_s in vier Dimensionen (4.5). Rein räumliche Wilson-Loops scheinen also von der dreidimensionalen Yang-Mills-Theorie dominiert zu sein. Im Gegensatz dazu hängt das Potential zwischen

[5] Um in der dreidimensionalen Theorie von Confinement sprechen zu können, muß natürlich eine Dimension als Zeit interpretiert werden.

[6] Bei jeder Eichfixierung auf dem Gitter, die durch Minimieren (bzw. Maximieren) eines Funktionals definiert ist, kann sich der numerische Algorithmus in einem lokalen Extremum verfangen, anstatt das globale Extremum zu finden. In Analogie zum Gribov-Problem, das die Existenz mehrerer globalen Extrema beschreibt, nennt man dieses numerische Phänomen *praktisches* Gribov-Problem.

[7] Analog zur Definition (2.77) des Potentials $V(R)$ über Wilson-Loop-Erwartungswerte, kann man auch die Korrelationen zweier Polyakov-Loops im Abstand R betrachten.

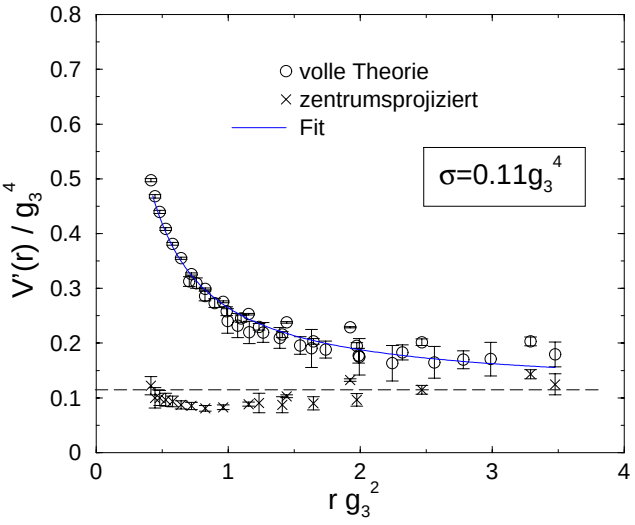


Abb. 4.1: Ableitung des Potentials zwischen statischen Quarks für die volle dreidimensionale Yang-Mills-Theorie und nach Zentrumsprojektion.

statischen Quarks und die damit verbundene string tension im Hochtemperaturbereich der vierdimensionalen Theorie deutlich von der Zeitkomponente A_0 des Eichpotentials ab und wird daher in der effektiven dreidimensionalen Theorie durch Korrelationen des adjungierten Higgs-Feldes bestimmt [LMR92].

Wenden wir uns nun der zentrumsprojizierten Theorie zu. Im Limes großer Abstände stimmen die Meßwerte mit denen der vollen Theorie überein (vgl. Abb. 4.1). Die string tension σ_3 wird von der zentrumsprojizierten Theorie im Rahmen der Fehlerbalken reproduziert, während sich das Coulomb-Verhalten, das die volle Theorie bei kleinen Abständen zeigt, durch die Projektion drastisch ändert. Qualitativ ist das identisch mit den Resultaten in vier Dimensionen [DFGO97]. Wir haben also auch in drei Dimensionen deutliche Anzeichen einer Zentrumsdominanz. Das Zentrum der Eichgruppe $SU(2)$ ist in maximaler Zentrumseichung auch hier Kandidat für die Confinement-relevanten Freiheitsgrade.

Die einzigen Freiheitsgrade der zentrumsprojizierten Theorie sind die P-Vortizes. Ein P-Vortex wird wieder dadurch identifiziert, daß eine von ihm durchstoßene Plaquette aus $\mathbb{Z}_2$-Linkvariablen den Wert -1 trägt. Die Vortizes werden also durch Links des dualen Gitters gebildet. Eine einfache Überlegung, die formal der Bianchi-Identität entspricht, zeigt, daß die Vortizes

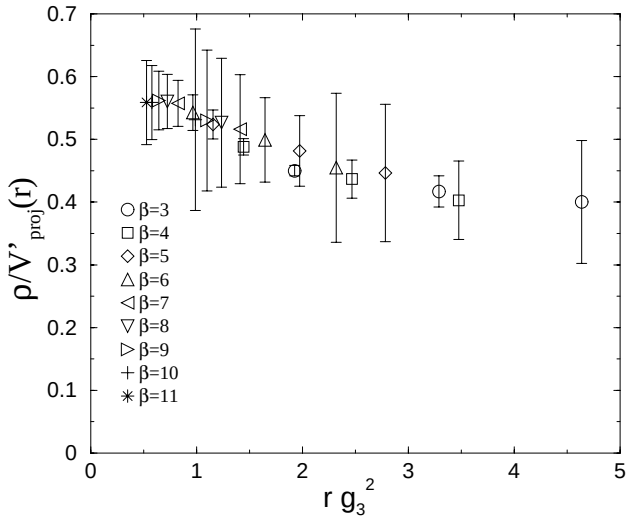


Abb. 4.2: Das Verhältnis der Vortexflächendichte ρ und der Ableitung des zentrumsprojizierten Potentials zwischen statischen Quarks in dreidimensionaler Yang-Mills-Theorie für verschiedene Werte des Kopplungsparameters β.

geschlossene Linien im dreidimensionalen Gitter bilden. Eine (dimensionslose) Vortex(flächen)dichte $\hat{\rho}$ ist dann durch den Anteil negativer Plaquetten definiert. Um aus der Beobachtung der Zentrumsdominanz ein Modell für Confinement zu erhalten, bleibt noch zu untersuchen, ob den Vortizes der projizierten Theorie physikalische Objekte in der vollen Kontinuumstheorie entsprechen. Wichtiges Indiz dafür wäre ein Skalieren der Vortexdichte in Einheiten des Gitterabstands $\hat{\rho} = \rho a^2$ gemäß (4.8) im Kontinuumslimes $a \to 0$ bzw. $\beta \to \infty$. Dadurch wäre eine physikalische Vortexdichte ρ im Kontinuum bestimmt. Entsprechend erwarten wir für große[8] r konstante Meßwerte für das Verhältnis $\hat{\rho}/\hat{V}'_{\mathrm{proj}}(r) = \rho/V'_{\mathrm{proj}}(r)$. Unsere Gitterresultate sind in Abbildung 4.2 dargestellt.

Nach einem leicht abfallendem Verhalten für kleine Abstände r, das mit dem leichten Anstieg von $V'_{\mathrm{proj}}(r)$ in Abbildung 4.1 konsistent ist, strebt das Verhältnis $\rho/V'_{\mathrm{proj}}(r)$ für $rg_3^2 > 3$ gegen einen konstanten Wert. Unser Ergebnis spricht also für eine endliche Vortexdichte im Kontinuumslimes. Zum Vergleich finden wir in der vierdimensionalen Theorie bei Temperatur $T \approx 2T_{\mathrm{krit}}$ für die räumliche Vortexdichte [LTER99] im Verhältnis zur räumlichen string tension [BFHKS93] das Verhältnis $\rho_{\mathrm{s}}/\sigma_{\mathrm{s}} \approx 0.33$. Innerhalb der

[8] Es sollte gelten $rg_3^2 = \frac{r}{a}\frac{4}{\beta} > 3$ damit $V'_{\mathrm{proj}}(r) \approx \sigma_3$, vgl. Abb. 4.1.

Fehlerbalken stimmt das mit unserem Ergebnis für die dreidimensionale reine Yang-Mills-Theorie überein.

In Abschnitt 2.5.2 haben wir gesehen, daß das Verhältnis ρ/σ etwas darüber aussagt, ob Korrelationen zwischen den Vortexdurchstoßpunkten vorliegen. Für das Random Vortex Modell haben wir $\rho/\sigma = 0.5$ gefunden. Die in Abbildung 4.2 gemessene geringere Dichte deutet eventuell auf abstoßende Korrelationen zwischen den Vortizes hin. Im Gegensatz dazu findet man [LTER99] in der vierdimensionalen Yang-Mills-Theorie ($T = 0$) ein Verhältnis $\rho/\sigma \approx 0.7$ und damit eher einen Hinweis auf attraktive Korrelationen, wie sie auch in [ELRT98] gemessen wurden.

4.4 $SU(2)$ Yang-Mills-Theorie mit adjungiertem Higgs-Feld in 3 Dimensionen

In einem zweiten Schritt schalten wir nun die Kopplung an das adjungierte Higgs-Feld $A_0(x)$ ein. Um die Gitterwirkung der effektiven dimensional reduzierten Theorie zu konstruieren, wird die Integration über die Linkvariablen in Zeitrichtung $U_{x,0} = \exp(-\phi_x)$ ersetzt durch eine Integration über das zugehörige Feld $\phi_x = \phi_x^a T^a$, das in der Algebra $\mathfrak{su}(2)$ der Eichgruppe lebt. Im Kontinuum entspricht ϕ_x das Higgs-Feld $A_0(x)$, die ehemalige Zeitkomponente des vierdimensionalen Eichpotentials. Bei dieser Ersetzung wird der Zentrumsgehalts von $U_{x,0}$ nicht berücksichtigt, was zunächt im Widerspruch zum Vortexbild von Abschnitt 2.5 zu stehen scheint. Gitterrechnungen ([LTER99], [ELRT00]) zeigen jedoch, daß für Temperaturen oberhalb T_{krit} in einem Schnitt durch das Gitter mit einer konstanten Raumkoordinate vorwiegend sehr kleine Vortexloops existieren, die sich aufgrund der geringen zeitlichen Gittergröße und ihrer endlichen Dicke i.a. in Zeitrichtung über die periodischen Randbedingungen schließen. Im Limes unendlich hoher Temperatur werden die Vortexloops zu geraden Linien entlang der Zeitrichtung. Plaquetten mit einer Zeit- und einer Raumrichtung können nicht von diesen durchstoßen werden. Daher ist das Vortexbild konsistent mit einer Vernachlässigung des Zentrumsgehaltes von $U_{x,0}$.

Entsprechend (4.2) und (4.3) wird die Wilson-Wirkung $S_{\text{YM3}}[U]$ (2.52) der reinen $SU(2)$ Yang-Mills-Theorie nun durch einen Kopplungsterm

$$S_{\text{adj}}[U,\phi] = 2\beta \sum_{x,k} \text{tr}\,(\phi_x\, U_{x,k}^{\dagger}\, \phi_{x+\hat{k}}\, U_{x,k}) \tag{4.11}$$

	T/T_{krit}	β_4	β	h	κ
Set 1	2.0	2.50	12.25	-0.30	0.106
Set 2	3.5	2.80	13.54	-0.26	0.094
Set 3	6.0	3.00	14.48	-0.24	0.086

Tab. 4.1: Parametersets einer effektiven dimensional reduzierten Theorie auf einem 24^3 Gitter, entnommen aus [LMR92].

und zwei Selbstwechselwirkungsterme

$$S_{\text{int}}[\phi] = -2\beta \sum_x \left(\left(3 + \frac{h}{2}\right) \text{tr}\,(\phi_x^2) + \kappa (\,\text{tr}\,(\phi_x^2))^2 \right) \tag{4.12}$$

zu einer effektiven Wirkung $S_{\text{eff}} = S_{\text{YM3}} + S_{\text{adj}} + S_{\text{int}}$ ergänzt. Dabei ist h ein (dimensionsloser) Massenparameter und $\kappa = \lambda/g_3^2$, vgl. (4.3). Das erzeugende Funktional ist durch

$$Z_{\text{eff}} = \int \mathcal{D}U\, \mathcal{D}\phi\, \exp(-S_{\text{eff}}[U, \phi]) \tag{4.13}$$

gegeben. Die Integration über die Linkvariablen U des dreidimensionalen Gitters berücksichtigt das Haarmaß der Gruppe, vgl. (2.64), während die Integration über das algebrawertige ϕ mit einem flachen Maß ausgeführt wird. Die Parameter β, h und κ werden aus einem numerischen Vergleich der effektiven Theorie mit der vollen vierdimensionalen Yang-Mills-Theorie bei Temperatur $T > T_{\text{krit}}$ gewonnen. Die von uns verwendeten Werte in Tabelle 4.1 sind [LMR92] entnommen.

Startend bei einer vierdimensionalen Yang-Mills-Theorie bei hohen Temperaturen haben wir eine effektive Theorie auf dem räumlichen Teil des vierdimensionalen Gitters formuliert, die auch als Feldtheorie in drei Dimensionen angesehen werden kann. Das dabei zusätzlich zu den $SU(2)$-Eichfeldern auftretende Higgs-Feld ϕ_x erinnert an die aufgegebene zeitliche Dimension. Die eingefrorene Zeitabhängigkeit der Felder spiegelt sich in den Parametern der effektiven Theorie wider. Entsprechend kann die string tension σ_{red} der effektiven dimensional reduzierten Theorie mit der räumlichen string tension σ_{s} der vierdimensionalen Theorie bei hohen Temperaturen identifiziert werden.

In der effektiven dreidimensionalen Gittertheorie (4.13) mit Parametersets aus Tabelle 4.1 können wir nun die Creutz ratios (2.82) berechnen, die uns die Ableitung des Potentials zwischen statischen Quarks liefern. Für große Abstände r sollte die Ableitung einen konstanten Wert annehmen, durch den die string tension σ_{red} bestimmt ist. Die Resultate dieser Messung für die volle

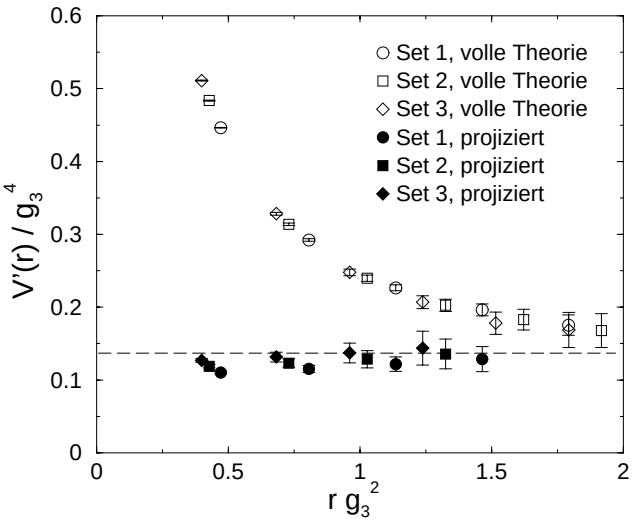


Abb. 4.3: Ableitung des Potentials zwischen statischen Quarks für die effektive dimensional reduzierte Theorie (4.13) und nach Zentrumsprojektion derselben.

effektive Theorie und nach maximaler Zentrumseichung und -projektion sind in Abbildung 4.3 dargestellt.

Die resultierenden Werte für die string tension $\sigma_{\rm red}$ mit und ohne Zentrumsprojektion stimmen miteinander überein und sind weiterhin konsistent mit dem asymptotischen Wert (4.5) der räumlichen string tension $\sigma_{\rm s}$ der vierdimensionalen Theorie bei hohen Temperaturen. Ein Vergleich mit den Resultaten der dreidimensionalen reinen Yang-Mills-Theorie, Abb. 4.1, zeigt, daß das adjungierte Higgs-Feld nur kleine Korrekturen zum Potential zwischen statischen Quarks liefert.

Schließlich haben wir auch für die dimensional reduzierte Theorie (4.13) das Verhältnis zwischen Vortex(flächen)dichte und Ableitung des Potentials zwischen statischen Quarks ($=\sigma_{\rm red}$ für genügend große Abstände r) für die Parametersets in Tabelle 4.1 gemessen. Das Resultat ist in Abbildung 4.4 dargestellt. Vergleicht man die Skala der horizontalen Achse mit der entsprechenden Abbildung 4.2 für die dreidimensionale reine Yang-Mills-Theorie, liegt die Schlußfolgerung nahe, daß das Verhältnis für die gewählten Parametersets noch nicht seinen asymptotischen Wert erreicht hat. Um $rg_3^2 = \frac{4r}{a\beta} > 3$ zu erreichen, müßte z.B. β kleiner gewählt werden. Zur Bestimmung der Parameter der effektiven dreidimensionalen Theorie benötigt man aber ein vierdimensionales Gitter, bei dem $\beta_4 \approx \beta/N_0$ innerhalb des scaling windows liegt

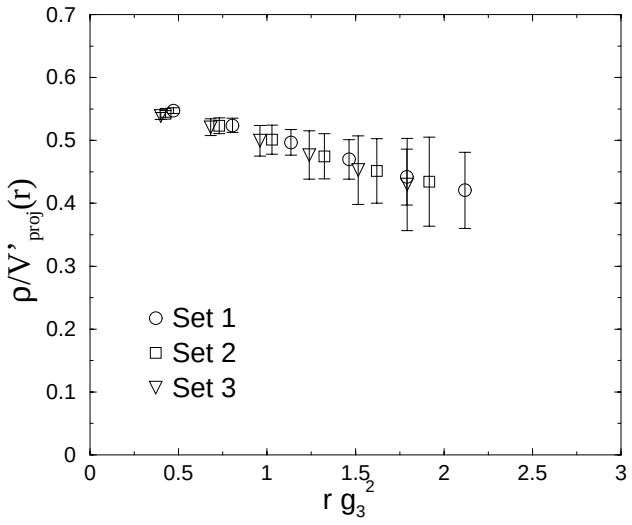


Abb. 4.4: Verhältnis zwischen Vortex(flächen)dichte und Ableitung des Potentials zwischen statischen Quarks ($= \sigma_{\mathrm{red}}$ für genügend große Abstände r) für die Parametersets der dimensional reduzierten Theorie in Tabelle 4.1. Offenbar sind die Werte von r zu klein, um den asymptotischen Wert des Verhältnisses zu erkennen.

und die Temperatur über der des Deconfinement-Phasenübergangs. Auf diese Weise sind die Werte für β nach unten durch die endliche Größe des vierdimensionalen Gitters beschränkt. Ebenso sind die möglichen Werte für r/a nach oben durch die endliche Größe des dreidimensionalen Gitters begrenzt.

4.5 Zusammenfassung und Ausblick

Wir haben in diesem Kapitel gezeigt, daß in drei Dimensionen sowohl in einer reinen $SU(2)$ Yang-Mills-Theorie, als auch in einer dimensional reduzierten Theorie (4.13) mit einem zusätzlichen adjungierten Higgs-Feld, die Eigenschaft des Confinement in der maximalen Zentrumseichung (4.7) von den Freiheitsgraden (P-Vortizes), die nach Zentrumsprojektion der Theorie verbleiben, allein bestimmt wird.

Die durch (4.13) definierte Theorie stellt eine effektive dimensional reduzierte Theorie der vierdimensionalen Yang-Mills-Theorie bei hohen Temperaturen dar. Wir konnten den Vortexgehalt dieser dreidimensionalen effektiven Theorie mit dem Vortexgehalts eines Schnittes durch das vierdimensionale Git-

ter bei konstanter Zeit identifizieren. Unsere Ergebnisse unterstützen daher das Vortexbild der Hochtemperaturphase der vierdimensionalen Yang-Mills-Theorie [ELRT00]: Betrachtet man die P-Vortizes dieser Theorie in einem Schnitt durch das Gitter mit einer konstanten Raumkoordinate, so hören sie oberhalb der Temperatur T_{krit} des Deconfinement-Phasenübergangs auf, in dem betrachteten dreidimensionalen Volumen zu perkolieren. Sie bilden i.a. kleine Vortexloops, die sich in Zeitrichtung über die periodischen Randbedingungen schließen. Im Gegensatz dazu perkolieren die Vortexloops, die man bei Betrachtung eines Schnittes bei konstanter Zeit findet, bei allen Temperaturen. Diese perkolierenden Vortexloops sind in maximaler Zentrumseichung verantwortlich für das Confinement der dimensional reduzierten Theorie. Vortexbild und dimensionale Reduktion sind also konsistent.

