

ANALYSE VON FINANZMARKTDATEN MITTELS MULTIVARIATER GARCH-MODELLE

SPILL-OVER-EFFEKTE VON VOLATILITÄTEN:
EURO-WECHSELKURS UND FINANZMÄRKTE IN EUROPA

Freie wissenschaftliche Arbeit für die Diplomprüfung für Volkswirte an der
Wirtschaftswissenschaftlichen Fakultät der Eberhard-Karls-Universität Tübingen

Michael Flad[†]

18. August 2003

Zusammenfassung

Die Bestimmung der Volatilität von Finanzmarktdaten ist heutzutage Kernpunkt empirischer Analysen im Bereich des Finance/Banking oder in der monetären Makroökonomik. Dabei erweisen sich multivariate GARCH (MGARCH-) Modelle als besonders hilfreich, da mit ihnen wichtige empirische Eigenschaften von Finanzmarktdaten, wie z.B. *Volatilitätscluster* oder kontemporäre Korrelationen mehrerer Zeitreihen, leicht abzubilden sind. Es wird daher sowohl eine Übersicht über gängige und neuere MGARCH-Modelle als auch deren Schätzmethoden gegeben. Zusätzlich soll durch eine empirische Analyse herausgefunden werden, ob *Spill-Over-Effekte* zwischen Devisenmarkt, Geld- und Aktienmarkt in Europa existieren. Insbesondere kommen zwei getrennte bivariate MGARCH-Modelle (CCC-Modell nach Bollerslev und DCC-Modell nach Engel) mit zusätzlichen Erweiterungen zur Anwendung, wobei untersucht wird, ob mögliche Politimplikationen hinsichtlich der Diskussion um flexible vs. fixe Wechselkursregime ökonometrisch abgeleitet werden können.

Schlagwörter: Multivariate GARCH-Modelle, Volatilitäts-Spill-Over, Bivariate MGARCH-Schätzung

[†] [mailto: michael.flad@gmx.net](mailto:michael.flad@gmx.net)

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	III
Tabellenverzeichnis	IV
Symbolverzeichnis	V
1 Einleitung	1
2 Finanzmarktdaten - <i>Stylized Facts</i> und (G)ARCH-Modellspezifikation	5
2.1 <i>Stylized Facts</i> - Finanzmarktdaten und ihre empirischen Phänomene	5
2.2 (G)ARCH-Modellspezifikation	10
2.2.1 Univariate Modellierung	10
2.2.2 Multivariate Modellierung	12
3 Theorie multivariater GARCH-Modelle	15
3.1 Klassische multivariate GARCH-Modelle	15
3.1.1 VEC(P, Q)-Modell	15
3.1.2 Diagonales VEC(P, Q)-Modell	18
3.1.3 BEKK(P, Q, K)-Modell	20
3.1.4 Diagonales BEKK(P, Q, K)-Modell	23
3.1.5 CCC(P, Q)-Modell	24

3.2	Neuere multivariate GARCH-Ansätze	27
3.2.1	Modelle mit zeitlich-variierenden Korrelationen	27
3.2.2	FlexM-Modell	30
3.3	Erweiterungen	32
3.3.1	Weitere mögliche multivariate GARCH-Spezifikationen	32
3.3.2	Alternative Herangehensweisen der Modellierung von Volatilitäten	37
4	Methoden der Schätzung multivariater GARCH-Modelle	39
4.1	Maximum-Likelihood-Schätzung	39
4.2	Schätzung in zwei Schritten	42
4.3	<i>variance-targeting</i> -Schätzung	43
4.4	Semiparametrische Schätzung	44
5	<i>Volatilitäts-Spill-Over</i> zwischen Euro, Euribor und Eurostoxx	46
5.1	Theoretischer Hintergrund	46
5.2	Empirische Untersuchung: Deskriptive Analyse	48
5.3	Bivariate GARCH-Schätzung	52
5.3.1	Modellspezifikation	52
5.3.2	Test auf konstante Korrelationen	53
5.3.3	Analyse der gewählten Modelle	55
5.3.4	Kritische Betrachtung	60
6	Kritische Zusammenfassung und Ausblick	61
	Literaturverzeichnis	65
	Anhang	A

Abbildungsverzeichnis

2.1	Geschätzte Dichtefunktion	6
2.2	<i>Volatilitätscluster</i>	7
2.3	Autokorrelationen	7
2.4	„Gemeinsame Bewegung“ von Volatilitäten	8
5.1	<i>Volatilitätscluster</i> der untersuchten Finanzmarktzeitreihen	50

Tabellenverzeichnis

5.1	Verteilungscharakteristik (empirisch)	49
5.2	Test auf Normalverteilung	49
5.3	Test auf Autokorrelation	51
5.4	Einheitswurzeltest	52
5.5	Test auf konstante Korrelationen	55
5.6	Bivariate CCC-GARCH-Schätzung	57
5.7	Bivariate CCC-GARCH-Schätzung mit <i>Spill-Over-Effekten</i>	59

Symbolverzeichnis

Für die unten aufgeführten Symbole bezeichnet der Zeitindex t stets einen Zeitpunkt aus \mathbb{N} .

Allgemeine Notation

\mathbf{a}_i	Parametervektor
$\mathbf{A} = [a_{ij}]$	Parametermatrix mit Element a_{ij}
$\hat{\mathbf{b}}$	geschätzter Koeffizientenvektor
\mathbf{b}_i	Parametervektor
$\mathbf{B} = [b_{ij}]$	Parametermatrix mit Element b_{ij}
$\mathbf{C} = [c_{ij}]$	Parametermatrix mit Element c_{ij}
$\mathbf{D}_t = [\sqrt{h_{ii,t}}]$	Diagonalmatrix der bedingten Standardabweichungen $\sqrt{h_{ii,t}}$
\mathcal{D}_N	Dublikationsmatrix
e_t^N	nominaler Wechselkurs
e_t^R	realer Wechselkurs
\mathbf{e}_t	<i>white-noise-Vektor</i>
\mathcal{E}_N	Eliminationsmatrix
$E(x)$	Erwartungswert der Variablen x
$f(\cdot)$	Dichtefunktion
\mathbf{f}_t	Vektor von Faktoren
$\mathbf{F} = [f_{ij}]$	symmetrische Matrix mit Element f_{ij}
$g(\cdot)$	Dichtefunktion
\mathbf{g}_i	Parametervektor
$\mathbf{G} = [g_{ij}]$	Parametermatrix mit Element g_{ij}
$\mathcal{G}(\cdot)$	Gammafunktion
$h_t = h_{ii,t}$	positive bedingte Varianz
$h_{ij,t}$	bedingte Kovarianz
\mathbf{H}_t	symmetrische positiv definite bedingte Kovarianzmatrix
\mathcal{H}	Bandbreite einer multivariaten Kerndichteschätzung
i_t	nominaler Zinssatz
\mathbf{I}_N	Einheitsmatrix der Ordnung N

\mathcal{K}	Kern einer multivariaten Kerndichteschätzung
$\mathbf{l} = [l_i]$	Vektor mit Element l_i
$\mathbf{L} = [l_{ij}]$	Matrix mit Element l_{ij}
$\mathcal{L}(\cdot)$	Likelihood-Funktion
m_t	nominales Geldangebot (logarithmiert)
N	Anzahl an Zeitreihen y_t
$\mathbf{O} = [o_{ij}]$	Matrix mit Element o_{ij}
p_t	inländisches Preisniveau
p_t^*	ausländisches Preisniveau
$\mathbf{Q} = [q_{ij}]$	Parametermatrix mit Element q_{ij}
$\bar{\mathbf{Q}}$	unbedingte Kovarianzmatrix von $\boldsymbol{\xi}_t$
\mathbf{S}	Stichprobenkovarianzmatrix
u_t	Residuum
$\text{Var}(x)$	Varianz der Variablen x
x	exogene Variable
\mathbf{X}	Regressormatrix
y_t	beliebige Zeitreihe
\mathcal{Y}_t	reales Volkseinkommen (logarithmiert)

Griechische Buchstaben

α	Parameter
β	Parameter
γ	Parameter
$\boldsymbol{\Gamma}_{(t)} = [\rho_{ij(t)}]$	symmetrische Matrix der Korrelationen $\rho_{ij(t)}$ - zeitvariant bzw. zeitinvariant
δ	Parameter
Δ	Log-Differenz erster Ordnung
ϵ_t	<i>i.i.d.</i> -verteilte Zufallsvariable
ε_t	Zufallsvariable eines <i>white-noise-Prozesses</i>
ζ_t	<i>NID</i> -verteiltes Residuum
\mathbf{Z}_t	Diagonalmatrix der Elemente $(\sum_{m=1}^M \xi_{i,t-m}^2)^{\frac{1}{2}}$
$\boldsymbol{\eta}_t$	spezieller Residuenvektor
θ	Parameter
$\boldsymbol{\vartheta}$	Vektor der zu schätzenden Parameter
$\boldsymbol{\Theta}_t = [\theta_{ij,t}]$	Parametermatrix mit Element $\theta_{ij,t}$
κ	Parameter

λ	Parameter
Λ_t	bedingte Kovarianzmatrix des Faktorenvektors \mathbf{f}_t
μ_t	Erwartungswert
ν	Parameter
$\xi_{i,t}$	standardisiertes Residuum der Form $\xi_{i,t} = u_{i,t}/\sqrt{h_{ii,t}}$
Ξ_t	Matrix der Form $\Xi_t = (\xi_{t-1}, \dots, \xi_{t-M})$
ρ_t	Korrelationskoeffizient
ϱ	Parameter
σ^2	eindimensionale Varianz (bedingt/unbedingt)
Σ	unbedingte Kovarianzmatrix
\mathbf{v}_t	<i>idiosyncratic error</i> - Vektor
Υ_t	bedingte Kovarianzmatrix des <i>idiosyncratic error</i> - Vektors \mathbf{v}_t
$\Phi = [\phi_{ij}]$	Parametermatrix mit Element ϕ_{ij}
$\Psi_t = [\psi_{ij,t}]$	Stichprobenkorrelationsmatrix mit Element $\psi_{ij,t}$
ω	Parameter
Ω_t	Informationsmenge (mit endogenen bzw. exogenen Variablen)

Operatoren

\odot	Hadamard (elementweises) Produkt zweier Matrizen
\oslash	elementweise Division zweier Matrizen
\wedge^k	elementweise Potenzierung einer Matrix
$diag(\cdot)$	Diagonalisieren eines Vektors $\mathbf{l} = [l_i]$: Erzeugen einer Diagonalmatrix mit den Diagonalelementen l_i
$vec(\cdot)$	Operator, der alle Elemente einer Matrix spaltenweise untereinander in einen Vektor plaziert
$vech(\cdot)$	Operator, der die Elemente des unteren (linken) Dreieckteils einer quadratischen Matrix spaltenweise untereinander in einen Vektor plaziert
$vech^u(\cdot)$	Operator, der die Elemente oberhalb der Hauptdiagonalen einer quadratischen Matrix spaltenweise untereinander in einen Vektor plaziert

Kapitel 1

Einleitung

„...there is a lot of commonality in volatility changes across stocks: a 1% market volatility change typically implies a 1% volatility change for each stock. Well, perhaps the high volatility stocks are somewhat more sensitive to market volatility changes than the low volatility stocks. In general it seems fair to say that when stock volatilities change, they all tend to change in the same direction.“

Black (1969, S. 179)

Sich über die Zeit hinweg verändernde Varianzen, besonders von Finanzmarktdaten, stehen seit jeher im Zentrum empirischer und theoretischer Untersuchungen. Die Motivationen hierfür sind vielschichtig. Besonders dominant ist allerdings die Beachtung der bedingten Varianz (Volatilität) im Bereich des Banking/Finance, da sie auf diesem Gebiet direkt mit grundlegenden Theorien verbunden ist. Die Berechnung des Value-at-Risk, die Portfolioselektion bzw. -allokation zwischen Aktien und Rentenpapieren oder die Preisfestsetzung von Optionen sowie Hedging-Überlegungen sind ohne eine Bestimmung des Risikos (oft in Form der bedingten Standardabweichung der Renditen) der zugrundeliegenden Finanzmarktwerte undenkbar. Aber auch makroökonomische Überlegungen sind eng mit der Bestimmung von Risiko verbunden. Da z.B. Aktienmärkte und deren Wertzuwächse direkt mit dem Wirtschaftskreislauf in Verbindung stehen, kann davon ausgegangen werden, dass die Messung der Unsicherheit auf makroökonomischer Ebene, z.B. in Form der Volatilität der industriellen Produktion, des Zinssatzes oder des Geldmengenwachstums, dazu beitragen, die Variabilität des Aktienmarktes zu erklären. Ein wesentliches Problem besteht allerdings in der Tatsache, dass die Volatilität nicht beobachtbar ist, sondern aus den Daten geschätzt werden muss; eine möglichst zuverlässige Schätzung und Prognose der Volatilität ist daher unabdingbar.

Durch zahllose Untersuchungen wurde festgestellt, dass zwar exogene Variablen einen gewissen Erklärungsgehalt für die Volatilität der untersuchten Finanzmarktrenditen haben, jedoch verzögerte endogene Änderungsraten bedeutender für den Verlauf der Volatilität sind. In den 70er Jahren konzentrierte sich daher die Forschung vor allem auf klassische Zeitreihenmodelle, wie etwa *autoregressive* (AR-) oder *autoregressive moving average* (ARMA-) Prozesse, die relativ leicht zu implementieren waren. Diese Herangehensweise hinkt jedoch in zweifacher Hinsicht: Zum einen wird durch die lineare Konstruktion die Modellierung von dynamischen Beziehungen eingeschränkt, zum anderen werden diese klassischen Zeitreihenmodelle im Allgemeinen ohne a-priori Bedingungen der AR- bzw. MA-Parameter angewandt, was strukturelle Interpretationen erschwert. Gerade Wechselkurse, Aktienkurse, Zinssätze oder andere Finanzmarktdaten weisen nicht-lineare dynamische Verhaltensmuster auf, die einen Bruch mit den zuvor genannten linearen Zeitreihenmodellen unumgänglich machen.

Rob Engles Arbeit „Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation“ aus dem Jahre 1982 kann wohl als einer der meist zitierten Artikel in der Ökonometrie der letzten beiden Jahrzehnte gesehen werden (McAleer und Oxley, 2002, S. 238). Mit ihm begründete Engle eine neue Klasse der sogenannten *autoregressive conditional heteroscedasticity* (ARCH-) Modelle. Diese nicht-lineare Spezifikation der bedingten Varianz einer Zeitreihe, bzw. die strukturelle Festlegung der zeitreihenspezifischen Heteroskedastizität durch einen autoregressiven Prozess der verzögerten quadrierten Residuen, erwies sich als äußerst hilfreich für die Modellierung der wichtigsten empirischen Befunde von Finanzmarktdaten, da sie explizit zwischen bedingten und unbedingten Momenten zweiter Ordnung unterscheidet. Jedoch wurde bald festgestellt, dass ARCH-Modelle insbesondere für Finanzmarktdaten mit hoher Beobachtungsfrequenz häufig nicht in der Lage waren, deren empirischen Befunde adäquat abzubilden. Dies veranlasste Bollerslev (1986) dazu, Engles ARCH-Modelle - in Analogie der Verallgemeinerung von AR- zu ARMA-Modellen - zu einem verallgemeinerten (*generalized*) GARCH-Modell mit autoregressiven Termen der eigenen, verzögerten, bedingten Varianzen zu erweitern.

Insbesondere aus ökonometrischer Sicht sind (G)ARCH-Modelle dazu geeignet, dynamische Beziehungen von Zeitreihen aufzudecken bzw. zu testen. Nicht nur führt die spezifische Modellierung des Varianzterms zu effizienteren Schätzern, sondern auch klassische Fragestellungen der Random-Walk-Hypothese, die Abschätzungen von Prognoseintervallen oder das Vorliegen latenter Faktoren erscheinen durch die Anwendung von (G)ARCH-Modellen in einem anderen Licht.

Die schwerwiegendste Einschränkung dieser nicht-linearen Zeitreihenmodelle liegt jedoch in ihrer univariaten Natur. Die bedingte Varianz wird vollkommen unabhängig und speziell auf eine Finanzmarktdatenreihe bezogen. Somit wird eine mögliche und bei Finanzmarktdaten häufig anzutreffende kontemporäre Korrelation mehrerer Zeitreihen vernachlässigt. Die Notwendigkeit einer Modellierung gerade des empirischen Phänomens einer sich über die Zeit hinweg verändernden Kovarianz führte zur Entwicklung multivariater GARCH-Modelle. Heute steht fest, dass das Standard ARCH-Modell nur Ausgangspunkt einer empirischen Studie sein kann und man auf Erweiterungen, besonders in multivariater Hinsicht, angewiesen ist, da hierdurch effizientere Entscheidungen im Finanzsektor möglich sind und die Modellierungen von Finanzmarktdaten erleichtert werden.

Ziel dieser Arbeit ist, einen Überblick über ausgewählte, in Wissenschaft und Praxis häufig angewandte, multivariate GARCH-Modelle und deren zugrundeliegende Strukturen sowie theoretische Grundlagen zu geben. Besonders soll hierbei zwischen klassischen multivariaten GARCH-Spezifikationen und neueren multivariaten Modellierungen der bedingten, sich in der Zeit verändernden Kovarianzmatrix, unterschieden werden. Da die Schätzung solcher multivariater Varianzspezifikationen nicht gänzlich mit Methoden der Schätzung univariater GARCH-Modelle in Einklang zu bringen ist, wird des weiteren auf spezifische multivariate Schätzmethoden eingegangen. Allerdings erfolgt keine Beurteilung der einzelnen Modelle hinsichtlich Prognosefähigkeit und -genauigkeit, noch werden diverse Methoden der Modellselektion bzw. adäquater Modellspezifikation dargestellt - eine vertiefende Behandlung dieser Aspekte würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen. Jedoch soll in einem empirischen Teil eine multivariate GARCH-Schätzung durchgeführt werden. Aus volkswirtschaftlicher Sicht scheint hierfür der Diskurs über die Vor- und Nachteile von fixen versus flexiblen Wechselkursregimen für eine ökonometrische Untersuchung geeignet zu sein. Besonders nach dem Fall des Währungssystems von Bretton Woods und der nachfolgenden Zeit flexibler Wechselkurse in den 70er Jahren wurde das jeweilige Wechselkursregime immer wieder für eine negative inländische Wirtschaftsentwicklung verantwortlich gemacht. Diese Diskussion hat durch die Turbulenzen im Europäischen Währungssystem in den 90er Jahren und die Einführung des Euro 1999 neue Nahrung erhalten. Dabei wird argumentiert, dass ein fixes Wechselkursregime Schocks von außen durch diverse Transmissionsmechanismen auf die inländische Wirtschaft überträgt, während diese exogenen Störungen in einem flexiblen Wechselkurssystem absorbiert werden. Speziell soll auf Europa angewandt durch eine multivariate GARCH-Spezifikation untersucht werden, ob ein negativer Zusammenhang zwischen der Varia-

bilität des EUR/USD-Wechselkurses und der Volatilität von Finanzmärkten herrscht und somit von einem stabilisierenden Effekt eines flexiblen Wechselkurssystems gesprochen werden kann. Die Finanzmärkte werden dabei durch zwei prominente Finanzmarktindikatoren, zum einen den kurzfristigen Zinssatz (Euribor) und zum anderen den Aktienmarktindex (Eurostoxx), repräsentiert. Frühere Untersuchungen vergleichen die Variabilitäten in unterschiedlichen monetären Regimen meist durch unbedingte Varianzen der Makroindikatoren in verschiedenen Zeitperioden und messen dabei Unterschiede in den Volatilitäten dem fixen bzw. flexiblen Wechselkurs zu. Hierbei wird jedoch außer Acht gelassen, dass unterschiedliche Zeitpunkte nicht nur andere Währungssysteme, sondern auch unterschiedliche Charakteristika der Makroökonomik mit sich bringen.

Die Arbeit ist inhaltlich wie folgt gegliedert: Während in Kapitel zwei empirisch fundierte Eigenschaften von Finanzmarktdaten, sogenannte *stylized facts*, exemplarisch dargestellt werden und auf die Grundstruktur von univariaten und multivariaten GARCH-Modellen eingegangen wird, soll in Kapitel drei eine Übersicht über die Theorie multivariater GARCH-Modelle erfolgen und diverse Erweiterungen und Alternativen zu den diskutierten Modellen aufgezeigt werden. Kapitel vier behandelt einige übliche Schätzmethoden multivariater GARCH-Spezifikationen. In Kapitel fünf werden sodann mögliche *Volatilitäts-Spill-Over* zwischen dem EUR/USD-Wechselkurs und dem Euribor einerseits sowie dem EUR/USD-Wechselkurs und dem Eurostoxx andererseits mit Hilfe zweier bivariater GARCH-Schätzungen mit zusätzlichen, nicht standardmäßigen, Erweiterungen untersucht. Eine kritische Zusammenfassung mit einem Ausblick auf mögliche weitere Forschungsschwerpunkte schließt in Kapitel sechs die Arbeit ab.

Kapitel 2

Finanzmarktdaten - *Stylized Facts* und (G)ARCH-Modellspezifikation

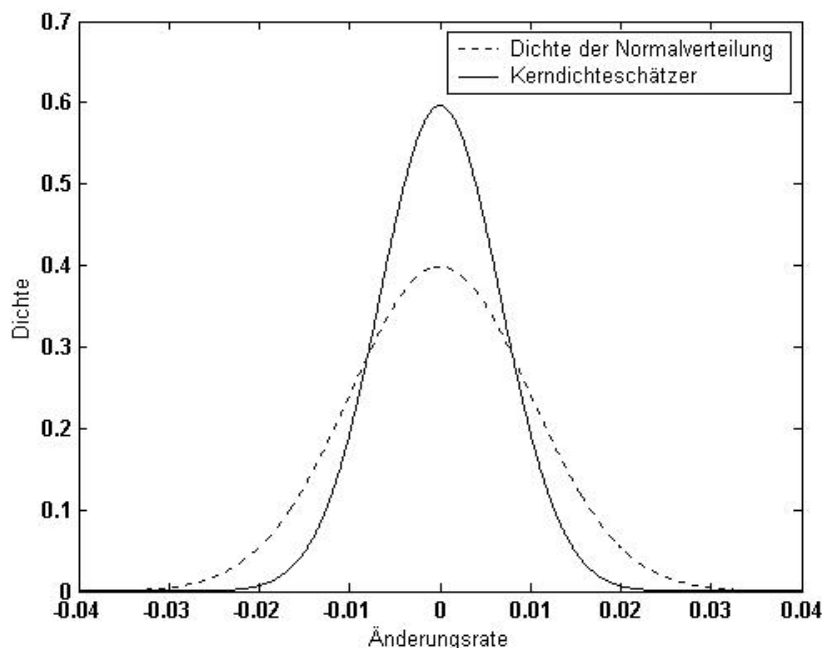
2.1 *Stylized Facts* - Finanzmarktdaten und ihre empirischen Phänomene

In der empirischen Analyse von monetären Herausforderungen oder die Finanzmärkte betreffenden Problemstellungen weisen die zu untersuchenden Daten einige empirisch fundierte Eigenschaften (*stylized facts*) auf, die sie von anderen Zeitreihen unterscheiden. Diese Phänomene können weder durch klassische AR- oder ARMA-Prozesse (vgl. Box et al, 1994), noch durch andere (nicht-)lineare Verallgemeinerungen in der Spezifikation des bedingten Erwartungswertes modelliert werden. Im Folgenden sollen vier *stylized facts* vorgestellt werden.

Stylized fact 1: Leptokurtische Verteilung

Bereits Mandelbrot (1963, S. 395) stellte bei seinen Untersuchungen auf Rohstoffmärkten fest, dass Preisänderungen der untersuchten Waren tendenziell eine leptokurtische Verteilung aufwiesen. Vor allem bei Änderungsraten von Finanzmarktdaten ist die geschätzte Kurtosis meist größer als drei. Abbildung 2.1 zeigt dies anhand der Verteilung von täglichen Änderungsraten (Log-Differenzen erster Ordnung) des DEM/USD-Wechselkurses von 1995-1998.

Abbildung 2.1: Geschätzte Dichtefunktion der täglichen Log-Änderungsraten des DEM/USD-Wechselkurses (1995-1998)



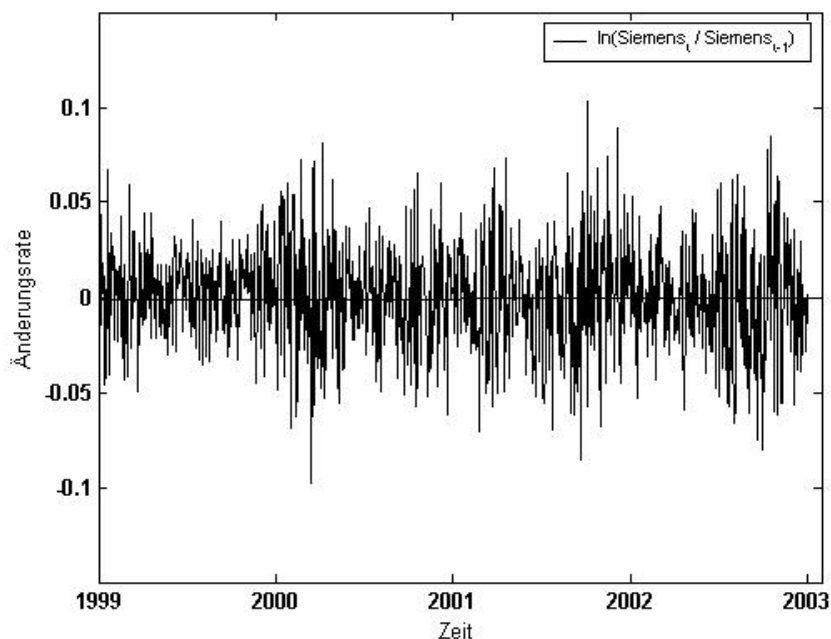
Quelle: eigene Berechnungen.¹

Im obigen Fall der Verteilung des DEM/USD-Wechselkurses ergibt sich eine Kurtosis von 5,947, die somit deutlich über drei liegt.

Stylized fact 2: Volatilitätsclustering

Weiterhin fand Mandelbrot (1963, S. 418) heraus, dass nach großen (kleinen) Preisänderungen (positiver oder negativer Art) seiner untersuchten Variablen tendenziell wieder große (kleine) Preisänderungen folgten. Ebenso beobachtete Engle (1982) im Rahmen seiner Analyse der britischen Inflationsrate, dass die Varianzen der Störterme weniger stabil waren als gemeinhin angenommen. Er stellte dabei fest, dass nach Phasen mit sehr großer (kleiner) Volatilität tendenziell wieder Phasen mit großer (kleiner) Volatilität folgten, sich also sogenannte Volatilitätsklumpen (*Volatilitätscluster*) bildeten. Weitere Studien über Aktienrenditen oder Änderungsraten von Wechselkursen (siehe z.B. Domowitz und Hakkio, 1985) zeigen, dass dieser Effekt in Finanzmärkten recht häufig anzutreffen ist. In Abbildung 2.2 sei dies anhand der täglichen Log-Renditen der Siemensaktie nochmals dargestellt. Bei genauerem Hinsehen lassen sich *Volatilitätscluster* z.B. zu Beginn des Jahres 2000 und zum Ende des Jahres 2001 erkennen.

¹ Hinweis: Die Kerndichteschätzung wurde mit Matlab 6.1 durchgeführt. Zur Anwendung kam ein Gaußkern mit Bandbreite $h = 1.06 \cdot T^{-1/5}$. Die exakte Matlab-Prozedur findet sich im Anhang.

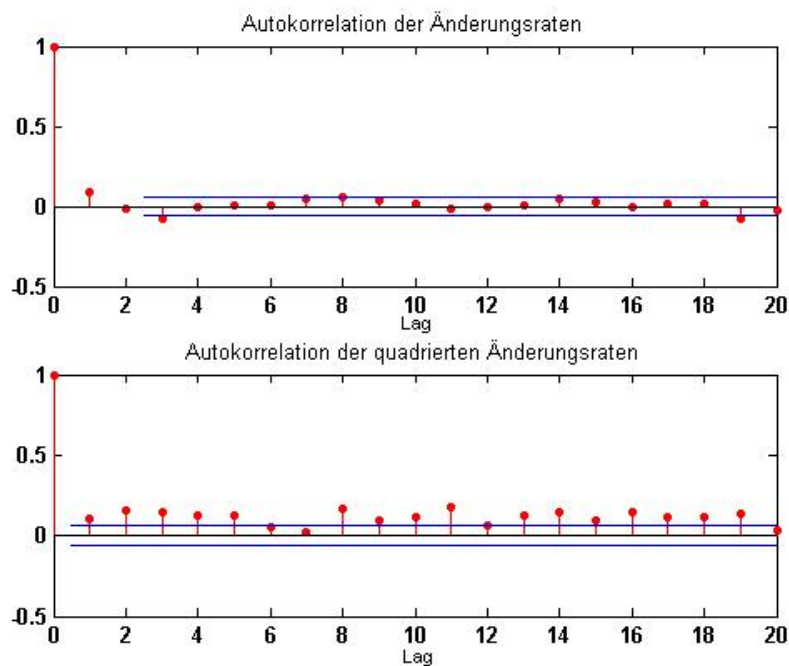
Abbildung 2.2: *Volatilitätscluster*: tägliche Log-Renditen der Siemensaktie (1999-2002)

Quelle: eigene Berechnungen.

