

LINKS UND LINKDIAGRAMME  
ALS COBORDISMEN-KATEGORIEN  
UND DEREN BEDEUTUNG FÜR  
KHOVANOV-FLOER-THEORIEN

DISSERTATION

der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Eberhard Karls Universität Tübingen

zur Erlangung des Grades eines

Doktors der Naturwissenschaften

(Dr. rer. nat.)

vorgelegt von

W. JONATHAN WALZ

aus Stuttgart

TÜBINGEN

2021

Gedruckt mit Genehmigung der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen  
Fakultät der Eberhard Karls Universität Tübingen.

Tag der mündlichen Qualifikation: 21.06.2022

Dekan:	Prof. Dr. Thilo Stehle
1. Berichterstatter:	Prof. Dr. Frank Loose
2. Berichterstatter:	Prof. Dr. Christoph Bohle

# Prolog

*Knoten* sind Objekte, die den meisten Menschen immer wieder in ihrem Alltag begegnen. Man denkt dabei zumeist an ein Seil oder ein Stück Schnur, welches auf irgend eine Art in sich verschlungen ist. Manche Knoten sorgen für Verärgerung, andere wurden gezielt geknüpft, um einen Zweck zu erfüllen.

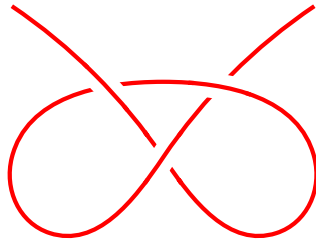
Ein wesentlicher Treiber für die bis heute andauernde wissenschaftliche Untersuchung von Knoten ist in der frühen physikalischen Chemie zu finden:

In der Anfangszeit der Erforschung der Struktur von Atomen in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts stellte Lord Kelvin die Hypothese auf, dass Atome durch in sich geschlossene Wirbel (also Knoten) im Äther gegeben seien und Atome verschiedener Elemente dadurch zu unterscheiden seien, dass deren Wirbel auf unterschiedliche Art in sich selbst verschlungen seien (diese Theorie wird auch als *vortex theory of the atom* bezeichnet, vergleiche [10]). Davon angeregt versuchte Kelvins Kollege Peter Tait, die verschiedenen Knoten mathematisch zu klassifizieren, in der Hoffnung, damit eine systematische Ordnung der chemischen Elemente zu gewinnen.

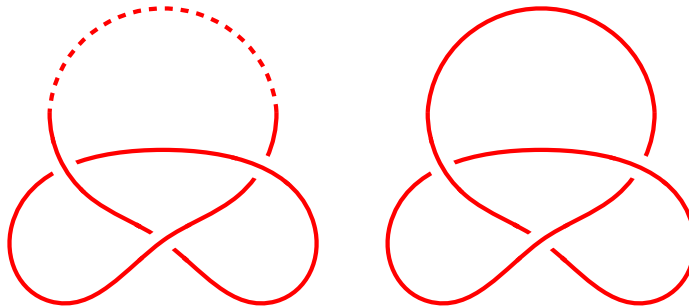
Dies begründete den Beginn der *Knotentheorie* als Teildisziplin der sich damals rasch entwickelnden Topologie. Ziel der Knotentheorie ist es bis heute, Knoten und auch Verknotungen mehrerer Komponenten (sogenannte *Verschlingungen* oder auch *Links*) bis auf *Deformation* innerhalb des umgebenden Raumes (man spricht hierbei auch von *Isotopien*) zu klassifizieren.

Die Darstellung von Knoten eint die Knotentheorie mit der *Knotenkunde*, welche eher an praktischen Anleitungen zum Binden von Knoten interessiert ist:

Möchte man einen Knoten z.B. in einem Buch abbilden, so hat man keinen dreidimensionalen Raum, sondern eben ein nur zweidimensionales Blatt Papier zur Verfügung. Man zeichnet daher Gebilde wie



oder in der Knotentheorie eher in geschlossener Form (im ersten Bild durch Verbinden der Enden angedeutet),



welche als *Knotendiagramme* bezeichnet werden.