Kapitel 5

Vortizes in Laplace-Zentrumseichung

In Abschnitt 2.5 haben wir uns mit Vortizes als topologische Freiheitsgrade und ihrer Relevanz für Confinement auseinandergesetzt. Insbesondere haben wir uns dabei auf P-Vortizes konzentriert, die innerhalb eines bestimmten Typs von Eichungen, den Zentrumseichungen, nach Projektion auf das Zentrum entstehen.

Für die maximale Zentrumseichung (2.118) und die darauffolgende Projektion (2.117) unterstützen Gittersimulationen die Vorstellung, daß in dieser Eichung die P-Vortizes die relevanten Freiheitsgrade für Confinement sind. Die projizierten Konfigurationen reproduzieren die string tension der vollen Theorie sehr gut ([DFGO97], [DFGGO98]). Weiterhin haben die P-Vortizes eine *physikalische* Flächendichte, d.h. sie entsprechen im Kontinuumslimes physikalischen Freiheitsgraden ([LRT98], [ELRT98]). Entfernt man die P-Vortizes aus den Gitterkonfigurationen, verschwindet die string tension und die chirale Symmetrie ist wiederhergestellt [FE99]. Das Confinement-Modell, das man mit den P-Vortizes verbindet, ist das in 2.5 vorgestellte Bild der Vortexperkolation ([LTER99], [ELRT00]). Wir haben in Kapitel 4 gesehen, daß dieses Modell konsistent ist mit dem Hochtemperaturverhalten der Theorie [GLSR00].

Ein Nachteil der maximalen Zentrumseichung ist jedoch das Auftreten eines praktischen Gribov-Problems. Selbst wenn ein eindeutiges globales Maximum des Eichfixierungsfunktionals (2.118) vorliegt, wird der numerische Algorithmus, der zur Maximierung verwendet wird, oft beim Auffinden des globalen Maximums versagen und stattdessen nur ein lokales Maximum liefern. Um dieses numerische Problem so klein wie möglich zu halten, führt man N_{copy} zufällige Eichtransformationen an der ursprünglichen Konfiguration durch, wendet in jeder dieser Eichkopien den Algorithmus zur Maximierung des Eichfixierungsfunktionals (2.118) an und wählt für weitere Berechnungen die Kopie mit dem größten Maximum. Tatsächlich findet man zumindest für

kleine Gitter eine deutliche Abhängigkeit der sting tension von der Anzahl der Eichkopien N_{copy} ([BKPV00], [BKP01]). Allerdings veringert sich dieser Effekt deutlich, sobald die Gitterausdehnung größer als die durchschnittliche Größe eines Zentrumsvortex der vollen Theorie[1] gewählt wird ([BFGO00], [BFGO01]). Ein praktisches Gribov-Problem ist typisch für alle Variationseichungen, bei denen der Extremalwert eines Eichfixierungsfunktionals bestimmt werden muß, insbesondere ist es auch aus der maximal abelschen Eichung (2.105) bekannt ([BBMS96], [HT97], [ST01]).

Um das praktische Gribov-Problem zu vermeiden, wurde in [AEF00] eine Laplace-Version ([VW92], [Sij98]) der Zentrumseichung eingeführt. Die numerische Aufgabe besteht hier nur noch aus der Berechnung zweier Eigenwerte des diskretisierten Laplace-Operators. Mit den heutigen Algorithmen und der zur Verfügung stehenden Rechenleistung ist daher für die betrachteten Gittergrößen eine eindeutige Eichfixierung möglich. In [AEF00] wurde weiterhin verifiziert, daß die gefundenen Vortizes die string tension der vollen Theorie gut reproduzieren.

Wir untersuchen im folgenden [LRS01], in wie weit den in der Laplace-Zentrumseichung entstehenden Vortizes ebenfalls eine physikalische Bedeutung im Kontinuum zukommt. Zu diesem Zweck betrachten wir Eigenschaften wie Vortexflächendichte, Dichte der Vortexkreuzungspunkte und die Verteilung der Vortexclustergrößen. Die Ergebnisse werden mit denen der maximalen Zentrumseichung verglichen.

5.1 Laplace-Zentrumseichung

In Abschnitt 2.4.3 haben wir gesehen, wie man eine beliebige *abelsche* Eichung mit Hilfe eines Hilfsfeldes $\phi^{(1)}(x)$ (2.94) formulieren kann, das sich unter Eichtransformationen kovariant transformiert. Dabei ist das Feld $\phi^{(1)}(x)$ z.B. als Lösung einer kovarianten Feldgleichung oder als das Extremum eines eichunabhängigen Funktionals definiert. Für ein Feld $\phi^{(1)}(x) = \phi^{(1)}_a(x)\tau^a/2i \in \mathfrak{su}(2)$ in der adjungierten Darstellung entspricht die Fixierung einer abelschen Eichung der Forderung, daß $\phi^{(1)}(x)$ an jedem Raum-Zeit-Punkt x in die T^3-Richtung zeigt. Wir suchen also nach einer Eichtransformation $V(x)$, die diese Drehung im Farbraum vollzieht,

$$V(x)\phi^{(1)}(x)V^\dagger(x) = h(x)\,T^3\,, \quad h(x) \geq 0\,. \tag{5.1}$$

[1] Mit drei unterschiedlichen Methoden wurde in [BFGO00], [FPh00] und [KT00] die Dicke der Zentrumsvortizes zu ungefähr 1 fm abgeschätzt. Bei $\beta = 2.5$ und einer string tension $\sigma = (440\text{MeV})^2$ als Referenzskala entspricht das 12 Gitterabständen a.

Für $\phi^{(1)}(x) \neq 0$ ist die Eichtransformation $V(x)$ durch die Diagonalisierungsbedingung (5.1) bis auf eine beliebige abelsche Transformation $g(x)$,

$$V(x) \to g(x)V(x)\,, \quad g(x) = \exp(-\alpha(x)T^3) \in U(1)\,, \tag{5.2}$$

definiert, die einer Drehung um die T^3-Achse entspricht.[2] Bei $\phi^{(1)}(x) = 0$ bleibt dagegen $V(x)$ völlig unbestimmt, die Resteichfreiheit ist hier die gesamte $SU(2)$. Im allgemeinen wird $V(x)$ an dieser Stelle unstetig sein. Da die Gleichung $\phi^{(1)}(x) = 0$ drei Bedingungen darstellt, wird durch sie in vier Dimensionen eine eindimensionale Defektstruktur definiert. Diese Defekte sind die Weltlinien der magnetischen Monopole, die in einer abelschen Eichung auftreten.

Definiert man ein weiteres kovariant transformierendes Hilfsfeld $\phi^{(2)}(x)$ kann die verbliebene Freiheit von Drehungen um die T^3-Achse noch weiter fixiert werden. Es wird gefordert, daß das Feld $\phi^{(2)}(x)$ nach einer weiteren Eichtransformation $g(x) \in U(1)$ z.B. in der T^1-T^3-Ebene liegt,

$$g(x)V(x)\phi^{(2)}(x)V^\dagger(x)g^\dagger(x) = \ell_1(x)T^1 + \ell_3(x)T^3\,, \quad \ell_1(x) \geq 0\,. \tag{5.3}$$

Unter der Voraussetzung, daß $\phi^{(1)}(x)$ und $\phi^{(2)}(x)$ linear unabhängig sind, ist damit die Eichtransformation $g(x)V(x)$ bis auf Transformationen aus dem Zentrum $\mathbb{Z}_2$ der Eichgruppe $SU(2)$ fixiert. Wenn die beiden Hilfsfelder aber linear abhängig sind, ist die verbleibende Eichfreiheit größer, und die Eichtransformation wird hier im allgemeinen unstetig sein. Die lineare Abhängigkeit stellt zwei Bedingungen dar, die erfüllt sein müssen. Die Defekte sind daher zweidimensionale Flächen im vierdimensionalen Raum, nämlich die Weltflächen der Vortizes, die in einer Zentrumseichung auftreten.

Bei dieser Definition einer Zentrumseichung liegen offenbar die Monopole der im Zwischenschritt erreichten abelschen Eichung *per Konstruktion* auf den resultierenden Vortizes. So ein Zusammenhang zwischen Monopolen und Vortizes ist wünschenswert, da man für beide Arten von Defekten erfolgreiche Confinement-Szenarien kennt, den dualen Supraleiter und die Vortexperkolation.

Je nach Wahl der Hilfsfelder $\phi^{(1)}, \phi^{(2)}$ wird durch die Bedingungen (5.1) und (5.3) eine andere Zentrumseichung beschrieben. Für die *Laplace-Eichung* sind $\phi^{(1)}, \phi^{(2)}$ durch die Eigenvektoren zu den beiden niedrigesten Eigenwerten des

[2] Die Bedingung $h \geq 0$ in (5.1) fixiert Weyl-Transformationen durch Einschränkung auf eine fundamentale Domäne.

adjungierten Laplace-Operators bestimmt,[3]

$$-\hat{D}_\mu(x)\hat{D}_\mu(x)\phi^{(i)}(x) = \lambda_i \phi^{(i)}(x)\,. \tag{5.4}$$

Da der Laplace-Operator positiv semidefinit ist, sind alle Eigenwerte nichtnegativ, $\lambda_i \geq 0$. Die Eigenvektoren transformieren kovariant unter Eichtransformationen, wie wir es für die Definition der Hilfsfelder benötigen. Den Defekten soll im Rahmen eines Confinement-Modells die Rolle der im Infraroten relevanten Freiheitsgrade zukommen. Daher wählt man die Eigenvektoren zu den *niedrigesten* Eigenwerten, da diese die Infrarotinformationen der Eichfelder $A_\mu(x)$ tragen.

Gleichung (5.4) zeigt die Verwandtschaft der abelschen Laplace-Eichung zur maximal abelschen Eichung (2.97). Aus dem lokalen Variationsproblem der maximal abelschen Eichung mit einem ortsabhängigem Lagrange-Multiplikator $\lambda_i(x)$ wird in der abelschen Laplace-Eichung ein Eigenwertproblem eines Funktionaloperators mit (ortsunabhängigen) Eigenwerten λ_i. Gleichzeitig wird die Beschränkung $|\phi^{(1)}(x)| = 1$ fallen gelassen.

In [RT00] wurde die Kontinuumsversion der abelschen Laplace-Eichung bzw. der Laplace-Zentrumseichung untersucht. Insbesondere wurde der Monopol- und Vortexgehalt von speziellen Konfigurationen (Instanton, Instanton-Antiinstanton-Paar und Meron) analysiert. Eine Verallgemeinerung der Zentrumseichung mit Hilfsfeldern $\phi^{(1)}, \phi^{(2)}$ (vgl. (5.1), (5.3)) für Eichgruppen $SU(N)$ wurde in [FPe00a] vorgestellt. Die Erweiterung auf allgemeine Eichgruppen wurde in [RT01] untersucht.

5.1.1 Gitterversion der Laplace-Zentrumseichung

Auf einem Gitter mit Gitterabstand a und Gittervolumen $V = \prod_\mu N_\mu$ ist der adjungierte kovariante Laplace-Operator definiert durch die $3V \times 3V$ Gittermatrix

$$\Delta^{ab}_{x,y}[\hat{U}] = 2a\,\delta_{x,y}\delta^{ab} - \sum_{\pm\hat{\mu}} \hat{U}^{ab}_{x,\mu}\delta_{x\pm\hat{\mu},y}\,. \tag{5.5}$$

Dabei bezeichnet $\hat{U}_{x,\mu}$ die adjungierte Linkvariable, also ausgedrückt mit Hilfe der fundamentalen Linkvariable $U_{x,\mu}$

$$\hat{U}^{ab}_{x,\mu} = -2\,\mathrm{tr}\,(U^\dagger_{x,\mu} T^a U_{x,\mu} T^b)\,. \tag{5.6}$$

[3] Bei entarteten Eigenwerten ist keine eindeutige Auswahl von Eigenvektoren möglich. Die Eichfixierungsbedingung ist nicht wohldefiniert, die betreffende Konfiguration liegt auf dem Gribov-Horizont.

Offenbar ist $\hat{U}_\mu(x)$ invariant unter Eichtransformationen aus dem Zentrum der Eichgruppe. Der adjungierte Link ist eine 3×3 Matrix im Farbraum, entsprechend ist ein Eigenvektor ϕ von (5.5) an jedem einzelnen Raum-Zeit-Punkt durch einen dreidimensionalen Vektor ϕ_x im Farbraum gegeben.

Die niedrigsten Eigenwerte und zugehörigen Eigenvektoren $\phi^{(1)}$ und $\phi^{(2)}$ der Laplace-Gittermatrix (5.5) können nun beispielweise mittels eines Lanczos-Algorithmus (z.B. in [Pan97]) bestimmt werden. An jedem Gitterpunkt x kann nun sofort die orthonormale Matrix M_x^{ab} angegeben werden, die $\phi_x^{(1)}$ in die T^3-Richtung und $\phi_x^{(2)}$ in die T^1-T^3-Ebene dreht. Über

$$M_x^{ab} = -2\,\mathrm{tr}\left(\Omega_x^\dagger T^a \Omega_x T^b\right), \quad \Omega_x \in SU(2) \tag{5.7}$$

ist dann die gesuchte Eichtransformation Ω_x bis auf das Zentrum der Eichgruppe bestimmt, und die Laplace-Zentrumseichung kann fixiert werden. In der Kontinuumbetrachtung haben wir gesehen, daß sich die verbliebene Eichfreiheit bei einer linearen Abhängigkeit von $\phi^{(1)}(x)$ und $\phi^{(2)}(x)$ für die entsprechenden Raum-Zeit-Punkte x vergrößert und $\Omega(x)$ dort im allgemeinen unstetig ist. Auf dem Gitter ist diese Definition aufgrund der endlichen Diskretisierung der Raum-Zeit problematisch. Eine Interpolation ist erforderlich, die auf verschiedene Arten durchgeführt werden kann. In [FPe00b] wurde gezeigt, daß als praktische Alternative auch nach Fixierung der Laplace-Zentrumseichung die schon aus der maximalen Zentrumseichung bekannte Zentrumsprojektion

$$U_{x,\mu} \to \mathrm{sign}(U_{x,\mu}) \tag{5.8}$$

angewandt werden kann. Die dadurch als negative Plaquetten identifizierten Vortizes stimmen, bei geeigneter Wahl eines Interpolationsverfahrens, mit den Vortizes überein, die aus den Singularitäten durch parallele Eigenvektoren entstehen.

In diesem Kapitel werden wir die Eigenschaften der Vortizes untersuchen, die aus Laplace-Zentrumseichung und darauffolgender Zentrumsprojektion entstehen [LRS01]. Diese werden verglichen mit den Vortizes aus maximaler Zentrumseichung und anschließender Zentrumsprojektion.

5.2 Eigenschaften der Vortizes

Im folgenden werden wir durch Zentrumsprojektion (5.8) identifizierte Vortizes aus drei unterschiedlichen Eichfixierungsverfahren betrachten. Zum einen ist das die oben beschriebene Laplace-Zentrumseichung (in den Abbildungen „laplace“). Weiter betrachten wir die maximale Zentrumseichung, fixiert

durch einen einfachen Overrelaxationsalgorithmus ([Adl81], [MO90]), also ohne Rücksicht auf die Existenz des oben beschriebenen praktischen Gribov-Problems (in den Abbildungen „max“). Um sicherzustellen, daß die festgestellten Unterschiede nicht auf dem praktischen Gribov-Problem basieren, betrachten wir als dritte Variante eine Hintereinanderausführung von beiden Eichfixierungen, Laplace-Zentrumseichung und danach zusätzlich maximale Zentrumseichung durch Overrelaxation (in den Abbildungen „lap+max“). Verschiedene Daten in den beiden letzten Fällen resultieren dann aus unterschiedlichen (lokalen) Maxima der eichfixierenden Funktionale der maximalen Zentrumseichung, also verschiedenen (praktischen) Gribov-Kopien im Konfigurationsraum. Quantitative Aussagen über das praktische Gribov-Problem sollen und können dadurch allerdings nicht gemacht werden. Dafür sei auf die Diskussion in [BKPV00], [BKP01] bzw. [BFGO00], [BFGO01] verwiesen.

5.2.1 Vortexflächendichte

In Abbildung 5.1a sind die Resultate für die Vortexflächendichte dargestellt, also die Dichte der Schnittpunkte von Vortizes mit einer gegebenen Raum-Zeit-Ebene. Während für beide Implementierungen der maximalen Zentrumseichung die numerischen Daten mit einer physikalischen Vortexflächendichte konsistent sind, scheinen im Fall der Laplace-Zentrumseichung die Durchstoßpunkte von Vortizes durch eine zweidimensionale Gitterebene im Kontinuum dicht zu liegen.