Stylized fact 3: Unkorrelierte, aber nicht unabhängige Änderungsraten

Die im *stylized fact zwei* dargestellten Volatilitätsschwankungen sind eng mit der Tatsache verbunden, dass zwar die Renditen oder Änderungsraten auf Finanzmärkten über die Zeit hin keine Korrelation aufweisen müssen, jedoch ihre Quadrate (positiv) seriell korreliert sind (vgl. Abbildung 2.3 - mit eingezeichnetem 95%-Konfidenzintervall).

Abbildung 2.3: Autokorrelation der täglichen Log-Renditen der Siemensaktie (1999-2002)



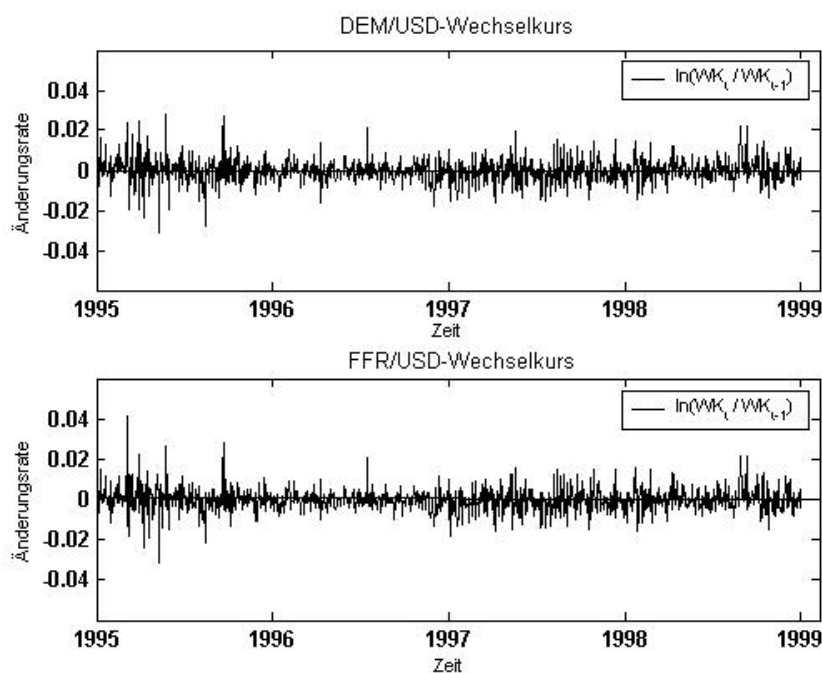
Quelle: eigene Berechnungen.

Die *stylized facts zwei* und *drei* sind, anders gesprochen, nicht geprägt durch besondere Eigenschaften der bedingten ersten Momente, sondern vielmehr durch Charakteristika der zweiten Momente einer Zeitreihe. Diese Eigenschaften tangieren jedoch die Effizienz der Märkte nicht.² Die beste Vorhersage, z.B. einer Rendite, ist im Allgemeinen ihr Erwartungswert, d.h. die vorhandenen Informationen erlauben keine Rückschlüsse auf die zukünftige Kursentwicklung. Allerdings sind die betrachteten Variablen nicht (statistisch) unabhängig, sondern ihre Variabilität hängt vom Verlauf des Preises bzw. Kurses der jüngeren Vergangenheit ab - sie sind sozusagen bedingt heteroskedastisch.

***Stylized fact 4*: „Gemeinsame Bewegung“ von Volatilitäten**

Hamao et al. (1990) stellen bei ihrer Untersuchung des gegenseitigen Einflusses von Änderungen des S&P500-Aktienindex, des FTSE100-Index und des Nikkei225-Index die Existenz von sogenannten *Spill-Over-Effekten* zwischen den internationalen Aktienmärkten fest. Zur Veranschaulichung dieser „gemeinsamer Bewegung“ bei Finanzmarktdaten sind in Abbildung 2.4 die täglichen Log-Änderungsraten des DEM/USD- und des FFR/USD-Wechselkurses abgetragen.

Abbildung 2.4: „Gemeinsame Bewegung“ von Volatilitäten: tägliche Log-Änderungsraten des DEM/USD- und des FFR/USD-Wechselkurses (1990-1998)



Quelle: eigene Berechnungen.

² Es wird grundsätzlich - abhängig von der zur Verfügung stehenden Informationsmenge - zwischen schwacher, semi-starker und starker Markteffizienz unterschieden, die sich entsprechend auf die beste Vorhersage der untersuchten Finanzmarktvariablen auswirkt.

Beim Vergleich der täglichen Log-Änderungsraten des DEM/USD- und des FFR/USD-Umtauschkurses kann eine gemeinsame zeitliche Bewegung ihrer Volatilitäten erahnt werden. Große Turbulenzen im FFR/USD-Wechselkurs sind gepaart mit deutlichen Bewegungen des DEM/USD- Wechselkurses. Besonders deutlich ist die tendenzielle Übereinstimmung der Bewegungen der Änderungsraten der beiden Umtauschkurse Mitte/Ende 1995. Vollkommen unterschiedlich hierzu ist dagegen das z.B. in Pagan (1996, S. 67ff.) dargestellte Phänomen gemeinsamer Faktoren bzw. der Kointegration von Zeitreihen anzusehen.

Für weitere empirische Phänomene und statistische Eigenschaften von Finanzmarktzeitreihen sei auf Pagan (1996, S. 17-38) und Bollerslev et al. (1994, S. 2963-2967) verwiesen.

2.2 (G)ARCH-Modellspezifikation

2.2.1 Univariate Modellierung

Die von Engle (1982) begründete Klasse der ARCH(P)-Modelle mit Ordnung P scheint hilfreich, die *stylized facts eins, zwei* und *drei* einfach und sparsam hinsichtlich der zu schätzenden Parameter zu modellieren. In Anlehnung an Engle sei eine Zeireihe $\{y_t\}_{t=1}^T$ gegeben, wobei diese unter Beachtung der Informationsmenge $\mathbf{\Omega}_{t-1}$ zum Zeitpunkt $t - 1$ durch

$$\begin{aligned} y_t &= \mu_t + u_t, \\ \text{Var}(u_t | \mathbf{\Omega}_{t-1}) &= h_t \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

modelliert werden kann. Dabei bezeichnet $\mu_t = E(y_t | \mathbf{\Omega}_{t-1})$ den bedingten Erwartungswert³ zur Informationsmenge $\mathbf{\Omega}_{t-1}$ sowie h_t die positive bedingte Varianz der Residuen $\{u_t\}_{t=1}^T$.

Das ARCH-Modell charakterisiert nun die bedingte Varianz wie folgt

$$u_t = \epsilon_t \sqrt{h_t}, \quad (2.2.2)$$

wobei ϵ_t als *i.i.d.*-Zufallsvariable mit $E(\epsilon_t) = 0$ und $\text{Var}(\epsilon_t) = 1$ angenommen wird und h_t gemäß

$$h_t = c + \sum_{p=1}^P \alpha_p u_{t-p}^2 \quad (2.2.3)$$

modelliert ist.⁴ Häufig wird zusätzlich eine Normalverteilung für ϵ_t in Gleichung (2.2.2) angenommen und u_t als bedingt normalverteilt spezifiziert ($u_t | \mathbf{\Omega}_{t-1} \sim N(0, h_t)$).⁵ Die Normalverteilungsannahme kann jedoch ohne weiteres zugunsten einer anderen Verteilung aufgehoben werden (z.B. wird oft eine t -Verteilung spezifiziert, um breitere Flanken zu erzeugen).

Alternativ wird häufig der ARCH(P)-Prozess auch als

$$u_t^2 = c + \sum_{p=1}^P \alpha_p u_{t-p}^2 + \varepsilon_t \quad (2.2.4)$$

³ Es wird angenommen, dass sich $E(y_t | \mathbf{\Omega}_{t-1})$ aus einer Kombination von verzögerten endogenen und/oder exogenen Variablen zusammensetzt. Die Ausprägungen dieser Variablen basieren ausschließlich auf Ereignissen der Informationsmenge $\mathbf{\Omega}_t$. Für weitere Details hierüber wird auf die Ausführungen am Ende dieses Kapitels verwiesen.

⁴ In der Literatur wird die in Gleichung (2.2.2) spezifizierte Form teilweise als *starker ARCH-Prozess* benannt und bei schrittweiser Aufhebung der unterschiedlichen Annahmen zunächst als *semi-starkes ARCH* (Aufhebung der *i.i.d.*-Annahme) und dann als *schwaches ARCH* (unter anderem ist hier u_t nur noch seriell unkorreliert) bezeichnet. Die Unterscheidung ist vor allem in der temporalen Aggregation von Finanzmarktdaten (z.B. von Tages- zu Wochenrenditen) wichtig, wobei hierbei den *schwachen ARCH-Modellen* eine tragende Rolle zugewiesen wird. Im Folgenden soll dies aber nicht weiter verfolgt und von *starken ARCH-Prozessen* ausgegangen werden; für weitere Ausführungen siehe Bollerslev et al. (1994, S. 2999f.).

⁵ Somit besteht kein Unterschied mehr zwischen *starken* und *semi-starken ARCH-Prozessen*.

beschrieben, wobei ε_t dann einen *white-noise-Prozess*⁶ darstellt (Hamilton, 1994, S. 657ff.).

Für eine strikt positive bedingte Varianz h_t in Gleichung (2.2.3) muss gewährleistet sein, dass $c > 0$ und $\alpha_p \geq 0$ für alle $p = 1, \dots, P$ gilt (Bera und Higgins, 1993, S. 309). Des weiteren folgert Hamilton (1994, S. 659) für nichtnegative Koeffizienten (Gleichung (2.2.3)), dass der Prozess dann kovarianzstationär⁷ ist, wenn gilt:

$$\sum_p^P \alpha_p < 1 \quad \forall \quad p = 1, \dots, P. \quad (2.2.5)$$

Während die unbedingte Varianz $\sigma^2 = \text{Var}(u_t)$ als invariant in der Zeit angesehen wird, können sich die bedingten Varianzen über die Zeit hinweg verändern. Eine sich in der Zeit verändernde Volatilität kann somit modelliert werden.

Ein Problem der ARCH(P)-Modelle ist, dass für einige Anwendungen hohe Ordnungen P verwendet werden müssen, da der Einfluss weit zurückliegender Werte auf die Volatilität nur langsam an Stärke verliert. Der damit einhergehenden komplexeren Ausgestaltung⁸ des ARCH-Modells kann durch die Anwendung des GARCH(P, Q)-Modells mit Ordnung P und Q Rechnung getragen werden. Bollerslev (1986) spezifiziert daher die bedingte Varianz h_t wie folgt:

$$h_t = c + \sum_{p=1}^P \alpha_p u_{t-p}^2 + \sum_{q=1}^Q \beta_q h_{t-q} \quad (2.2.6)$$

Für eine positive bedingte Varianz und die Stationarität des GARCH-Prozesses muss gelten: $c > 0$, $\alpha_p \geq 0$ für alle $p = 1, \dots, P$, $\beta_q \geq 0$ für alle $q = 1, \dots, Q$ sowie $\sum_{p=1}^P \alpha_p + \sum_{q=1}^Q \beta_q < 1$ (Bera und Higgins, 1993, S. 312 und Hamilton, 1994, S. 666).⁹

Lütkepohl (1997, S. 75) weist explizit auf die Erfahrung in der Praxis hin, dass ARCH-Modelle niedriger Ordnung häufig nicht in der Lage sind, Finanzmarktdaten mit hoher Beobachtungsfrequenz (z.B. Intraday-Daten) adäquat abzubilden, während dies mit die GARCH-Modellen viel besser gelingt. Im Gegensatz dazu argumentiert Tsay (2002, S. 95f.), dass zwar mit GARCH-Prozessen einige Schwächen der ARCH-Modellklasse aufgefangen werden können (wie z.B. die

⁶ Mit $E(\varepsilon_t) = 0$ und $E(\varepsilon_t \varepsilon_\tau) = \sigma_\varepsilon^2$ für alle $t = \tau$ sowie $E(\varepsilon_t \varepsilon_\tau) = 0$ sonst.

⁷ Und somit der Prozess nicht explodiert bzw. die ersten beiden Momente endlich sind.

⁸ Häufig wird auch in der Literatur das Problem des Overfittings angesprochen (Brooks, 2002, S 453).

⁹ Nelson und Cao (1992) führen etwas schwächere Bedingungen an, die mit speziellen Ausprägungen der Ordnungen P und Q zusammenhängen und komplexerer Natur sind.

komplexere Ausgestaltung von ARCH-Modellen höherer Ordnung), jedoch die Abbildung der leptokurtischen Verteilungseigenschaft von Hochfrequenzdaten nicht gänzlich gelingt.

Standard GARCH-Modelle unterstellen des weiteren einen symmetrischen Effekt von positiven und negativen Fehlern auf die Volatilität, was in der Realität allerdings selten gegeben ist; mit anderen Worten, warum sollen z.B. gute und schlechte Unternehmensnachrichten die gleiche Auswirkung auf die Volatilität einer Aktie haben? In der Tat sind in den letzten Jahren eine Reihe von parametrischen Erweiterungen der Standardmodelle vorgeschlagen worden, von denen z.B. das *exponential* GARCH (EGARCH-) Modell insbesondere assymetrische Effekte zu fassen versucht oder das *integrated* GARCH (IGARCH-) Modell, in dem eine erhöhte Persistenz von Schocks modelliert wird. Einen guten Überblick über die Weiterentwicklung von Standard GARCH-Modellen findet sich z.B. in Palm (1996, S. 210-219) und Campbell et al. (1997, S. 481f.).

2.2.2 Multivariate Modellierung

Stylized fact vier legt nahe, dass eine Erweiterung der univariaten GARCH-Spezifikation auf den multivariaten Fall wesentliche Vorteile (z.B. in der Form von effizienteren Schätzern) durch die explizite Berücksichtigung kontemporärer Korrelationen von Finanzmarktdaten bietet. Aus theoretischer Sicht ist die Verallgemeinerung auf multivariate GARCH-Modelle einfach.¹⁰ Gegeben sei ein $N \times 1$ dimensionaler Zeitreihenvektor $\mathbf{y}_t = (y_{1,t}, \dots, y_{N,t})'$. Die allgemeine Form eines multivariaten GARCH-Modells kann dann unter Beachtung der Informationsmenge Ω_{t-1} zum Zeitpunkt $t - 1$ ausgedrückt werden als

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_t &= \boldsymbol{\mu}_t + \mathbf{u}_t, \\ \text{Var}(\mathbf{u}_t | \Omega_{t-1}) &= \mathbf{H}_t, \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

wobei $\boldsymbol{\mu}_t = E(\mathbf{y}_t | \Omega_{t-1})$ wiederum den bedingten Erwartungswert und $\mathbf{u}_t = (u_{1,t}, \dots, u_{N,t})'$ einen $N \times 1$ dimensionale Vektor von Residuen darstellt sowie \mathbf{H}_t die symmetrische, positiv (semi-) definite bedingte Varianz-Kovarianzmatrix¹¹ der Dimension $N \times N$ bezeichnet. Wiederum kann der Störvektor \mathbf{u}_t geschrieben werden als

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{H}_t^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\epsilon}_t \tag{2.2.8}$$

¹⁰ Engle et al. (1984) waren die ersten, die eine multivariate Erweiterung, allerdings auf ARCH-Modelle abzielend, vornahmen.

¹¹ Im Folgenden wird nur noch der Begriff Kovarianzmatrix verwendet.

wobei $\boldsymbol{\epsilon}_t$ ein *i.i.d.*-Zufallsvektor der Dimension $N \times 1$ mit Erwartungswert $E(\boldsymbol{\epsilon}_t) = \mathbf{0}$ und Varianz $\text{Var}(\boldsymbol{\epsilon}_t) = \mathbf{I}_N$ ist (Fengler und Herwartz, 2002, S. 250).¹²

Die bedingte Kovarianzmatrix \mathbf{H}_t enthält die Hauptdiagonalelemente $h_{ii,t}$ für alle $i = 1, \dots, N$ als bedingte Varianzen von $u_{i,t}$ sowie die Nebendiagonalelemente $h_{ij,t}$ für alle $i, j = 1, \dots, N$ und $i \neq j$ als die bedingten Kovarianzen von $u_{i,t}$ und $u_{j,t}$. Für einen trivariaten Fall ergibt sich beispielsweise

$$\mathbf{H}_t = \begin{pmatrix} h_{11,t} & h_{12,t} & h_{13,t} \\ h_{21,t} & h_{22,t} & h_{23,t} \\ h_{31,t} & h_{32,t} & h_{33,t} \end{pmatrix}. \quad (2.2.9)$$

Um das multivariate GARCH-Modell schätzen zu können, muss eine Parametrisierung der bedingten Kovarianzmatrix \mathbf{H}_t erfolgen. Analog zum univariaten Fall soll \mathbf{H}_t von verzögerten (quadrierten) Residuen \mathbf{u}_{t-p} für alle $p = 1, \dots, P$ und verzögerten Kovarianzmatrizen \mathbf{H}_{t-q} für alle $q = 1, \dots, Q$ abhängen. Technisch ergeben sich jedoch für den multivariaten Fall mit beliebigen Abhängigkeiten einige Komplikationen. Erstens muss per Definition gewährleistet werden, dass die Kovarianzmatrix \mathbf{H}_t positiv (semi-)definit ist¹³, was meist zu sehr restriktiven Bedingungen des Parameterraums führen kann. Zweitens ist das Modell aufgrund seiner Dimensionalität zu komplex für die empirische Arbeit. Eine Reduktion der Dimensionalität, um Komplikationen bei der Schätzung zu vermeiden, ist daher von Nöten, jedoch sollte drittens dennoch gewährleistet sein, dass Realitätsnähe bzw. Flexibilität nicht zu stark beeinträchtigt werden. Man versucht daher, eine Struktur von \mathbf{H}_t festzulegen, die zum einen die Dimension des Parameterraums reduziert (ohne dabei zu restriktiv vorzugehen) und zum anderen eine positiv definite bedingte Kovarianzmatrix \mathbf{H}_t - auch unter weniger starken Einschränkungen des Parameterraumes - gewährleistet. Schließlich wird häufig zusätzlich versucht, statt den bedingten Kovarianzen die bedingten Korrelationen zu spezifizieren.

Nicht zu vernachlässigen bei der Modellierung von GARCH-Prozessen ist die Spezifikation des Regressionsmodells für den Zeitreihenvektor $\mathbf{y}_t = (y_{1,t}, \dots, y_{N,t})'$, d.h. die Form des bedingten Erwartungswertes $E(\mathbf{y}_t | \boldsymbol{\Omega}_{t-1})$ als solches. Häufig wird eine *vektorautoregressive moving average*

¹² Es sei wiederum angemerkt, dass zur Vereinfachung (besonders bei der Durchführung der Schätzung) oft angenommen wird, dass $\boldsymbol{\epsilon}_t$ einer multivariaten Normalverteilung folgt. Für weitere Ausführungen bezüglich der Verteilung speziell des Zufallsvektors $\boldsymbol{\epsilon}_t$ siehe Abschnitt 4.1.

¹³ Im Fall, dass sich die Änderungsraten einer Zeitreihe nicht verändern, ist die Varianz der betreffenden Zeitreihe null und somit die betreffende Kovarianzmatrix semi-definit. Da dies aber bei Finanzmarktzeitreihen eher selten der Fall ist, wird im Folgenden von positiv-definiten Kovarianzmatrizen ausgegangen.

Spezifikation (unter Einbeziehung *exogener* Variablen) (VARMA(X)-Modell) herangezogen, was jedoch einen beträchtlichen Anstieg der Zahl zu schätzender Parameter mit sich bringt. Daher geht man zu einfacheren Spezifikationen über oder modelliert

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{y}_t - \hat{\boldsymbol{\mu}}_t \tag{2.2.10}$$

als neu zu untersuchende Daten, wobei $\hat{\boldsymbol{\mu}}_t$ den bedingten (geschätzten) Erwartungswert in Form des Stichprobendurchschnittes¹⁴ darstellt. Wie jedoch Li et al. (2002, S. 252) anmerken, führt eine nicht-adäquate Modellierung des bedingten Erwartungswertes von \mathbf{y}_t zu möglichen inkonsistenten Schätzern des GARCH-Prozesses. Weiter weisen Tse und Tsui (2001, S. 4) darauf hin, dass durch die Spezifikation in Gleichung (2.2.10) bei der Maximum-Likelihood (ML)-Schätzung (siehe Abschnitt 4.1) eine asymptotische Unkorreliertheit zwischen ML-Schätzern der Koeffizienten des bedingten Erwartungswertes einerseits und ML-Schätzern der Parameter der bedingten Varianz andererseits angenommen wird und somit \mathbf{y}_t auch als bereits „gefiltert“ angesehen werden könnte.

¹⁴ Zeitreihenspezifisch.

Kapitel 3

Theorie multivariater GARCH-Modelle

3.1 Klassische multivariate GARCH-Modelle

3.1.1 VEC(P, Q)-Modell

Eine direkte Verallgemeinerung des univariaten GARCH(P, Q)-Modells aus Gleichung (2.2.6) auf den multivariaten Fall stellt folgende, von Bollerslev et al. (1988, S. 119) eingeführte Form von \mathbf{H}_t dar:

$$vech(\mathbf{H}_t) = vech(\mathbf{C}) + \sum_{p=1}^P \mathbf{A}_p vech(\mathbf{u}_{t-p} \mathbf{u}'_{t-p}) + \sum_{q=1}^Q \mathbf{B}_q vech(\mathbf{H}_{t-q}), \quad (3.1.1)$$

mit $vech(\mathbf{C})$ als $[\frac{N(N+1)}{2}] \times 1$ dimensionalen Vektor von Konstanten, der die zeitinvarianten Varianz-/Kovarianzelemente beinhaltet und \mathbf{A}_p sowie \mathbf{B}_q als Koeffizientenmatrizen der Dimension $[\frac{N(N+1)}{2}] \times [\frac{N(N+1)}{2}]$. Zusätzlich steht $vech(\cdot)$ für den Operator, der die Elemente des linken unteren Dreieckteils einer quadratischen $N \times N$ Matrix spaltenweise untereinander in einen $[\frac{N(N+1)}{2}] \times 1$ dimensionalen Vektor plaziert.¹ Unter Missachtung des zum $vech(\cdot)$ -Operator verwandten $vec(\cdot)$ -Operators, der alle Spalten einer $M \times N$ Matrix untereinander in einen $M \cdot N \times 1$ dimensionalen

¹ Beispielsweise ergibt sich für eine 3×3 Matrix $\mathbf{F} = [f_{ij}]$:

$$vech(\mathbf{F}) \equiv \begin{bmatrix} f_{11} \\ f_{21} \\ f_{31} \\ f_{22} \\ f_{32} \\ f_{33} \end{bmatrix}. \quad \text{Für weitere Ausführungen siehe Lütkepohl (1996, Kapitel 7).}$$

Vektor stapelt,² führen Engle und Kroner (1995, S. 125) für das Modell aus (3.1.1) die Bezeichnung *vec-Repräsentation* ein. In der neueren Literatur wird daher teilweise die Bezeichnung *vech-Repräsentation* gewählt. Um aber eine Kohärenz mit dem überwiegenden Teil der Literatur herzustellen, wird in dieser Arbeit der ursprünglichen Bezeichnung von Engle und Kroner gefolgt.

Explizit kann das $VEC(P, Q)$ -Modell für einen bivariaten Fall mit $P = Q = 1$ wie folgt geschrieben werden:

$$\begin{aligned}
 vech(\mathbf{H}_t) = \begin{bmatrix} h_{11,t} \\ h_{21,t} \\ h_{22,t} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{1,t-1}^2 \\ u_{1,t-1} \cdot u_{2,t-1} \\ u_{2,t-1}^2 \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_{11,t-1} \\ h_{21,t-1} \\ h_{22,t-1} \end{bmatrix}. \tag{3.1.2}
 \end{aligned}$$

Aufgrund der sehr allgemeinen Struktur des VEC-Modells (\mathbf{H}_t hängt von P quadrierten bzw. Kreuzprodukten der Elemente des Residuenvektors \mathbf{u}_t und Q verzögerten bedingten Varianzen und Kovarianzen ab) können eine Vielzahl dynamischer Strukturen der multivariaten Volatilitäten modelliert werden. Jedoch ergeben sich dadurch insgesamt $\left[\frac{N(N+1)}{2}\right] \cdot \left[1 + \frac{N(N+1) \cdot (P+Q)}{2}\right]$ **zu schätzende Parameter**³, was meist praktisch undurchführbar ist.

Hafner (2001, S. 2) postuliert, dass die Tatsache, dass die Matrizen \mathbf{C} , \mathbf{A}_p für alle $p = 1, \dots, P$ und \mathbf{B}_q für alle $q = 1, \dots, Q$ symmetrisch positiv definit sind, als hinreichende Bedingung einer **positiv definiten bedingten Kovarianzmatrix** \mathbf{H}_t ausreicht, jedoch die Annahme symmetrischer Matrizen sehr restriktiv sei. Es kann allerdings angemerkt werden, dass es bislang wohl keine allgemeinen gültigen Ergebnisse über notwendige und hinreichende Bedingungen einer positiv definiten Matrix \mathbf{H}_t im Zusammenhang mit dem VEC-Modell gibt.

Um auf bekannte stochastische Ergebnisse von VARMA-Prozessen zurückgreifen zu können, formuliert Hafner (2001, S. 2f.) durch Umsortieren des $VEC(P, Q)$ -Modells aus (3.1.1) ein VARMA-Prozess der Ordnung $(\max(P, Q), P)$:

$$vech(\mathbf{u}_t \mathbf{u}_t') = vech(\mathbf{C}) + \sum_{p=1}^{\max(P, Q)} (\mathbf{A}_p + \mathbf{B}_q) vech(\mathbf{u}_{t-p} \mathbf{u}_{t-p}') - \sum_{q=1}^Q \mathbf{B}_q \mathbf{e}_{t-q} + \mathbf{e}_t, \tag{3.1.3}$$

² Siehe Lütkepohl (1996, Kapitel 7).

³ Für $N = 5$ Zeitreihen sind beispielsweise für $P = Q = 1$ bereits 465 Parameter zu schätzen.

wobei $\mathbf{e}_t = \text{vech}(\mathbf{u}_t \mathbf{u}_t') - \text{vech}(\mathbf{H}_t)$ ein *white-noise-Vektor* ist⁴ und falls $Q > P$: $\mathbf{A}_{P+1} = \dots = \mathbf{A}_Q = 0$ bzw. bei $P > Q$: $\mathbf{B}_{Q+1} = \dots = \mathbf{B}_P = 0$ gilt. Der multivariate GARCH-Prozess aus (3.1.1) ist dann genau **kovarianzstationär**, wenn alle Eigenwerte der Matrix $\sum_{p=q=1}^{\max(P,Q)} (\mathbf{A}_p + \mathbf{B}_q)$ einen Betrag kleiner eins haben. Für einen formalen Beweis siehe Bollerslev und Engle (1993, S. 174).

Weiter führt Gouriéroux (1997, S. 108) für den Fall der Kovarianzstationarität des Prozesses die **unbedingte Kovarianzmatrix** $\Sigma = \text{Var}(\mathbf{u}_t)$ des VEC-Modells mit

$$\text{vech}(\Sigma) = \left(\mathbf{I}_{N'} - \sum_{p=q=1}^{\max(P,Q)} (\mathbf{A}_p + \mathbf{B}_q) \right)^{-1} \cdot \text{vech}(\mathbf{C}), \quad \text{wobei} \quad N' = \frac{N(N+1)}{2}, \quad (3.1.4)$$

an.