Intuitiv ist dabei schnell klar, dass die ausgelassenen Abschnitte einer solchen Kurve als „in der dritten Dimension weiter unten verlaufende Stränge“ zu interpretieren sind. Die formale mathematische Definition dieser Diagramme beruht entweder auf Bildern von Knoten unter Projektionen vom drei- in den zweidimensionalen Raum oder auf der Betrachtung stückweise linearer Kurven, was eine deutliche Abweichung von den meist *glatt* gezeichneten Bildern darstellt.

Im ersten Kapitel meiner Arbeit stelle ich einen neuen Formalismus vor, welcher es einerseits ermöglicht, Knoten- und Linkdiagramme unabhängig von den Definitionen von Knoten und Links einzuführen. Andererseits erlaubt dieser, die Diagramme so eng wie nur irgend möglich mit den gezeichneten Knoten-Bildern zu verknüpfen. Ich zeige außerdem, dass man die durch diesen Formalismus definierten Linkdiagramme mit den durch die gewöhnliche Definition vermöge Projektionen gewonnenen Diagrammen identifizieren kann. Zudem stelle ich den Begriff der *Linktyp-Invarianten* vor, welche als mathematische Werkzeuge zur Klassifikation von Knoten und Links betrachtet werden können. Das Beispiel des berühmten *Jones-Polynoms*, welches sich über die sogenannte *Kauffman-Klammer* definieren lässt, schließt dieses Kapitel ab.

Im zweiten Kapitel lege ich dar, wie man eine *Kategorie der Links* **Link** und eine *Kategorie der Linkdiagramme* **Diag** gewinnt. Beim Morphismenbegriff dieser Kategorien spielen

*Cobordismen* eine wesentliche Rolle. Daher spricht man manchmal auch von *Cobordismen-Kategorien*. Wenngleich ich mich bei der formalen Definition der Morphismen in **Diag** auf den üblichen Zugang durch Projektionen berufe (siehe z.B. [9]), gebe ich zumindest eine Idee, wie man auch für die Morphismen von **Diag** eine (von Projektionen) unabhängige Definition geben könnte. Zudem setze ich mich näher mit den Kategorien **Link** und **Diag** auseinander. Dies ermöglicht die Etablierung einer *Äquivalenz der Kategorien Link* und **Diag**, wie auch in Proposition 2.14 in [2] zu finden.

Die ersten beiden Kapitel bereiten das Feld, um die *Khovanov-Homologie* für Linkdiagramme als eine *funktorielle* Linktypinvariante zu konstruieren, genauer als Funktor

$$Kh : \mathbf{Diag} \rightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$$

von der Kategorie der Linkdiagramme in die Kategorie der (bigraduierten) Vektorräume über einem Körper  $\mathbb{K}$ . Diese Konstruktion wird im dritten Kapitel vorgestellt. Im Kern der Konstruktion steht die Verwendung einer zweidimensionalen *topologischen Quantenfeldtheorie* (kurz: TQFT). Eine solche TQFT ist ein Funktor zwischen *monoidalen Kategorien*, daher beginnt das Kapitel mit einer Abhandlung über monoidale Kategorien und zweidimensionale topologische Quantenfeldtheorien. Nach der Vorstellung der formalen Konstruktion der Khovanov-Homologie zeige ich auf, dass diese eine Verallgemeinerung des Jones-Polynoms darstellt. Genauer gebe ich einen detaillierten Einblick, weshalb die Khovanov-Homologie als *Kategorifizierung* des Jones-Polynoms betrachtet wird. Vergleiche dazu Khovanovs Originalarbeit [12] über diese von ihm eingeführte homologische Linktypinvariante oder auch die Arbeit von Bar-Natan [6].

Die Äquivalenz der Kategorien **Link** und **Diag** bietet die Möglichkeit, die Khovanov-Homologie zu einem Funktor

$$Kh : \mathbf{Link} \rightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}},$$

zu erweitern. Ich beschreibe das Vorgehen dabei (nach dem Vorbild von Abschnitt 2.3 aus [2]).