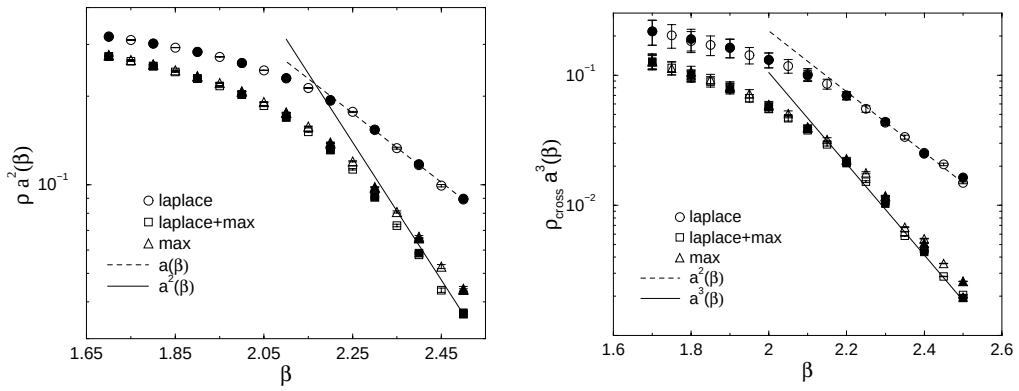
Um diese Aussage präziser zu machen, führen wir die *Hausdorff-Dimension* der Menge der Vortexdurchstoßpunkte durch eine gegebene Raum-Zeit-Ebene ein. Wenn N_ε die Zahl der ε-Umgebungen angibt, die mindestens nötig ist, alle Durchstoßpunkte zu überdecken, so gilt für genügend kleine ε

$$N_\varepsilon \sim \varepsilon^{-d} \,. \tag{5.9}$$

Dabei definiert d die Hausdorff-Dimension. In der Praxis wählen wir gerade eine Plaquette mit Fläche $a^2(\beta)$ als ε-Umgebung. Die Größe der ε-Umgebung wird also durch β variiert. Die Zahl N_ε der benötigten ε-Umgebungen ist durch die Vortexflächendichte ρ gegeben als

$$N_\varepsilon = \rho(a) v_2 = \rho(a) a^2 \cdot \frac{v_2}{a^2} \,. \tag{5.10}$$

Hier ist v_2 das Volumen der zweidimensionalen Gitterebene, bzw. v_2/a^2 die Gesamtzahl der Plaquetten in der Gitterebene. Die Hausdorff-Dimension



(a) (b)

Abb. 5.1: (a) Skalenverhalten der Dichte von P-Vortexdurchstoßpunkten durch eine zweidimensionale Gitterebene für die unterschiedlichen Eichfixierungen. Zum Vergleich ist das Verhalten von $a(\beta)$ bzw. $a^2(\beta)$ eingezeichnet. (b) Skalenverhalten der Dichte von P-Vortexkreuzungspunkten. Zum Vergleich ist das Verhalten von $a^2(\beta)$ bzw. $a^3(\beta)$ eingezeichnet. Offene Symbole: 12^4 Gitter, ausgefüllte Symbole: 16^4 Gitter.

kann also bestimmt werden über das Verhalten

$$\rho(a)a^2 \sim \varepsilon^{2-d}\,. \tag{5.11}$$

Aus Abbildung 5.1a lesen wir innerhalb des scaling windows $\beta \in [2.1, 2.5]$ für die Daten der Laplace-Zentrumseichung ab

$$\rho(a)a^2 = \exp(-A\beta + B)\,, \quad A = 2.25 \pm 0.02\,, \quad B = 3.30 \pm 0.05\,. \tag{5.12}$$

Mit der Abhängigkeit $a(\beta)$, also (vgl. Abschnitt 2.3.3)

$$\varepsilon \sim a(\beta) \sim \exp(-\frac{3\pi^2}{11}\beta)\,, \tag{5.13}$$

finden wir für die Hausdorff-Dimension

$$d = 2 - \frac{11}{3\pi^2}A = 1.16 \pm 0.01\,. \tag{5.14}$$

Die Durchstoßpunkte der P-Vortizes der Laplace-Zentrumseichung durch eine zweidimensionale Raum-Zeit-Ebene bilden also im Kontinuumslimes in etwa eindimensionale Strukturen. Im Gegensatz dazu haben die Durchstoßpunkte der P-Vortizes in der maximalen Zentrumseichung Hausdorff-Dimension Null, da hier ρ unabhängig von $a(\beta)$ ist.

5.2.2 Dichte von Vortexkreuzungspunkten

In einem dreidimensionalen Schnitt durch das Gitter definieren wir einen Vortexkreuzungspunkt als einen Würfel elementarer Plaquetten durch den mehr als eine Vortexlinie hindurchläuft. Die Dichte $\rho_{\text{cross}}(a)a^3$ der Vortexkreuzungspunkte in einem dreidimensionalen Schnitt durch das Gitter ist in Abbildung 5.1b dargestellt. Wieder können wir analog zu den obigen Betrachtungen eine Hausdorff-Dimension über Betrachtung von ε-Umgebungen definieren. Diesmal werden die ε-Umgebungen als Würfel $a^3(\beta)$ gewählt. Dann finden wir aus einer Parameterisierung

$$\rho_{\text{cross}}(a)a^3 = \exp(-A\beta + B) \tag{5.15}$$

für die Hausdorff-Dimension der Kreuzungspunkte

$$d_{\text{cross}} = 3 - \frac{11}{3\pi^2}A\,. \tag{5.16}$$

Aus den in Abb. 5.1b dargestellten Daten für ein 16^4 Gitter mit $\beta \in [2.1, 2.5]$ berechnet man für die maximale Zentrumseichung

$$A_{\text{max}} = 8.079 \pm 0.026\,, \quad B_{\text{max}} = 13.96 \pm 0.06\,, \quad d^{\text{max}}_{\text{cross}} = 0.00 \pm 0.01 \tag{5.17}$$

und entsprechend für die Laplace-Zentrumseichung

$$A_{\text{lap}} = 7.079 \pm 0.05\,, \quad B_{\text{lap}} = 11.64 \pm 0.11\,, \quad d^{\text{lap}}_{\text{cross}} = 0.37 \pm 0.02\,. \tag{5.18}$$

Während die Vortexkreuzungspunkte in der maximalen Zentrumseichung in drei Dimensionen isolierte Punkte mit einer physikalischen Dichte bilden, liegen die Kreuzungspunkte in der Laplace-Zentrumseichung dicht mit einer Hausdorff-Dimension, die deutlich von Null verschieden ist.

5.2.3 Vergleich mit einem Random Vortex Modell

Bevor wir eine Interpretation der verschiedenen Resultate in maximaler bzw. Laplace-Zentrumseichung versuchen, wollen wir die Ergebnisse mit einem Modell zufällig verteilter dünner Vortizes (siehe auch Abschnitt 2.5.2) vergleichen.

Wir betrachten einen dreidimensionalen Schnitt durch das vierdimensionale Gitteruniversum. In diesem Schnitt bilden die Vortizes geschlossene Linien auf dem dualen Gitter. Das duale Gitter hat ebenfalls Gitterabstand a. Die

Vortexflächendichte ρ in Einheiten des Gitterabstands a, also ρa^2, ist gegeben durch die Wahrscheinlichkeit p, daß ein einzelner Vortex eine bestimmte Plaquette durchstößt. Bezeichnen wir mit N_l die Gesamtzahl der Links des dualen dreidimensionalen Gitters und mit N_v den Anteil dieser Links, der von einem Vortex belegt ist, dann ist

$$\rho a^2 = p = \frac{N_\mathrm{v}}{N_\mathrm{l}} = \frac{N_\mathrm{v}}{3N_\mathrm{s}}\,, \tag{5.19}$$

wobei N_s die Gesamtzahl der sites des dualen Gitters bezeichnet. Aufgrund der Bianchi-Identität ist die Anzahl der Links, die von Vortizes besetzt sind und zu einem Gitterplatz gehören, immer geradzahlig. Für ein dünnes Vortexgas können wir diese Nebenbedingung vernachlässigen. Die Wahrscheinlichkeit, daß sich zwei Vortizes an einem bestimmten Punkt im dualen Gitter schneiden, ist dann näherungsweise gegeben durch

$$p_\mathrm{cross} \approx p^2 = \rho^2 a^4\,. \tag{5.20}$$

Bezeichnen wir mit $N_\mathrm{cross} = p_\mathrm{cross} N_\mathrm{s}$ die Anzahl der sites im dualen Gitter, an denen sich zwei Vortizes kreuzen, gilt für die Dichte ρ_cross dieser sites

$$\rho_\mathrm{cross} = \frac{N_\mathrm{cross}}{V} = \frac{p_\mathrm{cross}}{a^3} \approx \rho^2 a\,. \tag{5.21}$$

Dabei bezeichnet $V = N_\mathrm{s} a^3$ das Volumen des dreidimensionalen Gitterschnittes. In einem Random Vortex Modell mit physikalischer Vortexflächendichte ρ im Kontinuum verschwindet die Dichte der Vortexkreuzungspunkte beim Übergang $a \to 0$ zum Kontinuum, $\rho_\mathrm{cross} = 0$. Dieses Verhalten erwartet man, da sich im Kontinuum zwei Linien im allgemeinen nicht schneiden.

In Gitterrechnungen wurde bestätigt, daß die P-Vortizes der maximalen Zentrumseichung eine physikalische Vortexflächendichte besitzen. Das ist auch in Abbildung 5.1a zu sehen. Im Gegensatz zu einem Random Vortex Modell mit der gleichen Vortexflächendichte, findet man hier auch eine endliche Dichte ρ_cross der Vortexkreuzungspunkte, Abb. 5.1b. Das zeigt, daß die P-Vortizes der maximalen Zentrumseichung Informationen tragen, die durch ein Modell zufällig verteilter dünner Vortizes nicht beschrieben werden können. Gründe dafür können z.B. ihr Ursprung in ausgedehnten Zentrumsvortizes der vollen Theorie oder Korrelationen zwischen den Vortizes sein.

Im Fall der P-Vortizes der Laplace-Zentrumseichung stellen weder die Vortexflächendichte noch die Dichte der Kreuzungspunkte eine physikalische, von a unabhängige, Größe dar. Beide divergieren wie $1/a$ im Kontinuumslimes $a \to 0$ (vgl. Abb. 5.1). Das ist konsistent mit einem Random Vortex Modell,

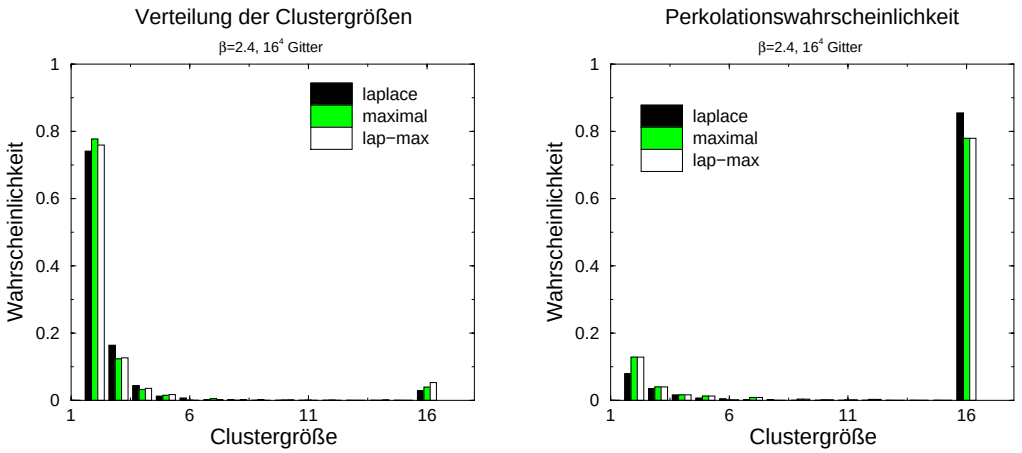
wenn man eine Vortexflächendichte $\rho \sim 1/a$ ansetzt: Dann folgt aus (5.21) tatsächlich $\rho_{\text{cross}} \sim 1/a$.

Eine divergierende Flächendichte bedeutet nicht notwendigerweise, daß die Vortexfreiheitsgrade keine physikalische Information tragen. Nur die Flächendichte der Vortizes stellt keine physikalisch sinnvolle Observable dar. In guter Näherung skaliert die Vortexflächendichte der P-Vortizes in der Laplace-Zentrumseichung mit a. Dieses Verhalten würde man beispielsweise erwarten, wenn ein Vortex-Loop in drei Dimensionen, z.B. durch seine eigenen Fluktuationen, eher die Gestalt einer zweidimensionalen Fläche als einer eindimensionalen Linie hat. Die Schnittpunkte eines solchen Vortex mit einem zweidimensionalen Schnitt durch das Gitter lägen dicht entlang einer Linie.

5.2.4 Vortexcluster

Um die Ursache für das unterschiedliche Verhalten der P-Vortizes aus maximaler bzw. Laplace-Zentrumseichung bezüglich Vortexflächendichte und Dichte der Vortexkreuzungspunkte zu bestimmen, ist es sinnvoll, die Eigenschaften der Vortexcluster in einem dreidimensionalen Schnitt durch das Gitter für beide Fälle zu untersuchen. Eine Eigenschaft der Cluster ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung ihrer Größe. Das numerische Ergebnis für ein 16^4 Gitter und $\beta = 2.4$ ist in Abbildung 5.2a aufgetragen. Bei allen drei Eichfixierungsvarianten — Laplace-Zentrumseichung, maximaler Zentrumseichung und der Kombination aus beiden — überwiegen die kleinen Vortexcluster deutlich. Allerdings enthalten diese kleinen Vortexcluster nicht viel Vortexmaterial. Um das festzustellen, betrachtet man die Wahrscheinlichkeit $p(s)$, daß ein elementarer Vortexlink des dualen Gitters zu einem Cluster der Größe s gehört. Wir bezeichnen $p(s)$ als Perkolationswahrscheinlichkeit. Die Resultate sind in Abbildung 5.2b dargestellt. In allen drei Eichfixierungen tritt am häufigsten die Situation auf, daß fast das gesamte Vortexmaterial in einem Cluster von der Größe des Gitteruniversums versammelt ist (Perkolation). Für die maximale Zentrumseichung wurde dieses Verhalten bereits in [ELRT00] gemessen.

Qualitativ sind die Wahrscheinlichkeitsverteilungen für die verschiedenen Eichfixierungen gleich. Quantitativ beobachtet man jedoch im Fall der Laplace-Zentrumseichung eine Verstärkung der Perkolationswahrscheinlichkeit für Cluster der Maximalgröße ($s = 16$). Das zeigt an, daß das überschüssige Vortexmaterial der Laplace-Zentrumseichung (das zu einer divergierenden Vortexflächendichte führt) im Vergleich zur maximalen Zentrumseichung eher als Teil der großen Vortexcluster auftritt und nicht als zusätzliche isolierte



(a) (b)

Abb. 5.2: (a) Wahrscheinlichkeit einen Vortexcluster bestimmter Größe in einer Konfiguration zu finden. (b) Perkolationswahrscheinlichkeit: Mit welcher Wahrscheinlichkeit gehört ein elementarer Vortexlink zu einem Cluster einer bestimmten Größe.

kleine Vortexcluster. Ein Bild von großen perkolierenden Vortexclustern mit vermehrten UV-Fluktuationen, die die string tension nicht beeinflussen, ist mit unseren numerischen Daten konsistent. Diese Vorstellung berücksichtigt darüber hinaus auch die Tatsache, daß die string tension auch von den P-Vortizes der Laplace-Zentrumseichung korrekt reproduziert wird [AEF00].[4]

5.3 Zusammenfassung und Ausblick

Wir haben in diesem Kapitel die Eigenschaften der P-Vortizes untersucht, die nach Laplace-Zentrumseichung und Zentrumsprojektion entstehen. Wie in der maximalen Zentrumseichung wird die string tension der vollen Theorie durch die Vortexkonfigurationen gut reproduziert. Allerdings ergibt sich im Gegensatz zu dieser Eichung im Kontinuumslimes keine endliche Vortexflächendichte. Die Dichte der Vortexdurchstoßpunkte skaliert mit a statt a^2 und divergiert daher im Limes $a \to 0$. Man kann den Vortexdurchstoßpunkten eine Hausdorff-Dimension $d \approx 1$ zuordnen.

Das Skalieren mit a deutet darauf hin, daß die Vortizes der Laplace-Zen-

[4] Wegen der Erhaltung der string tension kann es sich bei dem überschüssigen Vortexmaterial nur um Vortexfluktuationen kleiner Größe handeln.

trumseichung trotzdem physikalische Information tragen. Jedoch ist es physikalisch nicht sinnvoll, ihre Flächendichte zu betrachten. Die Ursache dafür könnte in starken UV-Fluktuationen der Vortizes im Vergleich zu denen der maximalen Zentrumseichung liegen, die die string tension unverändert lassen. Diese Interpretation wird unterstützt durch eine Analyse der Perkolationswahrscheinlichkeit. Wenn diese UV-Fluktuationen einem in drei Dimensionen eigentlich eindimensionalen Vortex-Loop eine flächenartige zweidimensionale Struktur verleihen, liegen die Durchstoßpunkte dieses Vortex durch eine Fläche dicht auf einer Linie. Das wäre eine mögliche Erklärung für das Skalieren der Flächendichte mit a.

Kapitel 6

Vortizes mit Kühlverfahren: Glueball-Massen

Bisher sind uns im Rahmen dieser Arbeit im wesentlichen nur Vortizes begegnet, die durch Zentrumseichung (vgl. Abschnitt 2.5.3) und darauffolgende Projektion der Linkvariablen des Gitters auf ihren Zentrumsgehalt (2.117) entstanden sind. Die resultierenden P-Vortizes wurden dann auf ihre Eignung als relevante Freiheitsgrade für Confinement untersucht. Die zugrunde liegende Idee war, daß in den gewählten Eichungen der Confinement-Mechanismus gerade durch Vortizes realisiert ist, während in anderen Eichungen andere Freiheitsgrade relevant sein können. Für einige Zentrumseichungen wird eine *Vortexdominanz* beobachtet: Die string tension der vollen Theorie wird allein durch die P-Vortexkonfigurationen reproduziert, ohne P-Vortizes wird die string tension zu Null ([DFGO97], [DFGGO98]). In der maximalen Zentrumseichung findet man für P-Vortizes eine endliche Dichte im Kontinuumslimes. Die P-Vortizes und ihre Entsprechung in der unprojizierten zentrumsfixierten Theorie sind also physikalische Objekte ([LRT98], [LTER99]).

In diesem Kapitel wollen wir nun eine andere, eichunabhängige Methode zur Identifikation von Zentrumsvortizes betrachten. Sie beruht auf einem Kühlverfahren, das Schritt für Schritt eine Konfiguration auf ihren Zentrumsgehalt reduziert [LIR00]. Wir werden sehen, daß sich diese Vortizes deutlich von den P-Vortizes unterscheiden. Während die Durchstoßpunkte der P-Vortizes in maximaler Zentrumseichung im Kontinuumslimes eine physikalische Flächendichte haben und die P-Vortizes (zumindest in dieser Eichung) für Confinement relevant sind, tragen die eichinvariant definierten *c-Vortizes*[1] eine physikalische *Wirkungs*dichte. [LIR00]. Wir konnten in [LS00b] die Relevanz der c-Vortizes für das Glueballmassenspektrum der Yang-Mills-Theorie zeigen.

[1] Bei dieser Namensgebung steht „c“ für *cooling*.

6.1 Eichinvariante Vortexstruktur des Vakuums

Jede Linkvariable $U_{x,\mu} \in SU(2)$ können wir in ein Zentrumselement

$$Z_{x,\mu} = \text{sign tr}\,(U_{x,\mu}) \in \mathbb{Z}_2 \tag{6.1}$$

und einen Anteil aus dem coset $\bar{U}_{x,\mu} \in SU(2)/\mathbb{Z}_2$ zerlegen,

$$U_{x,\mu} = Z_{x,\mu}\bar{U}_{x,\mu}\,. \tag{6.2}$$

Das coset-Element $\bar{U}_{x,\mu}$ können wir wegen $SU(2)/\mathbb{Z}_2 \simeq SO(3)$ durch adjungierte Linkvariable

$$O^{ab}_{x,\mu} = -2\,\text{tr}\,(U^{\dagger}_{x,\mu}T^a U_{x,\mu}T^b) \in SO(3) \tag{6.3}$$

darstellen.

Welches Zentrumselement (6.1) einem Link zugeordnet ist, kann sich unter Eichtransformationen Ω_x (2.47) offenbar ändern. In jeder Eichung ist eine Aufspaltung (6.2) möglich, aber je nach Wahl der Eichung sind die Freiheitsgrade der Theorie anders auf Zentrum- und coset-Anteil der Links verteilt. Wir haben schon in Abschnitt 2.5 gesehen, daß nur bei sorgfältiger Wahl der Eichfixierung den Zentrumsvariablen $Z_{x,\mu}$ eine physikalische Bedeutung zukommt. In der maximalen Zentrumseichung (2.118) konnten nach Projektion auf das Zentrum Vortizes mit einer physikalischen Flächendichte identifiziert werden.