Bollerslev und Engle (1993) stellen in Anlehnung an univariate IGARCH-Modelle, die quasi eine Einheitswurzel in der bedingten Varianz aufweisen, die Frage, inwieweit sich Schocks in der bedingten Kovarianzmatrix fortsetzen und so für Vorhersagen als wichtig zu erachten sind. Die **Persistenz in der Varianz** charakterisieren sie als den Einfluss der ursprünglichen Bedingungen (Informationen in Ω_0) auf die Prognose der zukünftigen bedingten Kovarianzmatrizen. Nach ihnen sind die Zeitreihen $\mathbf{y}_t = (y_{1,t}, \dots, y_{N,t})'$ nicht persistent in der Varianz wenn

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |\{\mathbf{H}_t^*(s)\}_i| = 0 \quad (3.1.5)$$

für alle $s > 0$ und $i = 1, \dots, N(N+1)/2$, wobei $\mathbf{H}_t^*(s)$ gegeben ist durch

$$\mathbf{H}_t^*(s) = \text{E}(\text{vech}(\mathbf{H}_t) | \Omega_s) - \text{E}(\text{vech}(\mathbf{H}_t) | \Omega_0) \quad \forall \quad t > s > 0 \quad (3.1.6)$$

(Bollerslev und Engle, 1993, S. 172).

Für das allgemeine VEC-Modell gilt dann insbesondere, dass im Fall der Kovarianzstationarität keine Persistenz aufzufinden ist bzw. $\limsup_{t \rightarrow \infty} |\mathbf{H}_t^*(s)| = 0$ für alle $s > 0$ folgt. Trifft dies dagegen nicht zu, dann sind Schocks wichtig für Vorhersagen der bedingten Kovarianzmatrix und somit persistent (Bollerslev und Engle, 1993, S. 174). Allerdings muss einschränkend erwähnt werden, dass eine offensichtliche Persistenz in der bedingten Kovarianzmatrix z.B. auch von einer zugrundeliegenden Verteilung mit dickeren Flanken (Bollerslev et al., 1994, S. 2992) oder, wie Lamoureux und Lastrapes (1990, S. 225ff.) anführen, aufgrund einer Mißspezifikation des Modells (genauer gesagt, einer Vernachlässigung von deterministischen strukturellen Veränderungen in der unbedingten Varianz) hervorgerufen werden kann.

⁴ $\text{E}[\mathbf{e}_t] = 0$ und $\text{E}[\mathbf{e}_t \mathbf{e}_\tau'] = \Sigma_e$ für alle $t = \tau$ sowie $\text{E}[\mathbf{e}_t \mathbf{e}_\tau'] = \mathbf{0}$ sonst.

Obwohl viele Finanzmarktzeitreihen Persistenz in ihren univariaten GARCH-Prozessen aufweisen, postulieren Bollerslev und Engle (1993, S. 176), dass eine nichttriviale lineare Kombination solcher Zeitreihen keine Persistenz in der bedingten Kovarianzmatrix aufweist. Die Zeitreihen sind daher kopersistent in der Varianz, was in Anlehnung an kointegrierte Zeitreihen⁵ als längerfristige Beziehung dieser Variablen interpretiert werden kann. Dies soll hier jedoch nicht weiter vertieft und für weitere Ausführungen auf Bollerslev und Engle (1993, S. 176ff.) verwiesen werden.

3.1.2 Diagonales VEC(P, Q)-Modell

Wie bereits oben erwähnt, tritt bei Hinzuziehung von mehreren Zeitreihen, der Zulassung von weiteren verzögerten quadrierten bzw. Kreuzprodukten der Elemente des Residuenvektors \mathbf{u}_t und zusätzlichen verzögerten bedingten Varianzen und Kovarianzen eine Fülle von Parametern auf, die eine praktische Schätzung unmöglich machen. Daher vereinfachen Bollerslev et al. (1988) das von ihnen eingeführte VEC(P, Q)-Modell dahingehend, dass sie in den Parametermatrizen \mathbf{A}_p und \mathbf{B}_q nur Diagonalelemente zulassen. Somit hängen die bedingten Varianzen $h_{ii,t}$ nur von verzögerten quadrierten Residuen und von verzögerten eigenen Werten ab; die Kovarianzen $h_{ij,t}$ setzen sich dagegen nur aus verzögerten Kreuzprodukten der Residuen und wiederum aus eigenen verzögerten Werten zusammen.

Unter Verwendung des Hadamard Produktes⁶ \odot und unter der Spezifizierung impliziter Beziehungen⁷ für die symmetrischen $N \times N$ Matrizen \mathbf{A}_p^* und \mathbf{B}_q^* der Form $\mathbf{A}_p = \text{diag}[\text{vech}(\mathbf{A}_p^*)]$ für alle $p = 1, \dots, P$ sowie $\mathbf{B}_q = \text{diag}[\text{vech}(\mathbf{B}_q^*)]$ für alle $q = 1, \dots, Q$ formulieren Bauwens et al. (2003, S. 5) das diagonale VEC-Modell als

$$\text{vech}(\mathbf{H}_t) = \mathbf{C} + \sum_{p=1}^P \mathbf{A}_p^* \odot (\mathbf{u}_{t-p} \mathbf{u}'_{t-p}) + \sum_{q=1}^Q \mathbf{B}_q^* \odot \mathbf{H}_{t-q}. \quad (3.1.7)$$

Ohne Verwendung des Hadamard-Produktes kann das diagonale VEC-Modell für einen bivariaten

⁵ Siehe hierfür z.B. Engel und Granger (1987).

⁶ Das Hadamard Produkt (oder elementweise Produkt) zweier $M \times N$ Matrizen $\mathbf{L} = [l_{ij}]$ und $\mathbf{O} = [o_{ij}]$ ist definiert als $\mathbf{L} \odot \mathbf{O} \equiv [l_{ij} o_{ij}]_{(M \times N)}$. Für weitere Ausführungen siehe Lütkepohl (1996, S. 3 und S. 20f.).

⁷ Weiterhin sei angeführt, dass der hier verwendete Diag-Operator $\text{diag}(\cdot)$ aus einem $N \times 1$ Vektor $\mathbf{l} = [l_i]$ eine $N \times N$ dimensionale Diagonalmatrix \mathbf{F} mit den Diagonalelementen $f_{ii} = l_i$ erzeugt (Lütkepohl, 1996, S. 6).

Fall mit $P = Q = 1$ explizit wie folgt geschrieben werden:

$$\begin{aligned}
 \text{vech}(\mathbf{H}_t) = \begin{bmatrix} h_{11,t} \\ h_{21,t} \\ h_{22,t} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{21} & 0 \\ 0 & 0 & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{1,t-1}^2 \\ u_{1,t-1} \cdot u_{2,t-1} \\ u_{2,t-1}^2 \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & b_{21} & 0 \\ 0 & 0 & b_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_{11,t-1} \\ h_{21,t-1} \\ h_{22,t-1} \end{bmatrix}. \tag{3.1.8}
 \end{aligned}$$

Durch die Festlegung der Parametermatrizen \mathbf{A}_p und \mathbf{B}_q auf ihre Diagonalelemente reduziert sich die Zahl der insgesamt **zu schätzenden Parameter** auf $[\frac{N(N+1)}{2}](1 + P + Q)$. Diese Restriktion scheint dahingehend intuitiv einleuchtend, da die die Varianzen bzw. Kovarianzen erzeugende Information gewöhnlich durch (verzögerte) quadrierte Residuen bzw. durch deren (verzögerte) Kreuzprodukte abgedeckt werden kann (Engle und Kroner, 1995, S. 126).

Wie Attanasio (1991, S. 493) anführt, ist die Kovarianzmatrix \mathbf{H}_t dann **positiv definit**, falls in Gleichung (3.1.7) die Matrizen \mathbf{C} , \mathbf{A}_p^* für alle $p = 1, 2, \dots, P$ sowie \mathbf{B}_q^* für alle $q = 1, 2, \dots, Q$ und ebenso die anfänglichen Kovarianzmatrizen $\mathbf{H}_0, \mathbf{H}_{-1}, \dots, \mathbf{H}_{t-Q}$ positiv definit sind.

Da das diagonale VEC-Modell als eine spezielle Modifikation des allgemeinen VEC(P, Q)-Modells angesehen werden kann, wird hinsichtlich **Kovarianzstationarität** und **Persistenz** in der bedingten Kovarianzmatrix auf die Ausführungen des VEC-Modells im vorherigen Abschnitt mit den entsprechenden Modifikationen für den diagonalen VEC-GARCH-Prozess verwiesen. Engle und Kroner (1995, S. 133) merken allerdings speziell an, dass das diagonale VEC-Modell dann kovarianzstationär ist, falls die Summe der Diagonalelemente aus \mathbf{A}_p und \mathbf{B}_q ($a_{ii} + b_{ii}$) für alle $i = 1, \dots, N$ kleiner eins ist.

Gerade die Festlegung auf Diagonalelemente der Parametermatrizen mag sich jedoch dann negativ auswirken, wenn z.B. explizit eine Abhängigkeit der bedingten Varianzen einer Zeitreihe von der Historie der Volatilität anderer Zeitreihen im System gewünscht wird oder die Kopersistenz (in der Varianz) der Variablen untersucht werden soll.

3.1.3 BEKK(P, Q, K)-Modell

Aufgrund der Tatsache, dass es einerseits in der VEC-Repräsentation sehr schwer ist, eine positiv definite Kovarianzmatrix \mathbf{H}_t ohne sehr restriktive Bedingungen zu gewährleisten, und andererseits das diagonale VEC-Modell hinsichtlich dynamischer Strukturen der Volatilität zu limitiert sein kann, diskutieren Engle und Kroner (1995, S. 127ff.) folgende, von ihnen als BEKK-Repräsentation⁸ benannte Spezifikation eines multivariaten GARCH-Modells:

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{C}'\mathbf{C} + \sum_{k=1}^K \sum_{p=1}^P \mathbf{A}'_{kp} \mathbf{u}_{t-p} \mathbf{u}'_{t-p} \mathbf{A}_{kp} + \sum_{k=1}^K \sum_{q=1}^Q \mathbf{B}'_{kq} \mathbf{H}_{t-q} \mathbf{B}_{kq}. \quad (3.1.9)$$

Die Matrix \mathbf{C} stellt dabei eine obere Dreiecksmatrix der Dimension $N \times N$ dar, die Matrizen \mathbf{A}_{kp} sowie \mathbf{B}_{kq} sind Parametermatrizen der Dimension $N \times N$, während K die Allgemeinheit des Prozesses aus (3.1.9) determiniert.

Unter der Annahme $P = Q = K = 1$ folgt für ein bivariates BEKK-Modell:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_t &= \begin{bmatrix} c_{11} & 0 \\ c_{12} & c_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ 0 & c_{22} \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{1,t-1}^2 & u_{1,t-1} \cdot u_{2,t-1} \\ u_{1,t-1} \cdot u_{2,t-1} & u_{2,t-1}^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_{11,t-1} & h_{12,t-1} \\ h_{12,t-1} & h_{22,t-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

Die Matrizen \mathbf{A}_{kp} und \mathbf{B}_{kq} sind im Vergleich zum diagonalen VEC-Modell aus (3.1.7) nicht auf ihre Diagonalelemente beschränkt. Daher können dynamische Strukturen der Abhängigkeit der bedingten Varianzen und Kovarianzen einer Zeitreihe von den bedingten Varianzen bzw. Kovarianzen anderer Zeitreihen modelliert werden, ohne dabei ein Übermaß an Parameterschätzungen zu müssen. Insgesamt müssen im BEKK-Modell $\left[\frac{N(N+1)}{2}\right] + [(P + Q)K] \cdot N^2$ **Parameter geschätzt** werden.

Durch die quadratische Formulierung der Terme der rechten Seite der Gleichung (3.1.9) ist garantiert, dass die Kovarianzmatrix \mathbf{H}_t **positiv definit**⁹ ist, jedoch führen

⁸ Das Akronym BEKK stammt dabei von der gemeinsamen Arbeit von Yoshi Baba, Rob Engle, Dennis Kraft und Ken Kroner - einer früheren Version des Artikels von Engle und Kroner (1995).

⁹ Ohne Beschränkung der Allgemeinheit.

Engle und Kroner (1995, S. 131) speziell unter der Bedingung von positiv definiten, ursprünglichen Kovarianzmatrizen $\mathbf{H}_0, \mathbf{H}_{-1}, \dots, \mathbf{H}_{t-Q}$ für eine positiv definite Matrix \mathbf{H}_t die schwache (hinreichende) Bedingung des vollen Rangs entweder von \mathbf{C} oder \mathbf{B}_{kq} an.

Die quadratische Form des BEKK-Modells macht es allerdings nötig, dass die Parameter in Gleichung (3.1.9) zunächst identifiziert werden. Dies kann aber in den in der empirischen Praxis angewandten BEKK-Modellen meist durch einfache Vorzeichenrestriktionen erreicht werden (siehe speziell Engle und Kroner, 1995, S. 130).¹⁰ Weiter folgern Engle und Kroner (1995, S. 127ff.), dass das BEKK-Modell aus (3.1.9) durch den Summationsparameter K genügend allgemein gehalten werden kann, um alle positiv definiten diagonalen VEC-Repräsentationen und die meisten positiv definiten VEC-Repräsentationen eines multivariaten GARCH-Prozesses zu umfassen. Hinsichtlich der Beziehung zwischen allgemeinem VEC-Modell und dem BEKK-Modell kann dann gefolgert werden, dass es zu jedem BEKK-Modell eine eindeutige äquivalente VEC-Darstellung gibt, während dies umgekehrt nicht der Fall ist. Dabei scheitert der Umkehrschluß an den nicht-positiv definiten VEC-Modellen. Für spezielle Bedingungen hinsichtlich der Äquivalenz von allgemeinem VEC-Modell und BEKK-Modell bzw. von diagonalem VEC-Modell und BEKK-Modell siehe Engle und Kroner (1995, S. 130ff.).

Aufgrund der oben genannten Tatsache, dass es zu jedem BEKK-Modell eine eindeutige äquivalente VEC-Darstellung gibt, jedoch dies umgekehrt nicht der Fall ist, kann das BEKK-Modell als Spezialfall des VEC-Modells angesehen und dessen Eigenschaften aus denen des VEC-Modells abgeleitet werden. Wendet man daher auf beiden Seiten der Gleichung (3.1.9) den $vech(\cdot)$ -Operator unter Beachtung von $vech(\mathbf{ABC}) = (\mathbf{C}' \otimes \mathbf{A})vech(\mathbf{B})$ an, erhält man in Anlehnung an Engle und Kroner (1995, S. 130 und S. 132f.) folgendes Ergebnis:

$$\begin{aligned} vech(\mathbf{H}_t) &= \mathcal{E}_N(\mathbf{C} \otimes \mathbf{C})' \mathcal{D}_N vech(\mathbf{I}_N) + \sum_{k=1}^K \sum_{pi=1}^P \mathcal{E}_N(\mathbf{A}_{kp} \otimes \mathbf{A}_{kp})' \mathcal{D}_N vech(\mathbf{u}_{t-p} \mathbf{u}'_{t-p}) \\ &\quad + \sum_{k=1}^K \sum_{q=1}^Q \mathcal{E}_N(\mathbf{B}_{kq} \otimes \mathbf{B}_{kq})' \mathcal{D}_N vech(\mathbf{H}_{t-q}), \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

wobei \mathcal{E}_N und \mathcal{D}_N die elementaren Eliminations- und Dublikationsmatrizen bezeichnen.¹¹

¹⁰ Im häufig verwendeten BEKK(1,1,1)-Modell reicht z.B. die Annahme aus, dass die Elemente a_{11} und b_{11} der Matrizen \mathbf{A}_{11} und \mathbf{B}_{11} und die Hauptdiagonalelemente von \mathbf{C} positiv sind.

¹¹ Die $\frac{1}{2}N(N+1) \times N^2$ dimensionale Eliminationsmatrix \mathcal{E}_N ist für jede $N \times N$ Matrix \mathbf{F} definiert als $vech(\mathbf{F}) = \mathcal{E}_N vec(\mathbf{F})$, während die $N^2 \times \frac{1}{2}N(N+1)$ dimensionale Dublikationsmatrix \mathcal{D}_N für jede $N \times N$ Matrix \mathbf{F} definiert ist als $vec(\mathbf{F}) = \mathcal{D}_N vech(\mathbf{F})$. Für nähere Ausführungen über Eliminations- bzw. Dublikationsmatrizen siehe Lütkepohl (1996, S. 9f. und S. 122ff. sowie S. 127ff.).

Der multivariate GARCH-Prozess aus (3.1.9) ist dann **kovarianzstationär**, wenn alle Eigenwerte von $\sum_{k=1}^K \sum_{p=1}^P (\mathbf{A}_{kp} \otimes \mathbf{A}_{kp}) + \sum_{k=1}^K \sum_{q=1}^Q (\mathbf{B}_{kq} \otimes \mathbf{B}_{kq})$ einen Betrag kleiner eins haben; für einen Beweis siehe Engle und Kroner (1995, S. 133).

Weiter führen Engle und Kroner (1995, S. 133) die **unbedingte Kovarianzmatrix** Σ des BEKK-Modells wie folgt an:

$$\text{vec}(\Sigma) = \left(\mathbf{I}_{N^2} - \sum_{k=1}^K \sum_{p=1}^P (\mathbf{A}_{kp} \otimes \mathbf{A}_{kp})' + \sum_{k=1}^K \sum_{q=1}^Q (\mathbf{B}_{kq} \otimes \mathbf{B}_{kq})' \right)^{-1} \cdot \text{vec}(\mathbf{C}'\mathbf{C}). \quad (3.1.12)$$

Hinsichtlich der **Persistenz**¹² von Schocks in der bedingten Kovarianzmatrix verweist Palm (1996, S. 223) auf die Bedingungen für die Kovarianzstationarität des BEKK-GARCH-Prozesses.

Tse (2000, S. 108f.) nennt als Nachteil des BEKK-Modells die schwierige Interpretation der Parameter der Kovarianzmatrix \mathbf{H}_t . Durch das gleichzeitige Auftauchen von einzelnen Parametern in der Spezifikation der verschiedenen bedingten Kovarianzen $h_{ij,t}$ und Varianzen $h_{ii,t}$ geht die Intuition ihrer Netto-Effekte auf die jeweilige Varianz oder Kovarianz verloren. Dies wird besonders deutlich, wenn Gleichung (3.1.10) ausführlich geschrieben wird:

$$\begin{aligned} h_{11,t} &= c_{11}^2 + a_{11}^2 u_{1,t-1}^2 + 2a_{11}a_{21}u_{1,t-1}u_{2,t-1} + a_{21}^2 u_{2,t-1}^2 + b_{11}^2 h_{11,t-1} \\ &\quad + 2b_{11}b_{21}h_{12,t-1} + b_{21}^2 h_{22,t-1} \\ h_{12,t} = h_{21,t} &= c_{11}c_{12} + a_{11}a_{12}u_{1,t-1}^2 + (a_{12}a_{21} + a_{11}a_{22})u_{1,t-1}u_{2,t-1} + a_{21}a_{22}u_{2,t-1}^2 \\ &\quad + b_{11}b_{12}h_{11,t-1} + (b_{12}b_{21} + b_{11}b_{22})h_{12,t-1} + b_{21}b_{22}h_{22,t-1} \\ h_{22,t} &= c_{12}^2 + c_{22}^2 + a_{12}^2 u_{2,t-1}^2 + 2a_{12}a_{22}u_{1,t-1}u_{2,t-1} + a_{22}^2 u_{2,t-1}^2 + b_{12}^2 h_{11,t-1} \\ &\quad + 2b_{12}b_{22}h_{12,t-1} + b_{22}^2 h_{22,t-1}. \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

Wie Baur (2002, S. 7) weiter anmerkt, ist die Verzerrung der Parameter durch deren gleichzeitiges Beeinflussung der verschiedenen Varianz-/Kovarianzgleichungen möglich. Auch bleibt ihre statistische Signifikanz durch ihre Verknüpfung zu Koeffizienten (siehe Gleichung (3.1.13)) unklar.

¹² Genauer: keiner Persistenz.

3.1.4 Diagonales BEKK(P, Q, K)-Modell

Um die doch vergleichsweise große Anzahl der zu schätzenden Parameter des BEKK-Modells zu reduzieren, kann äquivalent zur Bestimmung des diagonalen VEC-Modells eine diagonale BEKK-Repräsentation eines multivariaten GARCH-Prozesses hergeleitet werden, indem die Matrizen \mathbf{A}_{kp} und \mathbf{B}_{kq} in Gleichung (3.1.9) als Diagonalmatrizen spezifiziert werden. Für die Spezifikation $P = Q = K = 1$ geben Bollerslev et al. (1994, S. 3005) das diagonale BEKK-Modell an als

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{C}'\mathbf{C} + \boldsymbol{\alpha}_{11}\boldsymbol{\alpha}'_{11} \odot (\mathbf{u}_{t-1}\mathbf{u}'_{t-1}) + \boldsymbol{\beta}_{11}\boldsymbol{\beta}'_{11} \odot \mathbf{H}_{t-1}, \quad (3.1.14)$$

wobei implizit gilt: $\mathbf{A}_{11} = \text{diag}[\boldsymbol{\alpha}_{11}]$ und $\mathbf{B}_{11} = \text{diag}[\boldsymbol{\beta}_{11}]$.

Ausführlich folgt für eine bivariate Modellspezifikation im diagonalen BEKK(1,1,1)-Fall:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_t &= \begin{bmatrix} c_{11} & 0 \\ c_{12} & c_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ 0 & c_{22} \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{1,t-1}^2 & u_{1,t-1} \cdot u_{2,t-1} \\ u_{1,t-1} \cdot u_{2,t-1} & u_{2,t-1}^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_{11,t-1} & h_{12,t-1} \\ h_{12,t-1} & h_{22,t-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

Die Vereinfachung der Parametermatrizen \mathbf{A}_{kp} und \mathbf{B}_{kq} führt zur **Schätzung von** $\left[\frac{N(N+1)}{2}\right] + [(P+Q)K] \cdot N$ **Parametern**. Somit ist die Anzahl der zu schätzenden Parameter im Vergleich zum BEKK-Modell um ein wesentliches verringert, ohne dass zugleich der Hauptvorteil einer **positiv definiten Kovarianzmatrix** \mathbf{H}_t aufgegeben werden muss. Daher ist das diagonale BEKK-Modell (besonders in der Darstellung eines multivariaten GARCH(1,1)-Prozesses) in empirischen Anwendungen weit verbreitet. Insbesondere sei hier darauf hingewiesen, dass in Anlehnung an die Argumentationsweise des Abschnitts 3.1.3 das diagonale BEKK-Modell als restringierte Version des diagonalen VEC-Modells angesehen werden kann.

Wiederum wird für Ausführungen über **Kovarianzstationarität** und **Persistenz** auf das BEKK-Modell mit den entsprechenden Modifikationen für den diagonalen Fall verwiesen. Auch hier postulieren Engle und Kroner (1995, S. 133), dass das diagonale BEKK-Modell genau dann kovarianzstationär ist, falls $\sum_{k=1}^N (a_{ii,k}^2 + b_{ii,k}^2) < 1$ für alle $i = 1, \dots, N$ gilt.

Jedoch bestehen weiterhin (allerdings in begrenztem Umfang) die aus dem gleichzeitigen Auftauchen von Parametern in den Varianz-/Kovarianzgleichungen entstehenden Nachteile der BEKK-Modellklasse. Wie an der ausführlichen Formulierung des bivariaten diagonalen BEKK-Modells aus Gleichung (3.1.15):

$$\begin{aligned}
 h_{11,t} &= c_{11}^2 + a_{11}^2 u_{1,t-1}^2 + b_{11}^2 h_{11,t-1} \\
 h_{12,t} = h_{21,t} &= c_{11}c_{12} + a_{11}a_{22}u_{1,t-1}u_{2,t-1} + b_{11}b_{12}h_{12,t-1} \\
 h_{22,t} &= c_{12}^2 + c_{22}^2 + a_{22}^2 u_{2,t-1}^2 + b_{22}^2 h_{22,t-1}
 \end{aligned} \tag{3.1.16}$$

gesehen werden kann, ist nicht klar, ob die Parameter der Kovarianz h_{12} das Resultat der Parameterschätzung in den Varianzgleichungen h_{11} und h_{22} sind oder ob die Kovarianzgleichung von h_{12} die Parameter der Varianzen h_{11} und h_{22} bestimmt (Baur, 2002, S. 8). Die diagonale Spezifikation des BEKK-Modells kann jedoch als, wie es Engle und Kroner (1995, S. 140) bezeichnen, *bottom-up-Modell* bei der Schätzung bzw. Spezifizierung eines allgemeineren BEKK-Modells benutzt werden, indem nach einem Lagrange-Multiplikator-Test auf die ausstehenden Restriktionen z.B. weitere Nebendiagonalelemente zum Modell hinzugefügt werden.

3.1.5 CCC(P, Q)-Modell

Bollerslev (1990) schlägt zur Vereinfachung des allgemeinen VEC-Modells ein sogenanntes CCC-Modell (*constant conditional correlation*) vor, in dem die Kovarianzmatrix „stufenweise“ spezifiziert wird: Zuerst wird ein univariates GARCH-Modell der bedingten Varianzen festgelegt, um dann auf dessen Basis die bedingten Korrelationen zu modellieren. Bollerslev (1990, S. 499) definiert für alle $i, j = 1, \dots, N$ die $N \times N$ dimensionale Matrix $\mathbf{D}_t = \text{diag}[h_{ii,t}^{\frac{1}{2}}]$ als Diagonalmatrix, die die bedingten Standardabweichungen $\sqrt{h_{ii,t}}$ auf ihrer Diagonalen enthält sowie $\mathbf{\Gamma} = [\rho_{ij}]$ als symmetrische Matrix der konstanten bedingten Korrelationen ρ_{ij} der Elemente von \mathbf{u}_t .¹³ Er spezifiziert die bedingte Kovarianzmatrix \mathbf{H}_t wie folgt:

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{D}_t \mathbf{\Gamma} \mathbf{D}_t. \tag{3.1.17}$$

\mathbf{H}_t hängt daher vor allem von den sich in der Zeit verändernden bedingten Varianzen $h_{ii,t}$ ab. Diese können äquivalent zu den univariaten GARCH(p, q)-Prozessen aus Gleichung (2.2.6) modelliert

¹³ $\mathbf{\Gamma}$ könnte als symmetrische, positiv definite bedingte Korrelationsmatrix mit den Elementen $\rho_{ii} = 1$ für alle $i = 1, \dots, N$ und $\rho_{ij} \leq 1$ für $i \neq j$ bezeichnet werden.

werden als

$$h_{ii,t} = c_i + \sum_{p=1}^P \alpha_{ip} u_{i,t-p}^2 + \sum_{q=1}^Q \beta_{iq} h_{ii,t-q} \quad \forall \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.1.18)$$

wobei wiederum die üblichen Restriktionen für eine positiv definite Varianz und Stationarität des Prozesses gelten sollen,¹⁴ während die zeitinvarianten bedingten Kovarianzen $h_{ij,t}$ proportional zum Produkt ihrer bedingten Standardabweichungen sind:

$$h_{ij,t} = \rho_{ij} \sqrt{h_{ii,t}} \sqrt{h_{jj,t}} \quad \forall \quad i \neq j. \quad (3.1.19)$$

Im bivariaten Fall ergibt sich das CCC(1,1)-Modell ausführlich als

$$\mathbf{H}_t = \begin{bmatrix} \sqrt{h_{11,t}} & 0 \\ 0 & \sqrt{h_{22,t}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} \\ \rho_{21} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{h_{11,t}} & 0 \\ 0 & \sqrt{h_{22,t}} \end{bmatrix}, \quad (3.1.20)$$

wobei $h_{11,t}$ und $h_{22,t}$ genauer spezifiziert sind als

$$\begin{aligned} h_{11,t} &= c_1 + \alpha_{11} u_{1,t-1}^2 + \beta_{11} h_{11,t-1} \\ h_{22,t} &= c_2 + \alpha_{21} u_{2,t-1}^2 + \beta_{21} h_{22,t-1} \end{aligned} \quad (3.1.21)$$

Wie man sieht, sind insgesamt nur $\lceil \frac{N(N-1)}{2} \rceil + (1 + P + Q)N$ **Parameter zu schätzen**, was den Rechenaufwand um ein Vielfaches verringert. Damit die bedingte **Kovarianzmatrix \mathbf{H}_t positiv definit** ist, müssen lediglich die bedingten Standardabweichungen entlang der Hauptdiagonalen von \mathbf{D}_t positiv¹⁵ und die Korrelationsmatrix $\mathbf{\Gamma}$ positiv definit sein (Bollerslev, 1990, S. 499).