An Stelle einer solchen eichabhängigen Extraktion des Zentrumsgehalts der Theorie können wir auch die Frage stellen, welche Rolle die (eichunabhängige) bloße Existenz des Zentrums spielt. Wir wollen also untersuchen, ob und wodurch sich eine in adjungierten Links $O_{x,\mu} \in SO(3)$ (6.3) formulierte Eichtheorie von der üblichen $SU(2)$ Gittereichtheorie mit Links $U_{x,\mu} \in SU(2)$ unterscheidet.

Geht man von einer Kontinuumseichtheorie mit glatten Feldern aus, erwartet man naiv, daß bei Gitterabstand $a \to 0$ alle Linkvariablen (Paralleltransporter) in der Nähe der $\mathbb{1}$ bzw. dazu eichäquivalenten Gruppenelementen sind. In diesem Fall spielt es keine Rolle, ob bei Formulierung der Gittertheorie fundamentale Links $U_{x,\mu} \in SU(2)$ oder adjungierte Links $O_{x,\mu} \in SO(3)$ gewählt werden. Der Zentrumsgehalt $Z_{x,\mu}$ der $SU(2)$-Links kann unter dieser Voraussetzung durch Eichtransformationen aus dem Zentrum der Eichgruppe immer auf $Z_{x,\mu} = 1$ gebracht werden. Insbesondere wird es dann im Konti-

nuumslimes nie Plaquetten mit Werten in der Nähe von -1 und damit auch keine dünnen Vortizes[2] geben.

Im wesentlichen kann man sich zwei Ansätze vorstellen, um einen eventuellen Unterschied der Kontinuumslimites von $SU(2)$- bzw. $SO(3)$-Gittereichtheorien herauszuarbeiten. Einer davon ist ein direkter Vergleich der beiden Theorien in Bezug auf die Erwartungswerte, die für bestimmte Observablen gemessen werden. So wurde beispielsweise in [LR00] ein Unterschied in der Stefan-Boltzmann-Konstante festgestellt. Der andere Ansatz ist, zu versuchen, den $SO(3)$-Anteil der $SU(2)$-Wirkung auf *eichinvariante* Weise zu eliminieren und die verbliebene Theorie auf dünne Vortizes und deren Eigenschaften zu untersuchen. Diesen Ansatz wollen wir in diesem Kapitel verfolgen.

6.1.1 Das Kühlverfahren

Die Elimination der coset-Freiheitsgrade gelingt schrittweise durch das in [LIR00] vorgestellte eichinvariante Kühlverfahren. Wir definieren eine (dimensionslose) coset-Wirkungsdichte pro Link als

$$s^{\mathrm{gl}}_{x,\mu} = \sum_{\bar{\nu}\neq\pm\mu} \left(1 - \frac{1}{3}\,\mathrm{tr}_{\,\mathrm{adj}} P_{x,\mu\bar{\nu}}[O]\right) , \tag{6.4}$$

wobei $O_{x,-\nu} = O^T_{x-\hat{\nu},\nu}$. Dabei bezeichnet $P_{x,\mu\nu}[O]$ die Plaquette gebildet aus den adjungierten Linkvariablen (6.3). Die coset-Wirkungsdichte läßt sich alternativ auch mit Hilfe der fundamentalen Links $U_{x,\mu}$ als

$$s^{\mathrm{gl}}_{x,\mu} = \sum_{\bar{\nu}\neq\pm\mu} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\, P_{x,\mu\bar{\nu}}[U]\right)^2\right) \tag{6.5}$$

schreiben. Die Kühlung einer Konfiguration geschieht durch lokale Minimierung von $s^{\mathrm{gl}}_{x,\mu}$.[3] Ein Kühlschritt ist definiert durch Ersetzen des Links $U_{x,\mu}$ durch einen gekühlten Link

$$U^{\mathrm{c}}_{x,\mu} \equiv \lambda \sum_{\bar{\nu}\neq\pm\mu} B_{x,\bar{\nu}\mu} \left(\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,(P_{x,\mu\bar{\nu}}[U])\right) . \tag{6.6}$$

[2] Diese sind zu unterscheiden von (ausgedehnten) Vortizes aus dem $SO(3)$-Anteil (nichtkontrahierbare Wilson-Loops), die nach geeigneter Zentrumseichung und -projektion als (dünne) P-Vortizes in Erscheinung treten, vgl. Abschnitt 2.5.3.

[3] In einem Standardkühlverfahren, z.B. [GPPS99], wird die gesamte $SU(2)$ Wirkung minimiert. Zentrums- und coset-Elemente sind dann beide betroffen.

Dabei beschreibt

$$B_{x,\bar{\nu}\mu} \equiv U^{\dagger}_{x+\hat{\mu},\bar{\nu}} U_{x+\hat{\nu},\mu} U_{x,\bar{\nu}} = \quad U_{x+\hat{\nu},\mu} \quad U_{x,\bar{\nu}} \quad U_{x+\hat{\mu},\nu} \tag{6.7}$$

die sechs Bügel, die an dem Link $U_{x,\mu}$ befestigt sind und λ sorgt für die richtige Normierung $U^{\mathrm{c}}_{x,\mu} U^{\mathrm{c}\,\dagger}_{x,\mu} = 1$. Der Kühlschritt wird genau dann *nicht* ausgeführt, wenn

$$1 - \frac{1}{2} \operatorname{tr} \left(U_{x,\mu} U^{\mathrm{c}\,\dagger}_{x,\mu} \right) < \kappa^4 a^4 \,. \tag{6.8}$$

Dabei legt die Wahl von κ die Kühlskala fest. Ein Kühldurchgang beinhaltet eine aufeinanderfolgende Ersetzung (6.6) aller Linkvariablen des Gitters. Nach mehreren solcher Durchgänge ist die lokale Bedingung (6.8) überall erfüllt. Weiteres Kühlen ändert die Linkvariablen nicht weiter. Das Kühlverfahren stoppt sich also selber. Wegen $\lambda = 1/6 + \mathcal{O}(a^4)$ ist die Abbruchbedingung (6.8) bis zu $\mathcal{O}(a^6)$ gleichbedeutend mit der Bedingung

$$s^{\mathrm{gl}}_{x,\mu} < 8\kappa^4 a^4 \,. \tag{6.9}$$

Durch Festlegen der Kühlskala wird also bestimmt, wie hoch die coset-Wirkungsdichte lokal nach Kühlung noch sein darf. Im Fall $\kappa \to 0$ werden durch den Kühlvorgang die coset-Anteile der Eichfelder ganz aus den Gitterkonfigurationen entfernt. Es bleiben nur Linkvariablen übrig, die eichäquivalent zu $O_{x,\mu} = \mathbb{1}$ sind. Also gilt bei $\kappa = 0$ nach Abschluß der Kühlung

$$U^{\mathrm{c}}_{x,\mu} = Z_{x,\mu} \Omega_{x+\hat{\mu}} \Omega^{\dagger}_{x} \,. \tag{6.10}$$

Eichinvariante Größen, wie z.B. die Spur einer Plaquette, sind dann nur durch den $\mathbb{Z}_2$-Anteil der Theorie bestimmt. Einzige Freiheitsgrade einer Zentrumstheorie sind Vortizes, deren Durchstoßpunkte durch Plaquetten durch

$$\frac{1}{2} \operatorname{tr} \left(P[U^{\mathrm{c}}] \right) = -1 \tag{6.11}$$

definiert sind. Spielen diese c-Vortexfreiheitsgrade der $SO(3)$-gekühlten Theorie im Kontinuumslimes $a \to 0$ keine Rolle, gilt das auch für das Zentrum der $SU(2)$. Dann wären die $SU(2)$- und $SO(3)$-Gitterformulierungen äquivalent.

6.1.2 Eigenschaften der c-Vortizes

In [LIR00] wurde die Dichte der Vortexdurchstoßpunkte (6.11)

$$\hat{\rho} = \left\langle 1 - \frac{1}{2} \operatorname{tr} P[U] \right\rangle \tag{6.12}$$

der $SO(3)$-gekühlten Theorie gemessen. Die Messungen zeigen, daß $\hat{\rho}$ mit a^4 skaliert. Im Gegensatz zu den P-Vortizes der maximalen Zentrumseichung, bei denen $\hat{\rho}$ mit a^2 skaliert, läßt sich für die c-Vortizes also keine Interpretation als perkolierende Vortexflächen finden. Das Skalenverhalten zeigt vielmehr, daß einzelne zu -1 eichäquivalente Links mit einer endlichen Kontinuumsdichte vorliegen. Solch ein einzelner isolierter Link erzeugt eine Spur -1 für alle $2(D-1)$ Plaquetten, die an ihm befestigt sind. Das entspricht dem kleinsten überhaupt möglichen Vortex, der für $a \to 0$ immer weiter zusammenschrumpft.

Wenn auch keine perkolierenden Vortizes vorliegen, so kommt dem Zentrum der $SU(2)$ offenbar doch eine physikalische Bedeutung zu, denn die c-Vortizes tragen eine physikalische Wirkungsdichte. Sie führen daher zu einem Kondensat mit Massendimension vier, das zur Operatorproduktentwicklung beiträgt [LIR00] und in Hochenergieexperimenten prinzipiell gemessen werden kann.

Weiterhin wurde in [LIR00] auch das Potential zwischen statischen Quarks (vgl. Abschnitt 2.3.4) in der $SO(3)$-gekühlten Theorie untersucht. Der Abstand, bei dem das Potential in ein linear ansteigendes Verhalten übergeht, stellte sich dabei als von der Kühlskala κ abhängig heraus. Je kleiner der Wert von κ ist, je mehr also gekühlt wird, desto größer der Abstand, bei dem Confinement einsetzt. Bei vollständiger Kühlung geht die Confinement-Eigenschaft der ungekühlten Theorie ganz verloren.

Um die Relevanz der c-Vortizes besser zu verstehen, haben wir uns in [LS00b] mit einem anderen Typ von Observable auseinandergesetzt, den Massen der 0^{++} und 2^{++} Gluebälle.

6.2 Gluebälle

In einer reinen $SU(N)$ Yang-Mills-Theorie müssen die einzigen möglichen gebundenen Zustände aus Gluonen zusammengesetzt sein. Wenn die Theorie, wie erwartet, die Eigenschaft des Confinement besitzt, sind diese Zustände farblos. Sie werden als *Gluebälle* bezeichnet. Ein eichinvarianter Zustand wird aus dem Eichpotential durch ein pfadgeordnetes Produkt entlang eines (beliebigen) geschlossenen Weges gebildet. Entsprechend wählt man für einen *Glueballoperator*

$$\Phi(t) = \int d^3\boldsymbol{x}\, \phi(\boldsymbol{x}, t) f(\boldsymbol{x})\,, \tag{6.13}$$

der sensitiv auf den gesuchten Glueballzustand sein soll, lokal eine geschlossene Kombination $\phi(x)$ von Linkvariablen $U_{x,\mu}$. Die durch den gewählten

Weg gegebenen Quantenzahlen (J^{PC}, d.h Spin, Partität und Ladungskonjugation) von $\phi(x)$ müssen mit denen des betrachteten Glueballzustands $|\psi\rangle$ übereinstimmen,

$$\langle \text{Vakuum}|\Phi|\psi\rangle \neq 0\,. \tag{6.14}$$

Dabei ist die Funktion $f(\boldsymbol{x})$ entscheidend dafür, wie groß der tatsächliche Überlapp von $\langle$Vakuum$|\Phi$ mit dem Glueballzustand ist. Existieren mehrere Zustände mit den gleichen Quantenzahlen, muß $f(\boldsymbol{x})$ sorgfältig gewählt werden, um den Überlapp mit den nicht erwünschten Zuständen zu minimieren.[4] Für den so gewählten Glueballoperator $\Phi(t)$ betrachtet man eine Korrelationsfunktion

$$C(t) = \langle \tilde{\Phi}(t)\tilde{\Phi}(0)\rangle\,, \quad \tilde{\Phi}(t) \equiv \Phi(t) - \langle\Phi\rangle\,. \tag{6.15}$$

Die effektive Masse m_{g} des Glueballs läßt sich dann aus dem exponentiellen Abfall von $C(t)$ bei großen Werten von t ablesen,

$$C(t) \sim \exp(-m_{\mathrm{g}}t)\,, \quad t \gg m_{\mathrm{g}}^{-1}\,. \tag{6.16}$$

In [Tep87a] und [Tep87b] wurde von Teper eine sehr erfolgreiche Klasse von Glueballoperatoren vorgeschlagen. Dazu werden zusammengesetzte („geblockte“) Linkvariable

$$U^{(n)}_{x,i} = \mathcal{N}\Big(U^{(n-1)}_{x+\hat{\imath},i}U^{(n-1)}_{x,i} + \sum_{k\neq\pm i} U^{(n-1)\dagger}_{x+2\hat{\imath},k}U^{(n-1)}_{x+\hat{k}+\hat{\imath},i}U^{(n-1)}_{x+\hat{k},i}U^{(n-1)}_{x,k}\Big) \tag{6.17}$$

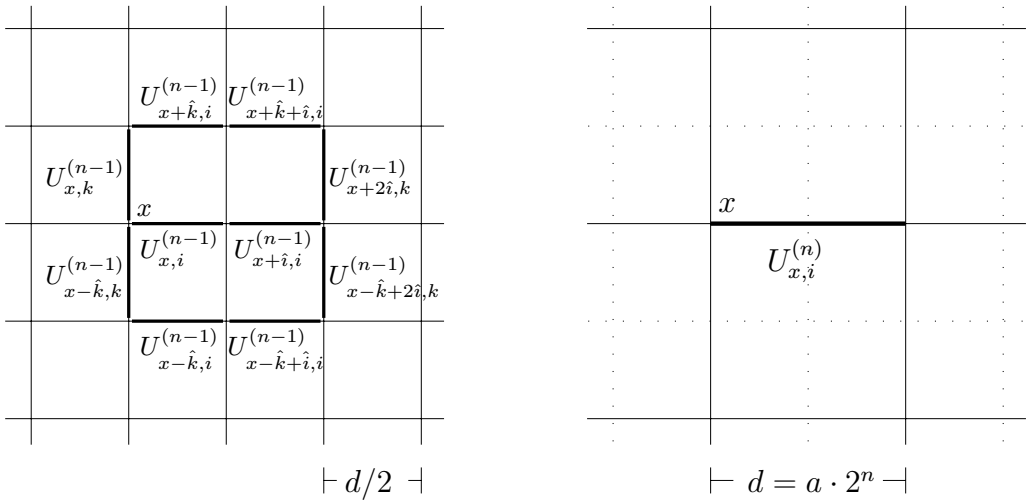
definiert. Die Summe läuft über positive und negative Raumrichtungen mit $U_{x,-i} = U^{\dagger}_{x-\hat{\imath},i}$. Der Normierungsfaktor $\mathcal{N}$ stellt sicher, daß $U^{(n)}_{i,x}U^{(n)\dagger}_{i,x} = 1$. Die zusammengesetzten Linkvariablen $U^{(n)}_{x,i}$ können als Links eines gröberen Gitters der Größe $(N_{\mathrm{s}}/2^n)^3 \times N_{\mathrm{t}}$ betrachtet werden. Dabei beschreibt n den *blocking level*, also wie oft die Vorschrift (6.17) iterativ angewandt wurde. Elementare Links haben $n = 0$. In Abbildung 6.1 ist die Definition der geblockten Links für zwei räumliche Dimensionen graphisch dargestellt.

Die Glueballoperatoren für die tiefstliegenden Zustände 0^{++} und 2^{++} werden dann mit Hilfe von Plaquetten $P^{(n)}_{x,ik}$ aus zusammengesetzten Links (6.17) definiert, wobei sich die Spinquantenzahlen aus den Darstellungen der hyperkubischen Gruppe bestimmen,

$$\Phi^{0^{++}}(t) = \mathrm{tr}\sum_{\boldsymbol{x}}\Big(P^{(n)}_{12}(\boldsymbol{x},t) + P^{(n)}_{23}(\boldsymbol{x},t) + P^{(n)}_{13}(\boldsymbol{x},t)\Big)\,, \tag{6.18}$$

$$\Phi^{2^{++}}(t) = \mathrm{tr}\sum_{\boldsymbol{x}}\Big(P^{(n)}_{12}(\boldsymbol{x},t) - P^{(n)}_{13}(\boldsymbol{x},t)\Big)\,. \tag{6.19}$$

[4] So trägt z.B. der Glueballzustand 0^{++} die gleichen Quantenzahlen wie das Vakuum.



blocking level $n-1$ blocking level n

Abb. 6.1: Zweidimensionales Beispiel für den Übergang von einem $(n-1)$-fach geblockten Gitter zu einem n-fach geblockten Gitter.

In unserer Arbeit [LS00b] haben wir für alle Rechnungen einen blocking level $n = 2$ verwendet. Die Simulationen fanden auf einem $N_\mathrm{s} = 8, N_\mathrm{t} = 16$ Gitter statt. Es wurde der in Abschnitt 2.3.2 vorgestellte heatbath-Algorithmus benutzt, um eine Gewichtung mit der Wilson-Wirkung (2.52) zu erreichen. Bei den betrachteten Werten von β bis zu 2.5 macht sich die endliche Gitterausdehnung natürlich bemerkbar. Da es uns aber nicht um Hochpräzisionsmessung der Glueballmassen ging, sondern vielmehr um einen Vergleich zwischen der vollen Theorie und der $SO(3)$-gekühlten, ist dies für unsere Zwecke nicht wesentlich. Nach Anfangsthermalisierung wurde in 15000 Messungen, getrennt durch jeweils 10 sweeps zur Reduzierung von Autokorrelationen, eine Abschätzung für $C(t)$ gewonnen. Die Meßwerte bei $t = a, \ldots, 4a$ zeigen deutlich den exponentiellen Abfall (6.16). Um t in physikalischen Einheiten darzustellen, benutzen wir die β-Abhängigkeit des Gitterabstandes a (vgl. Abschnitt 2.3.3)

$$\sigma a^2(\beta) = 0.12 \exp\left(-\frac{6\pi^2}{11}(\beta - 2.3)\right) \tag{6.20}$$

mit einer string tension von $\sigma = (440\ \mathrm{MeV})^2$ als Referenzskala.

Als Erwartungswert eines zusammengesetzten Feldes hat $C(0)$ zusätzliche Divergenzen, selbst wenn $C(t \neq 0)$ auf endliche Werte renormiert wurde

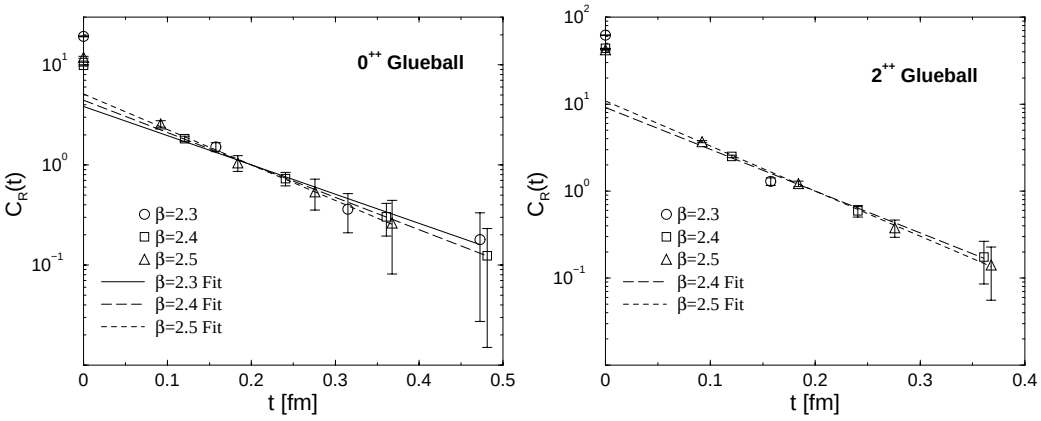


Abb. 6.2: Renormierte Korrelationsfunktion $C_{\mathrm{R}}(t)$ für Glueballoperatoren des 0^{++} (6.18) bzw. 2^{++} (6.19) Glueballzustands. Gemessen mit vollen (ungekühlten) $SU(2)$-Konfigurationen auf einem $8^3 \times 16$ Gitter.

[CDJ77]. Daher ist es nicht sinnvoll $C(0)$ auf 1 zu normieren. Stattdessen fordern wir

$$C_{\mathrm{R}}(t) = Z_\Phi^2\, C(t)\,, \quad C_{\mathrm{R}}(t_0) = 1 \tag{6.21}$$

an einem Renormierungspunkt t_0. Wir haben $t_0 = 0.2$ fm gewählt, dabei wurde $C(t_0)$ aus einer Interpolation der gemessenen $C(t)$ bestimmt. Das renormierte Resultat $C_{\mathrm{R}}(t)$ ist in Abbildung 6.2 für $\beta = 2.3, 2.4, 2.5$ dargestellt. Wie erwartet zeigt $C_{\mathrm{R}}(0)$ eine deutliche β-Abhängigkeit aufgrund der zusätzlichen Divergenzen als zusammengesetzer Operator. Die Exponentialfits für die verschiedenen β-Werte stimmen in guter Näherung überein. Wir erhalten aus Mittelung über die drei Fits eine renormierungsgruppeninvariante Masse

$$m_{0^{++}} \approx (1.67 \pm 0.11)\ \mathrm{GeV} \quad \text{bzw.} \quad m_{2^{++}} \approx (2.30 \pm 0.08)\ \mathrm{GeV}\,. \tag{6.22}$$

Die Fehler in (6.22) beinhalten sowohl statistische als auch systematische Fehler durch die Extrapolation zum Kontinuumslimes. Die Massen (6.22) sind konsistent mit den Daten aus [SF99] (Gluebälle in maximal abelscher Eichung) und [Tep87a],[Tep87b]. Resultate für die Eichgruppe $SU(3)$ findet man in [MT89].

6.2.1 Gluebälle nach $SO(3)$-Kühlung

Wenden wir uns nun den 0^{++} und 2^{++} Glueballmassen in der gemäß (6.6) und (6.8) $SO(3)$-gekühlten Theorie zu. Wir wählen Kühlskalen $\kappa = \sqrt{\sigma} =$

440 MeV bzw. $\kappa = \sqrt{\sigma/2} \approx 311$ MeV. Die (dimensionsbehaftete) lokale coset-Wirkungsdichte (vgl. (6.9)) ist dann kleiner als $8\kappa^4 \approx 0.3$ GeV^4 bzw. 0.075 GeV^4. Bei diesen Werten von κ ist die $SU(2)$-Wirkungsdichte größtenteils schon um die zweidimensionalen c-Vortexflächen konzentriert [LIR00]. Als Abschätzung für die Ausdehnung eines Glueballs können wir die Korrelationslänge von $C_{\mathrm{R}}(t)$, also die inverse Masse m_{g}^{-1} verwenden. So können wir z.B. das Volumen des 0^{++} Glueballs grob auf die Größenordnung $(1.5\ \mathrm{GeV})^{-3} \approx 0.3\ \mathrm{GeV}^{-3}$ abschätzen. Die nach dem Kühlen verbliebene coset-Wirkungsdichte entspräche dann nur einer Masse von etwa 0.09 GeV bzw. 0.02 GeV. Um für die Glueballmassen Werte von der Größenordnung 1.5 GeV zu bekommen, wird auf jeden Fall die hohe $SU(2)$-Wirkungsdichte der c-Vortexkonfigurationen benötigt. Spielt jedoch das Zentrum der $SU(2)$, das diese von einer $SO(3)$-Theorie unterscheidet, keine Rolle, erwartet man nach dieser Abschätzung keine gute Reproduktion der Glueballmassen der ungekühlten Theorie.

Mit 5000 Messungen haben wir analog zum ungekühlten Fall die renormierte Korrelationsfunktion $C_{\mathrm{R}}(t)$ bestimmt. Das Ergebnis ist in Abbildung 6.3 dargestellt. Wieder sind die Werte aus den Simulationen mit verschiedenen β mit einem einzigen exponentiellen Abfall (6.16) konsistent. Das zeigt, daß das richtige Skalenverhalten im Kontinuumslimes vorliegt. Die durchgezogene Linie zeigt den Fit an die Daten der vollen ungekühlten Theorie bei $\beta = 2.4$ (vgl. Abb. 6.2). Die Massen für die 0^{++} und 2^{++} Gluebälle nach $SO(3)$-Kühlung stimmen mit denen in der ungekühlten Theorie im Rahmen der numerischen Genauigkeit überein. Allgemein findet man, daß die Meßwerte nicht von der Wahl der Kühlskala abhängen. Diese Ergebnisse unterstützen die Vorstellung, daß der coset-Anteil der Eichfelder nur einen kleinen Einfluß auf die 0^{++} und 2^{++} Glueballmassen hat.

Ein Vergleich der Werte von $C_{\mathrm{R}}(0)$ in Abb. 6.2 und Abb. 6.3 zeigt, daß diese durch den Kühlprozeß stark beeinflußt werden. Das ist zu erwarten, da durch die $SO(3)$-Kühlung die UV-Divergenzen des zusammengesetzten Operators abgemildert werden. Denn die Divergenzen resultieren teilweise aus coset-Feldern mit hoher coset-Wirkungsdichte.

Eine weitere Beobachtung ist, daß der statistische Fehler in beiden Abbildungen gleich groß ist, obwohl für die ungekühlten Konfigurationen dreimal soviele Messungen vorgenommen wurden. Grund dafür ist der bessere Überlapp (6.14) der Glueballoperatoren Φ mit den tatsächlichen Glueballzuständen $|\psi\rangle$ in den gekühlten Konfigurationen. Um eine Abschätzung für den Überlapp zu erhalten, kann das Verhältnis $C(2a)/C(0)$ betrachtet werden [Tep87a].

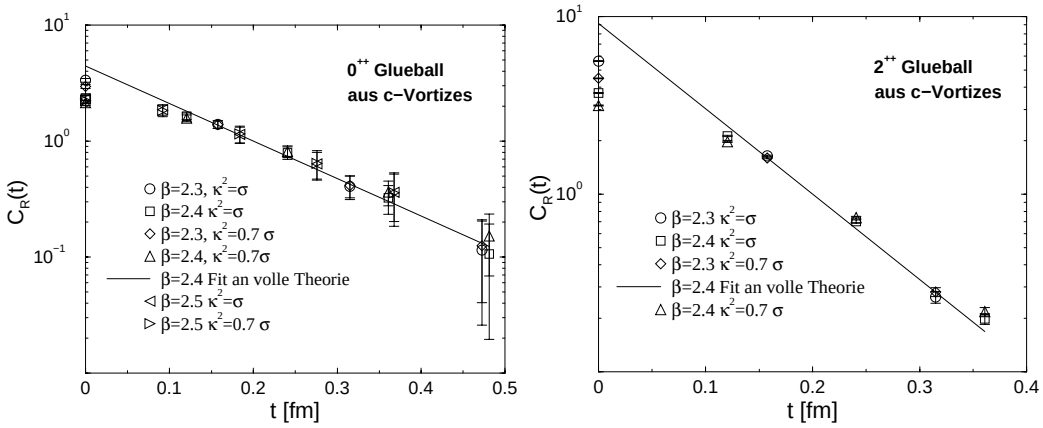


Abb. 6.3: Renormierte Korrelationsfunktion $C_{\mathrm{R}}(t)$ für Glueballoperatoren des 0^{++} (6.18) bzw. 2^{++} (6.19) Glueballzustands. Gemessen mit $SO(3)$-gekühlten $SU(2)$-Konfigurationen auf einem $8^3 \times 16$ Gitter (Kühlskala κ).

Wir finden bei $\beta = 2.4$ und $\kappa^2 = \sigma$

$$\left.\frac{C(2a)}{C(0)}\right|_{\mathrm{vortex}} \approx 4.6 \left.\frac{C(2a)}{C(0)}\right|_{\mathrm{voll}} \tag{6.23}$$

für den 0^{++} Glueball und ebenso für den 2^{++} Glueball

$$\left.\frac{C(2a)}{C(0)}\right|_{\mathrm{vortex}} \approx 13.9 \left.\frac{C(2a)}{C(0)}\right|_{\mathrm{voll}} . \tag{6.24}$$

Für beide Gluebälle ist der Überlapp in der $SO(3)$-gekühlten Theorie deutlich größer.

6.3 Zusammenfassung und Ausblick

Durch Wegkühlen des $SO(3)$-Anteils der Linkkonfigurationen einer $SU(2)$ Gittereichtheorie erhält man eine eichinvariante Struktur dünner Vortizes, die auf dem Zentrum der $SU(2)$ beruht. Diese c-Vortizes spielen keine Rolle für Confinement. Sie reproduzieren nicht die string tension der vollen Theorie, sondern führen zu einer verschwindenden string tension [LIR00]. Trotzdem kommt den c-Vortizes physikalische Bedeutung zu, da sie eine physikalische

Wirkungsdichte tragen. Diese gibt einen Beitrag zur Operatorprodukentwicklung in Form eines Kondensats mit Massendimension vier [LIR00].

Eine Untersuchung der 0^{++} und 2^{++} Glueballmassen [LS00b] in der vollen und der $SO(3)$-gekühlten Theorie zeigt, daß die Massen der Gluebälle durch die nach Kühlung verbliebenen c-Vortexkonfigurationen gut reproduziert werden.

Diese Ergebnisse bilden einen weiteren Baustein zur Beantwortung der Frage nach dem Unterschied des Kontinuumslimes einer $SU(2)$ bzw. $SO(3)$ Gittereichtheorie.

Kapitel 7

Eine neue Alternative: Die m-Eichung

In Abschnitt 2.4 haben wir als Modell für die Realisierung von Confinement den dualen Supraleiter kennengelernt. In diesem Bild kondensieren magnetische Monopole, die bezüglich einer $U(1)$-Untergruppe der $SU(2)$-Eichgruppe definiert sind, und verhindern über einen dualen Meißner-Effekt das Propagieren der entsprechenden farbelektrischen Freiheitsgrade. Gitterrechnungen legen nahe, daß dieses Bild in abelschen Eichungen realisiert ist. Es bleibt jedoch ein Schönheitsfehler: Es existieren Zustände, die bezüglich der $U(1)$-Untergruppe neutral sind, aber trotzdem eine $SU(2)$-Farbladung tragen. Diese unterliegen im naiven dualen Supraleiter nicht dem Confinement. Um das Fehlen solcher farbigen Zustände im Teilchenspektrum zu erklären, muß das Bild des abelschen dualen Supraleiters erweitert werden.

Eine mögliche Vorstellung ist, daß in der vollen Theorie magnetische Monopole bezüglich jeder möglichen $U(1)$-Untergruppe existieren. Kondensation aller dieser Monopole sorgt dann für Confinement *aller* farbigen Zustände. Die spezielle Wahl der abelschen Eichung und der dazugehörigen Projektion sorgt dafür, daß sich eine Monopolsorte manifestiert. An Stelle dieser Vorstellung von „versteckten“ Monopolfreiheitsgraden kann man aber auch versuchen, eine *nichtabelsche* Version des dualen Supraleiters zu formulieren. Das war unsere Motivation, eine Verallgemeinerung der maximal abelschen Eichung zu betrachten [LS00a]. Die resultierende Eichung ist keine abelsche Eichung mehr, steht aber noch in engem Bezug zu diesen. Eine kontinuierliche Interpolation zur maximal abelschen Eichung ist möglich.

7.1 Definition der Eichung

Ziel der maximal abelschen Eichung (vgl. Abschnitt 2.4.3) ist es, das Eichpotential $A_\mu(x)$ an jedem Ort x und für jede Richtung μ durch eine Eichtrans-

formation $\Omega(x)$ so „abelsch wie möglich“ zu machen. Wenn wir im Fall der Eichgruppe $SU(2)$ die Einbettung der abelschen Untergruppe durch einen festen Farbvektor $m = m^a T^a$ mit $|m|^2 = m^a m^a = 1$ charakterisieren, erhalten wir als Eichbedingung

$$S_{\mathrm{MAG}}[A] = -\mu_{\mathrm{s}}^2 \int \mathrm{d}^4x \ \mathrm{tr}\,(A_\mu^\perp(x) A_\mu^\perp(x))\,, \quad S_{\mathrm{MAG}}[A^\Omega] \xrightarrow{\Omega} \min\,, \tag{7.1}$$

wobei

$$A_\mu^\perp(x) = -[m,[m,A_\mu(x)]] \tag{7.2}$$

den Anteil des Eichpotentials senkrecht zu m bezeichnet und μ_{s} eine Massenskala ist. Tatsächlich werden abelsche Eichtransformationen ($\sim m$) durch diese Bedingung nicht fixiert.

Wir verallgemeinern nun diese Eichfixierung, indem wir eine Ortsabhängigkeit des Vektors m zulassen, die nicht von außen vorgegeben wird: $m \to m(x)$. Die Minimierung in (7.1) soll dann nicht nur bezüglich der Eichtransformation $\Omega(x)$ stattfinden, sondern auch bezüglich der Wahl eines Vektors $m(x)$ an jedem Raum-Zeit-Punkt,

$$S_{m\mathrm{G}}[A,m] = -\mu_{\mathrm{s}}^2 \int \mathrm{d}^4x \ \mathrm{tr}\,(A_\mu^{\perp_x}(x) A_\mu^{\perp_x}(x))\,, \quad S_{m\mathrm{G}}[A^\Omega,m] \xrightarrow{\Omega,m} \min\,. \tag{7.3}$$

Wie durch $\perp_x$ angedeutet, muß in (7.2) jetzt die Raum-Zeit-Abhängigkeit von $m(x)$ berücksichtigt werden. Der durch diese Eichbedingung fixierten Eichung geben wir den Namen *m-Eichung*. Da die Einbettung der $U(1)$ in die $SU(2)$ jetzt abhängig vom Raum-Zeit-Punkt x ist, bleibt keine abelsche Resteichfreiheit wie in der maximal abelschen Eichung.[1] Die m-Eichung ist daher *keine* abelsche Eichung.

7.1.1 Untersuchung der Eichfixierung

Der Vektor[2] $m(x)$ entspricht *nicht* einem von außen zusätzlich eingeführten Freiheitsgrad. Für eine feste Konfiguration $A_\mu(x)$ wird durch Minimierung von $S_{m\mathrm{G}}[A,m] \geq 0$ bezüglich m eine funktionale Abhängigkeit $m[A]$ impliziert. Dazu schreiben wir

$$S_{m\mathrm{G}}[A,m] = \mu_{\mathrm{s}}^2 \int \mathrm{d}^4x \ \mathrm{tr}\,(m(x)[A_\mu(x),[A_\mu(x),m(x)]])\,. \tag{7.4}$$

[1] Unter einer Eichtransformation $g(x) = \exp(-\alpha(x)m(x))$, wie man sie in Analogie zur abelschen Resteichfreiheit der maximal abelschen Eichung ansetzen könnte, bleibt das eichfixierende Funktional (7.3) nicht invariant.

[2] Genaugenommen ist das Vorzeichen von m an jedem Raum-Zeit-Punkt durch die Eichbedingung (7.3) nicht festgelegt. Daher ist $m(x) \in \mathbb{R}P_2$ eher als Richtungsfeld aufzufassen.

Dieser Ausdruck wird minimal bezüglich m, wenn m die Eigenwertgleichung

$$-[A_\mu(x),[A_\mu(x),m(x)]] = \lambda(x)m(x)\,, \tag{7.5}$$

erfüllt. Dabei muß

$$\lambda(x) = -2\,\mathrm{tr}\,(A_\mu^{\perp x}(x)A_\mu^{\perp x}(x)) \geq 0 \tag{7.6}$$

der kleinste der drei Eigenwerte sein. Ist $m[A]$ auf diese Weise als Eigenvektor von (7.5) zum kleinsten Eigenwert $\lambda_{\min}$ bestimmt, läßt sich die Eichbedingung schreiben als

$$S_{m\mathrm{G}}[A^\Omega, m[A^\Omega]] = \frac{\mu_{\mathrm{s}}^2}{2}\int \mathrm{d}^4x\,\lambda_{\min} \xrightarrow{\Omega} \min\,. \tag{7.7}$$

Die zwei künstlich eingeführten Freiheitsgrade des Einheitsvektors $m(x)$ sind jetzt wieder fixiert. Im Prinzip kann die Eichbedingung nun ohne $m(x)$ formuliert werden. Für eine allgemeine Konfiguration $A_\mu(x)$ wird man allerdings keinen expliziten Ausdruck für die funktionale Abhängigkeit $m[A]$ angeben können. Trotzdem können wir mit den Mitteln der Störungstheorie den Einfluß infinitesimaler Eichtransformationen $\Omega = \exp(-\theta) = \mathbb{1} - \theta + \frac{1}{2}\theta^2 + \mathcal{O}(\theta^3)$ auf die Eigenvektoren und Eigenwerte von (7.5) untersuchen.

Für den Operator

$$\hat{H} = -[A_\mu^\Omega,[A_\mu^\Omega,\cdot]] \equiv \hat{H}^{(0)} + \hat{H}^{(1)} + \hat{H}^{(2)} + \mathcal{O}(\theta^3) \tag{7.8}$$

finden wir durch Einsetzen von

$$A_\mu^\Omega(x) = A_\mu(x) + [D_\mu(A(x)),\theta(x)] + \frac{1}{2}\Big[[D_\mu(A(x)),\theta(x)],\theta(x)\Big] + \mathcal{O}(\theta^3) \tag{7.9}$$

für die jeweilige Ordnung in θ

$$\hat{H}^{(0)} = -[A_\mu,[A_\mu,\cdot]]\,, \tag{7.10}$$

$$\hat{H}^{(1)} = -[[D_\mu,\theta],[A_\mu,\cdot]] - [A_\mu,[[D_\mu,\theta],\cdot]]\,, \tag{7.11}$$

$$\hat{H}^{(2)} = -[[D_\mu,\theta],[[D_\mu,\theta],\cdot]] \tag{7.12}$$

$$-\frac{1}{2}[[[D_\mu,\theta],\theta],[A_\mu,\cdot]] - \frac{1}{2}[A_\mu,[[[D_\mu,\theta],\theta],\cdot]]\,. \tag{7.13}$$

Die ungestörten Eigenwerte $\lambda_i^{(0)}$ und Eigenvektoren m_i sind definiert durch

$$\hat{H}^{(0)}m_i = \lambda_i^{(0)}m_i\,,\quad i=1,2,3\,,\quad \lambda_1^{(0)} \geq \lambda_2^{(0)} \geq \lambda_3^{(0)} \geq 0\,. \tag{7.14}$$

Für die Eigenwertkorrektur in erster Ordnung Störungstheorie findet man (siehe z.B. [Sak94])

$$\lambda_i^{(1)} = -2\,\mathrm{tr}\,(m_i \hat{H}^{(1)} m_i) = 4\,\mathrm{tr}\,([D_\mu, A_\mu^{ii}]\theta) - 4\partial_\mu\,\mathrm{tr}\,(A_\mu^{ii}\theta)\,. \tag{7.15}$$

Dabei definieren wir

$$A_\mu^{ij} = -[m_i, [m_j, A_\mu]]\,. \tag{7.16}$$

Insbesondere ist daher A_μ^{ii} der Anteil des Eichpotentials senkrecht zu m_i, vgl. (7.2). Erfüllt die ungestörte Konfiguration $A_\mu(x)$ die m-Eichbedingung, muß wegen (7.7) das Integral über die Korrektur zum kleinsten Eigenwert in erster Ordnung für beliebiges $\theta(x)$ verschwinden,

$$\int \mathrm{d}^4x\,\lambda_3^{(1)} = 0\,. \tag{7.17}$$

Dadurch ist sichergestellt, daß $S_{m\mathrm{G}}[A, m[A]]$ extremal ist.