Hinsichtlich der **Kovarianzstationarität** des CCC-Modells führen Ledoit et al. (2002, S. 16) unter Bedingungen von positiven Parametern aus Gleichung (3.1.18) die Bedingung $\sum_{p=1}^P \alpha_{ip} + \sum_{q=1}^Q \beta_{iq} < 1$ für die jeweiligen $i = 1, \dots, N$ an. Die **unbedingten Varianzen** sind (in Anlehnung an die Herleitung im univariaten Fall) mit

$$\sigma_{ii} = \frac{c_i}{1 - \sum_{p=1}^P \alpha_{ip} - \sum_{q=1}^Q \beta_{iq}} \quad (3.1.22)$$

leicht anzugeben, wohingegen dies für die unbedingten Kovarianzen aufgrund ihrer nicht-linearen Spezifikation schwer fällt (Bauwens et al., 2003, S. 12).

¹⁴ $c > 0$, $\alpha_p \geq 0$ für alle $p = 1, \dots, P$ und $\beta_q \geq 0$ für alle $q = 1, \dots, Q$ sowie $\sum_{p=1}^P \alpha_p + \sum_{q=1}^Q \beta_q < 1$.

¹⁵ Strikt gewährleistet durch die restriktiven Bedingungen für univariate GARCH-Prozesse (siehe Abschnitt 2.2.1).

Der Bezug auf univariate GARCH-Modelle in der Festlegung der Kovarianzstationarität des CCC-GARCH-Prozesses trifft ebenso auf die Ausführungen über die **Persistenz** eines Schocks zu. Danach herrscht keine Persistenz vor, wenn die N univariaten GARCH-Prozesse des CCC-Modells aus Gleichung (3.1.18) kovarianzstationär sind (Bollerslev et al., 1994, S. 3010).

Jeantheau (1998, S. 76) geht in seinen Ausführungen einen Schritt weiter und leitet für den CCC-GARCH-Prozess Bedingungen über strenge Stationarität und Ergodizität her.

Die Vorteile des CCC-Modells scheinen klar: Es gewährleistet eine positiv definite Kovarianzmatrix sowie eine überschaubare Anzahl an zu schätzenden Parametern. Darüber hinaus besitzt es die Flexibilität von univariaten GARCH-Modellen hinsichtlich der bedingten Varianzen und läßt, im Gegensatz zum BEKK-Modell, eine intuitive Interpretation der zu schätzenden Parameter zu. Zusätzlich bietet das von Bollerslev (1990) eingeführte Modell weitere Vorteile durch Vereinfachungen bei der Schätzung im Rahmen der Maximum-Likelihood (ML)-Methode (Abschnitt 4.1).¹⁶

Allerdings stellt sich die Frage, ob die bedingten Korrelationen wirklich zeitinvariant sind, oder ob dies eine eher unrealistische Annahme darstellt (z.B. kann angenommen werden, dass Korrelationen zwischen einzelnen Finanzmarktzeitreihen in Krisenzeiten ansteigen). Hoti et al. (2002, S. 12) führen des weiteren als Preis einer leichteren Umsetzbarkeit und einer Reduzierung der zu schätzenden Parameter an, dass die Volatilitäten nicht dynamisch aufeinander bezogen,¹⁷ sondern die multivariaten Effekte nur durch die bedingte Korrelationsmatrix bestimmt sind.

¹⁶ Insbesondere ergibt sich mit $\boldsymbol{\vartheta}$ als dem Vektor der zu schätzenden Parameter (beinhaltet in $\boldsymbol{\Gamma}$ und \mathbf{D}_t) und unter der Annahme einer zugrundeliegenden Normalverteilung die Log-Likelihood-Funktion einer Maximum-Likelihood (ML) - Schätzung als

$$\ln \mathcal{L}(\boldsymbol{\vartheta}) = -\frac{TN}{2} \ln(2\pi) - \frac{T}{2} \ln |\boldsymbol{\Gamma}| - \sum_{t=1}^T \ln |\mathbf{D}_t| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (\mathbf{D}_t^{-1}(\mathbf{y}_t - \boldsymbol{\mu}_t))' \hat{\boldsymbol{\Gamma}}^{-1} (\mathbf{D}_t^{-1}(\mathbf{y}_t - \boldsymbol{\mu}_t)),$$

wodurch nur eine $N \times N$ Matrixinversion erforderlich ist (Bollerslev, 1990, S. 499f.). Zusätzlich gibt es unter anderem in Anlehnung an das SUR-Modell (*seemingly unrelated regression*) (siehe Zellner (1962)) weitere Vereinfachungen, wie z.B. die ML-Schätzung von $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{ML}$ durch das Stichprobenäquivalent $\hat{\boldsymbol{\Gamma}} = -T^{-1} \sum_t (\mathbf{D}_t^{-1} \mathbf{u}_t)(\mathbf{D}_t^{-1} \mathbf{u}_t)'$, wodurch die Parameter von $\boldsymbol{\Gamma}$ aus der Log-Likelihood-Funktion herausgelöst werden können (Bollerslev, 1990, S. 499f.).

¹⁷ Dies wird jedoch, wie im Abschnitt 3.1.3 angeführt, von Tse (2000, S. 108f.) und Bauer (2002, S. 7) in Bezug auf das BEKK-Modell unter anderem hinsichtlich der Interpretierbarkeit der einzelnen Parameter, deren Unverzerrtheit und statistischen Signifikanz kritisiert.

3.2 Neuere multivariate GARCH-Ansätze

3.2.1 Modelle mit zeitlich-variierenden Korrelationen

Die besonders für Hochfrequenzdaten unrealistische Annahme zeitinvarianter bedingter Korrelationen führte zur parallelen Entwicklung zweier, das CCC-Modell verallgemeinernder Modellklassen, die die bedingte Korrelationsmatrix zeitabhängig formulieren.

So schlägt Engle (2000, S. 7-10) eine Verallgemeinerung zum CCC-Modell vor, die er als **DCC-Modell** (*dynamic conditional correlation*) beschreibt. Ausführlicher stellen dazu Engle und Sheppard (2001, S. 4f.) das Modell wie folgt dar, in dem sie die bedingte Kovarianzmatrix aus Gleichung (3.1.17) leicht abwandeln zu

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{D}_t \boldsymbol{\Gamma}_t \mathbf{D}_t, \quad (3.2.1)$$

wobei $\boldsymbol{\Gamma}_t$ für die nun zeitabhängige (bedingte) Korrelationsmatrix steht, $\mathbf{D}_t = \text{diag}[h_{ii,t}^{\frac{1}{2}}]$ für alle $i = 1, \dots, N$ wiederum als $N \times N$ Diagonalmatrix der bedingten Standardabweichungen $\sqrt{h_{ii,t}}$ gegeben und $h_{ii,t}$ gemäß des univariaten GARCH-Modells:

$$h_{ii,t} = c_i + \sum_{p=1}^P \alpha_{ip} u_{i,t-p}^2 + \sum_{q=1}^Q \beta_{iq} h_{ii,t-q} \quad \forall \quad i = 1, \dots, N \quad (3.2.2)$$

definiert ist. Gleichermaßen sollen die üblichen Restriktionen für univariate GARCH-Prozesse für eine positiv definite Varianz und Stationarität gelten.¹⁸ Die vorgeschlagene dynamische Korrelationsstruktur ergibt sich aus

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Gamma}_t &= \mathbf{Q}_t^{*-1} \mathbf{Q}_t \mathbf{Q}_t^{*-1}, \\ \mathbf{Q}_t &= \left(1 - \sum_{w=1}^W \alpha_w - \sum_{v=1}^V \beta_v\right) \bar{\mathbf{Q}} + \sum_{w=1}^W \alpha_w (\boldsymbol{\xi}_{t-w} \boldsymbol{\xi}'_{t-w}) + \sum_{v=1}^V \beta_v \mathbf{Q}_{t-v}, \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

wobei $\mathbf{Q}_t = [q_{ij}]$ eine symmetrische (positiv definite) $N \times N$ Matrix und $\bar{\mathbf{Q}}$ die unbedingte $N \times N$ Kovarianzmatrix der standardisierten Residuen $\xi_{i,t} = u_{i,t} / \sqrt{h_{ii,t}}$ darstellen sowie \mathbf{Q}_t^* gegeben ist durch $\mathbf{Q}_t^* = \text{diag}[\mathbf{Q}_t^{\frac{1}{2}}]$. Weiterhin sind α_w und β_v nichtnegative Skalare, die die Bedingung

¹⁸ $c > 0$, $\alpha_p \geq 0$ für alle $p = 1, \dots, P$ und $\beta_q \geq 0$ für alle $q = 1, \dots, Q$ sowie $\sum_{p=1}^P \alpha_p + \sum_{q=1}^Q \beta_q < 1$.

$\sum_{w=1}^W \alpha_w + \sum_{v=1}^V \beta_v < 1$ erfüllen. Somit ergibt sich als typisches Element von $\mathbf{\Gamma}_t$: $\rho_{ij} = \frac{q_{ij,t}}{\sqrt{q_{ii}q_{jj}}}$. Da die Struktur der Korrelationsmatrix speziell durch die konkreten Werte von W und V bedingt ist, soll hier das DCC-Modell als DCC(W, V)-Modell bezeichnet werden.¹⁹

Die Anzahl der **zu schätzenden Parameter** beläuft sich auf $[\frac{N(N-1)}{2}] + (1+p+q)N + (W+V)$. Damit \mathbf{H}_t positiv definit ist, folgern Engle und Sheppard (2001, S. 6), dass - unter Bezugnahme auf Regeln der linearen Algebra - $\mathbf{\Gamma}_t$ dann positiv definit ist, wenn dies ebenso für \mathbf{Q}_t gilt. Sie stellen dabei mehrere hinreichende Bedingungen auf, die eine **positiv definite bedingte Kovarianzmatrix** \mathbf{H}_t gewährleisten, wobei die Bedingungen für die Parameter der dynamischen Struktur eher von spezieller Natur sind²⁰, während die Bedingungen für die bedingten Varianzen $h_{ii,t}$ aus Gleichung (3.2.2) denen der positiv definiten bedingten Varianzen im univariaten Fall gleichen.

Engle (2000, S.10ff.) schlägt des weiteren speziell für sein DCC-Modell eine Schätzung in zwei Schritten vor, in der im ersten Schritt die Schätzung des univariaten GARCH-Prozesses erfolgt und im zweiten Schritt die Schätzung der dynamischen Korrelationsstruktur darauf aufgebaut wird; in Abschnitt 4.2 wird darauf näher eingegangen.

Alternativ zum DCC-Modell nach Engle formulieren Tse und Tsui (2001, S. 4-7) ein **VC-Modell** (*varying correlation*). Darin postulieren sie eine bedingte Korrelationsmatrix, die an einen autoregressiven gleitenden Durchschnitt erinnert. Wiederum wird die bedingte Kovarianzmatrix aus Gleichung (3.1.17) abgewandelt zu

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{D}_t \mathbf{\Gamma}_t \mathbf{D}_t, \quad (3.2.4)$$

wobei \mathbf{D}_t und die bedingten Varianzen $h_{ii,t}$ gemäß obigen Ausführungen definiert sind. Allerdings wird hier nun die zeitabhängige, bedingte Korrelationsmatrix $\mathbf{\Gamma}_t$ modelliert als

$$\mathbf{\Gamma}_t = (1 - \theta_1 - \theta_2) \mathbf{\Gamma} + \theta_1 \mathbf{\Gamma}_{t-1} + \theta_2 \mathbf{\Psi}_{t-1}. \quad (3.2.5)$$

$\mathbf{\Gamma} = [\rho_{ij}]$ ist dabei die (positiv definite) $N \times N$ Parametermatrix mit den Elementen $\rho_{ii} = 1$ für alle i . θ_1 und θ_2 stellen nicht-negative Parameter dar, die die Bedingung $\theta_1 + \theta_2 < 1$

¹⁹ Man beachte, dass im DCC(W, V)-Modell speziell die Parameter W und V spezifiziert werden, deren konkrete Werte nicht unbedingt mit den sonst üblichen Parametern P und Q übereinstimmen müssen.

²⁰ Genauer muss neben den zuvor genannten Bedingungen der Gleichungen (3.2.3) gelten, dass der kleinste Eigenwert von \mathbf{Q} größer null ist.

erfüllen. Des weiteren entspricht Ψ_{t-1} einer $N \times N$ Stichprobenkorrelationsmatrix von \mathbf{u}_τ , wobei $\tau = t - M, t - M + 1, \dots, t - 1$. Sie enthält somit - unter Standardisierung von $u_{i,t}$ gemäß $\xi_{i,t} = u_{i,t}/\sqrt{h_{ii,t}}$ - die Elemente

$$\psi_{ij,t-1} = \frac{\sum_{m=1}^M \xi_{i,t-m} \xi_{j,t-m}}{\sqrt{(\sum_{m=1}^M \xi_{i,t-m}^2)(\sum_{m=1}^M \xi_{j,t-m}^2)}} \quad \forall \quad 1 \leq i \leq j \leq N. \quad (3.2.6)$$

Die dynamische Struktur muss somit in Abhängigkeit des konkreten Wertes von M gesehen werden, daher wird oft das VC-Modell genauer als VC(M)-Modell benannt.

Wird \mathcal{Z}_{t-1}^{-1} als $N \times N$ Diagonalmatrix mit dem i -ten Element $(\sum_{m=1}^M \xi_{i,t-m}^2)^{\frac{1}{2}}$ und $\Xi_{t-1} = (\xi_{t-1}, \dots, \xi_{t-M})$ als $N \times M$ -Matrix definiert, folgt (Tse und Tsui, 2001, S. 6)

$$\Psi_{t-1} = \mathcal{Z}_{t-1}^{-1} \Xi_{t-1} \Xi_{t-1}' \mathcal{Z}_{t-1}^{-1}. \quad (3.2.7)$$

Die Anzahl der **zu schätzenden Parameter** kann auf insgesamt $[\frac{N(N-1)}{2}] + (1 + p + q)N + 2$ festgelegt werden, was die Anzahl der zu schätzenden Parameter im CCC-Modell um zwei (nämlich θ_1 und θ_2) übersteigt. Tse und Tsui (2001, S. 7) merken hierzu an, dass das VC-Modell unter der Bedingung $\theta_1 = \theta_2 = 0$ das CCC-Modell beinhaltet.²¹ Im Zentrum der Bedingungen um eine **positiv definite bedingte Kovarianzmatrix \mathbf{H}_t** steht neben positiven bedingten Varianzen $h_{ii,t}$ die positiv definite Matrix Ψ_{t-1} , durch die eine positiv definite Matrix Γ_t gewährleistet ist. Dies wird insbesondere durch die notwendige Bedingung $M \geq N$ erreicht (für weitere Ausführungen siehe Tse und Tsui (2001, S. 6)).²²

Weiter führen Tse und Tsui (2001, S. 7) an, dass die Bedingungen für die Parameter θ_1 und θ_2 (d.h. deren Nicht-Negativität und $\theta_1 + \theta_2 < 1$) unter Umständen Probleme bei der Optimierung der Log-Likelihood-Funktion²³ bereiten können, dies jedoch durch einfache Transformation der Form $\theta_i = \gamma_i^2 / (1 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2)$ für alle $i = 1, 2$ sowie der anfänglichen Optimierung der Log-Likelihood-Funktion unter anderem hinsichtlich γ_1 und γ_2 umgangen werden kann (für die genaue Vorgehensweise siehe Tse und Tsui (2001, S. 7ff.)).

Die Modelle der zeitlich variierenden Korrelationen heben die, besonders für hochfrequentielle Zeitreihen, unrealistische Annahme zeitinvarianter bedingter Korrelationen auf. Sie gewährleisten eine positiv definite Kovarianzmatrix \mathbf{H}_t , ohne die Intuition bzw. die Interpretation der zu

²¹ Daher kann als Test auf Konstanz der bedingten Korrelationen überprüft werden, ob $\theta_1 = \theta_2 = 0$ ist. Für einen kurzen Verweis auf weitere Testverfahren siehe Abschnitt 5.3, wobei der Test von Engle und Sheppard (2001, S. 10f.) genauer beschrieben wird und zur Anwendung kommt.

²² Gilt des weiteren $M = 1$, so ist Ψ_{t-1} durch eine Einheitsmatrix gegeben. Eine *Updaten* der bedingten Korrelationsmatrix durch die Einheitsmatrix erscheint aber wenig sinnvoll.

²³ Siehe Abschnitt 4.1.

schätzenden Parameter (besonders der univariaten GARCH-Spezifikation der bedingten Varianzen) und die Flexibilität (ebenfalls hervorgerufen durch die Einbeziehung univariater GARCH-Prozesse) aufzuheben. Wie Bauwens et al. (2003, S. 14) jedoch anführen, besteht ein Nachteil dieser Modelle in der Tatsache, dass sämtliche, die Korrelationsstruktur bestimmende Parameter (α_w und β_v im DCC-Modell nach Engle sowie θ_1 und θ_2 im VC-Modell nach Tse und Tsui) Skalare darstellen und daher die bedingten Korrelationen im jeweiligen Modell die gleiche Dynamik aufweisen.²⁴ Dies ist jedoch für eine positiv definite - sich über die Zeit verändernden - (bedingte) Korrelationsmatrix $\mathbf{\Gamma}_t$ unvermeidbar. Des Weiteren ist analog zum CCC-Modell nach Bollerslev für die leichtere Umsetzbarkeit folgender Preis zu zahlen: Die Volatilitäten sind nicht direkt, sondern nur über die bedingte Korrelationsmatrix aufeinander bezogen.

3.2.2 FlexM-Modell

Eine andere Herangehensweise in der Modellierung von zeitlich variierenden Kovarianzmatrizen stellt die Arbeit von Ledoit et al. (2002) dar. Auf der Grundlage eines multivariaten GARCH(1,1)-Modells²⁵ der Form

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{C} + \mathbf{A} \odot (\mathbf{u}_{t-1} \mathbf{u}'_{t-1}) + \mathbf{B} \odot \mathbf{H}_{t-1}, \quad (3.2.8)$$

mit den symmetrischen $N \times N$ Parametermatrizen \mathbf{C} , \mathbf{A} und \mathbf{B} , entwickeln sie Schätzer für die Elemente der bedingte Kovarianzmatrix „dezentral“ in zwei Stufen, die für multivariate Schätzprobleme mit hoher Zeitreihenanzahl geeignet sind und positiv definite bedingte Kovarianzmatrizen hervorbringen, ohne unrealistische a-priori Restriktionen aufzuerlegen.

Im ersten Schritt der FlexM-GARCH (*flexible multivariate*) Modellierung werden die Koeffizientenreihen c_{ij} , a_{ij} und b_{ij} separat durch eine zweidimensionale (für alle $i \neq j$) bzw. eindimensionale (für alle $i = j$) GARCH(1,1)-Spezifikation geschätzt (für nähere Ausführungen siehe Ledoit et al. (2002, S. 5f.)).²⁶ Die geschätzten Koeffizienten werden anschließend in die

²⁴ Was bei einer großen Anzahl an Zeitreihen mit großen strukturellen Unterschieden wohl in Frage gestellt werden muss.

²⁵ Ledoit et al. (2002) nennen als Basis für ihre Modellkonstruktion das diagonale VEC(1,1)-Modell. Bei genauerem Hinsehen muss jedoch davon ausgegangen werden, dass es sich hierbei nicht um ein diagonales VEC-Modell, sondern um eine allgemeinere Form handelt, die an die diagonale BEKK-Darstellung aus Gleichung (3.1.14) erinnert.

²⁶ Es sei angemerkt, dass dieser Vorgang der getrennten bzw. aufeinander aufbauenden Schätzung der Diagonal- und Nebendiagonalelemente c_{ii} , a_{ii} und b_{ii} bzw. c_{ij} , a_{ij} und b_{ij} für alle $i = 1, \dots, N$ und $j = i+1, \dots, N$ jeweils auf Basis der Maximum-Likelihood-Methode bzw. der Quasi-Maximum-Likelihood-Methode des Abschnitts 4.1 und unter Annahme einer Normalverteilung erfolgt. Weiter sei angemerkt, dass die Schätzung dieser Elemente an die Schätzung in zwei Schritten des Abschnitts 4.2 erinnert, jedoch bei näherer Betrachtung dennoch unterschiedlich ist.

Koeffizientenmatrizen $\hat{\mathbf{C}}$, $\hat{\mathbf{A}}$ und $\hat{\mathbf{B}}$ zusammengefügt, wobei für $\frac{N(N+1)}{2}$ univariate bzw. bivariate GARCH-Modelle insgesamt $3\frac{N(N+1)}{2}$ **Parameter zu schätzen** sind. Jedoch ergibt sich dabei das Problem der, wie es Ledoit et al. (2002, S. 3) bezeichnen, „Inkompatibilität“ der geschätzten Koeffizientenmatrizen $\hat{\mathbf{C}}$, $\hat{\mathbf{A}}$ und $\hat{\mathbf{B}}$, da sie zu bedingten Kovarianzmatrizen \mathbf{H}_t führen können, die nicht positiv definit sein müssen. Um daher eine **positiv definite Kovarianzmatrix** zu gewährleisten, werden im zweiten Schritt die zusammengesetzten Parametermatrizen so umgeformt, dass sie positiv definit sind und somit zu einer positiv definite Kovarianzmatrix führen können. Hierbei lösen Ledoit et al. (2002, S. 7ff.) die Gleichung (3.2.8) zunächst rekursiv auf zu

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_t &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{B}^{\wedge k} \odot \mathbf{C} + \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{B}^{\wedge k} \odot \mathbf{A} \odot (\mathbf{u}_{t-k-1} \mathbf{u}'_{t-k-1}) \\ &= \mathbf{C} \odot (\mathbf{I} - \mathbf{B}) + \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{B}^{\wedge k} \odot \mathbf{A} \odot (\mathbf{u}_{t-k-1} \mathbf{u}'_{t-k-1}) \\ &= \mathbf{G} + \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{B}^{\wedge k} \odot \mathbf{A} \odot (\mathbf{u}_{t-k-1} \mathbf{u}'_{t-k-1}) \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

mit $\mathbf{G} = \mathbf{C} \odot (\mathbf{I} - \mathbf{B})$, wobei in Anlehnung an das Hadamard-Produkt das Symbol \wedge^k die elementweise Potenzierung einer Matrix $\mathbf{L} = [l_{ij}]$ der Form $\mathbf{L}^{\wedge k} = [l_{ij}^k]$ für alle $i, j = 1, \dots, N$ sowie das Symbol \odot die elementweise Division zweier Matrizen $\mathbf{L} = [l_{ij}]$ und $\mathbf{O} = [o_{ij}]$ der Form $\mathbf{L} \odot \mathbf{O} = [l_{ij}/o_{ij}]$ für alle $i, j = 1, \dots, N$ darstellen sollen. Die Transformation kann anschließend wie folgt formalisiert werden:

$$\min_{\tilde{\mathbf{C}}} \|\tilde{\mathbf{G}} - \hat{\mathbf{G}}\| \quad \text{s.t.} \quad \tilde{\mathbf{G}} \text{ ist positiv definit und } \tilde{g}_{ii} = \hat{g}_{ii}, \forall i = 1, \dots, N,$$

$$\min_{\tilde{\mathbf{A}}} \|\tilde{\mathbf{A}} - \hat{\mathbf{A}}\| \quad \text{s.t.} \quad \tilde{\mathbf{A}} \text{ ist positiv definit und } \tilde{a}_{ii} = \hat{a}_{ii}, \forall i = 1, \dots, N,$$

$$\min_{\tilde{\mathbf{B}}} \|\tilde{\mathbf{B}} - \hat{\mathbf{B}}\| \quad \text{s.t.} \quad \tilde{\mathbf{B}} \text{ ist positiv definit und } \tilde{b}_{ii} = \hat{b}_{ii}, \forall i = 1, \dots, N,$$

wobei $\tilde{\mathbf{C}}$ „zurückberechnet“ wird aus $\tilde{\mathbf{C}} = \tilde{\mathbf{G}} \otimes (\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{B}})$ (Ledoit, 2002, S. 12).²⁷

Die so gewonnenen Matrizen $\tilde{\mathbf{A}}$, $\tilde{\mathbf{B}}$ und $\tilde{\mathbf{G}}$ bzw. $\tilde{\mathbf{C}}$ sind positiv definit, asymptotisch konsistent und enthalten unverändert die Diagonalparameter aus der univariaten GARCH(1,1)-Schätzung; für weitere Bedingungen und Beweise hinsichtlich der Gewährleistung einer positiv definiten Kovarianzmatrix siehe Ledoit et al. (2002, S. 7ff.).

²⁷ Für das genaue Minimierungsproblem siehe Ledoit et al. (2002, S. 27ff.)

Ledoit et al. (2002, S. 11) führen des weiteren an, dass durch diese Transformation nicht nur eine positiv definite Kovarianzmatrix garantiert, sondern auch die **Kovarianzstationarität** des Prozesses insbesondere durch die Bedingungen $a_{ii} + b_{ii} < 1$ für alle $i = 1, \dots, N$ gegeben ist. Allerdings können, wie sie weiter aufzeigen, im FlexM-Modell Standardfehler der zu schätzenden Parameter nicht direkt angegeben werden. Sie schlagen daher eine Bootstrap-Methode²⁸ für die Berechnung der Standardfehler vor (Ledoit et al., 2002, S. 13ff.).

3.3 Erweiterungen

3.3.1 Weitere mögliche multivariate GARCH-Spezifikationen

Eine treffende Bezeichnung für das breite Spektrum möglicher Variationen (multivariater) GARCH-Modelle ist wohl das Akronym **YAARCH** (*yet another ARCH*) von Engle (2002, S. 426). In der Tat stellen die in den vorherigen Abschnitten genannten GARCH-Modelle nur eine Auswahl der in der Literatur diskutierten multivariaten GARCH-Prozesse dar. Daher sollen kurz einige weitere interessante GARCH-Modelle angeführt werden.

Das einfachste Modell ist hierbei das **Skalar-GARCH-Modell**. Dabei wird angenommen, dass die jeweiligen Varianzen bzw. Kovarianzen gemäß folgendem Prozess definiert sind:

$$h_{i,j,t} = c_{i,j} + \alpha \cdot (u_{i,t-1}u_{j,t-1}) + \beta h_{i,j,t-1} \quad \forall \quad i, j = 1, \dots, N. \quad (3.3.1)$$

Die Parameter α und β sind positive Skalare und werden als konstant für alle Varianzen und Kovarianzen angenommen, während die Elemente $c_{i,j}$ die längerfristige Kovarianzmatrix bestimmen sollen und für jede Varianz bzw. Kovarianz individuell ausgeprägt sind (Engle und Mezrich, 1996, S. 37f.). Die relativ geringe Anzahl an zu schätzenden Parametern sowie das simple Hervorbringen einer positiv definiten Kovarianzmatrix (unter Bedingung einer positiv definiten Kovarianzmatrix der Elemente c_{ij}) macht das Skalar-GARCH-Modell besonders attraktiv und veranlasste zur Vereinfachung weiterer zuvor genannter GARCH-Prozesse. So schlagen z.B. Bollerslev et al. (1994, S. 3005) die skalare Schreibweise des BEKK-Modells (also ein sogenanntes **Skalar-BEKK-Modell**) aus Abschnitt (3.1.3) vor, während Ding und Engle (2001, S. 5ff.)

²⁸ Einen Überblick hierüber bieten z.B. Efron und Tibshirani (1993).

weitere vereinfachte Abwandlungen der klassischen GARCH-Modelle aufzeigen. Oft werden die skalaren Vereinfachungen aufgrund ihrer einfachen Struktur kritisiert: Varianzen bzw. Kovarianzen können z.B. keine unterschiedlichen dynamischen Strukturen entfalten.