Die totale Ableitung in (7.15) trägt nicht zum Integral bei und wir erhalten als Eichfixierungsgleichung

$$[D_\mu(A(x)), A_\mu^{33}(x)] = 0\,. \tag{7.18}$$

Dabei ist zu beachten, daß in dieser Bedingung implizit auch die Forderung enthalten ist, daß $m_3[A]$ Eigenvektor von $\hat{H}^{(0)}$ zum kleinsten Eigenwert ist.

In der maximal abelschen Eichung, bei der z.B. $m = T^3$ fest vorgegeben ist, entspricht (7.18) zwei Bedingungen $[D_\mu, A_\mu^{(\mathrm{ch})}] = 0$ mit $A_\mu^{(\mathrm{ch})} = A_\mu^{\bar{a}} T^{\bar{a}}$, $\bar{a} = 1, 2$. Eine $U(1)$-Untergruppe bleibt unfixiert. In der m-Eichung variiert die Einbettung der $U(1)$ entsprechend der Richtung von m abhängig vom Raum-Zeit-Punkt. Dabei wird die Abhängigkeit $m(x)$ durch die Feldkonfiguration $A_\mu(x)$ bestimmt. Wegen dieser zusätzlichen impliziten Abhängigkeit $m[A]$ wird (7.18) im allgemeinen drei unabhängige Bedingungen darstellen.[3] Die Eichfreiheit ist daher vollständig fixiert.[4]

7.2 Gitterresultate

Um die Eigenschaften der m-Eichung und insbesondere des Vektorfeldes $m(x)$ weiter zu untersuchen, betrachten wir die entsprechende Eichfixierung auf

[3] Insbesondere läßt eine Eichtransformation $g(x) = \exp(-\alpha(x)m(x))$, wie man sie in Analogie zur abelschen Resteichfreiheit der maximal abelschen Eichung ansetzen könnte, das Eichfixierungsfunktional (7.3) nicht invariant.

[4] Um das zu überprüfen, kann aus der Eigenwertkorrektur zum kleinsten Eigenwert in zweiter Ordnung Störungstheorie die Faddeev-Popov-Matrix $M^{ab}(x,y) = \frac{\delta S_{m\mathrm{G}}[A^\Omega]}{\delta\theta^a(x)\delta\theta^b(y)}\Big|_{\theta=0}$ bestimmt werden.

dem Gitter. Für die folgenden Gittermessungen mit der Wilson-Wirkung (2.52) wurde ein Gitter mit 12^4 Gitterpunkten verwendet. Das scaling window (vgl. Abschnitt 2.3.3) liegt bei $\beta \in [2.1, 2.5]$. Um das Gitter zu thermalisieren, also eine Verteilung der Links gemäß der Wirkung zu erreichen, wurden 200 heatbath Schritte (vgl. Abschnitt 2.3.2) vor Start der Messungen durchgeführt.

Die Eichbedingung für die m-Eichung läßt sich auf einem Gitter mit n_L Linkvariablen $U_{x,\mu}$ als direkte Verallgemeinerung der Gitterdefinition (2.105) der maximal abelschen Eichung formulieren [LS00a],

$$S_{m\mathrm{G}}[U] = -\frac{2}{n_L} \sum_{x,\mu} \mathrm{tr}\,(U_{x,\mu} m_x U_{x,\mu}^\dagger m_x)\,, \quad S_{m\mathrm{G}}[U^\Omega] \xrightarrow{\Omega,m} \max\,. \tag{7.19}$$

Wieder erfolgt die Maximierung sowohl bezüglich der Wahl der Eichtransformation Ω_x an jedem Gitterpunkt x,

$$U_{x,\mu}^\Omega = \Omega_{x+\hat{\mu}} U_{x,\mu} \Omega_x^\dagger\,, \tag{7.20}$$

als auch bezüglich der Wahl eines Einheitsvektors m_x an jedem Gitterpunkt,

$$m_x = m_x^a T^a\,, \quad |m_x|^2 = m_x^a m_x^a = 1\,. \tag{7.21}$$

Die Eichbedingung (7.19) läßt Eichtransformationen aus dem Zentrum $\mathbb{Z}_2 = \{\pm\mathbb{1}\}$ der Eichgruppe $SU(2)$ unfixiert. Auch der Einheitsvektor m_x ist (wie im Kontinuum) nur bis auf Multiplikation mit -1 bestimmt, ist also ein Element von $\mathbb{R}P_2 \simeq S_2/\mathbb{Z}_2$.

Nun führen wir für die Linkvariablen eine Zerlegung

$$U_{x,\mu} = u_{x,\mu}^0 \mathbb{1} + U_{x,\mu}^\parallel + U_{x,\mu}^\perp \tag{7.22}$$

ein, wobei sich parallel und senkrecht auf den Vektor m_x am Gitterpunkt x beziehen, also

$$U_{x,\mu}^\parallel = -2 m_x\,\mathrm{tr}\,(U_{x,\mu} m_x)\,, \quad U_{x,\mu}^\perp = -[m_x, [m_x, U_{x,\mu}]]\,. \tag{7.23}$$

Dann läßt sich (7.19) umschreiben in

$$S_{m\mathrm{G}}[U] = 1 - \frac{1}{n_L} \sum_{x,\mu} \mathrm{tr}\,((U_{x,\mu}^\perp)^\dagger U_{x,\mu}^\perp)\,. \tag{7.24}$$

Der zu m_x senkrechte Anteil jedes Links $U_{x,\mu}$ soll also minimal werden. Analog zur Projektion auf die unfixierte $U(1)$ in abelschen Eichungen führen wir auch in der m-Eichung eine Projektion ein. Diese projiziert die gemäß (7.19)

eichfixierten Links $U_{x,\mu}$ auf die Richtung des Vektors m_x, setzt also $U^{\perp}_{x,\mu}$ auf Null. Für den projizierten Link $\hat{U}_{x,\mu}$ finden wir

$$\hat{U}_{x,\mu} = \mathcal{N}(u^0_{x,\mu}\mathbb{1} + U^{\parallel}_{x,\mu})\,, \tag{7.25}$$

wobei der Normierungsfaktor aus $\hat{U}^{\dagger}_{x,\mu}\hat{U}_{x,\mu} = \mathbb{1}$ bestimmt wird. Wegen (7.24) ist der von $S_{m\mathrm{G}}[U]$ erreichte maximale Wert $S^{\max}_{m\mathrm{G}}[U]$ dabei ein Maß für den Fehler, der durch die Projektion einer Linkkonfiguration entsteht. Im Fall $S^{\max}_{m\mathrm{G}}[U] = 1$ wäre für alle Links $U^{\perp}_{x,\mu} = 0$ und daher $\hat{U}_{x,\mu} = U_{x,\mu}$. Die Projektion wäre exakt. Im anderen Extremfall, $S^{\max}_{m\mathrm{G}}[U] \to -1$, wäre $U^{\parallel}_{x,\mu} = 0$ und $U^{\perp}_{x,\mu} \approx U_{x,\mu}$. Bei Projektion ginge die gesamte Information über den ursprünglichen Link verloren. Durch die im Vergleich zur maximal abelschen Eichung neu hinzukommende Freiheit, m_x an jedem Punkt x so zu wählen, daß die vernachlässigten $U^{\perp}_{x,\mu}$ möglichst klein sind, wird der Fehler, den die Projektion für eine generische Observable bewirkt, wesentlich kleiner sein. Im allgemeinen kann ein Fehler jedoch nicht völlig vermieden werden, da zu jedem Gitterpunkt und damit zu jedem m_x *vier* Linkvariablen mit i.a. verschiedenen Farbraumrichtungen gehören.

Der geringere Fehler wird erreicht durch eine höhere Zahl von Freiheitsgraden. Bei abelscher Projektion wird die Konfiguration von $12 = 4_{\mathrm{Lorentz}} \cdot 3_{SU(2)} = 9_{\mathrm{inv}} + 3_{\mathrm{eich}}$ Freiheitsgraden auf $4 = 4_{\mathrm{Lorentz}} \cdot 1_{U(1)} = 3_{\mathrm{inv}} + 1_{\mathrm{eich}}$ Freiheitsgrade pro Gitterpunkt reduziert. In der m-Eichung haben wir nach Projektion auf die jeweilige Richtung des m-Vektors $6 = 4_{\mathrm{Lorentz}} \cdot 1_{U^{\parallel}} + 2_m$ Freiheitsgrade pro Gitterpunkt. Vier beschreiben die projizierten Links und zwei die Richtung des m-Vektors.

In der Gitterversion der m-Eichung läßt sich numerisch untersuchen, ob diese sechs Freiheitsgrade noch eine (kontinuierliche) Resteichfreiheit enthalten. Zu diesem Zweck fixiert man für eine Konfiguration die m-Eichung, bestimmt also m_x und Ω_x, und führt anschließend an allen Linkvariablen zufällige Eichtransformationen $g_x = \exp(-\theta_x) \approx 1 - \theta_x$ mit $\theta_x \ll 1$ durch. Erneutes Fixieren der m-Eichung liefert wieder das ursprüngliche Resultat für m_x und Ω_x [LS00a]. Das zeigt, daß das (lokale[5]) Maximum von $S_{m\mathrm{G}}$ (7.19) stabil gegen kleine Eichtransformationen ist. Es gibt für generische Linkkonfigurationen keine flachen Richtungen im Konfigurationsraum von $m(x), \Omega(x)$, d.h. keine (kontinuierliche) Resteichfreiheit.

[5] Wie bei allen Variationseichungen erwartet man auch in der m-Eichung ein praktisches Gribov-Problem: Der Algorithmus zur Maximierung von (7.19) findet eventuell nur ein lokales Maximum.

β	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5
$\omega[m-\text{proj.}]$	0.932(6)	0.934(4)	0.936(3)	0.938(3)	0.940(0)
$\omega[\text{ab. proj.}]$	0.67(0)	0.68(4)	0.70(2)	0.72(1)	0.73(8)

Tab. 7.1: Die Qualität der Projektion ω als Funktion von β für m-Projektion und abelsche Projektion (maximal abelsche Eichung).

7.2.1 Qualität der Projektion

Um die Qualität der Projektion (7.25), bzw. den Fehler der durch die Projektion für eine generische Observable entsteht, quantitativ zu untersuchen, definieren wir die Größe

$$\omega \equiv \langle S_{m\mathrm{G}}^{\max}[U] \rangle_U \,, \tag{7.26}$$

wobei $\langle \cdot \rangle_U$ für eine Monte-Carlo-Mittelung über alle Linkkonfigurationen steht. Einer exakten Projektion entspricht $\omega = 1$, mit sinkendem ω sinkt die Qualität.

In Tabelle 7.1 sind die Ergebnisse von ω-Messungen für verschiedenen Werte des Kopplungsparameters β dargestellt. Dabei haben wir die abelsche Projektion nach Fixierung der maximal abelschen Eichung den Werten der m-Projektion gegenübergestellt.

Wie erwartet ist die Qualität in der m-Projektion deutlich höher als bei abelscher Projektion nach maximal abelscher Eichung. Nur ca. 3% der in den Linkvariablen enthaltenen Information geht durch Projektion verloren[6] im Gegensatz zu ca. 15% im Fall der abelschen Projektion nach maximal abelscher Eichung. Welche Rolle ω in einer konkreten Messung spielt, hängt von der betrachteten Observable und der Energieskala ab. Nicht jede Observable wird von allen physikalischen Freiheitsgraden gleichermaßen abhängen. Sind die nach Projektion verbliebenen Freiheitsgrade genau die für diese Observable relevanten, kann auch bei kleinem ω der Wert der Observable mit der vollen Theorie übereinstimmen. Das ist die Motivation für Projektionsverfahren. Man versucht, eine einfachere, reduzierte Theorie zu erhalten, die die volle Theorie in dem interessierenden Bereich gut beschreibt. Erinnern wir uns an die Abschnitte 2.4 und 2.5: Dort war die Idee das Infrarotverhalten, insbesondere das Phänomen des Confinement, der vollen $SU(2)$ Eichtheorie durch effektive abelsche bzw. Zentrumseichtheorien zu beschreiben. Auf der anderen Seite setzt der Wert von ω eine obere Grenze für die möglichen Abweichungen der projizierten Theorie von der vollen Theorie.

[6] Beachte $\omega \in [-1, 1]$.

7.2.2 Creutz ratios

Durch die zusätzlichen Freiheitsgrade in der m-projizierten Theorie haben wir eine sehr hohe Qualität der Projektion erreicht. Wie in der maximal abelschen Eichung und anschließender abelscher Projektion sollte also auch hier das Infrarotverhalten des Potentials zwischen statischen Quarks gut beschrieben werden. Aufgrund des sehr hohen ω kann man sogar erwarten, daß die m-Projektion auch in anderen Bereichen und für andere Observable die Ergebnisse der vollen Theorie gut reproduziert. Andererseits wird durch die zusätzlichen Freiheitsgrade dann möglicherweise weniger klar erkennbar, welche der Freiheitsgrade speziell für Confinement verantwortlich sind.

Um das Potential zwischen statischen Quarks in der effektiven m-projizierten Theorie zu messen, haben wir, wie in Abschnitt 2.3.4 beschrieben, die Creutz ratios $\hat{\chi}(k,k)$ (2.82) für Kopplungsparameter β innerhalb des scaling windows bestimmt. Mit dem Ansatz $\mathcal{W}(j,k) = \exp(-k\hat{V}(j))$ (vgl. (2.80)) folgt $\hat{\chi}(k,k) = \hat{V}(k) - \hat{V}(k-1)$. Setzt man für das Potential eine Kombination aus Coulombpotential und linearem Potential $V(r) = \sigma r - \gamma/r$ an, bedeutet das

$$\hat{\chi}(k,k) = V'(r)a^2 = \left(\sigma + \frac{\gamma}{r^2(ka(\beta))}\right) \cdot a^2(\beta)\,, \quad r(ka) = \sqrt{k(k-1)}a\,. \tag{7.27}$$

Das Verhalten $a(\beta)$ haben wir in Abschnitt 2.3.3 hergeleitet. In Abbildung 7.1 ist die Ableitung des Potentials in Einheiten der string tension der vollen $SU(2)$ Eichtheorie dargestellt. Die aus den Creutz ratios der m-projizierten Konfigurationen bestimmten Meßwerte stimmen sehr gut mit dem Ansatz (7.27) überein, wobei die Parameter σ, γ aus einem Fit an die volle $SU(2)$ Gittertheorie gewonnen wurden. Im Vergleich dazu sind auch die Meßwerte der nach Fixierung der maximal abelschen Eichung abelsch projizierten Konfigurationen dargestellt. Wie schon in Abschnitt 2.4.4 festgestellt wurde, reproduzieren sie die string tension der vollen Theorie sehr gut: für große r liegen die Werte auf dem $SU(2)$-Fit. Die m-Projektion liefert zusätzlich auch eine gute Näherung für den Coulombanteil des Potentials für kleine Abstände.

7.2.3 Korrelationen zwischen m-Vektoren

Für eine feste Linkkonfiguration $\{U\}$ wird der Vektor m_x am Gitterpunkt x, der $S_{m\mathrm{G}}[U]$ minimiert, lokal aus den vier Links $U_{x,\mu}$ bestimmt. Da sich diese Links unter Eichtransformationen Ω gemäß (2.47) transformieren, wird durch

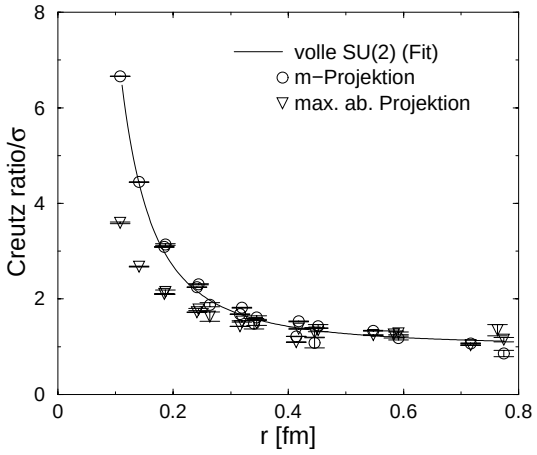


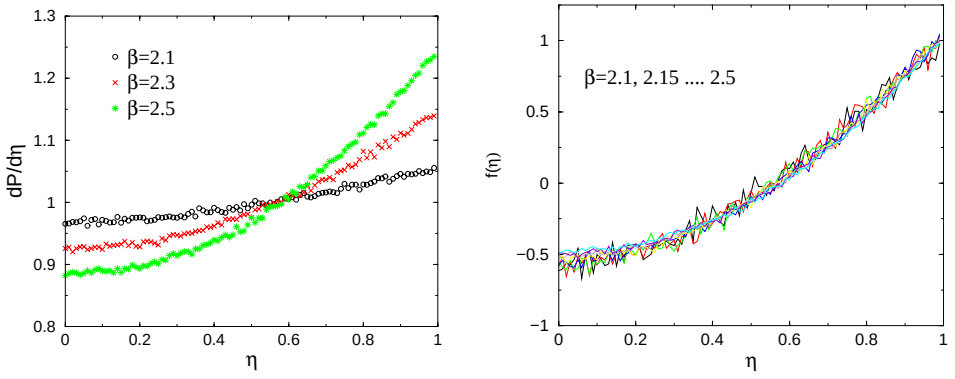
Abb. 7.1: Meßdaten für die Creutz ratios in Einheiten der $SU(2)$ string tension für m-Projektion und abelsche Projektion nach maximal abelscher Eichung (12^4 Gitter, $\beta = 2.1 \ldots 2.5$). Als durchgezogenen Linie ist ein Fit von (7.27) an die Daten der vollen $SU(2)$ Gittertheorie eingezeichnet.

die Minimierung von $S_{m\mathrm{G}}[U]$ bezüglich m und Ω jedoch eine Korrelation zwischen m-Vektoren an verschiedenen Gitterpunkten induziert. Um diese Korrelationen zu untersuchen, haben wir das Skalarprodukt

$$\eta(m_1, m_2) = |m_1^a m_2^a| \tag{7.28}$$

zwischen zwei benachbarten m-Vektoren numerisch untersucht. Die Betragstriche wurden eingeführt, da aufgrund der Invarianz von $S_{m\mathrm{G}}$ unter $m \to -m$ nur der spitze Winkel zwischen den Vektoren Bedeutung hat. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung $\mathrm{d}P/\,\mathrm{d}\eta$, ein bestimmtes Skalarprodukt η zu finden, ist in Abbildung 7.2a dargestellt. Eine zufällige Verteilung von Vektoren würde konstant $\mathrm{d}P/\,\mathrm{d}\eta = 1$ ergeben, alle Skalarprodukte wären gleich wahrscheinlich. Im Gegensatz dazu sehen wir für die m-Vektoren ein Maximum der Verteilung bei $\eta = 1$, also bei parallelen Vektoren. Es sind also Korrelationen zwischen den m-Vektoren vorhanden, sie streben danach, sich parallel auszurichten. Diese Korrelationen werden immer stärker für wachsendes β, je näher man also dem Kontinuumslimes $a \to 0$ ist. Das ist zu erwarten, wenn die m-Vektoren im Kontinuumslimes in ein glattes Vektorfeld übergehen sollen.

Für eine quantitative Interpretation der Wahrscheinlichkeitsverteilung führen



(a) (b)

Abb. 7.2: (a) Wahrscheinlichkeitsverteilung für das Skalarprodukt η (7.28) zwischen zwei benachbarten Farbvektoren m bei verschiendenen Werten von β. (b) Die Funktion $f(\eta)$ aus der Parameterisierung (7.29) hängt nicht von β ab.

wir die Parameterisierung

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\eta} = 1 + c \cdot \exp\left(-\frac{a(\beta)}{L}\right) f(\eta)\,, \quad \int_0^1 f(\eta)\,\mathrm{d}\eta = 0\,, \quad f(1) = 1 \tag{7.29}$$

ein. Dabei ist L die physikalische Korrelationslänge, die durch die Reichweite der Korrelationen bestimmt ist. Die Funktion $f(\eta)$ ist ein Formfaktor, und c ist ein Maß für die Stärke der Korrelationen. Entscheidend für diese Interpretation ist, daß die Konstanten L und c und auch die Funktion $f(\eta)$ innerhalb des scaling windows *unabhängig* von β sind. In Abbildung 7.2b ist die Funktion $f(\eta)$ für verschiedene Werte von β aufgetragen, alle Kurven liegen aufeinander. Der Vergleich von $a(\beta)/L$ mit dem aus Renormierungsgruppenbetrachtungen bekannten Verhalten (vgl. Abschnitt 2.3.3)

$$a(\beta) \approx 0.16\mathrm{fm} \cdot \exp\left(-\frac{3\pi^2}{11}\beta\right) \tag{7.30}$$

(Referenzskala $\sigma = (440\mathrm{MeV})^2$) ergibt (vgl. Abbildung 7.3)

$$L = 0.1(2)\mathrm{fm}\,, \quad c = 0.50(6)\,. \tag{7.31}$$

Diese Unabhängigkeit von β bedeutet, daß in den Korrelationen zwischen den m-Vektoren physikalische Information steckt, die im Kontinuumslimes überlebt.

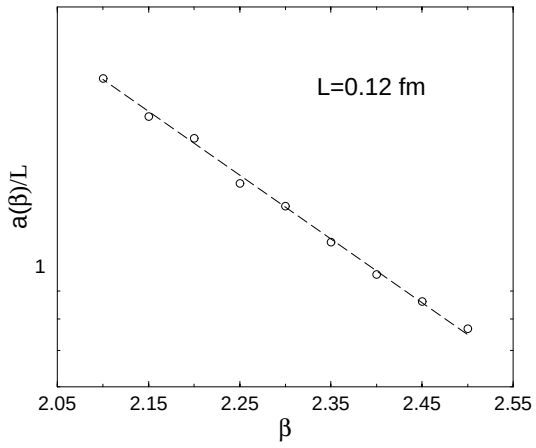


Abb. 7.3: Die Korrelationslänge L in Einheiten des Gitterabstands $a(\beta)$. Die gestrichelte Linie stellt die Abhängigkeit $a(\beta)$ (7.30) dar, die aus Renormierungsgruppenbetrachtungen folgt. Offenbar ist L selbst von β unabhängig.

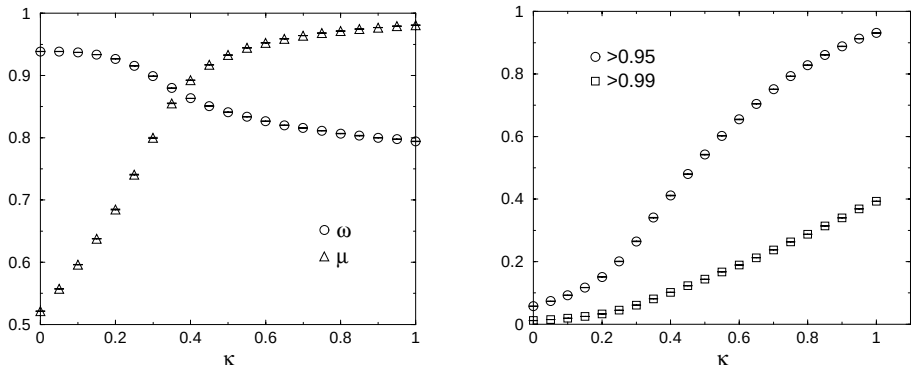
Die Wahrscheinlichkeitsverteilung bei $\beta \to \infty$ sagt etwas darüber aus, wie sich die m-Vektoren im Kontinuumslimes anordnen. Man könnte sich vorstellen, daß die Vektoren aufgrund der Korrelationen Domänen, analog zu den Weißschen Bezirken im Ferromagnetismus, bilden. In diesem Fall bilden die Grenzen der Domänen, die einzigen Stellen, an denen η deutlich von 1 verschieden sein kann, eine Menge vom Maß Null. Man würde erwarten, daß die Wahrscheinlichkeitsverteilung bei $\eta = 1$ divergiert. Das ist offenbar nicht der Fall. Welche Strukturen das m-Feld tatsächlich bildet, wird im folgenden Abschnitt untersucht.

7.2.4 Interpolierende Eichungen

Die m-Eichung ist eine Verallgemeinerung der maximal abelschen Eichung. Der Feldkonfiguration wird erlaubt an jedem Gitterpunkt selbst über die Farbraumrichtung zu entscheiden, in der sie maximal sein will. Durch Einführung eines parameterabhängigen Zusatzterms im Eichfixierungsfunktional (7.19),

$$S^{\kappa}_{m\mathrm{G}}[U] = S_{m\mathrm{G}}[U] + \kappa \cdot \frac{4}{n_L} \sum_{x,\mu} \left(\mathrm{tr}\,(m_x\, m_{x+\hat{\mu}}) \right)^2 , \quad \kappa \geq 0 , \tag{7.32}$$

kann diese Freiheit durch steigendes κ kontinuierlich eingeschränkt werden. Für $\kappa \to \infty$ sind die m_x an allen Gitterpunkten parallel. Wir sind wieder bei



(a) (b)

Abb. 7.4: (a) Qualität der Projektion ω (7.26) und Stärke der Wechselwirkung μ (7.33) in Abhängigkeit des Interpolationsparameters κ bei $\beta = 2.4$. (b) Bruchteil von benachbarten Vektorpaaren, die ein Skalarprodukt η (7.28) größer als 0.95 bzw. 0.99 besitzen.

der maximal abelschen Eichung angelangt. Auch der Zusatzterm respektiert die Symmetrie $m_x \to -m_x$.

Nun definieren wir die Stärke der Wechselwirkung zwischen den m-Vektoren als

$$\mu \equiv \frac{1}{n_L} \sum_{\{x\},\mu} \left\langle |m_x^a m_{x+\hat{\mu}}^a| \right\rangle_U . \tag{7.33}$$

Für eine zufällige Verteilung ist $\mu = 1/2$, während man für die maximal abelsche Eichung, in der alle m-Vektoren parallel sind, $\mu = 1$ erhält. In Abbildung 7.4a ist die Qualität der Projektion ω (7.26) und die Stärke der Wechselwirkung μ in Abhängigkeit des Interpolationsparameters κ für $\beta = 2.4$ aufgetragen. Wie erwartet steigt μ mit wachsendem κ allmählich an, während die Qualität der Projektion monoton fällt.

Für große Werte von κ deutet die anwachsende Stärke der Wechselwirkung darauf hin, daß sich Regionen gleich gerichteter Farbvektoren m_x ausbilden. In Abbildung 7.4b ist der Bruchteil von benachbarten Vektorpaaren dargestellt, die ein Skalarprodukt η (7.28) größer als 0.95 bzw. 0.99 besitzen.

Um festzustellen, welcher Art die Regionen paralleler Vektoren sind, haben wir in Abbildung 7.5 für $\kappa = 0.6$ in einem Schnitt durch das Gitter bei konstanter Zeit alle Vektoren durch ein Würfelchen markiert, die mit einem Referenzvektor ein Skalarprodukt größer als 0.95 bilden. Man erkennt eine Region von ungefähr gleichgerichteten m-Vektoren, die sich durch das gesamte Git-

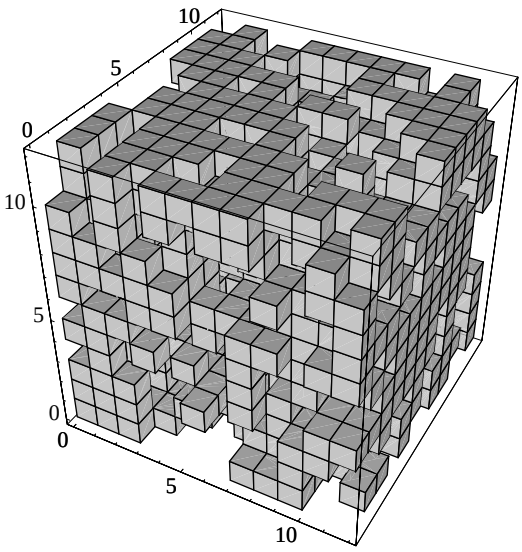


Abb. 7.5: In diesem Schnitt durch das Gitter bei konstanter Zeit für eine Beispielkonfiguration mit $\kappa = 0.6$ und $\beta = 2.4$ sind alle Vektoren durch ein Würfelchen markiert, die mit einem Referenzvektor ein Skalarprodukt größer als 0.95 bilden.

ter zieht und (im Gegensatz zu Weißschen Bezirken im Ferromagnetismus) nicht einfach zusammenhängend ist.

7.3 Zusammenfassung und Ausblick

Mit der m-Eichung wurde eine neue Eichung als Verallgemeinerung der maximal abelschen Eichung vorgestellt. Im Gegensatz zu dieser bleibt keine $U(1)$-Eichfreiheit erhalten. Die Eichfixierung ist vollständig (bis auf das Zentrum der Eichgruppe in der Gitterversion).

Die m-projizierte Theorie stimmt mit der vollen Theorie sehr gut überein. Nur ein Anteil von 3% der Linkvariablen wird durch die Projektion vernachlässigt. Daher erwartet man, daß eine mit den m-Vektoren formulierte effektive Theorie eine sehr gute Beschreibung der vollen Theorie auf allen Skalen liefert. Das wird durch Messung des Potentials zwischen statischen Quarks bestätigt. Aufgrund der reduzierten Anzahl von Freiheitsgraden wird eine solche effektive Theorie eventuell analytisch leichter zugänglich sein.

Um auf die Kontinuumsformulierung einer effektiven Theorie hinzuarbeiten,

haben wir die Eigenschaften der m-Vektoren genauer untersucht. Zwischen den m-Vektoren existieren Korrelationen, die beim Übergang zum Kontinuum das richtige Skalenverhalten zeigen. Das deutet darauf hin, daß die m-Vektoren physikalische Informationen tragen.

Die Untersuchung einer Klasse von interpolierenden Eichungen zeigt, daß die Korrelationen zwischen den m-Vektoren nicht zur Bildung von einfach zusammenhängender Domänen gleichgerichteter m-Vektoren (vgl. Weißsche Bezirke) führt.

Literaturverzeichnis

[Adl81] S. L. Adler, „An Overrelaxation Method For The Monte Carlo Evaluation Of The Partition Function For Multiquadratic Actions“, Phys. Rev. D **23** (1981) 2901

[AEF00] C. Alexandrou, M. D'Elia und P. de Forcrand, „The relevance of center vortices“, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **83** (2000) 437

[AJ78] M. F. Atiyah und J. D. Jones, „Topological Aspects Of Yang-Mills Theory“, Commun. Math. Phys. **61** (1978) 97

[AP81] T. Appelquist und R. D. Pisarski, „High-Temperature Yang-Mills Theories And Three-Dimensional Quantum Chromodynamics“, Phys. Rev. **D 23** (1981) 2305

[BBJ81] P. Becher, M. Böhm und H. Joos, „Eichtheorien der starken und elektroschwachen Wechselwirkung“, *Stuttgart: Teubner, 1983 (Teubner Studienbücher: Physik)*

[BBMS96] G. S. Bali, V. Bornyakov, M. Müller-Preußker und K. Schilling, „Dual Superconductor Scenario of Confinement: A Systematic Study of Gribov Copy Effects“, Phys. Rev. **D 54** (1996) 2863

[Ber74] C. W. Bernard, „Feynman Rules For Gauge Theories At Finite Temperature“, Phys. Rev. **D9** (1974) 3312

[BFGO00] R. Bertle, M. Faber, J. Greensite und S. Olejnik, „P-vortices, gauge copies, and lattice size“, JHEP**0010** (2000) 007

[BFGO01] R. Bertle, M. Faber, J. Greensite und S. Olejnik, „Center vortices in MCG: Finite-size and gauge-copy effects“, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **94** (2001) 482

[BFHKS93] G. S. Bali, J. Fingberg, U. M. Heller, F. Karsch und K. Schilling, „The Spatial String Tension in the Deconfined Phase of the (3+1)-dimensional SU(2) Gauge Theory“, Phys. Rev. Lett. **71** (1993) 3059

[BILMMSZ91] V. G. Bornyakov, E. M. Ilgenfritz, M. L. Laursen, V. K. Mitrjushkin, M. Müller-Preußker, A. J. van der Sijs und A. M. Zadorozhnyi, „The Density of monopoles in SU(2) lattice gauge theory“, Phys. Lett. B **261** (1991) 116

[Bjo69] J. D. Bjorken, „Asymptotic Sum Rules At Infinite Momentum“, Phys. Rev. **179** (1969) 1547

[BKPV00] V. G. Bornyakov, D. A. Komarov, M. I. Polikarpov und A. I. Veselov, „P-vortices, nexuses and effects of gauge copies“, JETP Lett. **71** (2000) 231

[BKP01] V. G. Bornyakov, D. A. Komarov und M. I. Polikarpov, „P-vortices and drama of Gribov copies“, Phys. Lett. B **497** (2001) 151

[BMK77] T. Banks, R. Myerson und J. Kogut, „Phase Transitions In Abelian Lattice Gauge Theories“, Nucl. Phys. **B129** (1977) 493

[BP69] J. D. Bjorken und E. A. Paschos, „Inelastic Electron Proton And Gamma Proton Scattering, And The Structure Of The Nucleon“, Phys. Rev. **185** (1969) 1975

[BSFHK93] G. S. Bali, K. Schilling, J. Fingberg, U. M. Heller und F. Karsch, „Computation of the spatial string tension in high temperature SU(2) gauge theory“, Int. J. Mod. Phys. **C4** (1993) 1179

[BSS95] G. S. Bali, K. Schilling und C. Schlichter, „Observing long color flux tubes in SU(2) lattice gauge theory“, Phys. Rev. D **51** (1995) 5165

[CDG78] C. G. Callan, R. Dashen und D. J. Gross, „Toward a theory of the strong interactions“, Phys. Rev. D **17** (1978) 2717

[CJ80] N. Christ und R. Jackiw, „Equality Of Magnetic Charge And Pontryagin Index For Yang-Mills Dyons“, Phys. Lett. B **91** (1980) 228

[CDJ77] J. C. Collins, A. Duncan und S. D. Joglekar, „Trace and Dilatation Anomalies in Gauge Theories“, Phys. Rev. D **16** (1977) 438

[CM82] M. Creutz und K. J. Moriarty, „Numerical Studies Of Wilson Loops In SU(3) Gauge Theory In Four-Dimensions“, Phys. Rev. D **26** (1982) 2166

[Cre80a] M. Creutz, „Monte Carlo Study Of Quantized SU(2) Gauge Theory“, Phys. Rev. D **21** (1980) 2308

[Cre80b] M. Creutz, „Asymptotic Freedom Scales“, Phys. Rev. Lett. **45** (1980) 313

[Cre83] M. Creutz, „Quarks, Gluons and Lattices“, *Cambridge: University Press, 1983 (Cambridge monographs on mathematical physics)*

[Dar00] S. Dar, „The neutron EDM in the SM: A review“, hep-ph/0008248

[Das97] A. Das, „Finite temperature field theory“, *Singapore: World Scientific, 1997*

[DFGO97] L. Del Debbio, M. Faber, J. Greensite und S. Olejnik, „Center dominance and Z(2) vortices in SU(2) lattice gauge theory“, Phys. Rev. **D 55**, 2298 (1997)

[DFGGO98] L. Del Debbio, M. Faber, J. Giedt, J. Greensite und S. Olejnik, „Detection of center vortices in the lattice Yang-Mills vacuum“, Phys. Rev. D **58** (1998) 094501

[Dir31] P. A. Dirac, „Quantised singularities in the electromagnetic field“, Proc. Roy. Soc. Lond. A **133** (1931) 60

[EKSM81] J. Engels, F. Karsch, H. Satz und I. Montvay, „High Temperature SU(2) Gluon Matter On The Lattice“, Phys. Lett. B **101** (1981) 89

[ELRT98] M. Engelhardt, K. Langfeld, H. Reinhardt und O. Tennert, „Interaction of confining vortices in SU(2) lattice gauge theory“, Phys. Lett. **B431** (1998) 141

[ELRT00] M. Engelhardt, K. Langfeld, H. Reinhardt und O. Tennert, „Deconfinement in SU(2) Yang-Mills theory as a center vortex percolation transition“, Phys. Rev. **D 61** (2000) 054504

[ER00a] M. Engelhardt und H. Reinhardt, „Center projection vortices in continuum Yang-Mills theory“, Nucl. Phys. B **567** (2000) 249

[ER00b] M. Engelhardt und H. Reinhardt, „Center vortex model for the infrared sector of Yang-Mills theory: Confinement and deconfinement“, Nucl. Phys. B **585** (2000) 591

[Fey69] R. P. Feynman, „Very high-energy collisions of hadrons“, Phys. Rev. Lett. **23** (1969) 1415

[Fey72] R. P. Feynman, „Photon-hadron interaction“, *Reading: Benjamin, 1972*

[FE99] P. de Forcrand und M. D'Elia, „On the relevance of center vortices to QCD“, Phys. Rev. Lett. **82** (1999) 4582

[FGO99] M. Faber, J. Greensite und S. Olejnik, „Center projection with and without gauge fixing“, JHEP**9901** (1999) 008