Eine Klasse von GARCH-Prozessen, die besonders für größere Systeme (d.h. für mehrere interessierende Finanzmarktdatenreihen) geeignet sind, stellen die von Engle et al. (1990) eingeführten **Faktor-GARCH-Modelle** dar. Hierbei wird angenommen, dass es einen bzw. mehrere Faktoren gibt, die global die Kovarianzmatrix bestimmen.²⁹ Die Motivation gemeinsamer Faktoren wird häufig in der Portfoliotheorie angewendet. Es erscheint hier besonders einleuchtend, dass Volatilitäten unterschiedlicher Daten (z.B. von Aktien) von den gleichen „Informationen“ (z.B. Makrodaten) beeinflusst werden. Ist speziell \mathbf{y}_t ein $N \times 1$ Vektor von Beobachtungen mit K Faktoren, die im $K \times 1$ Vektor \mathbf{f}_t zusammengefasst sind, und \mathbf{B} eine $N \times K$ Matrix der zeitinvarianten Faktorladungen, dann kann das multivariate GARCH-Modell geschrieben werden als

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{B}\mathbf{f}_t + \mathbf{v}_t, \quad (3.3.2)$$

wobei \mathbf{v}_t ein $N \times 1$ Residuenvektor ist.³⁰ Des Weiteren wird angenommen, dass die konstante bedingte Kovarianzmatrix von \mathbf{v}_t gegeben ist durch $\mathbf{\Upsilon}$ und \mathbf{f}_t eine bedingte Kovarianzmatrix $\mathbf{\Lambda}_t$ besitzt. Sind \mathbf{f}_t und \mathbf{v}_t un- oder konstant korreliert, dann kann die bedingte Kovarianzmatrix von \mathbf{y}_t geschrieben werden als

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{B}\mathbf{\Lambda}_t\mathbf{B}' + \mathbf{\Upsilon} \quad (3.3.3)$$

(Bollerslev et al, 1994, S. 3005ff.). Ist $\mathbf{\Lambda}_t$ eine Diagonalmatrix mit den Elementen $\lambda_{k,t}$ oder sind die Nebendiagonalelemente konstant, kann das Modell auch geschrieben werden als

$$\mathbf{H}_t = \sum_{k=1}^K \mathbf{b}_k \mathbf{b}_k' \lambda_{k,t} + \mathbf{\Upsilon}, \quad (3.3.4)$$

wobei \mathbf{b}_k die k -te Spalte von \mathbf{B} bedeutet und $\mathbf{\Upsilon}$ die möglichen Nebendiagonalelemente aufnimmt (Engle et al., 1990, S. 215). Wird die Abhängigkeit der Faktoren und Faktorladungen von der ihr zugrundeliegenden Information genauer spezifiziert, kann das Faktor-Modell als Spezialfall des BEKK-Modells gesehen werden (siehe hierzu Bera und Higgins (1993, S. 346)). Hinsichtlich

²⁹ Dies erinnert stark an die Faktoren- bzw. Hauptkomponentenanalyse multivariater Verfahren (vgl. hierzu z.B. Backhaus et al. (2000)).

³⁰ Häufig auch - vor allem in der englischen Literatur - als *idiosyncratic error* bezeichnet.

der Schätzung des Faktor-GARCH-Modells muss allerdings gesagt werden, dass die Spezifizierung (bzw. die Beobachtbarkeit) der Faktoren allein schon wegen der ökonomischen Intuition wünschenswert ist und den Schätzvorgang wesentlich vereinfacht.³¹ King et al. (1994, S. 901ff.) finden jedoch in ihrer Volatilitätsanalyse des Zusammenhanges internationaler Aktienmärkte wenig Erklärungsgehalt der Makrovariablen (also beobachtbarer Faktoren) und weisen daher größere Bedeutung latenten Faktoren zu. Hier könnte das Modell mit latenten Faktoren von Diebold und Nerlove (1989), das ähnlich wie das Faktor-GARCH-Modell formuliert ist, zum Tragen kommen.

Auch die Entwicklungen hinsichtlich Persistenz in der Varianz haben zu interessanten Entwicklungen innerhalb der Faktor-GARCH-Modelleklasse geführt. Engle und Lee (1993) führen hierzu ein Faktor-GARCH-Modell zur Modellierung von permanenten bzw. transitorischen Komponenten in der Volatilität ein.

Abwandlungen zu den Faktor-GARCH-Modellen sind im *O-GARCH-Modell* (*orthogonal*) von Alexander (2001) und im verallgemeinerten *GO-GARCH-Modell* (*generalized orthogonal*) nach van der Weide (2002) zu sehen. Im O-GARCH-Modell wird implizit angenommen, dass die Daten mittels Hauptkomponentenanalyse in unkorrelierte Komponenten linear transformiert werden können. Diese latenten Komponenten können wie im Faktor-GARCH-Modell als Faktoren interpretiert werden, die hinter dem System stehen und es bestimmen. Da für die Komponenten eine bedingte Korrelation von null angenommen wird, reichen univariate GARCH-Modelle aus, um die bedingten Varianzen der Komponenten zu modellieren, und dann durch geeignete Umformungen die bedingte Kovarianzmatrix der zugrundeliegenden Daten zu erhalten (für weitere Ausführungen siehe Alexander (2001, S. 24ff.)). Eine der zentralen Annahmen im O-GARCH-Modell ist die Orthogonalität der Matrix der Lineartransformationen.³² Van der Weide (2002) nimmt dies zum Anlass und formuliert das GO-GARCH-Modell, in dem die Matrix der Lineartransformationen nur noch invertierbar sein muss.

Faktor- und Orthogonale GARCH-Modelle liefern somit weitere Methoden, komplexe dynamische Kovarianzmatrizen vereinfacht zu schätzen, so die Anzahl der zu schätzenden Parameter zu reduzieren, ohne dabei eine positiv definite bedingte Kovarianzmatrix außer Acht zu lassen. Allerdings weisen diese Herangehensweisen Schwächen bei der Interpretation der Faktoren und der Koeffizienten der univariaten GARCH-Modelle sowie der doch schwachen Leistung in gering korrelierten Systemen auf (Engle und Sheppard, 2001, S. 3).

³¹ Für weitere Ausführungen hinsichtlich des Schätzvorgangs siehe Gouriéroux (1997, S. 121-124).

³² D.h. die Matrix, die die unabhängigen Komponenten mit den beobachteten Zeitreihen „verknüpft“.

Eine ganz andere Herangehensweise ist im *GDC-Modell* (*generalized dynamic covariance*) zu sehen, das von Kroner und Ng (1998, S. 833ff.) vorgeschlagen wird. Das GDC-Modell ist wie folgt definiert:

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{D}_t \mathbf{\Gamma} \mathbf{D}_t + \mathbf{\Phi} \odot \mathbf{\Theta}_t, \quad (3.3.5)$$

wobei gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_t &= [d_{ij,t}] \quad \text{mit} \quad d_{ii,t} = \sqrt{\theta_{ii,t}} \quad \forall \quad i \quad \text{und} \quad d_{ij,t} = 0 \quad \forall \quad i \neq j, \\ \mathbf{\Theta}_t &= [\theta_{ij,t}], \\ \mathbf{\Gamma} &= [\rho_{ij}] \quad \text{mit} \quad \rho_{ii} = 1 \quad \forall \quad i \quad \text{und} \quad \rho_{ij} = \rho_{ji}, \\ \mathbf{\Phi} &= [\phi_{ij}] \quad \text{mit} \quad \phi_{ii} = 0 \quad \forall \quad i \quad \text{und} \quad \phi_{ij} = \phi_{ji}, \\ \theta_{ij,t} &= c_{ij} + \mathbf{a}'_i \mathbf{u}_{t-1} \mathbf{u}'_{t-1} \mathbf{a}_j + \mathbf{b}'_i \mathbf{H}_{t-1} \mathbf{b}_j \quad \forall \quad i, j, \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

und $\mathbf{C} = [c_{ij}]$ symmetrisch positiv definit ist sowie $\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i$ für alle $i = 1, \dots, N$ Parametervektoren der Dimension $N \times 1$ darstellen (Kroner und Ng, 1998, S. 833). Das GDC-Modell beinhaltet zwei Komponenten: Zum einen die Komponente $\mathbf{D}_t \mathbf{\Gamma} \mathbf{D}_t$, die dem CCC-Modells aus Abschnitt 3.1.5 ähnelt, zum anderen die Komponente $\mathbf{\Phi} \odot \mathbf{\Theta}_t$, die Nullen als Diagonalelemente hat und deren Nebendiagonalelemente durch eine Kovarianzstruktur ähnlich des BEKK-Modells - skaliert mit dem Parameter ϕ_{ij} - gegeben sind (Kroner und Ng, 1998, S. 834).

Zentral in der Diskussion um das GDC-Modell ist seine Vielseitigkeit: Durch spezielle Annahmen und Definitionen kann wahlweise aus dem GDC-Modell ein restringiertes VEC, BEKK, Faktor-GARCH oder ein CCC bzw. ein DCC-Modell konstruiert werden (siehe hierzu Kroner und Ng (1998, S. 834) bzw. Bauwens et al. (2003, S. 16)).

Eine der stärksten Restriktionen der in dieser Arbeit behandelten multivariaten GARCH-Modelle ist die Vernachlässigung von Asymmetrien. Die bedingte Kovarianzmatrix ist im Grunde nur eine Funktion der Höhe verzögerter Residuen, beinhaltet jedoch nicht die Richtung der Abweichung. Es scheint aber logisch, gerade diese Abweichung zu berücksichtigen, da Finanzmärkte (bzw. die Volatilität auf Finanzmärkten) stärker auf negative als auf positive Nachrichten reagieren (d.h. der sogenannte Leverage-Effekt negativer Nachrichten größer ist).³³ Daher verallgemeinern

³³ Ist ein bestimmtes Modell gegeben, so können Asymmetrien der bedingten Varianzen und Kovarianzen in Abhängigkeit möglicher Ausprägungen von $u_{i,t}$ in der sogenannten *news-impact-Kurve* dargestellt werden; für eine multivariate Darstellung siehe Kroner und Ng (1998, S. 838). Dies soll hier aber nicht weiter verfolgt werden.

Kroner und Ng (1998, S. 835ff.) ihr GDC-Modell - der univariaten Herangehensweise von Glosten et al. (1993) folgend - zu einem **ADC-Modell** (*asymmetric dynamic covariance*), indem sie die Bedingung an $\theta_{ij,t}$ aus (3.3.6) zu

$$\theta_{ij,t} = c_{ij} + \mathbf{a}'_i \mathbf{u}_{t-1} \mathbf{u}'_{t-1} \mathbf{a}_j + \mathbf{b}'_i \mathbf{H}_{t-1} \mathbf{b}_j + \mathbf{g}'_i \boldsymbol{\eta}_{t-1} \boldsymbol{\eta}'_{t-1} \mathbf{g}_j \quad \forall \quad i, j = 1, \dots, N \quad (3.3.7)$$

abwandeln, wobei \mathbf{g}_i für alle $i = 1, \dots, N$ ebenfalls ein Parametervektor ist und $\boldsymbol{\eta}_t = (\eta_{1,t}, \dots, \eta_{N,t})'$ ein Residuenvektor mit $\eta_{i,t} = \max[0, -u_{i,t}]$ darstellt, um das Vorzeichen von $u_{i,t}$ zu berücksichtigen. Somit können wiederum durch spezielle Annahmen asymmetrische Varianten des VEC, BEKK, CCC-Modells etc. konstruiert werden (siehe hierzu Kroner und Ng (1998, S. 836)).

Braun et al. (1995) untersuchen hingegen die bedingte Kovarianzstruktur von Aktienrenditen, indem sie das weit verbreitete asymmetrische univariate EGARCH-Modell (*exponential ARCH*) von Nelson (1991) auf den bivariaten Fall erweitern und so im Rahmen der Portfoliotheorie positive bzw. negative Renditen unterschiedlich auf den Beta-Koeffizienten wirken lassen.³⁴ In ihrem **bivariaten EGARCH-Modell** sind die Residuen des Marktes gegeben durch

$$u_{m,t} = \sigma_{m,t} \epsilon_{m,t} \quad (3.3.8)$$

und die Residuen des Portfolios durch

$$u_{p,t} = \beta_{p,t} \epsilon_{m,t} + \sigma_{p,t} \epsilon_{p,t}, \quad (3.3.9)$$

wobei $\beta_{p,t}$ den Beta-Koeffizienten des Portfolios, $\sigma_{m,t}$ und $\sigma_{p,t}$ die bedingten Standardabweichungen des Marktes bzw. des Portfolios darstellen. Weiter sind $\epsilon_{m,t}$ und $\epsilon_{p,t}$ *i.i.d.*-verteilte, standardisierte Residuenprozesse. Die bedingte Varianz des Marktes bzw. die portfoliospezifische Varianz folgen univariaten (modifizierten) EGARCH-Prozessen:

$$\ln(\sigma_{m,t}^2) = \alpha_{m,t} + \sum_{k=1}^{\infty} \varrho_{m,k} (\kappa_m \epsilon_{m,t-k} + \omega_m (|\epsilon_{m,t-k}| - \mathbb{E}(\epsilon_m))), \quad \text{mit} \quad \varrho_{m,1} = 1 \quad (3.3.10)$$

$$\begin{aligned} \ln(\sigma_{p,t}^2) &= \alpha_{p,t} + \sum_{k=1}^{\infty} \varrho_{p,m,k} (\kappa_{p,m} \epsilon_{m,t-k} + \omega_{p,m} (|\epsilon_{m,t-k}| - \mathbb{E}(\epsilon_m))) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \varrho_{p,k} (\kappa_p \epsilon_{p,t-k} + \omega_p (|\epsilon_{p,t-k}| - \mathbb{E}(\epsilon_p))), \quad \text{mit} \quad \varrho_{p,m,1} = \varrho_{p,1} = 1, \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

³⁴ Im Grunde wird hierdurch die Möglichkeit des unterschiedlichen Einflusses von positiven bzw. negativen Nachrichten auf die Kovarianz der Portfoliobestandteile eröffnet.

während der Beta-Koeffizient (bedingt auf $\epsilon_{m,t}$) modelliert ist als

$$\beta_{p,t} = \alpha_{\beta,t} + \sum_{k=1}^{\infty} \varrho_{\beta,k} (\delta_{p,m} \cdot \epsilon_{m,t-k} \cdot \epsilon_{p,t-k} + \delta_m \cdot \epsilon_{m,t-k} + \delta_p \cdot \epsilon_{p,t-k}), \quad \text{mit } \varrho_{\beta,1} = 1. \quad (3.3.12)$$

Der Leverage-Effekt wird somit durch $\delta_m \cdot \epsilon_m$ und $\delta_p \cdot \epsilon_p$ hervorgerufen (Braun et al., 1995, S. 1578f.).

Ein weiteres interessantes asymmetrisches multivariates GARCH-Modell stellt z.B. das **constant correlation multivariate GJR-Modell** von Hoti et al. (2002, S. 11ff.) dar, das als eine asymmetrische Erweiterung des CCC-Modells von Bollerslev bzw. als multivariate Definition des GJR-Modells nach Glosten et al. (1993) angesehen werden kann.

Abschließend soll hier angemerkt werden, dass in der Theorie (multivariater) GARCH-Modelle auch eine Verbindung zwischen erstem und zweitem bedingten Moment spezifiziert werden kann. Solche **GARCH-M-Modelle** (*GARCH-in-Mean*) sind besonders im Finance-Bereich gefragt, da damit der bedingte Erwartungswert explizit von einer sich in der Zeit verändernden Varianz abhängig modelliert werden kann (siehe Engle et al. (1987) für eine die univariate und Bollerslev et al. (1988, S. 119) für eine multivariate GARCH-M-Modellierung). Nachteile sind jedoch darin zu sehen, dass die asymptotische Normalität der Maximum-Likelihood-Schätzer (siehe Abschnitt 4.1) nicht gewährleistet sein kann und die Zahl der zu schätzender Parameter rasch steigt (Campbell et al., 1997, S. 494).

3.3.2 Alternative Herangehensweisen der Modellierung von Volatilitäten

Speziell entstand die Modellklasse der *stochastischen Volatilitäten* (**SV-Modelle**) als Alternative zu den GARCH-Modellen.³⁵ Die bedingte Varianz (bzw. im multivariaten Fall die bedingte Kovarianzmatrix) hängt in SV-Modellen nicht von vergangenen Beobachtungen, sondern von einem unbeobachteten stochastischen Prozess (oder einer latenten Struktur) ab. Harvey et al. (1994) schlagen folgendes multivariates SV-Modell vor, das als Spezifikation von N univariaten

³⁵ Die am häufigsten verwendete Herangehensweise stellt dabei im univariaten Fall das SV-Modell von Taylor (1986, S. 70ff.) dar. Des weiteren findet sich eine gute Zusammenfassung bzw. einen Vergleich zwischen univariaten GARCH und univariaten SV-Modellen in Taylor (1994).

SV-Modellen gesehen werden kann

$$\mathbf{u}_t = \boldsymbol{\epsilon}_t \exp(\mathbf{h}_t/2), \quad (3.3.13)$$

wobei $\mathbf{u}_t = (u_{1,t}, \dots, u_{N,t})'$ und $\boldsymbol{\epsilon}_t = (\epsilon_{1,t}, \dots, \epsilon_{N,t})'$ üblich definiert sind, jedoch speziell $\boldsymbol{\epsilon}_t$ gemäß $NID(0, \boldsymbol{\Sigma}_\epsilon)$ verteilt ist. Des Weiteren folgt $\mathbf{h}_t = (h_{1,t}, \dots, h_{N,t})'$ einem multivariaten Random-Walk-Prozess oder kann speziell als VAR(1)-Prozess definiert werden:

$$\mathbf{h}_t = \mathbf{B}\mathbf{h}_{t-1} + \boldsymbol{\zeta}_t, \quad (3.3.14)$$

mit $\boldsymbol{\zeta}_t$ als $N \times 1$ dimensionalen NID -Vektor mit $E(\boldsymbol{\zeta}_t) = 0$ und $\text{Var}(\boldsymbol{\zeta}_t) = \boldsymbol{\Sigma}_\zeta$ sowie \mathbf{B} als $N \times N$ Parametermatrix. Nachteile dieser SV-Modelle sind allerdings in einer komplexen Schätzung (siehe hierzu speziell Shephard, 1996, S. 23ff.) bzw. darin zu sehen, dass konstante bedingte Korrelationen auferlegt werden, d.h. es keine direkte Festlegung von sich verändernden Korrelationen oder Kovarianzen gibt (Harvey et al., 1994, S. 251). Weitere multivariate SV-Modelle sind z.B. das multivariate Faktor-SV-Modell (Shephard, 1996, S.45) oder das ebenfalls auf Faktoren aufbauende SV-Modell von Chib et al. (2002, S. 2ff.).

In der Literatur existieren **weitere Methoden** zur Modellierung multivariater Volatilitäten: Besonders interessant scheint das von Tsay (2002, S. 376ff) durchgeführte mehrdimensionale Volatilitätsmodell, das die schrittweise Erweiterung einer univariaten Modellierung beinhaltet. Ding und Engle (2001, S. 6) erweitern das vor allem in der Praxis angewandte univariate EWMA-Modell (*exponentially weighted moving average*) auf den multivariaten Fall, während Andersen et al. (2001, S. 42ff.) tägliche Varianzen bzw. Kovarianzen auf der Basis von intraday-Daten ohne Spezifikation eines genauen multivariaten Modells schätzen. Für einen Überblick über weitere alternative Herangehensweisen zur Modellierung von Volatilitäten (allerdings meist auf den univariaten Fall abzielend) siehe z.B. Bollerslev et al. (1992, S. 17ff.) oder Brooks (2002, S. 441ff.).

Kapitel 4

Methoden der Schätzung multivariater GARCH-Modelle

4.1 Maximum-Likelihood-Schätzung

Die am häufigsten zur Schätzung der multivariaten GARCH-Modelle (bzw. des unbekannt Parametervektors) benutzte Methode stellt wohl der Maximum-Likelihood (ML)-Ansatz dar. Hierbei wird versucht, denjenigen Wert aus dem zulässigen Parameterraum auszuwählen, der die größte Wahrscheinlichkeit (Likelihood) besitzt, dem vorliegenden (bekannten) Stichprobenbefund zugrundelegen zu haben. Die so gewonnenen Schätzer sind konsistent, (asymptotisch) effizient und asymptotisch normalverteilt. Allerdings setzt die ML-Methode neben der *i.i.d.*-Annahme die Spezifikation einer Verteilung des zugrundeliegenden Stichprobenbefundes, in der hier vorgestellten Modellspezifikationen also der Elemente des Zufallsvektors $\boldsymbol{\epsilon}_t$, voraus. Häufig wird daher zusätzlich eine **multivariate Normalverteilung** von $\boldsymbol{\epsilon}_t$ mit Erwartungswert $E(\boldsymbol{\epsilon}_t) = \mathbf{0}$ und Varianz $\text{Var}(\boldsymbol{\epsilon}_t) = \mathbf{I}_N$ postuliert.¹ Die bedingte Dichtefunktion von \mathbf{y}_t ergibt sich dann als

$$f(\mathbf{y}_t | \boldsymbol{\vartheta}, \boldsymbol{\Omega}_{t-1}) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} |\mathbf{H}_t|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{y}_t - \boldsymbol{\mu}_t)' \mathbf{H}_t^{-1} (\mathbf{y}_t - \boldsymbol{\mu}_t)\right), \quad (4.1.1)$$

mit $\boldsymbol{\vartheta}$ als dem Vektor, der die zu schätzenden Parameter² umfasst und je nach GARCH- Modellspezifikation unterschiedlicher Dimension ist. Durch Aufstellen der Likelihood-Funktion

¹ Somit ist also \mathbf{u}_t bedingt standardnormalverteilt.

² \mathbf{H}_t und $\boldsymbol{\mu}_t$ sind dabei Funktionen von $\boldsymbol{\vartheta}$.

$\mathcal{L}(\boldsymbol{\vartheta}; \mathbf{y}_t) = \prod_{t=1}^T f(\mathbf{y}_t | \boldsymbol{\vartheta}, \boldsymbol{\Omega}_{t-1})$ und anschließender Logarithmierung kann folgende Log-Likelihood-Funktion hinsichtlich des Parametervektors $\boldsymbol{\vartheta}$ maximiert³ werden:

$$\ln \mathcal{L}(\boldsymbol{\vartheta}) = -\frac{TN}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln |\mathbf{H}_t| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (\mathbf{y}_t - \boldsymbol{\mu}_t)' \mathbf{H}_t^{-1} (\mathbf{y}_t - \boldsymbol{\mu}_t) \quad (4.1.2)$$

(Bauwens et al. (2003, S. 22)). Der ML-Schätzer $\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_{ML}$ für den wahren Parametervektor $\boldsymbol{\vartheta}$ wird mittels numerischen Optimierungsverfahren bestimmt, wobei im Kontext multivariater GARCH-Modelle entweder auf den von Berndt et al. (1974, S. 656ff.) begründeten *BHHH*⁴-Algorithmus oder auf die *method of scoring* (Engle, 1982, S. 996f.) zurückgegriffen wird. Im Wesentlichen werden hierbei nur Ableitungen erster Ordnung (d.h. Score-Vektoren) herangezogen und typischerweise numerische Techniken zur Approximationen dieser Ableitungen verwendet, da die analytischen Gradienten oft zu komplex erscheinen.⁵ Allerdings wird in der Literatur auch argumentiert, dass es vorteilhaft sein kann, direkt analytische Ableitungen zu verwenden, da z.B. die Standardfehler „akuratere“ geschätzt und die ML-Schätzungen schneller durchgeführt werden können (Lucchetti (1999, S. 1)).⁶

Wie *stylized fact eins* aufzeigt, weisen Hochfrequenzdaten besonders breite Flanken in ihrer Verteilung auf. Diese erhöhte Kurtosis kann oft nicht durch die dynamische Struktur in der Varianz von GARCH-Modellen erfasst werden. Eine logische Alternative scheint daher die Annahme, dass die Elemente des Residuenvektors $\boldsymbol{\epsilon}_t$ einer **multivariaten t -Verteilung** mit $E(\boldsymbol{\epsilon}_t) = \mathbf{0}$ und $\text{Var}(\boldsymbol{\epsilon}_t) = \mathbf{I}_N$ entstammen. Für die bedingte Dichtefunktion von \mathbf{y}_t folgt somit

$$f(\mathbf{y}_t | \boldsymbol{\vartheta}, \nu, \boldsymbol{\Omega}_{t-1}) = \frac{\mathcal{G}(\frac{\nu+N}{2})}{\mathcal{G}(\frac{\nu}{2}) [\pi(\nu-2)]^{\frac{N}{2}}} |\mathbf{H}_t|^{-\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{(\mathbf{y}_t - \boldsymbol{\mu}_t)' \mathbf{H}_t^{-1} (\mathbf{y}_t - \boldsymbol{\mu}_t)}{\nu-2} \right]^{-\frac{N+\nu}{2}}, \quad (4.1.3)$$

³ Da die Likelihood-Funktion eine streng monoton steigende Funktion ist, ist das Maximum dieser Funktion mit dem Maximum der logarithmierten Funktion identisch. Aufgrund der so entstehenden „logarithmischen Differenzen“ wird die Maximierung wesentlich vereinfacht.

⁴ Stellvertretend für die Autoren Berndt, Hall, Hall, Hausman.

⁵ Es sei angemerkt, dass die Computertechnik in den letzten 30 Jahren bedeutende Fortschritte erzielt hat und daher heute in ökonometrischen Programmpaketen oft andere Algorithmen verwendet werden. Einen guten Überblick über statistische, dynamische bzw. stochastische Optimierungsverfahren bietet z.B. Papageorgiou (1996).

⁶ Luchetti (1999) führt des weiteren analytische Ableitungen für die BEKK-Spezifikation eines multivariaten GARCH-Prozesses mit zugrundeliegender Normalverteilung an. Fiorentini et al. (2003, S. 5ff.) gehen einen Schritt weiter und geben für eine bedingte multivariate t -Verteilung analytische Formen für den Score-Vektor, die Hesse-Matrix und die Informationsmatrix an. Hinsichtlich analytischer Formen speziell für das VEC-Modell siehe auch die Arbeit von Liu und Polasek (1999, S. 99ff.). Interessant ist ebenfalls die Herangehensweise von Iglesias und Phillips (2003, S. 15ff.), die für spezielle multivariate ARCH-Modelle eine SUR- (Seemingly Unrelated Regression) Spezifikation angeben und so einen alternativen Weg der analytischen Bestimmung der Informationsmatrix gehen.

wobei $\mathcal{G}(\cdot)$ die Gamma-Funktion bezeichnet sowie ν für den Freiheitsgrad steht (Bauwens und Laurent, 2002, S. 12).⁷ Allerdings bezweifelt z.B. Choi (2002) die Relevanz der t -Verteilung, da sie per Definition symmetrisch ist, jedoch Hochfrequenzdaten häufig neben der erhöhten Kurtosis auch eine beträchtliche Schiefe aufweisen. Um dieser leptokurtischen und schiefen Verteilung der zugrundeliegenden Daten gerecht zu werden, verbindet er die multivariate GARCH-Schätzung mit einer flexiblen multivariaten Dichtefunktionen (siehe hierzu insbesondere Choi (2002, S. 5f.)).

Hierbei ist allerdings anzumerken, dass durch die genaue Spezifizierung der bedingten Verteilungen zwar effiziente Parameter durch die ML-Methode geschätzt werden können, ist die spezielle Verteilungsannahme jedoch nicht zutreffend, wird das Risiko einer inkonsistenten Schätzung eingegangen (Hafner und Rombouts, 2003, S. 1)).

Da nie sicher gesagt werden kann, welcher Verteilung die Finanzmarktdaten folgen, kann alternativ die Log-Likelihood-Funktion generell auf Basis einer Normalverteilung maximiert werden, ohne dabei etwas über die wahre Verteilung auszusagen. Diese Methode wird gemeinhin als **Quasi-Maximum-Likelihood-Methode (QML)** bezeichnet⁸. Sie hat den Vorteil, dass der QML-Schätzer trotz fehlender bedingter Normalverteilung der Ausgangsdaten - die richtigen Spezifikation der bedingten Momente erste und zweiter Ordnung vorausgesetzt und unter der Annahme einiger Regularitätsbedingungen⁹ - konsistent und asymptotisch normalverteilt ist. Jedoch müssen die gewöhnlichen Standardfehler modifiziert werden, um sie aufgrund der fehlenden Normalverteilung robust schätzen zu können (Bollerslev und Wooldridge, 1992, S. 145ff.). Besonders auf spezielle multivariate GARCH-Modelle abzielend beweist Jeantheau (1998, S. 73f.) die (strenge) Konsistenz des QML-Schätzers¹⁰ und wendet seine Ergebnisse auf das CCC-Modell an. Comte und Liebermann (2003, S. 66ff.) zeigen darauf aufbauend und unter Hinzunahme weiterer Bedingungen¹¹ die asymptotische Normalverteilung des QML-Schätzers, besonders unter der Spezifikation des BEKK-Modells. Für weitere Arbeiten hinsichtlich theoretischer Eigenschaften des (Q)ML-Schätzers siehe Bauwens und Vandeuren (1995) oder Ling und McAleer (2003).

Allerdings besitzt die QML-Schätzverfahren eine gewisse Ambivalenz: Zwar sind, wie oben erwähnt, die Konsistenz und die asymptotische Normalität gesichert, jedoch ist der QML-Schätzer,

⁷ Um die Existenz der zweiten Momente zu sichern und um \mathbf{H}_t als Kovarianzmatrix interpretieren zu können, muss gelten: $\nu > 2$. Des weiteren wird ν häufig ebenfalls durch die ML-Methode geschätzt.

⁸ Siehe dazu White (1982), der diesen Begriff prägte.

⁹ Für weitere Ausführungen hierüber siehe Bollerslev und Wooldridge (1992, S. 166).