[FIMT98] M. Feurstein, E. M. Ilgenfritz, M. Müller-Preußker und S. Thurner, „Topology at the deconfinement transition uncovered by inverse blocking in SU(2) pure gauge theory with fixed point action“, Nucl. Phys. B **511** (1998) 421

[FMTWP98] C. Ford, U. G. Mitreuter, T. Tok, A. Wipf und J. M. Pawlowski, „Monopoles, Polyakov loops, and gauge fixing on the torus“, Annals Phys. **269** (1998) 26

[FPe00a] P. de Forcrand und M. Pepe, „Laplacian center vortices“, hep-lat/0008013

[FPe00b] P. de Forcrand und M. Pepe, „Center vortices and monopoles without lattice Gribov copies“, hep-lat/0008016

[FPh00] P. de Forcrand und O. Philipsen, „Adjoint string breaking in 4d SU(2) Yang-Mills theory“, Phys. Lett. B **475** (2000) 280

[Gel62] M. Gell-Mann, „Symmetries Of Baryons And Mesons“, Phys. Rev. **125** (1962) 1067

[GHK98] T. DeGrand, A. Hasenfratz und T. Kovacs, „Structure of the QCD vacuum as seen by lattice simulations“, Prog. Theor. Phys. Suppl. **131** (1998) 573

[GJ87] J. Glimm und A. Jaffe, „Quantum Physics. A Functional Integral Point Of View“, *New York: Springer, 1987*

[GLMP00a] A. Di Giacomo, B. Lucini, L. Montesi und G. Paffuti, „Colour confinement and dual superconductivity of the vacuum. I“, Phys. Rev. D **61** (2000) 034503

[GLMP00b] A. Di Giacomo, B. Lucini, L. Montesi und G. Paffuti, „Colour confinement and dual superconductivity of the vacuum. II“, Phys. Rev. D **61** (2000) 034504

[GLSR00] J. Gattnar, K. Langfeld, A. Schäfke und H. Reinhardt, „Center-vortex dominance after dimensional reduction of SU(2) lattice gauge theory“, Phys. Lett. **B489** (2000) 251

[GN64] M. Gell-Mann und Y. Ne'eman, „The eightfold way“, *New York: Benjamin, 1964*

[GPPS99] M. Garcia Perez, O. Philipsen und I. Stamatescu, „Cooling, physical scales and topology“, Nucl. Phys. B **551** (1999) 293

[GP93] P.G. de Gennes und J. Prost, „The Physics of Liquid Crystals“, *Oxford: Univ. Pr., 1993 (International series of monographs on physics, 83)*

[Gri78] V. N. Gribov, „Quantization Of Nonabelian Gauge Theories“, Nucl. Phys. B **139** (1978) 1

[GW73] D. J. Gross und F. Wilczek, „Asymptotically Free Gauge Theories. I“, Phys. Rev. D **8** (1973) 3633

[tHo75] G. 't Hooft, „Gauge Fields With Unified Weak, Electromagnetic, And Strong Interactions“, in *International Conference on High Energy Physics, Palermo 1975*, ed. A. Zichichi

[tHo76] G. 't Hooft, „Computation of the quantum effects due to a four-dimensional pseudoparticle“, Phys. Rev. D **14** (1976) 3432

[tHo79] G. 't Hooft, „A Property Of Electric And Magnetic Flux In Nonabelian Gauge Theories“, Nucl. Phys. **B153** (1979) 141

[tHo81] G. 't Hooft, „Topology Of The Gauge Condition And New Confinement Phases In Nonabelian Gauge Theories“, Nucl. Phys. **B190** (1981) 455

[HT97] A. Hart und M. Teper, „Gribov copies in the maximally Abelian gauge and confinement“, Phys. Rev. D **55** (1997) 3756

[IMMT98] E. M. Ilgenfritz, H. Markum, M. Müller-Preußker und S. Thurner, „Action and topological density carried by Abelian monopoles in finite temperature pure SU(2) gauge theory: An analysis using RG smoothing“, Phys. Rev. D **58** (1998) 094502

[ITMM00] E. M. Ilgenfritz, S. Thurner, H. Markum und M. Müller-Preußker, „Monopole characteristics in various Abelian gauges“, Phys. Rev. D **61** (2000) 054501

[Jah00] O. Jahn, „Instantons and monopoles in general Abelian gauges“, J. Phys. AA **33** (2000) 2997

[JL98] O. Jahn und F. Lenz, „Structure and dynamics of monopoles in axial gauge QCD“, Phys. Rev. D **58** (1998) 085006

[KLMPR94] L. Karkkainen, P. Lacock, D. E. Miller, B. Petersson und T. Reisz, „The Physical phase of dimensionally reduced gauge theories“, Nucl. Phys. **B418** (1994) 3

[KLRS97] K. Kajantie, M. Laine, K. Rummukainen und M. Shaposhnikov, „3d SU(N) + adjoint Higgs theory and finite-temperature QCD“, Nucl. Phys. **B503** (1997) 357

[KMP81] K. Kajantie, C. Montonen und E. Pietarinen, „Phase Transition Of SU(3) Gauge Theory At Finite Temperature“, Z. Phys. C **9** (1981) 253

[KPS81] J. Kuti, J. Polonyi und K. Szlachanyi, „Monte Carlo Study Of SU(2) Gauge Theory At Finite Temperature“, Phys. Lett. B **98** (1981) 199

[KT00] T. G. Kovacs und E. T. Tomboulis, „Computation of the vortex free energy in SU(2) gauge theory“, Phys. Rev. Lett. **85** (2000) 704

[Lan89] N. P. Landsman, „Limitations To Dimensional Reduction At High Temperature“, Nucl. Phys. **B322** (1989) 498

[LIR00] K. Langfeld, E. Ilgenfritz und H. Reinhardt, „Gauge invariant vortex vacuum textures and the gluon condensate“, hep-lat/0008017

[LMR92] P. LaCock, D. E. Miller und T. Reisz, „Dimensional reduction of SU(2) gauge theory beyond the perturbative horizon“, Nucl. Phys. **B369** (1992) 501

[LMT95] F. Lenz, E. J. Moniz und M. Thies, „Signatures of confinement in axial gauge QCD“, Annals Phys. **242** (1995) 429

[LNT94] F. Lenz, H. W. Naus und M. Thies, „QCD in the axial gauge representation“, Annals Phys. **233** (1994) 317

[LR00] K. Langfeld und H. Reinhardt, „The Stefan-Boltzmann law: SU(2) versus SO(3) lattice gauge theory“, hep-lat/0001009

[LRQ96] K. Langfeld, H. Reinhardt und M. Quandt, „Monopoles and strings in Yang-Mills theories“, hep-th/9610213

[LRS01] K. Langfeld, H. Reinhardt und A. Schäfke, „Center vortex properties in the Laplace center gauge of SU(2) Yang-Mills theory“, Phys. Lett. **B504** (2001) 338

[LRT98] K. Langfeld, H. Reinhardt und O. Tennert, „Confinement and scaling of the vortex vacuum of SU(2) lattice gauge theory“, Phys. Lett. **B419** (1998) 317

[LS00a] K. Langfeld und A. Schäfke, „The non-Abelian dual Meissner effect as color-alignment in SU(2) lattice gauge theory“, Phys. Rev. **D 61** (2000) 114506

[LS00b] K. Langfeld und A. Schäfke, „Vortex dominance of the 0+ and 2+ glueball mass in SU(2) lattice gauge theory“, Phys. Lett. **B493** (2000) 350

[LTER99] K. Langfeld, O. Tennert, M. Engelhardt und H. Reinhardt, „Center vortices of Yang-Mills theory at finite temperatures“, Phys. Lett. **B452** (1999) 301

[Mac80] G. Mack, „Predictions Of A Theory Of Quark Confinement“, Phys. Rev. Lett. **45** (1980) 1378

[Man76] S. Mandelstam, „Vortices And Quark Confinement In Non-abelian Gauge Theories“, Phys. Rept. **23** (1976) 245

[MM94] I. Montvay und G. Münster, „Quantum Fields on a Lattice“, *Cambridge: University Press, 1994 (Cambridge monographs on mathematical physics)*

[MO90] J. E. Mandula und M. Ogilvie, „Efficient Gauge Fixing Via Overrelaxation“, Phys. Lett. B **248** (1990) 156

[MO81] G. Marchesini und E. Onofri, „An Elementary Derivation Of Wilson's And Polyakov's Confinement Tests From The Hamiltonian Formulation“, Nuovo Cim. **A65** (1981) 298

[MS81] L. McLerran und B. Svetitsky, „A Monte Carlo Study Of SU(2) Yang-Mills Theory At Finite Temperature“, Phys. Lett. B **98** (1981) 195

[MT89] C. Michael und M. Teper, „The Glueball Spectrum in SU(3)“, Nucl. Phys. B **314** (1989) 347

[Mün81] G. Münster, „High Temperature Expansions For The Free Energy Of Vortices, Respectively The String Tension In Lattice Gauge Theories“, Nucl. Phys. **B180** (1981) 23

[Nak90] M. Nakahara, „Geometry, Topology and Physics“, *Bristol: Hilger, 1990 (Graduate student series in physics)*

[Nam74] Y. Nambu, „Strings, monopoles, and gauge fields“, Phys. Rev. D **10** (1974) 4262.

[Nee61] Y. Ne'eman, „Derivation Of Strong Interactions From A Gauge Invariance“, Nucl. Phys. **26** (1961) 222

[NO79] H. B. Nielsen und P. Olesen, „A Quantum Liquid Model for the QCD Vacuum: Gauge and Rotational Invariance of Domained and Quantized Homogeneous Color Fields“, Nucl. Phys. **B160** (1979) 380

[NS83] C. Nash und S. Sen, „Topology and Geometry For Physicists“, *London: Academic, 1983*

[OS73] K. Osterwalder und R. Schrader, „Axioms For Euclidean Green's Functions“, Commun. Math. Phys. **31** (1973) 83
K. Osterwalder und R. Schrader, „Axioms For Euclidean Green's Functions. 2“, Commun. Math. Phys. **42** (1975) 281

[Pan97] T. Pang, „Computational Physics“, *Cambridge: University Press, 1997*

[Par75] G. Parisi, „Quark Imprisonment And Vacuum Repulsion“, Phys. Rev. D **11** (1975) 970

[PDGC98] Particle Data Group Collaboration, „Review of particle physics“, Eur. Phys. J. C **3** (1998) 1

[Pol73] H. D. Politzer, „Reliable Perturbative Results For Strong Interactions?“, Phys. Rev. Lett. **30** (1973) 1346

[Pol75] A. M. Polyakov, „Compact gauge fields and the infrared catastrophe“, Phys. Lett. **B59** (1975) 82

[Pol78] A. M. Polyakov, „Thermal Properties Of Gauge Fields And Quark Liberation“, Phys. Lett. B **72** (1978) 477

[QRS99] M. Quandt, H. Reinhardt und A. Schäfke, „Magnetic monopoles and topology of Yang-Mills theory in Polyakov gauge“, Phys. Lett. B **446** (1999) 290

[Qua99] M. Quandt, „Yang-Mills-Theories in Abelian Gauges“, *Darmstadt: DDD, Dr. und Verl., 1999 (Naturwissenschaftliche Reihe; Bd. 20)* und *Tübingen: Universität, Dissertation, 1999*

[Raj82] R. Rajaraman, „Solitons And Instantons. An Introduction To Solitons And Instantons In Quantum Field Theory“, *Amsterdam: North-holland, 1982*

[Rei96] H. Reinhardt, „Emergence of the Haar measure in the standard functional integral representation of the Yang-Mills partition function“, Mod. Phys. Lett. A **11** (1996) 2451

[Rei97a] H. Reinhardt, „Yang-Mills theory in axial gauge“, Phys. Rev. D **55** (1997) 2331

[Rei97b] H. Reinhardt, „Resolution of Gauss' law in Yang-Mills theory by gauge-invariant projection: Topology and magnetic monopoles“, Nucl. Phys. B **503** (1997) 505

[Riv87] R. J. Rivers, „Path Integral Methods in Quantum Field Theory“, *Cambridge: University Press, 1987 (Cambridge monographs on mathematical physics)*

[Roe94] G. Roepstorff, „Path Integral Approach to Quantum Physics: An Introduction“, *Berlin: Springer, 1994*

[Rot97] H. J. Rothe, „Lattice Gauge Theories: An Introduction“, *Singapore: World Scientific, 1997*

[RT00] H. Reinhardt und T. Tok, „Abelian and center gauges in continuum Yang-Mills theory“, hep-th/0009205, Phys. Lett. B *in print*

[RT01] H. Reinhardt und T. Tok, „Abelian and center gauge fixing in continuum Yang-Mills theory for general gauge groups“, Phys. Lett. B **500** (2001) 173

[Sak94] J. J. Sakurai, „Modern quantum mechanics“, *Addison-Wesley, 1994*

[Sch81] L. S. Schulman, „Techniques And Applications Of Path Integration“, *New York: Wiley, 1981*

[Sch58] J. Schwinger, „On the Euclidean structure of relativistic field theory“, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **44** (1958) 956

[Sei78] E. Seiler, „Upper Bound On The Color Confining Potential“, Phys. Rev. D **18** (1978) 482

[SF99] J. D. Stack und R. Filipczyk, „Abelian links, monopoles, and glueballs in SU(2) lattice gauge theory“, Nucl. Phys. B **546** (1999) 333

[Sij98] A. J. van der Sijs, „Abelian projection without ambiguities“, Prog. Theor. Phys. Suppl. **131** (1998) 149

[Sin78] I. M. Singer, „Some Remarks On The Gribov Ambiguity“, Commun. Math. Phys. **60** (1978) 7

[ST01] J. D. Stack und W. W. Tucker, „The Gribov ambiguity for maximal Abelian and center gauges in SU(2) lattice gauge theory“, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **94** (2001) 529

[Sus79] L. Susskind, „Lattice Models Of Quark Confinement At High Temperature“, Phys. Rev. D **20** (1979) 2610

[SW94] N. Seiberg und E. Witten, „Monopoles, duality and chiral symmetry breaking in N=2 supersymmetric QCD“, Nucl. Phys. **B431** (1994) 484

[Sym66] K. Symanzik, „Euclidean quantum field theory, I. Equations for a scalar model“, J. Math. Phys. **7** (1966) 510

[Sym69] K. Symanzik, „Euclidean quantum field theory“ in *Local Quantum Field Theory, Varenna 1968*, ed. R. Jost

[Ten00] O. Tennert, „Vortex Condensation and Confinement in Centre-Projected Lattice Yang-Mills Theory“, *Tübingen: Universität, Dissertation, 2000*

[Tep87a] M. Teper, „An Improved Method For Lattice Glueball Calculations“, Phys. Lett. B **183** (1987) 345

[Tep87b] M. Teper, „The Scalar And Tensor Glueball Masses In Lattice Gauge Theory“, Phys. Lett. B **185** (1987) 121

[Tep99] M. J. Teper, „SU(N) gauge theories in 2+1 dimensions“, Phys. Rev. **D 59** (1999) 014512

[VW92] J. C. Vink und U. Wiese, „Gauge fixing on the lattice without ambiguity“, Phys. Lett. B **289** (1992) 122

[Wic54] G. C. Wick, „Properties Of Bethe-Salpeter Wave Functions“, Phys. Rev. **96** (1954) 1124

[Wil74] K. G. Wilson, „Confinement Of Quarks“, Phys. Rev. **D 10** (1974) 2445

[WY76] T. T. Wu und C. N. Yang, „Dirac Monopole Without Strings: Monopole Harmonics“, Nucl. Phys. B **107** (1976) 365

[YM54] C. N. Yang und R. L. Mills, „Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance“, Phys. Rev. **96** (1954) 191

[Zwe64] G. Zweig, „An SU(3) Model For Strong Interaction Symmetry And Its Breaking. 2“, CERN-TH-412

Veröffentlichungen

1. M. Quandt, H. Reinhardt und A. Schäfke,
„Magnetic Monopoles and Topology of Yang-Mills Theory in Polyakov Gauge“,
Phys. Lett. **B446** (1999) 290

2. H. Reinhardt, M. Engelhardt, K. Langfeld, M. Quandt und A. Schäfke,
„Magnetic Monopoles, Center Vortices and Topology of Gauge Fields“,
Nucl. Phys. Proc. Suppl. **B83** (2000) 536

3. H. Reinhardt, M. Engelhardt, K. Langfeld, M. Quandt und A. Schäfke,
„Magnetic Monopoles, Center Vortices, Confinement and Topology of Gauge Fields“,
in Coimbra 1999, Hadron physics 142

4. K. Langfeld und A. Schäfke,
„The Non-Abelian Dual Meissner Effect as Color Alignment in SU(2) Lattice Gauge Theory“,
Phys. Rev. **D61** (2000) 114506

5. J. Gattnar, K. Langfeld, A. Schäfke und H. Reinhardt,
„Center Vortex Dominance after Dimensional Reduction of SU(2) Lattice Gauge Theory“,
Phys. Lett. **B489** (2000) 251

6. K. Langfeld und A. Schäfke,
„Vortex Dominance of the 0+ and 2+ Glueball Mass in SU(2) Lattice Gauge Theory“,
Phys. Lett. **B493** (2000) 350

7. K. Langfeld, H. Reinhardt und A. Schäfke,
„Center Vortex Properties in the Laplace Center Gauge of SU(2) Yang-Mills Theory“,
Phys. Lett. **B504** (2001) 338

Lebenslauf

Name:	Alexandra Schäfke
geboren:	18. September 1972 in Konstanz
Staatsangehörigkeit:	deutsch
Familienstand:	ledig
Anschrift:	Beim Herbstenhof 36 72076 Tübingen

Werdegang

9/1982 - 6/1991	Heinrich-Suso-Gymnasium in Konstanz
14.6.1991	Abitur, Gesamtnote 1,0
10/1991 - 12/1997	Studium der Physik an der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen
15.10.1993	Vordiplom in Physik, Gesamtnote „sehr gut“
2/1996 - 5/1997	Diplomarbeit „Abelsche Projektion von Yang-Mills-Theorien in zwei und drei Dimensionen“ unter Anleitung von Prof. Dr. H. Reinhardt am Institut für Theoretische Physik der Universität Tübingen
5.12.1997	Diplom in Physik, Gesamturteil „mit Auszeichnung bestanden“
4/1998 - 3/2001	Stipendiatin des Graduiertenkollegs „Struktur und Wechselwirkung von Hadronen und Kernen“
seit 1/1998	Anfertigung der Dissertation „Yang-Mills-Theorie: Confinement und Topologie“ unter Anleitung von Prof. Dr. H. Reinhardt und Priv.-Doz. Dr. habil. K. Langfeld am Institut für Theoretische Physik der Universität Tübingen

Anstellungen

4/1996 - 7/1996	wissenschaftliche Hilfskraft am Institut für Theoretische Physik der Universität Tübingen
9/1996 - 3/1998	wissenschaftliche Hilfskraft am Institut für Theoretische Physik der Universität Tübingen
4/2001	wissenschaftliche Angestellte am Institut für Theoretische Physik der Universität Tübingen

Akademische Lehrer

Alkofer, Baake, Baumann, Clement, Ebert, Fischer, Gaukler, Gönnenwein, Großer, Hartmann, Hübener, Langfeld, Lindner, Lutz, Oberhammer, Pfister, Plies, Reinhardt, Schwenk, Stumpf, Wagner