¹⁰ Unter der Hauptannahme, dass der betrachtete Prozess streng stationär und ergodisch ist.

¹¹ Z.B. unter der Annahme endlicher achter Momente von \mathbf{u}_t .

wenn die Normalverteilungsannahme nicht zutrifft, im Vergleich zu besseren Spezifikationen der zugrundeliegenden Verteilung ineffizient. Franses und van Dijk (2000, S. 173) zeigen dabei, dass die QML-Methode zu „akuraten“ Schätzern führt, solange die zugrundeliegende Verteilung symmetrisch ist, während für asymmetrische Verteilungen starke Effizienzverluste hinzunehmen sind. Hafner und Rombouts (2003, S. 10) gehen in einer solchen Konstellation zu einer semiparametrischen Schätzung über (siehe dazu Abschnitt 4.4).

4.2 Schätzung in zwei Schritten

Vor allem Modelle mit zeitlich variierenden Korrelationen können in zwei Schritten auf Basis der ML-Methode bzw. der QML-Methode geschätzt werden. Insbesondere zeigt Engle (2000, S. 11f.) für das DCC-Modell mit Kovarianzmatrix $\mathbf{H}_t = \mathbf{D}_t \mathbf{\Gamma}_t \mathbf{D}_t$, dass die Log-Likelihood-Funktion in zwei Teile aufgespalten werden kann: Zum einen in einen „Volatilitätsteil“ $\ln \mathcal{L}_v(\boldsymbol{\vartheta}_1)$ mit Parametervektor $\boldsymbol{\vartheta}_1$, der die zu schätzenden Parameter aus \mathbf{D}_t enthält, und zum anderen in einen „Korrelationsteil“ $\ln \mathcal{L}_k(\boldsymbol{\vartheta}_2; \boldsymbol{\vartheta}_1)$, wobei die zusätzlichen zu schätzenden Parameter aus $\mathbf{\Gamma}_t$ im Vektor $\boldsymbol{\vartheta}_2$ enthalten sind.¹² Die Log-Likelihood-Funktion kann daher formuliert werden als

$$\ln \mathcal{L}(\boldsymbol{\vartheta}_1, \boldsymbol{\vartheta}_2) = \ln \mathcal{L}_v(\boldsymbol{\vartheta}_1) + \ln \mathcal{L}_k(\boldsymbol{\vartheta}_2; \boldsymbol{\vartheta}_1). \quad (4.2.1)$$

Im ersten Schritt werden univariate Modelle der entsprechenden GARCH-Spezifikation individuell geschätzt, wobei sich die Log-Likelihood-Funktion als Summe der einzelnen GARCH-Spezifikationen der N Zeitreihen ergibt. Bei Ersetzung von $\mathbf{\Gamma}_t$ durch die Einheitsmatrix¹³ kann dann geschrieben werden (Engle und Sheppard (2001, S. 7))

$$\begin{aligned} \ln \mathcal{L}_v(\boldsymbol{\vartheta}_1) &= -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (N \ln(2\pi) + \ln(|\mathbf{I}_N|) + 2 \ln(|\mathbf{D}_t|) + (\mathbf{y}_t - \boldsymbol{\mu}_t)' \mathbf{D}_t^{-1} \mathbf{I}_N \mathbf{D}_t^{-1} (\mathbf{y}_t - \boldsymbol{\mu}_t)) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (N \ln(2\pi) + 2 \ln(|\mathbf{D}_t|) + (\mathbf{y}_t - \boldsymbol{\mu}_t)' \mathbf{D}_t^{-2} (\mathbf{y}_t - \boldsymbol{\mu}_t)) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left(N \ln(2\pi) + \sum_{n=1}^N \left(\ln(h_{ii,t}) + \frac{(y_{i,t} - \mu_{i,t})^2}{h_{ii,t}} \right) \right) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \left(T \ln(2\pi) + \sum_{t=1}^T \left(\ln(h_{ii,t}) + \frac{(y_{i,t} - \mu_{i,t})^2}{h_{ii,t}} \right) \right). \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

¹² \mathbf{D}_t , $\mathbf{\Gamma}_t$ und $\boldsymbol{\mu}_t$ sind somit wiederum Funktionen von $\boldsymbol{\vartheta}_1$ und/oder $\boldsymbol{\vartheta}_2$.

¹³ Die Schätzung von $\mathbf{\Gamma}_t$ erfolgt erst im zweiten Schritt.

Um die dynamische Struktur zu schätzen, formulieren Engle und Sheppard (2001, S. 7) die Log-Likelihood-Funktion des zweiten Schrittes wie folgt:

$$\begin{aligned} \ln \mathcal{L}_k(\boldsymbol{\vartheta}_2; \hat{\boldsymbol{\vartheta}}_1) &= -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (N \ln(2\pi) + 2 \ln(|\mathbf{D}_t|) + \ln(|\mathbf{R}_t|) \\ &\quad + (\mathbf{y}_t - \boldsymbol{\mu}_t)' \mathbf{D}_t^{-1} \mathbf{R}_t^{-1} \mathbf{D}_t^{-1} (\mathbf{y}_t - \boldsymbol{\mu}_t)) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (N \ln(2\pi) + 2 \ln(|\mathbf{D}_t|) + \ln(|\mathbf{R}_t|) + \boldsymbol{\xi}_t' \mathbf{R}_t^{-1} \boldsymbol{\xi}_t), \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

mit $\boldsymbol{\xi}_t = \mathbf{D}_t^{-1}(\mathbf{y}_t - \boldsymbol{\mu}_t)$. Da Gleichung (4.2.3) unter Einbeziehung des Parametervektors $\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_1$ geschätzt wird, können konstante Terme aus der obigen Log-Likelihood-Funktion herausgelöst und nur noch folgende Gleichung (4.2.3*) maximiert werden:

$$\ln \mathcal{L}_k^*(\boldsymbol{\vartheta}_2; \hat{\boldsymbol{\vartheta}}_1) = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (\ln(|\mathbf{R}_t|) + \boldsymbol{\xi}_t' \mathbf{R}_t^{-1} \boldsymbol{\xi}_t). \quad (4.2.3^*)$$

Wie Engle (2000, S. 12) weiter anführt, sind die zu schätzenden Parameter konsistent und asymptotisch normalverteilt (für Regularitätsbedingungen und weitere Ausführungen siehe Engle und Sheppard (2001, S. 7ff.) bzw. Newey und McFadden (1994, S. 2148ff.)). Allerdings weisen Engle und Sheppard (2001, S. 8) darauf hin, dass die Schätzung in mehreren Schritten eine Modifikation der Standardfehler nötig macht, jedoch die Standardfehler nach Bollerslev und Wooldridge (1992, S. 145ff.) für jedes univariate GARCH-Modell konsistent bleiben und nur die asymptotische Kovarianz der zu schätzenden Korrelationsparameter modifiziert werden muss.¹⁴ Des Weiteren führen sie an, dass die geschätzten Parameter nicht völlig effizient sind, da sie genaugenommen auf Basis einer Limited-Information-Maximum-Likelihood-Methode geschätzt werden.¹⁵ Dabei betonen Engle und Sheppard (2001, S. 9f.) aber, dass durch eine Iteration eines Newton-Raphson-Algorithmus, der die Likelihood-Funktion des zweiten Schrittes umfasst, asymptotisch effiziente Schätzer gefunden werden können.

4.3 *variance-targeting*-Schätzung

Einen interessanten Weg der Schätzung multivariater GARCH-Prozesse stellt die von Engle und Mezrich (1996, S. 38) eingeführte Methode des *variance-targeting* dar. Hierbei wird die Bedingung auferlegt, dass die asymptotische Kovarianzmatrix der Stichprobenkovarianzmatrix gleich

¹⁴ Dies trifft auch im verringerten Maße auf die Schätzung in zwei Schritten des CCC-Modells nach Bollerslev zu.

¹⁵ Für weitere Ausführungen hierüber siehe Greene (2000, S. 686ff.).

und daher im (Q)ML-Schätzvorgang eingesetzt werden kann. Wie Engle (2000, S. 7) anführt, weicht zwar die Stichprobenkovarianzmatrix von der asymptotischen Kovarianzmatrix in endlichen Stichproben ab, jedoch wird die Anzahl der zu schätzenden Parameter wesentlich reduziert, ohne die Genauigkeit der Schätzung allzu sehr einzuschränken. Für ein VEC(1, 1)-Modell

$$vech(\mathbf{H}_t) = vech(\mathbf{C}) + \mathbf{A}vech(\mathbf{u}_{t-1}\mathbf{u}'_{t-1}) + \mathbf{B}vech(\mathbf{H}_{t-1}) \quad (4.3.1)$$

kann dann folgendes formuliert werden (Engle, 2000, S. 7):

$$vech(\mathbf{C}) = (\mathbf{I}_N - \mathbf{A} - \mathbf{B})vech(\mathbf{S}), \quad (4.3.2)$$

wobei $\mathbf{S} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (\mathbf{u}_t \mathbf{u}'_t)$.

Bauwens et al. (2003, S. 26) gehen in ihren Ausführungen noch weiter und verbinden die *variance-targeting*-Schätzung mit der Schätzung in zwei Schritten. Da eine konsistente Schätzung der Parameter während der Schätzung in zwei Schritten erfolgt, fügen sie einen dritten Schritt bei der Schätzung der Modelle mit zeitlich variierenden Korrelationen hinzu, in dem sie die Information der empirischen Kovarianzmatrix bzw. der empirischen Korrelationsmatrix verwenden und z.B. im DCC-Modell die Kovarianzmatrix $\bar{\mathbf{Q}}$ nicht schätzen, sondern hierfür ihr empirisches Gegenstück heranziehen.

4.4 Semiparametrische Schätzung

Wie bereits in Abschnitt 4.1 der ML-Schätzung erwähnt, müssen die Residuen $\epsilon_{i,t}$ nicht unbedingt normalverteilt sein. Als Konsequenz können starke Effizienzverluste auftauchen, auch das Spezifizieren einer genauen Verteilung schafft oft keine Abhilfe: Entspricht die postulierte Verteilung nicht der Verteilung der zugrundeliegenden Daten, so kann eine inkonsistente Schätzung resultieren. Daher schlagen Hafner und Rombouts (2003, S. 4ff.) eine semiparametrische Schätzung vor. Sie gehen zwar immer noch von einer klar spezifizierten Parameterstruktur der Kovarianzmatrix \mathbf{H}_t aus, jedoch lassen sie die Verteilung der Störterme unbestimmt und schätzen die Dichtefunktion direkt aus dem verwendeten Zahlenmaterial. In ihrer semiparametrischen Schätzung berücksichtigen sie verschiedene Herangehensweisen, wobei ein sehr interessanter Weg

zu einer Verallgemeinerung der Arbeit von Engle und Gonzales-Rivera (1991) führt. Hierbei wird die allgemeine Log-Likelihood-Funktion

$$\ln \mathcal{L}(\boldsymbol{\vartheta}) = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln |\mathbf{H}_t| + \sum_{t=1}^T \ln g(\boldsymbol{\epsilon}_t) \quad (4.4.1)$$

maximiert, wobei $g(\cdot)$ die un spezifizierte Dichtefunktion von standardisierten Residuen $\boldsymbol{\epsilon}_t = \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}} \mathbf{u}_t$ darstellt. Die Idee ist, die standardisierten Residuen zuerst durch die QML-Methode¹⁶ konsistent zu schätzen, um dann in einem weiteren Schritt die Funktion $g(\cdot)$ mittels Kerndichteschätzung zu bestimmen. Dabei kann der allgemeine multivariate Kerndichteschätzer mit nicht-singulärer Matrix \mathcal{H} als Bandbreite und \mathcal{K} als dem multivariaten Kern¹⁷ angegeben werden als

$$\hat{g}_{\mathcal{H}}(x) = \frac{1}{T|\mathcal{H}|} \sum_{t=1}^T \mathcal{K} \left(\frac{\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}_t}{\mathcal{H}} \right). \quad (4.4.2)$$

In einem letzten Schritt werden dann die Parameter des multivariaten GARCH-Prozesses unter Verwendung von $\hat{g}(\cdot)$ in Gleichung (4.4.1) geschätzt.

Unter Erweiterung der Arbeit von Drost und Klaassen (1997) auf den multivariaten Fall konstruieren Hafner und Rombouts (2003) des weiteren semiparametrische Schätzer, die unter der Bedingung, dass die wahre Verteilung der Klasse der sogenannten „kugelförmigen“ Verteilungen¹⁸ angehört, effizient sind. Ihre Monte-Carlo-Simulationen zeigen, dass durch die semiparametrische Herangehensweise Effizienzgewinne im Vergleich zur QML-Schätzung erzielt werden können und sie daher bei hoher Kurtosis der Finanzmarktdaten verwendet werden sollte.

¹⁶ D.h. $g(\cdot)$ folgt hierbei einer Normalverteilung.

¹⁷ Unter einem Kern versteht man eine Funktion $\mathcal{K} : \mathbb{R} \mapsto [0; \infty[$ mit $\int \mathcal{K}(x) dx = 1$. Die am häufigsten verwendeten Kerne sind zusätzlich symmetrisch und verschwinden außerhalb eines um den Nullpunkt gelegenen Intervalls. Für weitere Ausführungen siehe z.B. Scott (1992).

¹⁸ Hat der Zufallsvektor \mathbf{x} die Dichtefunktion $g(\mathbf{x}) = g(x_1, \dots, x_N)$, dann ist $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}'\mathbf{x})$ für $f : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$ als kugelförmige Verteilungsfunktion anzusehen. Beispiele für kugelförmige Verteilungen sind z.B. die multivariaten Versionen der Normal-, der t - und der Laplace-Verteilung (siehe hierzu Kelker (1970) und Fang et al. (1990, Kapitel 2-4)).

Kapitel 5

Volatilitäts-Spill-Over zwischen Euro, Euribor und Eurostoxx

5.1 Theoretischer Hintergrund

- Volatilität-Trade-off Hypothese

Das Abwägen der Vor- und Nachteile eines flexiblen versus eines fixen Wechselkurssystems stellt ein zentrales Thema in Geldtheorie und Geldpolitik dar. Viele Ökonomen haben versucht, die verschiedenen Währungssysteme anhand ihrer „Wohlfahrtsimplikationen“ zu ordnen. Dabei wird in der Literatur als wesentlicher Nachteil eines fixen Wechselkurses die Tatsache genannt, dass sich sowohl monetäre als auch reale Schocks von außen via Zahlungsbilanz oder anderen Transmissionskanälen auf die unterschiedlichen Länder übertragen. Ein flexibles Wechselkurssystem wird hingegen als Puffer angesehen, der exogene Störungen abfedert (Frenkel und Mussa, 1980, S. 379). Die Fiskal- und Geldpolitik ist von Zwängen der Aufrechterhaltung eines bestimmten Wechselkurses „befreit“ und kann so besser für interne Stabilisierungszwecke genutzt werden. Ökonometrisch gesprochen sollte sich durch eine höhere Volatilität in der Änderungsrate der Wechselkurse eine niedrigere Volatilität in anderen Makrovariablen, wie etwa denen von Finanzmärkten (z.B. kurzfristige Zinsen) oder des volkswirtschaftlichen Outputs, abzeichnen. In Anlehnung an die Untersuchungen von Kim und Chow (2000) soll dieser Vorzug eines flexiblen Wechselkurssystems als *Volatilität-Trade-off Hypothese* bezeichnet werden.

Konkret sei das Geldmarktgleichgewicht (logarithmiert) gegeben als

$$m_t - p_t = \alpha \cdot \mathcal{Y}_t - \beta \cdot i_t + u_t, \quad (5.1.1)$$

wobei m_t für das nominale Geldangebot, p_t für das inländische Preisniveau, \mathcal{Y}_t für das reale Volkseinkommen, i_t für das nominale Zinsniveau sowie u_t als Schock zum Zeitpunkt t steht, während α und β Strukturparameter darstellen. Des Weiteren soll folgende relative Kaufkraftparität gelten (Log-Schreibweise):

$$e_t^N = p_t - p_t^* + e_t^R, \quad (5.1.2)$$

mit e_t^N sowie e_t^R als dem nominalen bzw. realen Wechselkurs¹ und p_t^* als dem ausländischen Preisniveau zum Zeitpunkt t (Flood und Rose, 1995, S. 5f.); oft wird e_t^R auch als Schock auf dem Gütermarkt interpretiert. Durch Kombination dieser beiden Gleichgewichtsbedingungen (Gleichungen (5.1.1) und (5.1.2)) folgt:

$$m_t - e_t^N + \beta \cdot i_t = \alpha \cdot \mathcal{Y}_t + u_t + p_t^* - e_t^R. \quad (5.1.3)$$

Gleichung (5.1.3) kann nun dahingehend interpretiert werden, dass im Geldmarktgleichgewicht exogene Schocks (versammelt auf der rechten Seite der Gleichung) zu einer Veränderung des Geldangebots m_t , des (kurzfristigen) Zinssatzes i_t oder des Wechselkurses e_t^N führen können. Abhängig vom Wechselkursregime bzw. der Flexibilität der Preise kann es z.B. durch einen exogenen monetären Schock u_t auf die Geldnachfrage (im Sinne einer Erhöhung) zu einer Aufwertung der einheimischen Währung *ceteris paribus* kommen, was im Sinne der *Volatilität-Trade-off Hypothese* als weniger schwerwiegend (bzw. weniger kostenintensiv) angesehen wird als eine Veränderung der Geldmenge m_t oder des Zinssatzes i_t .

Hinsichtlich des Aktienmarktindex als dem zweiten untersuchten Finanzmarktindikator kann festgestellt werden, dass Geldmarkt und Wertpapiermarkt sich entsprechen bzw. als spiegelbildlich angesehen werden können. Dies ergibt sich theoretisch allein schon aus der üblichen Ableitung der Geldnachfrage im Rahmen der spekulativen Kassenhaltung. Treten daher Veränderungen auf dem Geldmarkt auf, so sollte der Wertpapiermarkt ebenfalls von Veränderungen geprägt sein und umgekehrt (siehe hierzu die Ausführungen von Majer (2001, S. 199f.)).

¹ Preisnotierung.

Anhänger eines fixen Wechselkursregimes bezweifeln allerdings den negativen Zusammenhang zwischen der Volatilität des Wechselkurses einerseits und der Variabilität anderer Makrovariablen andererseits. Sie verweisen vor allem auf die negative Wirkung des Risikos bei flexiblen Wechselkursen auf einen effizient funktionierenden internationalen Handel von Gütern und Kapital. Buiters (2000) untersucht dabei den etwaigen Beitritt Großbritanniens zur Europäischen Währungsunion (EMU) und kommt zum Schluß, dass eine Mitgliedschaft unausweichlich ist, da zusätzliches Risiko Handel und BIP-Wachstum hemmt und volatil werden lässt. In die gleiche Richtung zielen die Analyse von Fratianni und von Hagen (1992, S. 133ff.), die stabilisierende Effekte des Europäischen Währungssystems (EMS) auf Inflation und Produktion aufzeigt, sowie die Arbeit von Artis und Taylor (1994, S. 123ff.), in der demonstriert wird, dass die Stabilität der Wechselkurse im EMS nicht zu Lasten erhöhter Zinsvolatilitäten ging. Keine signifikanten statistischen Unterschiede im Verhalten wichtiger Makrovariablen (wie Inflation und volkswirtschaftliche Produktion) finden jedoch Baxter und Stockman (1989) vor und nach dem Zusammenbruch des Bretton Woods Systems. Auch Dornbusch (1983) weist darauf hin, dass *Spill-Over-Effekte*, ausgehend vor allem von großen Ländern, unabhängig vom Wechselkursregime sind. Während Marston (1985) die Fähigkeit eines flexiblen Wechselkurssystems, einen externen Schock absorbieren zu können, vor allem von dessen Ursprung abhängig macht, findet Kim (2000) im Fall Japans klare Anzeichen für die Gültigkeit der *Volatilität-Trade-off Hypothese*.

Die in der Literatur behandelten empirischen Untersuchungen hinsichtlich der Wirkung der Volatilitäten des Wechselkurses sind damit ebenso kontrovers wie die Diskussion um flexible oder fixe Wechselkurse. Im Folgenden sollen nun mittels bivariater GARCH-Prozesse etwaige *Volatiliäts-Spill-Over* zwischen Europa und den USA, genauer zwischen dem nominalen EUR/USD-Wechselkurs und dem kurzfristigen Zinssatz (Euribor) einerseits und dem europäischen (bzw. Euroland spezifischen) Aktienindex Eurostoxx andererseits untersucht werden.

5.2 Empirische Untersuchung: Deskriptive Analyse

Zur Analyse der *Spill-Over-Effekte* wurden Log-Differenzen erster Ordnung täglicher Werte der Periode 01.01.1999 - 30.05.2003 des EUR/USD-Wechselkurses, des Euribors² und des Eurostoxx 50 herangezogen, die nachfolgend respektiv mit $\Delta EUR/USD_t$, $\Delta Euribor_t$ bzw. $\Delta Eurostoxx_t$

² Abweichend der gewöhnlichen Festlegung der Dauer eines kurzfristigen Zinsgeschäftes auf drei Monate wird hier der Zinssatz eines Kreditgeschäftes mit der Dauer von einer Woche (Euribor one week offered rate) als dem Zinssatz mit kürzester Fristigkeit in der Eurozone gewählt.

bezeichnet werden und von Thomson Financial Datastream entnommen wurden (eine detaillierte Quellenübersicht der Daten findet sich im Anhang).³ Des Weiteren wurden alle deskriptiven und inferentiellen Analysen sowie sämtliche Abbildungen mit Matlab 6.1 erstellt. Matlab-Toolboxen, die nicht in der Matlab Standardversion enthalten sind, werden gesondert (Anhang) ausgewiesen.⁴

Um die Verteilungseigenschaften der drei untersuchten Finanzmarktdaten einzuschätzen, sei auf die Tabellen 5.1 und 5.2 verwiesen, in denen deskriptive Verteilungscharakteristika und die Ergebnisse eines Tests auf Normalverteilung angegeben sind.

Tabelle 5.1: Verteilungscharakteristik (empirisch)*

<i>Statistik</i>	$\Delta EUR/USD_t$	$\Delta Euribor_t$	$\Delta Eurostoxx_t$
N	1152	1152	1152
Durchschnitt	0,0009	-0,0143	-0,0313
Median	0	-0,03009	0
Std.Abw.	0,6882	1,1713	1,772
Maximum	4,204	22,6	7,078
Minimum	-2,252	-27,45	-6,62

* Die hier untersuchten Daten wurden aus Anschauungsgründen folgender Transformation unterworfen: $100 \times \Delta x_t$.

Quelle: eigene Berechnungen.

Aus Tabelle 5.1 ist zu erkennen, dass die Variable $\Delta Eurostoxx_t$ am stärksten variiert, während $\Delta EUR/USD_t$ eine kleine Standardabweichung aufweist.

Tabelle 5.2: Test auf Normalverteilung

<i>Statistik</i>	$\Delta EUR/USD_t$	$\Delta Euribor_t$	$\Delta Eurostoxx_t$
Schiefe	0,3691	-2,2758	0,0202
Kurtosis	4,5031	93,5993	4,5278
Jarque-Bera Teststatistik	133,4168***	$3,3958 \times 10^5$ ***	110,9755***

*:=sign. bei 10%-Niveau, **:=sign. bei 5%-Niveau, ***:= sign bei 1%-Niveau.

Quelle: eigene Berechnungen.

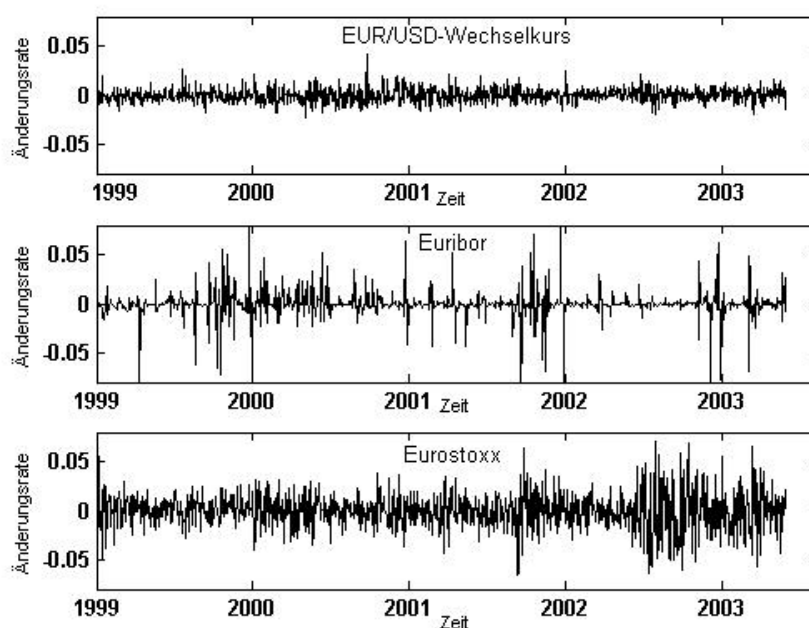
³ An dieser Stelle sei der W&W Asset Management GmbH in Stuttgart und insbesondere ihren Mitarbeitern des Investment Research ganz herzlich für die Bereitstellung der Daten gedankt!

⁴ Einen guten Überblick über momentan zur Verfügung stehende Ökonometrie-Standard-Pakete mit GARCH-Implementierung sowie deren Stärken und Schwächen (vor allem hinsichtlich der inferentiellen Genauigkeit) geben Brooks et al. (2003).

Wie aus Tabelle 5.2 ersichtlich ist, wird die Nullhypothese der Normalverteilung bei allen drei Zeitreihen hochsignifikant abgelehnt. Auch die Kurtosis weicht stark von ihrem Normalwert drei ab; besonders weist $\Delta Euribor_t$ eine stark leptokurtische Verteilung mit breiten Flanken auf. Insgesamt kann somit von einer leptokurtischen Verteilung der untersuchten Zeitreihen gesprochen werden; durch eine geeignete GARCH-Modellierung wird daher versucht, dieser gerecht zu werden.

Des Weiteren soll die Autokorrelation der Zeitreihen $\Delta EUR/USD_t$, $\Delta Euribor_t$ bzw. $\Delta Eurostoxx_t$ zunächst qualitativ erfasst werden. Abbildung 5.1 zeigt die Log-Änderungsraten im zeitlichen Verlauf: Deutlich zu erkennen sind *Volatilitätscluster* z.B. bei $\Delta Euribor_t$ um das Jahr 2000 und bei $\Delta Eurostoxx_t$ gegen Ende des Jahres 2002.

Abbildung 5.1: *Volatilitätscluster* der untersuchten Finanzmarktzeitreihen



Quelle: eigene Berechnungen.

In Tabelle 5.3 wird die Autokorrelation quantitativ erfasst. Hierfür wird der Ljung-Box Q (LBQ)-Test (Box et al., 1994, S. 314) für die Log-Änderungsraten mit Lag-Längen 10, 15 und 20 berechnet.⁵ Alternativ dazu könnte ebenfalls Engles ARCH-Test (Engle, 1982, S. 999f.)

⁵ Normalerweise wird der LBQ-Test im Sinne eines nachgeschalteten *lack-of-fit*-Tests (siehe hierzu Ljung und Box (1978)) verwendet.

Formal könnte die optimale Lag-Länge mit Hilfe des Akaike-Informationskriteriums bestimmt werden, da durch eine zu geringe Lag-Anzahl Autokorrelationen höherer Ordnung nicht berücksichtigt bzw. durch eine zu große Lag-Anzahl inferentielle Aussagen beeinträchtigt werden.

angewandt werden.

Tabelle 5.3: Test auf Autokorrelation

<i>LBQ-Teststatistik</i>		„Roh“-Werte	quadrierte Werte
<u>$\Delta EUR/USD_t$</u>			
<i>Lag</i>	10	10,9080	21,8815**
	15	18,8898	28,3223**
	20	24,3895	47,9908***
<u>$\Delta Euribor_t$</u>			
<i>Lag</i>	10	71,9626***	214,6515***
	15	77,8586***	214,7926***
	20	85,5452***	214,9203***
<u>$\Delta Eurostoxx_t$</u>			
<i>Lag</i>	10	27,5945***	558,2043***
	15	30,6203***	797,2561***
	20	39,3250***	957,7432***

*:=sign. bei 10%-Niveau, **:=sign. bei 5%-Niveau, ***:= sign bei 1%-Niveau.

Quelle: eigene Berechnungen.

Während nicht für alle Log-Änderungsraten die Nullhypothese einer seriellen Korrelation von null verworfen werden kann, wird die Nullhypothese serieller Unkorreliertheit bei allen quadrierten Werten dagegen meist hochsignifikant abgelehnt. Dies deutet somit auf sich über die Zeit hinweg verändernde Volatilitäten hin.

Abschließend soll zusätzlich sichergestellt werden, dass die untersuchten Zeitreihen keine Einheitswurzel besitzen, da sonst eine gültige Inferenz der multivariaten GARCH-Spezifikation verworfen werden müsste. Die Ergebnisse des Augmented Dickey-Fuller Test (Said und Dickey, 1984, S. 599ff.) sind zusammen mit den kritischen Werten in Tabelle 5.4 angegeben.⁶ Zur Matlab Implementation wurde die Econometrics-Toolbox von LeSage⁷ verwendet.

⁶ Dabei wurden deterministische Teile vernachlässigt (die Variablen besitzen einen Durchschnitt nahe null) und eine Lag-Länge von bis zu sechs gewählt. Wiederum könnte mittels des Akaike-Informationskriteriums die optimale Lag-Länge bestimmt werden.

⁷ Die unter <http://www.spatial-econometrics.com> erhältlich ist.

Tabelle 5.4: Einheitswurzeltest: Augmented Dickey-Fuller

<i>Statistik</i>						
<i>Lag-Länge</i>	1	2	3	4	5	6
<i>ADF t-Statistik*</i>						
$\Delta EUR/USD_t$	-25,6683	-20,3301	-16,6876	-15,2696	-13,4872	-12,3404
$\Delta Euribor_t$	-24,3738	-19,5854	-17,6113	-19,6256	-16,2953	-14,8011
$\Delta Eurostoxx_t$	-24,6663	-21,3098	-18,0081	-16,9822	-16,4558	-14,7334

* MacKinnon kritischer Wert der Ablehnung der Einheitswurzelhypothese (1% sign. Niveau): -2,584

Quelle: eigene Berechnungen.

Wie klar zu sehen ist, wird die Einheitswurzelhypothese der Log-Differenzen erster Ordnung der untersuchten Daten $\Delta EUR/USD_t$, $\Delta Euribor_t$ bzw. $\Delta Eurostoxx_t$ abgelehnt; es handelt sich also um stationäre Zeitreihen.

5.3 Bivariate GARCH-Schätzung

5.3.1 Modellspezifikation

Zur Messung der *Spill-Over-Effekte* zwischen EUR/USD-Wechselkurs und Euribor einerseits und Eurostoxx andererseits sei das Modell gegeben durch

$$\mathbf{y}_t = \boldsymbol{\mu}_t + \mathbf{u}_t \quad \text{mit} \quad \mathbf{u}_t \sim \mathbf{N}(0, \mathbf{H}_t) \quad \text{und}$$

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{D}_t \boldsymbol{\Gamma}_{(t)} \mathbf{D}_t, \tag{5.3.1}$$

wobei $\mathbf{y}_t = [y_{1,t}, y_{2,t}]'$ und $\boldsymbol{\mu}_t = E(\mathbf{y}_t | \boldsymbol{\Omega}_{t-1})$ den bedingten Erwartungswert sowie $\mathbf{u}_t = (u_{1,t}, \dots, u_{N,t})'$ den $N \times 1$ dimensionalen Vektor von Residuen darstellt. Zur genauen Implementierung wird $y_{1,t} = \Delta EUR/USD_t$ und $y_{2,t} = \Delta Euribor_t$ bzw. $\Delta Eurostoxx_t$ sowie der bedingte Erwartungswert als Stichprobendurchschnitt gesetzt. \mathbf{H}_t bezeichnet wiederum die positiv definite bedingte Kovarianzmatrix, deren Struktur zentral für die Modellierung der *Spill-Over-Effekte* ist.

Die Spezifikation der bedingten Kovarianzmatrix soll vorab auf das CCC-Modell oder das DCC-Modell (vgl. Gleichung (5.3.1)) festgelegt werden. Gründe für die Heranziehung von Modellen mit konstanten bzw. dynamischen Korrelationen sind zunächst deren relativ leichte Gewährleistung einer positiv definiten Kovarianzmatrix, die überschaubare Anzahl zu schätzender Parameter und vor allem die Möglichkeit einer einfachen intuitiven Interpretation der geschätzten Parameter.

Weiterhin zeigen diverse empirische Untersuchungen über Finanzzeitreihen (siehe z.B. Schwert und Seguine (1990, S. 1149f.) oder Andersen et al. (1999)), dass bereits eine GARCH(1,1)-Spezifikation für effiziente und signifikante Ergebnisse ausreicht. Auch die Überlegungen von Bauer und Herz (2001, S. 5) bekräftigen im hier untersuchten Fall eine GARCH(1,1)-Modellierung. Sie nehmen dabei an, dass der Schock auf dem Gütermarkt e_t^R in der Gleichung der relativen Kaufkraftparität (5.1.2) einem ARCH(1)-Prozesses folgt und so die (1,1)-Spezifikation nahe legt.⁸ Multivariate GARCH-Spezifikationen höherer Ordnung würden den Schätzprozess bedeutend komplexer ausgestalten und die Intuition erschweren.

5.3.2 Test auf konstante Korrelationen

Entscheidend jedoch für die weitere Vorgehensweise ist die genaue Ausgestaltung der bedingten Korrelationsmatrix $\mathbf{\Gamma}_{(t)}$: Ist diese in den hier betrachteten bivariaten GARCH(1,1)-Modellen konstant (CCC-Modell) oder zeitabhängig (DCC-Modell)? In der Literatur werden diverse Herangehensweisen von Tests auf eine konstante bedingte Korrelationsmatrix diskutiert. Hier soll exemplarisch der Test von Engle und Sheppard (2001, S. 10f.) dargestellt und durchgeführt werden. Andere Tests auf konstante Korrelationen wurden z.B. von Bera und Kim (2002) (Anwendung des IM-Tests nach White (1982) auf den bivariaten Fall), Tse (2000) (im Sinne eines verallgemeinerten LM-Tests) und Longin und Solnik (1995) entwickelt.

Genauer wollen Engle und Sheppard (2001, S.10f.) die Nullhypothese

$$H_0 : \mathbf{\Gamma}_t = \bar{\mathbf{\Gamma}} \quad \forall t = 1, \dots, T \quad (5.3.2)$$

⁸ Hier genauer für das DCC-Modell die Spezifikation $W = V = P = Q = 1$.

gegen die Alternativhypothese⁹

$$H_1 : \mathbf{\Gamma}_t \neq \bar{\mathbf{\Gamma}} \quad \text{für ein } t = 1, \dots, T \quad (5.3.3)$$

testen. Dazu schätzen sie zuerst die univariaten GARCH-Prozesse gemäß Gleichung (3.2.2) und standardisieren die betrachteten Residuen $u_{i,t}$. Danach wird die Korrelation dieser standardisierten Residuen geschätzt und der Vektor dieser „Standard-Residuen“ durch eine symmetrische Quadratwurzelzerlegung der soeben geschätzten Korrelationsmatrix ebenfalls standardisiert.¹⁰ Anschließend führen sie eine VAR-Schätzung der Form

$$\mathbf{Y}_t = \alpha + \beta_1 \mathbf{Y}_{t-1} + \dots + \beta_s \mathbf{Y}_{t-s} + \boldsymbol{\zeta}_t \quad (5.3.4)$$

durch, wobei s die Lag-Länge bedeutet und $\boldsymbol{\zeta}_t$ *NID*-verteilt ist mit $E(\boldsymbol{\zeta}_t) = 0$ und $\text{Var}(\boldsymbol{\zeta}_t) = \boldsymbol{\Sigma}_\zeta$. Speziell geht \mathbf{Y}_t aus

$$\mathbf{Y}_t = \text{vech}^u[(\bar{\mathbf{\Gamma}}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{D}_t^{-1} \mathbf{u}_t)(\bar{\mathbf{\Gamma}}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{D}_t^{-1} \mathbf{u}_t)' - \mathbf{I}_N] \quad (5.3.5)$$

hervor, wobei vech^u für den modifizierten $\text{vech}(\cdot)$ -Operator steht, der nun aber nur die Elemente oberhalb der Hauptdiagonalen einer $N \times N$ Matrix untereinander in einen $\frac{N(N-1)}{2}$ Spaltenvektor transferiert. Unter der Nullhypothese konstanter Korrelationen sollten α sowie alle β 's der VAR-Gleichung (5.3.4) null sein. Für die Teststatistik konstruieren Engle und Sheppard (2001, S. 11) einen $T \times 1$ -Vektor der äußeren Produkte für jeden univariaten Regressanden sowie eine $T \times (s+1)$ Regressormatrix und führen anschließend für die $\frac{N(N-1)}{2}$ dimensionalen Regressanden und Regressoren eine Schätzung gemäß eines SUR-Modells durch. Die Teststatistik definieren sie abschließend als $\frac{\hat{\mathbf{b}}\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\mathbf{b}}}{\hat{\sigma}} \stackrel{a}{\sim} \chi_{(s+1)}^2$, wobei $\hat{\mathbf{b}}$ für die geschätzten Regressionsparameter, \mathbf{X} für die Regressoren sowie $\hat{\sigma}$ für den Standardfehler des geschätzten SUR-Modells steht.

Tabelle 5.5 zeigt das Resultat des durchgeführten Tests der Residuen aus der Modellspezifikation (5.3.1). Hierzu musste die Matlab-Prozedur des Tests auf konstante Korrelationen der UCSD-GARCH-Toolbox¹¹ abgewandelt werden. Die abgeänderte Version befindet sich im Anhang.

⁹ Engle und Sheppard (2001, S. 10) spezifizieren die H_1 -Hypothese genauer als

$$\text{vech}(\mathbf{\Gamma}_t) = \text{vech}(\bar{\mathbf{\Gamma}}) + \beta_1 \text{vech}(\mathbf{\Gamma}_{t-1}) + \beta_2 \text{vech}(\mathbf{\Gamma}_{t-1}) + \dots + \beta_p \text{vech}(\mathbf{\Gamma}_{t-1}).$$

¹⁰ Unter der Nullhypothese sollten die Elemente des standardisierten Vektors $\bar{\mathbf{\Gamma}}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{D}_t^{-1} \mathbf{u}_t$ der Dimension $N \times 1$ *i.i.d.*-verteilt sein mit der Einheitsmatrix der Ordnung N als Kovarianzmatrix.

¹¹ Die unter http://econ.ucsd.edu/~ksheppard/ucsd_garch.htm erhältlich ist.

Tabelle 5.5: Test auf konstante Korrelationen nach Engle und Sheppard

<i>Statistik</i>	Korrelation zwischen	
	$\Delta EUR/USD_t$ & $\Delta Euribor_t$	$\Delta EUR/USD_t$ & $\Delta Eurostoxx_t$
„DCC-Teststatistik“	9,9204	16,2760

Spezifikation: $W = V = p = q = 1$ sowie $s = 10$, damit ist die Teststatistik $\chi^2_{(11)}$ -verteilt mit 11 Freiheitsgraden; *:=sign. bei 10%-Niveau, **:=sign. bei 5%-Niveau, ***:= sign bei 1%-Niveau.

Quelle: eigene Berechnungen.

Da die Nullhypothese konstanter Korrelationen der betrachteten Zeitreihen nicht einmal zum 10%-Niveau abgelehnt werden kann, wird im Folgenden von konstanten Korrelationen für die zu schätzenden bivariaten GARCH-Modelle der Variablen $\Delta EUR/USD_t$ und $\Delta Euribor_t$ einerseits sowie der Variablen $\Delta EUR/USD_t$ und $\Delta Eurostoxx_t$ andererseits ausgegangen. Die Untersuchung möglicher *Spill-Over-Effekte* der Volatilitäten erfolgt daher auf Grundlage zweier getrennter CCC-Modelle.

5.3.3 Analyse der gewählten Modelle

Zur Analyse der CCC-Modelle nach Bollerslev wurden auf der Basis der Matlab-Finance-Toolbox sowie der UCSD-GARCH-Toolbox diverse Matlab-Prozeduren programmiert, die ebenfalls im Anhang einzeln aufgeführt sind. In Tabelle 5.6a/b sind die Ergebnisse der Schätzung in zwei Schritten¹² der zwei getrennten CCC(1,1)-Modelle mit den entsprechenden t-Statistiken auf Basis der robusten Standardfehler nach Bollerslev und Wooldridge (1992) bzw. speziell für den Korrelationsparameter nach Engle und Sheppard (2001) wiedergeben.

Des weiteren wurde ein multivariater LBQ-Test¹³ nach Hosking (1980, 1981) und Li und McLeod (1981) in Matlab implementiert (siehe Anhang), um etwaige Missspezifikationen bzw.

¹² Speziell wurde die Schätzung in zwei Schritten unter Zuhilfenahme einer sequentiellen quadratischen Programmierung der Matlab-Medium-Scale-Optimization (für eine Beschreibung siehe „Matlab-Optimization Toolbox: Standard Algorithms - SQP-Implementation“) durchgeführt. Als Startwerte für den Algorithmus wurden für die Parameter $\alpha_{ii} = 0,05$, $\beta_{ii} = 0,8$ und $c_i = 11,5 \times 10^{-3}$ sowie Bollerslev (1986, S. 316) folgend für das anfängliche u_t die unbedingte Standardabweichung bzw. für anfängliche h_t die unbedingte Varianz der zugrundeliegenden Daten gesetzt.

¹³ Multivariate LBQ-Teststatistik: $\chi^2_{(k^2 m)}$ -verteilt mit $k^2 m$ Freiheitsgraden.

„zurückgebliebene“ serielle Korrelation der resultierenden (multivariat) standardisierten Residuen ($\epsilon_t = \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}} \mathbf{u}_t$) aufzudecken.¹⁴

Aus Tabelle 5.6a/b wird deutlich, dass alle geschätzten Parameter (mit Ausnahme der Konstanten c_i , weiteren Parametern der GARCH-Spezifikation von $\Delta Euribor_t$ und der Korrelation zwischen Wechselkurs und Zinssatz) statistisch hochsignifikant sind. Die Nullhypothese des multivariaten LBQ-Tests von seriell unkorrelierten Residuen und ihrer Quadrate kann bis auf die Residuen des Euribors nicht abgelehnt werden. Dies zeigt, dass nur wenig serielle Korrelation nicht erfasst werden konnte. Des Weiteren treten auch hier typische Erscheinungen univariater GARCH-Prozesse von hochfrequenten Finanzdaten auf: Die Summe $\hat{\alpha}_{ii} + \hat{\beta}_{ii}$ ist nahe eins, was auf eine hohe Persistenz der Schocks hinweist. Weiter kann, den Zusammenhang der untersuchten Zeitreihen betreffend, festgestellt werden, dass eine negative (wenn auch nicht immer statistisch signifikante) Korrelation des EUR/USD-Wechselkurses und des Euribors einerseits bzw. des Eurostoxx andererseits besteht. Dies kann als Anzeichen der Gültigkeit der *Volatilität-Trade-off Hypothese* gewertet werden.

Um aber eine direkte Quantifizierung der *Spill-Over-Effekte* der Volatilitäten zu erreichen, wird - inspiriert durch die Modellierung der Volatilitäten durch Tsay (2002, S. 364) - das CCC-Modell nach Bollerslev so abgewandelt, dass eine direkte dynamische Beziehung der beiden Variablen untersucht werden kann. Hierzu werden die bedingten Varianzen $h_{11,t}$ und $h_{22,t}$ genauer spezifiziert als

$$\begin{bmatrix} h_{11,t} \\ h_{22,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdot \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{1,t-1}^2 \\ u_{2,t-1}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_{11} & \cdot \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_{11,t-1} \\ h_{22,t-1} \end{bmatrix}, \quad (5.3.6)$$

während $h_{12,t}$ weiterhin gegeben ist durch

$$h_{12,t} = \rho_{12} \sqrt{h_{11,t}} \sqrt{h_{22,t}}. \quad (5.3.7)$$

¹⁴ Hayashi (2000, S. 141ff.) merkt allerdings an, dass der LBQ-Test, spezieller seine Aussagen hinsichtlich der asymptotischen Verteilung der Teststatistik, im Fall von GARCH-Modellen mit Vorsicht zu genießen ist. In gleicher Weise fügen Romano und Thombs (1996) an, dass für die asymptotische Verteilungsannahme des LBQ-Tests *i.i.d.*-Daten zu Verfügung stehen sollten.

Weitere multivariate Portmanteau-Tests finden sich z.B. in Ling und Li (1997) sowie Ledoit et al. (2002, S. 20f.). In der weiteren Vorgehensweise wird allerdings der Argumentation von Tsay (2002, S. 308) gefolgt, der den oben genannten multivariaten LBQ-Test auf seine Untersuchungen anwendet.

Tabelle 5.6: Bivariate CCC-GARCH-Schätzung

a: EUR/USD-Wechselkurs und Euribor

Zeitreihe i,j	ρ_{ij}	c_i	α_{ii}	β_{ii}	LBQ ⁺	
					I	II
$\Delta EUR/USD_t$		$4,8088 \times 10^{-7}$ (0,0002)	0,0223 (4,7048)***	0,9678 (101,38)***		
	-0,0242 (-1,1519)				53,658	81,027**
$\Delta Euribor_t$		$4,5869 \times 10^{-5}$ (0,0578)	0,4707 (0,7205)	0,5293 (0,8673)		

b: EUR/USD-Wechselkurs und Eurostoxx

Zeitreihe i,j	ρ_{ij}	c_i	α_{ii}	β_{ii}	LBQ ⁺	
					I	II
$\Delta EUR/USD_t$		$4,8088 \times 10^{-7}$ (0,0002)	0,0223 (4,7048)***	0,9678 (101,38)***		
	-0,2377 (-13,109)***				63,636	66,965
$\Delta Eurostoxx_t$		$4,5249 \times 10^{-6}$ (0,0135)	0,0767 (7,9228)***	0,9070 (65,908)***		

⁺ multivariate LBQ-Teststatistik der Lag-Länge 15, damit ist die Teststatistik $\chi^2_{(60)}$ -verteilt mit 60 d.f.; I:="Robt"-Werte, II:=quadierte Werte.

Beachte: Robuste t-Statistiken in Klammern; *:=sign. bei 10%-Niveau, **:=sign. bei 5%-Niveau, ***:= sign bei 1%-Niveau.

Quelle: eigene Berechnungen.

Somit stellen die Parameter α_{21} und β_{21} direkt die dynamische Beziehung (bzw. die *Spill-Over-Effekte*) des Wechselkurses auf den Geld- bzw. Aktienmarkt dar.

Kim und Chow (2000, S. 12) stellen hierzu fest, dass die Matrix der Parameter α_{ii} bzw. α_{ij} als Matrix kurzfristiger Einflüsse angesehen werden kann, da sie direkt mit den quadrierten Residuen der vorherigen Periode verbunden ist, wohingegen die Matrix der Parameter β_{ii} bzw. β_{ij} aufgrund ihrer Verbindung mit den bedingten Varianzen der Vorperiode eher die längerfristige Beziehung abbildet. Für die *Volatilität-Trade-Off Hypothese* gilt nun, dass signifikant negative Parameter α_{12} und β_{12} Hinweise auf (kurzfristige bzw. längerfristige) *Spill-Over-Effekte* sind und somit die untersuchte Hypothese einer negativen Verbindung der Volatilität auf dem Devisenmarkt und der Volatilität auf den inländischen Finanzmärkten unterstützen.

Für die erweiterte Untersuchung mussten die zuvor programmierten Matlab-Prozeduren in wesentlichen Elementen erweitert werden (siehe Anhang). In Tabelle 5.7 sind die Ergebnisse der Schätzung zusammengestellt.¹⁵

Im Vergleich zu den Ergebnissen der direkten CCC-GARCH-Schätzung lässt sich eine Erhöhung der Anzahl signifikanter Parameter erkennen. Waren vorher alle geschätzten Parameter der GARCH-Spezifikation von $\Delta Euribor_t$ statistisch nicht signifikant, tritt wenigstens der kurzfristige Effekt eines Schocks auf die Variabilität des kurzfristigen Zinssatzes hochsignifikant hervor; die Abhängigkeit der bedingten Volatilitäten von ihrer eigenen Variabilität wird also gefestigt. Wiederum kann größtenteils die Nullhypothese seriell unkorrelierter Residuen bzw. ihrer Quadrate nicht abgelehnt werden.

Besonders interessant hinsichtlich der *Volatilität-Trade-off Hypothese* sind neben der negativen Korrelation der betrachteten Variablen die zusätzlichen *Spill-Over-Parameter* in den GARCH-Spezifikationen der Veränderungsraten des Euribors sowie des Eurostoxx. Zwar ist ein negativer kurzfristiger Effekt (α_{21}) von Wechselkursschwankungen auf den Geldmarkt zu verzeichnen, jedoch ist dieser nicht statistisch signifikant. Auch ein längerfristiger negativer Effekt in Form einer statistisch signifikanten negativen Ausprägung des Parameters β_{21} kann nicht festgestellt werden. Die untersuchte Hypothese negativer *Spill-Over-Effekte* der Volatilitäten des

¹⁵ Zur Analyse musste eine negative Ausprägung der *Spill-Over-Parameter* α_{21} und β_{21} zugelassen werden. Anschließend wurde aufgrund der Abänderung des CCC-Modells der Vorgehensweise von Tsay (2002, S. 364) gefolgt: Es wurde ex-post untersucht, ob die aus den geschätzten Parametern α_{ii} und α_{ij} bzw. β_{ii} und β_{ij} gebildeten Matrizen positiv definit und die Eigenwerte ihrer Summe positiv und kleiner eins sind und somit von einer positiv definiten Kovarianzmatrix sowie der Kovarianzstationarität der Prozesse ausgegangen werden kann. Der Optimierungs-Algorithmus und die Startwerte entsprechen denen der Analyse des direkten CCC-Modells nach Bollerslev; für die zusätzlichen Parameter α_{21} und β_{21} wurde jeweils ein Startwert von Null gewählt.

Tabelle 5.7: Bivariate CCC-GARCH-Schätzung mit *Spill-Over-Effekten*

Zeitreihe i, j	ρ_{ij}	c_i	α_{ii}	α_{ij}	β_{ii}	β_{ij}	LBQ ⁺	
							I	II
a: EUR/USD-Wechselkurs und Euribor								
$\Delta EUR/USD_t$		$4,8088 \times 10^{-7}$ (0,0002)	0,0223 (4,7048)***	.	0,9678 (101,38)***	.		
	-0,0239 (-1,0835)						53,625	81,311**
$\Delta Euribor_t$		$4,5901 \times 10^{-5}$ (0,0890)	0,4709 (2,1718)***	$-8,7927 \times 10^{-5}$ (0,0000)	0,5292 (1,1668)	$-3,9566 \times 10^{-6}$ (0,0000)		
b: EUR/USD-Wechselkurs und Eurostoxx								
Zeitreihe i, j	ρ_{ij}	c_i	α_{ii}	α_{ij}	β_{ii}	β_{ij}	LBQ ⁺	
							I	II
$\Delta EUR/USD_t$		$4,8088 \times 10^{-7}$ (0,0002)	0,0223 (4,7048)***	.	0,9678 (101,38)***	.		
	-0,2385 (-11,096)***						63,578	66,498
$\Delta Eurostoxx_t$		$3,9793 \times 10^{-6}$ (0,1279)	0,0765 (1,0886)	-0,1089 (-7,3985)***	0,9069 (47,990)***	0,0061 (0,0352)		

⁺ multivariate LBQ-Teststatistik der Lag-Länge 15, damit ist die Teststatistik $\chi^2_{(60)}$ -verteilt mit 60 Freiheitsgraden; I:=-,Roh“-Werte, II:=quadierte Werte.

Beachte: Robuste t-Statistiken in Klammern; *:=sign. bei 10%-Niveau, **:=sign. bei 5%-Niveau, ***:= sign bei 1%-Niveau.

Quelle: eigene Berechnungen.

Devisenmarktes auf den Geldmarkt kann somit nicht unterstützt werden. Dies trifft jedoch nicht auf das Zusammenspiel von Devisenmarkt und Aktienmarkt in Europa zu: Zwar ist auch hier kein längerfristiger negativer Effekt von Wechselkursvolatilitäten auf den Aktienindex feststellbar, doch treten durchaus kurzfristige negative *Spill-Over-Effekte* auf die Veränderungsraten des Eurostoxx auf, die zudem statistisch hochsignifikante sind. Somit kann hier die *Volatilität-Trade-off Hypothese* teilweise als gerechtfertigt angesehen werden.

5.3.4 Kritische Betrachtung

Als kritische Betrachtung der durchgeführten Analysen sei erwähnt, dass nicht jegliche Veränderung in der Volatilität der Finanzmärkte gänzlich den *Volatilitäts-Spill-Overn* des Devisenmarktes zugerechnet werden kann. Beide Märkte mögen andere Effekte nationaler bzw. supranationaler Politikmaßnahmen, wie etwa nationaler Fiskal- bzw. Wirtschaftspolitik oder geldpolitischer Maßnahmen der Europäischen Zentralbank, widerspiegeln und von Regulierungen internationaler Kapitalbewegungen beeinflusst werden. Dies trifft insbesondere auf den zuvor genannten stabilisierenden kurzfristigen Effekt des EUR/USD-Wechselkurses auf den Eurostoxx-Aktienindex zu, da Maßnahmen gegen Schocks auf die Volkswirtschaft oft nur kurzfristig greifen. Des weiteren ist eine verringerte Zinsvolatilität nur im Falle eines völlig flexiblen Wechselkurses zwingend zu erwarten. Herrscht dagegen (wie heute häufig zu beobachten) ein *managed* oder *dirty floating* vor, in dem die Notenbanken den Wechselkurs am Markt zu steuern versuchen, kann aufgrund des fehlenden Vertrauens- bzw. Glaubwürdigkeitsbonus eines Festkurssystems sogar eher eine höhere Volatilität auf dem Geldmarkt erwartet werden.

Hinsichtlich der Robustheit des CCC-Modells mit *Spill-Over-Effekten* muss zusätzlich angeführt werden, dass durch die Einbeziehung von *Spill-Over-Parametern* in der GARCH-Spezifikation der Log-Änderungsraten von Euribor und Eurostoxx Identifikationsprobleme auftreten können, zumal diese betrachteten Zeitreihen nicht gerade eine große Schwankungsbreite in ihrer Variabilität aufweisen.

Kapitel 6

Kritische Zusammenfassung und Ausblick

Interessanterweise war Rob Engles Intention bei der Veröffentlichung seines Artikels 1982 über autoregressive bedingte Heteroskedastizität „... *to breathe new life into the macroeconomics of rational expectations...*“ (Engle, 1995, S. XI). Daraus entwickelte sich eine stetig wachsende Menge an ökonometrischer Literatur, die sich auf dem Gebiet der angewandten Finanzmarkt-ökonometrie heutzutage vorwiegend multivariaten GARCH-Prozessen zugewandt hat. Ziel dieser Arbeit war daher, einen Überblick über ausgewählte bzw. in der Literatur weit verbreitete multivariate GARCH-Modelle zu geben, Methoden der Schätzung multivariater Spezifikationen anzuführen und die theoretischen Überlegungen durch eine empirische Implementierung abzurunden.

Es zeigte sich, dass der Dreh- und Angelpunkt bei der Modellierung von multivariaten GARCH-Modellen in einer strukturellen Festlegung der bedingten Kovarianzmatrix liegt. Dabei ist das Ziel, einen Ausgleich zwischen Realitätsnähe oder Flexibilität, restriktiven Bedingungen der Gewährleistung einer positiv definiten Kovarianzmatrix und der Reduzierung der Dimensionalität des zu schätzenden Modells zu erreichen. Im VEC-Modell lassen sich zwar eine Vielzahl von dynamischen Beziehungen abbilden, doch ist es aufgrund der Anzahl zu schätzender Parameter häufig nicht praktisch umsetzbar; gleiches trifft auch auf die Spezifikation des BEKK-Modells zu. Diagonale VEC- bzw. BEKK-Modelle bieten hier einen Lösungsweg, indem sie Diagonalrestriktionen der Parametermatrizen einführen. Diese werden jedoch häufig als zu restriktiv und damit als realitätsfern angesehen. Das CCC-Modell und die mit ihm verwandten Modelle zeitlich variierender Korrelationen (DCC-Modell und VC-Modell) versuchen, die Kovarianzmatrix stufenweise zu modellieren, indem sie eine geeignete Struktur der Korrelationsmatrix auferlegen. Während im CCC-Modell diese Matrix konstante Korrelationen aufweist, formulieren das DCC- bzw. das

VC-Modell die bedingte Korrelationsmatrix dynamisch. Das FlexM-Modell hingegen bestimmt die Kovarianzmatrix „dezentral“ durch individuelle Schätzung ihrer Elemente.

Diverse Methoden der Schätzung multivariater GARCH-Modelle existieren, wobei die Schätzung in zwei Schritten hervorzuheben ist, die jedoch wohl vorwiegend auf die Spezifikation von CCC-, DCC- bzw. VC-Modellen angewendet wird. Im ersten Schritt werden univariate GARCH-Prozesse geschätzt, auf deren Basis dann im zweiten Schritt die Parameter der Korrelationsmatrix bestimmt werden. Andere Schätzverfahren, wie das der semiparametrischen Schätzung, sind besonders hinsichtlich des Effizienzgewinnes im Vergleich zur üblichen (Quasi-)Maximum-Likelihood-Schätzung interessant, da sie eine Festlegung der zugrundeliegenden Verteilung nicht benötigen, sondern die Dichtefunktion direkt aus dem vorliegenden Zahlenmaterial schätzen.

In der empirischen Anwendung wurde ein potentieller negativer Zusammenhang in Europa zwischen der Variabilität des Devisenmarktes (in Form des EUR/USD-Wechselkurses) und der Volatilität des kurzfristigen Geldmarktes (Euribor) bzw. des Aktienmarktes (Eurostoxx) untersucht. Basis hierfür ist die Überlegung vieler Ökonomen, dass ein flexibler (und somit volatiler) Wechselkurs möglicherweise inländische Märkte zu stabilisieren vermag, da notwendige Änderungen des Preisniveaus oder des Zinssatzes weniger notwendig sind als bei fixen Wechselkursen, in denen externe Schocks direkt auf die inländische Wirtschaft transformiert würden. Eine Vielzahl der in der Literatur diskutierten Analysen von *Spill-Over-Effekten* ließen den Schluss zu, dass dieser sogenannte *Volatilität-Trade-Off-Effekt* in Europa zutreffen könnte, und so mögliche Politimplikationen hinsichtlich des Diskurses von fixen versus flexiblen Währungsregimen ökonomisch abzuleiten wären. Technisch gesehen wurden zwei getrennte bivariate CCC-Modelle - zum einen in der Reinform, zum anderen in einer unkonventionellen Erweiterung - auf der Grundlage der täglichen Log-Veränderungsraten des EUR/USD-Wechselkurses und des einwöchigen Euribors einerseits sowie des EUR/USD-Wechselkurses und des Eurostoxx 50 andererseits geschätzt. In der Essenz ergaben sich wenige Anzeichen, die die zuvor beschriebene *Volatilität-Trade-Off-Hypothese* im Allgemeinen unterstützten. Jedoch konnten durchaus kurzfristige negative *Spill-Over-Effekte* auf die Veränderungsraten des Eurostoxx festgestellt werden, die zudem statistisch hochsignifikant waren. Den stabilisierenden Effekt größerer Variabilität auf dem Devisenmarkt auf Makrovariablen (z.B. auf die Finanzmärkte) aufgrund der angeführten Ergebnisse gänzlich abzulehnen - und daher als strikte Konsequenz fixe Wechselkursregime zu befürworten - muss jedoch schon allein wegen möglicher Herausforderungen hinsichtlich der Robustheit des Modells verneint werden.

Aufgrund der Schwerpunktlegung dieser Arbeit auf eine Darstellung diverser multivariater GARCH-Prozesse musste eine Auseinandersetzung mit der Prognosefähigkeit und -genauigkeit sowie diversen Methoden adäquater Modellspezifikation der einzelnen Modellklassen unterbleiben. Jedoch wurde ein multivariater Portmanteau-Test zur Residuenanalyse implementiert. Einen Überblick über Diagnoseverfahren bieten z.B. Bauwens et al. (2003, S. 27ff.). Genauer implementieren Engle und Sheppard (2001, S. 13) zur Auswahl diverser GARCH-Spezifikationen ihres DCC-Modells (multivariate) Likelihood-Verhältnis-Tests, während Diebold et al. (1999) für die Überprüfung der allgemeinen Güte der jeweiligen Spezifikation ein Verfahren basierend auf dem Konzept von Dichteprognosen vorschlagen.

In den letzten Jahren hat sich die Datenverfügbarkeit enorm verbessert - eine kontinuierliche Aufzeichnung von Wertpapierkursen ist heute Usus. Damit wird die Finanzmarktökonomie aber vor ganz neue Herausforderungen gestellt - statt die spärliche Ausgestaltung der Zeitreihen zu beklagen, muss heute oft gekürzt werden. Durch die hohe Beobachtungsfrequenz der Daten kommen Saisonalitäten, z.B. über den Börsentag/-woche, oder der Einbeziehung von Feiertagen eine andere Bedeutung zu. Gerade irreguläre starke Marktfluktuationen, z.B. aufgrund eines Börsencrashes, unerwartete Ereignisse, wie z.B. der 11. September 2001, oder strukturelle dynamische Veränderungen fordern die (multivariate) GARCH-Modellierung auf neue Weise heraus. Auf das Letztgenannte versucht Hafner (2001, S. 11ff.) eine Antwort zu geben: In Anlehnung an die Granger-Kausalität definiert er diverse „Kausalitäts-Maße“ in multivariat bedingten Volatilitäten. Die rasante Entwicklung auf dem Gebiet der GARCH-Modellierung lässt daher auf Antworten zu den genannten neueren Forderungen an die Modellierung von Zeitreihen hoffen.

Allerdings muss hierbei kritisch angemerkt werden, dass die Fundierung theoretischer Eigenschaften der GARCH-Modelle (vor allem auf dem Gebiet der multivariaten Spezifizierung) häufig nur schwer dem Fortschritt der empirischen Anwendung folgen kann. Es besteht kein Zweifel, die empirische Motivation multivariater GARCH-Modell gut zu heißen, doch Regularitätsbedingungen hinsichtlich strikter Stationarität oder Ergodizität der Prozesse, notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz (besonders höherer) Momente, Bedingungen für eine konsistente Schätzung und asymptotische Verteilungen von GARCH-Parametern sowie die genauen Verteilungen einzelner (multivariater) Teststatistiken sollten nicht vernachlässigt werden. Generell lässt sich sagen, dass die Analyse und Modellierung bedingter Erwartungswerte im Vergleich zu den bedingten zweiten Momenten deutlich vorangeschritten ist. Auch Diagnoseverfahren und die Bestimmung von Prognosefähigkeiten einzelner Modelle sowie eine Persistenzanalyse von

Schocks sind für univariate GARCH-Spezifikationen relativ ausgeprägt. Bei multivariaten Modellen scheint dagegen noch ein Nachholbedarf zu bestehen, zumal bereits begonnen wird, einige multivariate GARCH-Modelle in ökonometrischen Standardpaketen zu implementieren. Ausnahmen zu den genannten Lücken theoretischer Fundierung multivariater GARCH-Modelle mögen unter anderem die Arbeiten von Comte und Liebermann (2003), Iglesias und Phillips (2003), Ling und McAleer (2003), Hafner (2001), Li et al. (2001), Jeantheau (1998), Ling und Li (1997) oder Bauwens und Vandeuren (1995) bzw. die Arbeiten der neueren multivariaten GARCH-Modelle (Engle und Sheppard (2001), Tse und Tsui (2001) und Ledoit et al. (2002)) bilden. Doch beziehen sich diese Arbeiten nur auf spezielle, teilweise wenig verbreitete GARCH-Modelle und/oder behandeln nur Teilaspekte der theoretischen Grundlagen multivariater GARCH-Prozesse.

Aus wirtschaftstheoretischer Sicht stellen die ausgeprägten (multivariaten) GARCH-Spezifikationen eine ökonometrische Art und Weise dar, statistische Eigenschaften von Finanzmarktdaten bequem zu modellieren. Mögliche wirtschaftswissenschaftliche Erklärungsansätze bestehen in einer zeitlichen Abhängigkeit komplexer Marktmechanismen bzw. daraus resultierender Transaktionspreise oder signifikanter exogener, die Varianz der Daten beeinflussender Makrofaktoren. Dennoch besteht gerade auf dem Gebiet der Wirtschaftstheorie weiterer Bedarf an erhöhter Forschungstätigkeit, um etwa Gleichgewichtsmodelle zu formulieren und zu identifizieren, die die empirische Spezifikation der beobachteten Heteroskedastizität aus ökonomischer Sicht rechtfertigen.

Literaturverzeichnis

- Alexander, C. (2001):** Orthogonal GARCH, in: Mastering Risk, (hrsg. v.) C. Alexander, Vol. 2, Prentice Hall, Englewood Cliffs (N.J.), S. 21-38.
- Andersen, T.G., Bollerslev, T., Lange, S. (1999):** Forecasting financial market volatility: Sample frequency vis-à-vis forecast horizon, in: Journal of Empirical Finance, Vol. 6, S. 457-477.
- Andersen, T.G., Bollerslev, T., Diebold, F.X., Labys, P. (2001):** The Distribution of Realized Exchange Rate Volatility, in: Journal of the American Statistical Association, Vol. 96, No. 453, S. 42-55.
- Artis, M.J., Taylor, M.P. (1994):** The Stabilizing Effect of the ERM on Exchange Rates and Interest Rates, in: IMF Staff Papers, Vol. 41, No. 1, S. 123-148.
- Attanasio, O.P. (1991):** Risk, Time-Varying Second Moments and Market Efficiency, in: The Review of Economic Studies, Vol. 58, Issue 3, S. 479-494.
- Backhaus, K., Erichson, B., Plinke, W., Weiber, R. (2000):** Multivariate Analysemethoden; Eine Anwendungs orientierte Einführung, 9. Auflage, Springer-Verlag, Berlin.
- Bauer, C., Herz, B. (2001):** Noise, Exchange Rate Trend and Volatility: Theory and Empirical Evidence, Working Paper, University of Bayreuth.
- Baur, D. (2002):** The Persistence and Asymmetry of Time-Varying Correlations, Tübinger Diskussionsbeitrag No. 232.

- Bauwens, L., Vandeuren, J.P. (1995):** On the Weak Consistency of the Quasi-Maximum Likelihood Estimator in VAR Models with BEKK-GARCH(1,1) Errors, Core Discussion Paper 1995/38.
- Bauwens, L., Laurent, S. (2002):** A new class of multivariate skew densities, with application, Core Discussion Paper 2002/20.
- Bauwens, L., Laurent, S., Rombouts, J.V.K. (2003):** Multivariate GARCH-Models: A Survey, Core Discussion Paper 2003/31.
- Baxter, M., Stockman, A.C. (1989):** Business Cycles and the Exchange-Rate Regime - Some International Evidence, in: Journal of Monetary Economics, Vol. 23, S. 377-400.
- Bera, A.K., Higgins, M.L. (1993):** ARCH Models: Properties, Estimation and Testing, in: Journal of Economic Surveys, Vol. 7, No. 4, S. 304-366.
- Bera, A.K., Kim, S. (2002):** Testing constancy of correlation and other specification of the BGARCH model with an application to international equity returns, in: Journal of Empirical Finance, Vol. 9, S. 171-195.
- Berndt, E.K., Hall, B.H., Hall, R.E., Hausman, J.A. (1974):** Estimation and Inference in nonlinear structural Models, in: Annals of Economic and Social Measurement, Vol. 3, No. 4, S. 653-665.
- Black, F. (1969):** Studies of Stock Price Volatility Chances, in: Proceedings of the American Statistical Association, Business and Economic Statistics Section, S. 177-181.
- Bollerslev, T. (1986):** Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, in: Journal of Econometrics, Vol. 31, S. 307-327.
- Bollerslev, T. (1990):** Modelling the Coherence in short-run nominal Exchange Rates: a multivariate generalized ARCH-Model, in: Review of Economics and Statistics, Vol 72, S. 498-505.
- Bollerslev, T., Wooldridge, J.M. (1992):** Quasi-Maximum Likelihood Estimation and Inference in dynamic Models with time-varying Covariances, in: Econometric Reviews, Vol. 11, No. 2, S. 143-172.

- Bollerslev, T., Engle, R.F. (1993):** Common Persistence in Conditional Variances, in: *Econometrica*, Vol. 61, 167-186.
- Bollerslev, T., Engle, R.F., Wooldridge, J.M. (1988):** A Capital Asset Pricing model with Time-Varying Covariances, in: *The Journal of Political Economy*, Vol. 96, Issue 1, S. 116-131.
- Bollerslev, T., Chou, R.Y., Kroner, K.F. (1992):** ARCH modeling in finance, in: *Journal of Econometrics*, Vol. 52, S. 5-59.
- Bollerslev, T., Engle, R.F., Nelson, D. (1994):** ARCH Models, in: *Handbook of Econometrics*, (hrsg. v.) Engle, R., McFadden D., North Holland Press, Amsterdam, S. 2959-3038.
- Box, G.E.P, Jenkins, G.M., Reinsel, G.C. (1994):** *Time Series Analysis - Forecasting and Control*, 3. Auflage, Prentice Hall, Englewood Cliffs (N.J.).
- Braun, P.A., Nelson, D.B., Sunier, A.M. (1995):** Good News, Bad News, Volatility, and Betas, in: *The Journal of Finance*, Vol. 50, No. 5, S. 1575-1603.
- Brooks, C. (2002):** *Introductory Econometrics in Finance*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Brooks, C., Burke, S.P., Persaud, G. (2003):** *Multivariate GARCH Models: Software Choice and Estimation Issues*, ISMA Centre Discussion Papers in Finance 2003-07.
- Buiter, W.H. (2000):** *Optimal Currency Areas: Why Does the Exchange Rate Regime Matter?*, Center for Economic Policy Research Discussion Paper No. 2366.
- Campbell, J.Y., Lo, A.W., MacKinlay, A.C. (1997):** *The Econometrics of Financial Markets*, Princeton University Press, Princeton (N.J.).
- Chib, S., Nardari, F., Shephard, N. (2002):** *Analysis of high dimensional multivariate Stochastic Volatility Models*, Working Paper, Washington University St. Louis.
- Choi, P. (2002):** *Multivariate GARCH Model with an Asymmetric and Leptokurtic Conditional Distribution*, Working Paper, University of Texas at Austin.

- Comte, F., Lieberman, O. (2003):** Asymptotic theory for multivariate GARCH processes, in: Journal of Multivariate Analysis, Vol. 84, S. 61-84.
- Diebold, F.X., Nerlove, M. (1989):** The Dynamics of Exchange Rate Volatility: a multivariate Latent Factor ARCH Model, in: Journal of Applied Econometrics, Vol. 4, S. 1-21.
- Diebold, F.X., Hahn, J., Tay, A.S. (1999):** Multivariate Density Forecast Evaluation and Calibration in Financial Risk Management, in: International Economic Review, Vol. 39, S. 863-883.
- Ding, Z., Engle, R.F. (2001):** Large Scale Conditional Covariance Matrix Modeling, Estimation and Testing, Working Paper FIN-01-029, NYU Stern School of Business.
- Domowitz, I., Hakkio, C. (1985):** Conditional Variance and the Risk Premium in the Foreign Exchange Market, in: Journal of International Economics, Vol. 19, S. 47-66.
- Dornbusch, R. (1983):** Flexible exchange rates and interdependence, in: IMF Staff Papers, Vol. 30, S. 3-30.
- Drost, F.C., Klaassen, C.A.J. (1997):** Efficient estimation in semiparametric GARCH models, in: Journal of Econometrics, Vol. 81, S. 193-221.
- Efron, B., Tibshirani, R.J. (1993):** An Introduction to the Bootstrap - Monographs on Statistics and Applied Probability 57, Chapman and Hall, New York (N.Y.).
- Engle, R.F. (1982):** Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation, in: Econometrica, Vol. 50, S. 987-1008.
- Engle, R.F. (1995):** ARCH - Selected Readings, Oxford University Press, Oxford.
- Engle, R.F. (2000):** Dynamic Conditional Correlation - a simple class of multivariate GARCH Models, Discussion Paper 2000-09, University of California, San Diego.
- Engle, R.F. (2002):** New Frontiers for ARCH Models, in: Journal of Applied Econometrics, Vol. 17, S. 425-446.

- Engle, R.F., Granger, C.W.J. (1987):** Cointegration and Error Correction: Representation, Estimation and Testing, in: *Econometrica*, Vol. 55, S. 251-276.
- Engle, R.F., González-Rivera, G. (1991):** Semiparametric ARCH Models, in: *Journal of Business and Economic Statistics*, Vol. 9, No. 4, S. 345-359.
- Engle R.F., Lee G.G.J. (1993):** Long run volatility forecasting for individual stocks in a one factor model, University of California, Discussion Paper 93-30, University of California, San Diego.
- Engle, R.F., Kroner, K.F. (1995):** Multivariate simultaneous generalized ARCH, in: *Econometric Theory*, Vol. 11, S. 122-150.
- Engle, R.F., Mezrich, J. (1996):** GARCH for Groups, in: *Risk*, Vol. 9, No. 8, S. 36-40.
- Engle, R.F., Sheppard, K. (2001):** Theoretical and empirical properties of Dynamic Conditional Correlation multivariate GARCH, Discussion Paper 2001-15, University of California, San Diego.
- Engle, R.F., Granger, C.W.J., Kraft, D. (1984):** Combining competing Forecasts of Inflation using a bivariate ARCH Model, in: *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 8, S. 151-165.
- Engle, R.F., Lilien, D.M., Robins, R.P. (1987):** Estimating Time Varying Risk Premia in the Term Structure: The ARCH-M Model, in: *Econometrica*, Vol. 55, S. 391-407.
- Engle, R.F., Ng, V.K., Rothschild, M. (1990):** Asset Pricing with a Factor-ARCH Covariance Structure - Empirical Estimates for Treasury Bills, in: *Journal of Econometrics*, Vol. 45, S. 213-237.
- Fang, K., Kotz, S., Ng, K.W. (1990):** *Symmetric Multivariate and Related Distributions*, Chapman and Hall, New York (N.Y.).
- Fengler, M.R., Herwartz, H. (2002):** Multivariate Volatility Models, in: *Applied Quantitative Finance - Theory and Computational Tools*, (hrsg. v.) Härdle, W., Kleinow, T. Stahl, G., Springer-Verlag, Berlin, S. 221-237.

- Fiorentini, G., Sentana, E., Calzolari, G. (2002):** The Core of Conditionally Heteroscedastic Dynamic Regression Models with Student-t Innovations and an LM Test for Multivariate Normality, Working Paper N0007, CEMFI.
- Flood, R.P., Rose, A.K. (1995):** Fixing exchange rates - A virtual quest for fundamentals, in: Journal of Monetary Economics, Vol. 36, S. 3-37.
- Franses, P.H., van Dijk, D. (2000):** Nonlinear Time Series Models in Empirical Finance, Cambridge University Press, Cambridge.
- Fratianni, M., von Hagen, J. (1992):** The European Monetary System and European Monetary Union, Westview Press, Boulder (C.O.).
- Frenkel, J.A., Mussa, M.L. (1980):** The Efficiency of Foreign Exchange Markets and Measures of Turbulence, in: The American Economic Review, Vol. 70, No. 2, S. 374-381.
- Glosten, L.R., Jagannathan, R., Runkle, D. (1993):** On the Relation between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks, Journal of Finance, Vol. 48, S. 1778-1801.
- Gouriéroux, C. (1997):** ARCH Models and Financial Applications, Springer-Verlag, Berlin.
- Greene, W.H. (2000):** Econometric Analysis, 4. Auflage, Prentice Hall, Upper Saddle River (N.J.).
- Hafner, C.M. (2001):** Fourth Moments of multivariate GARCH Processes, Core Discussion Paper 2001/46.
- Hafner, C.M., Rombouts, J.V.K. (2003):** Semiparametric Multivariate GARCH Models, Core Discussion Paper 2003/03.
- Hamao, Y., Masulis, R.W., Ng, V. (1990):** Correlations in Price Changes and Volatility across International Stock Markets, in: The Review of Financial Studies, Vol. 3, Issue 2, S. 281-307.
- Hamilton, J.D. (1994):** Time Series Analysis, Princeton University Press, Princeton (N.J.).

- Harvey, A., Ruiz, E., Shephard, N. (1994):** Multivariate Stochastic Variance Models, in: The Review of Economic Studies, Vol. 61, Issue 2, S. 247-264.
- Hayashi, F. (2000):** Econometrics, Princeton University Press, Princeton (N.J.).
- Hosking, J.R.M. (1980):** The multivariate portmanteau statistic, in: Journal of the American Statistical Association, Vol. 75, S. 602-608.
- Hosking, J.R.M. (1981):** Lagrange-multiplier tests of multivariate time series models, in: Journal of the Royal Statistical Society - Series B, Vol. 43, S. 219-230.
- Hoti, S., Chan, F., McAleer, M. (2002):** Structure and Asymmetric Theory for Multivariate Asymmetric Volatility: Empirical Evidence for Country Risk Ratings, Working Paper, University of Western Australia.
- Iglesias, E.M., Phillips, G.D.A. (2003):** Multivariate ARCH Models: Finite Sample Properties of ML Estimators and an Application to an LM-Type Test, Working Paper, University of Exeter.
- Jeantheau, T. (1998):** Strong Consistency of Estimators for multivariate ARCH Models, in: Econometric Theory, Vol. 14, S. 70-86.
- Kelker, D. (1970):** Distribution Theory of Spherical Distributions and a Location-Scale Parameter Generalization, in: Sankhyā, The Indian Journal of Statistics - Series A, Vol. 32, Part 4, S. 419-430.
- Kim, J. (2000):** The relationship between the monetary regime and output volatility: a multivariate GARCH-M model of the Japanese experience, 1919-1996, in: Japan and the World Economy, Vol. 12, S. 49-69.
- Kim, Y., Chow, H.K. (2000):** Exchange Rate Variability and Financial Markets in East Asia, Working Paper, University of Singapore.
- King, M., Sentana, E., Wadhvani, S. (1994):** Volatility and Links between national Stock Markets, in: Econometrica, Vol. 62, S. 901-933.

- Kroner, K.F., Ng, V.K. (1998):** Modeling Asymmetric Comovements of Asset Returns, in: The Review of Financial Studies, Vol. 11, Issue 4, S. 817-844.
- Lamoureux, C.G., Lastrapes, W.D. (1990):** Persistence in Variance, Structural Change, and the GARCH Model, in: Journal of Business and Economic Statistics, Vol. 8, No. 2, S. 225-234.
- Ledoit, O., Santa-Clara, P., Wolf, M. (2002):** Flexible Multivariate GARCH Modeling With an Application to International Stock Markets, Working Paper, University of California, Los Angeles.
- Li, W.K., McLeod, A.I. (1981):** Distribution of the residual autocorrelations in multivariate ARMA time series models, in: Journal of the Royal Statistical Society - Series B, Vol. 43, S. 231-239.
- Li, W.K., Ling, S., Wong, H. (2001):** Estimation for partially nonstationary multivariate autoregressive models with conditional heteroscedasticity, in: Biometrika, Vol. 88, No. 4, S. 1135-1152.
- Li, W.K., Ling, S., McAleer, M. (2002):** Recent theoretical Results for Time Series Models with GARCH Errors, in: Journal of Economic Surveys, Vol. 16, No. 3, S. 245-269.
- Ling, S., Li, W.K. (1997):** Diagnostic Checking of nonlinear Time Series with multivariate ARCH Errors, in: Journal of Time Series Analysis, Vol. 18, No. 5, S. 447-464.
- Ling, S., McAleer, M. (2003):** Asymptotic Theory for a Vector ARMA-GARCH Model, in: Econometric Theory, Vol. 19, S. 278-308.
- Ljung, G.M., Box, G.E.P. (1978):** On a Measure of Lack of Fit in Time Series Models, in: Biometrika, Vol. 65, S. 297-303.
- Lucchetti, R. (2002):** Analytic Score for Multivariate GARCH Models, Working Paper, Dipartimento dei Economia Università di Ancona.
- Lütkepohl, H. (1996):** Handbook of Matrices, John Wiley and Sons, Chichester (N.Y.).

- Lütkepohl, H. (1997):** Statistische Modellierung von Volatilitäten, in: Allgemeines Statistisches Archiv, Vol. 81, S. 62-84.
- Lui, S., Polasek, W. (2000):** On Comparing Estimation Methods for VAR-ARCH Models, Working Paper, Universität Basel.
- Longin, F., Solnik, B. (1995):** Is the correlation in international equity returns constant: 1960-1990?, in: Journal of International Money and Finance, Vol. 14, No. 1, S. 3-26.
- Majer, H. (2001):** Moderne Makroökonomik - Ganzheitliche Sicht, R. Oldenbourg Verlag, München.
- Mandelbrot, B. (1963):** The Variation of Certain Speculative Prices, in: Journal of Business, Vol. 36, S. 394-419.
- Marston, R.C. (1985):** Stabilization Policies in open Economies, in: Handbook of International Economics, (hrsg. v.) Jones, R.W., Kenen, P.B., 2. Auflage, Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam, S. 859-916.
- McAleer, M., Oxley, L. (2002):** The Econometrics of Financial Time Series, in: Journal of Economic Surveys, Vol. 16, No. 3, S. 237-243.
- Nelson, D.B. (1991):** Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach, in: Econometrica, Vol. 59, S. 347-370.
- Nelson, D. B., Cao, C.Q. (1992):** Inequality constraints in the univariate GARCH model, in: Journal of Business and Economic Statistics, Vol. 10, S. 229-235.
- Newey, W. K., McFadden, d. (1994):** Large Sample Estimation and Hypothesis Testing, in: Handbook of Econometrics, (hrsg. v.) Engle, R., McFadden D., North Holland Press, Amsterdam, S. 2111-2245.
- Pagan, A. (1996):** The econometrics of financial markets, in: Journal of Empirical Finance, Vol. 3, S. 15-102.

- Palm, F.C. (1996):** GARCH Models of Volatility, in: Handbook of Statistics, (hrsg. v.) Maddala, G.S., Rao, C.R., 14. Auflage, Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam, S. 209-240.
- Papageorgiou, M. (1996):** Optimierung - Statistischem, dynamische, stochastische Verfahren für die Anwendung, 2. Auflage, R. Oldenbourg Verlag, München.
- Romano, J.P., Thombs, L.A. (1996):** Inference For Autocorrelations Under Weak Assumptions, in: Journal of the American Statistical Association, Vol. 91, Issue 434, S. 590-600.
- Said and Dickey (1984):** Testing for Unit Roots in Autoregressive Moving Average Models of Unknown Order, in: Biometrika, Vol. 71, S. 599-607.
- Schwert, G.W., Seguin, P.J. (1990):** Heteroskedasticity in Stock Returns, in: Journal of Finance, Vol. 45, No. 4, S. 1129-1155.
- Scott, D. (1992):** Multivariate Density estimation: theory, practice, and visualisation, John Wiley and Sons, Chichester (N.Y.).
- Shephard, N. (1996):** Statistical aspects of ARCH and stochastic volatility, in: Time Series Models in Econometrics, Finance and Other Fields (hrsg. v.) Cox, D.R., Hickey, D.V., Barndorff-Nielson, O.E., Chapman and Hall, New York (N.Y.), S. 1-67.
- Taylor, S.J. (1986):** Modelling Financial Time Series, John Wiley and Sons, Chichester (N.Y.).
- Taylor, S.J. (1994):** Modeling Stochastic Volatility: a Review and comparative Study, in: Mathematical Finance, Vol. 4, No. 2, S. 183-204.
- Tsay, R.S. (2002):** Analysis of Financial Time Series - Financial Econometrics, John Wiley and Sons, Chichester (N.Y.).
- Tse, Y.K. (2000):** A test for constant correlations in a multivariate GARCH model, in: Journal of Econometrics, Vol. 98, S. 107-127.
- Tse, Y.K., Tsui, A.K.C. (2001):** A Multivariate GARCH Model with Time-Varying Correlations, Working Paper, University of Singapore.

van der Weide, R. (2002): GO-GARCH: A multivariate generalized orthogonal GARCH Model, in: Journal of Applied Econometrics, Vol. 17, S. 549-564.

White, H. (1982): Maximum Likelihood Estimation of Misspecified Models, in: Econometrica, Vol. 50, S. 1-25.

Zellner, A. (1962): An Efficient Method of Estimating Seemingly Unrelated Regressions and Tests for Aggregation Bias, in: Journal of the American Statistical Association, Vol. 57, S. 348-368.

Anhang

Datenmaterial

Datenquelle: Thomson Financial Datastream

<i>Beschreibung</i>	<i>Periode</i>	<i>Frequenz</i>	<i>Mnemonic</i>
EUR/USD-Wechselkurs	01.01.1999 - 30.05.2003	taglich	USECBSP
Kurzfristiger Zins: Euribor (one week offered rate)	01.01.1999 - 30.05.2003	täglich	EIBOR1W
Aktienindex, Euroland umfassend: Eurostoxx 50	01.01.1999 - 30.05.2003	täglich	DJES50I

Matlab-Prozeduren

Kerndichteschätzung