Große Beachtung unter Mathematikerinnen und Mathematikern erlangte die Khovanov-Homologie unter anderem wegen einer Vielzahl an Korrelationen mit anderen (meist Floer-) Homologietheorien (siehe z.B. [15] und [20]). Solche Korrelationen drücken sich häufig durch *Spektralsequenzen filtrierter Co-Kettenkomplexe* aus. Daher möchte ich im vierten Kapitel die Kategorie **Spect** der Spektralsequenzen nebst der für diese Arbeit bedeutsamen Begriffe im Kontext solcher Spektralsequenzen vorstellen. Eine kurze Zusammenfassung über

Floer-Homologien findet sich im Anhang.

Im Jahr 2015 zeigten J. Baldwin, M. Hedden und A. Lobb, dass sich viele der Korrelationen der Khovanov-Homologie mit anderen Homologien durch ein gemeinsames Konzept, sogenannte *Khovanov-Floer-Theorien*, vereinheitlichen lassen (siehe [2]). Die wesentlichen Konstruktionen und Resultate dieser Arbeit stelle ich im fünften Kapitel meiner Arbeit vor.

Im abschließenden sechsten Kapitel gebe ich einen Eindruck, wie einige der Khovanov-Floer-Theorien die Entwicklungen der Knotentheorie in den letzten Jahren geprägt haben.

Kronheimer und Mrowka bewiesen im Jahr 2010 den spektakulären Satz, dass die Khovanov-Homologie den Unknoten detektiert (siehe [15]). Die zentrale Rolle beim Beweis nimmt eine Spektralsequenz ein, von der man heute weiß (siehe Proposition 5.2 in [2]), dass diese Spektralsequenz eine Khovanov-Floer-Theorie darstellt. Im ersten Teil des sechsten Kapitels erkläre ich die Idee des Beweises von Kronheimer und Mrowka.

Dror Bar-Natan stellt in seiner Arbeit [7] (genauer in Abschnitt 9.3) eine leichte Variation der TQFT vor, welche Khovanov für die Konstruktion seiner Homologie nutzte. Die Variation von Bar-Natan gibt einen filtrierten Co-Kettenkomplex, die sogenannte *filtrierte Bar-Natan-Theorie*, von der ich im zweiten Teil des Kapitels zeige (Satz 6.11), dass sie eine Khovanov-Floer-Theorie liefert. Dieses Resultat ist insofern bemerkenswert, da es einen neuen, einfacheren Beweis vervollständigt, dass die sogenannte *Rasmussen-Invariante* eine Knotentyp-Invariante ist. Mit Hilfe der Rasmussen-Invariante wurden in den letzten Jahren einige interessante Probleme der Knotentheorie gelöst, unter anderem bewies Lisa Piccirillo im Jahr 2018 (siehe [21]), dass der Conway-Knoten kein *glatter Scheibenknoten* ist – ein bis dahin etwa 50 Jahre lang ungelöstes und viel beachtetes Problem der Knotentheorie.

Bevor nun die eigentliche Arbeit beginnt, sei nochmals ein Blick auf die Verbindung der Knotentheorie mit der Chemie geworfen: Wenngleich die ursprüngliche These von Kelvin und Tait über den Aufbau der Atome in den darauffolgenden Jahren wissenschaftlich widerlegt wurde, entwickelte sich die Knotentheorie und erfreute sich auch ohne die zunächst angedachte Anwendung großer Beliebtheit. Man darf es daher gerne als einen schelmhaften Schwenk der wissenschaftlichen Geschichte auffassen, dass die Knotentheorie in den letzten Jahren zunehmend Anwendung in der Chemie findet, zum Beispiel bei der Untersuchung höherer molekularer Strukturen oder auch bei der Frage, wo ein Enzym einen DNA-Strang aufschneiden muss, damit dieser zwecks Reproduktion entwirrt werden kann (siehe [10]).

# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Knoten, Links und Diagramme</b>	<b>9</b>
<b>2. Cobordismen-Kategorien</b>	<b>33</b>
<b>3. Khovanov-Homologie</b>	<b>51</b>
<b>4. Spektralsequenzen</b>	<b>79</b>
<b>5. Khovanov-Floer-Theorien</b>	<b>101</b>
<b>6. Anwendungen</b>	<b>107</b>
6.1. Die Spektralsequenz von Kronheimer und Mrowka . . . . .	107
6.2. Die filtrierte Bar-Natan-Theorie . . . . .	108
<b>A. Floer-Homologie</b>	<b>117</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>125</b>





# 1. Knoten, Links und Diagramme

In diesem Kapitel soll eine mathematisch präzise Definition von glatten Knoten und Links gegeben werden. Die Frage, wann man zwei gegebene Knoten als äquivalent betrachtet, führt auf die Definition des Typs eines Knotens. Anstatt des Begriffs der Diffeomorphie spielen hier Isotopien des umgebenden Raumes die zentrale Rolle, denn bis auf Diffeomorphie sind Links (als kompakte eindimensionale Mannigfaltigkeiten) klassifiziert durch die Anzahl der Zusammenhangskomponenten und zwei Knoten (als Links bestehend aus nur einer Komponente) wären stets äquivalent.

Außerdem stelle ich eine neue formale Definition für Linkdiagramme vor, welche unabhängig von der Definition von Links ist. Ich lege dar, weshalb diese neue Definition eine enge Assoziation zu der in der Knotentheorie gebräuchlichen Darstellung von Linkdiagrammen ermöglicht. Die klassische Definition von Linkdiagrammen charakterisiert diese als Bilder von Links unter geeigneten Projektionen auf Ebenen. Ich führe den Beweis, dass jedes Linkdiagramm (im Sinne der neuen Definition) als Projektion eines Links zustande kommt und umgekehrt jede reguläre Projektion eines Links ein Linkdiagramm ergibt. Dies zeigt, dass die klassische und die neue Definition von Linkdiagrammen äquivalent sind.

Eine Diskussion von Linktypinvarianten im Allgemeinen und die Vorstellung des Jones-Polynoms im Speziellen runden das Kapitel ab.

Zu  $k \in \mathbb{N}_0$  sei mit  $k \cdot \mathbb{S}^1$  die  $k$ -fache topologische Summe von Kopien der eindimensionalen Sphäre  $\mathbb{S}^1$  bezeichnet. Dieser Raum trägt eine glatte Struktur, welche durch die Standardstruktur von  $\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{R}^2$  induziert wird. Es ist also  $k \cdot \mathbb{S}^1$  eine glatte, eindimensionale Mannigfaltigkeit mit  $k$  Zusammenhangskomponenten.

**Definition 1.1.** Sei  $Y$  eine dreidimensionale glatte Mannigfaltigkeit und  $k \in \mathbb{N}_0$ . Eine Teilmenge  $L \subseteq Y$  heißt *Link* (zu deutsch auch *Verschlingung*) mit  $k$  Komponenten in  $Y$ , falls es eine glatte Einbettung

$$\iota : k \cdot \mathbb{S}^1 \rightarrow Y$$

gibt, sodass  $\iota(k \cdot \mathbb{S}^1) = L$ . Eine glatte Einbettung meint hierbei eine glatte, injektive Immer-

## 1. Knoten, Links und Diagramme

sion.

Falls zu gegebenem  $L$  eine solche Einbettung existiert, so ist die Anzahl  $k$  der Komponenten für alle (weiteren) Einbettungen identisch. Es ist dann nämlich  $k$  gerade die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von  $L \subseteq Y$ . Im speziellen Fall  $k = 1$  nennt man  $L$  einen *Knoten in  $Y$* . In dieser Arbeit werde ich mich auf die Fälle  $Y = \mathbb{R}^3$  oder  $Y = \mathbb{S}^3$  beschränken.

**Bemerkung 1.2.** Man beachte, dass ein Link  $L \subseteq Y$  als Bild einer glatten Einbettung selbst die Struktur einer glatten, kompakten eindimensionalen Untermannigfaltigkeit trägt. Insbesondere ist  $L$  orientierbar und nach Wahl einer Orientierung auf  $L$  spricht man von einem *orientierten Link*. Zu jedem orientierten Link  $L$  lässt sich eine Einbettung  $\iota$  wählen, die bezüglich der Orientierung von  $L$  und der Standard-Orientierung auf  $k \cdot \mathbb{S}^1$  orientierungserhaltend ist.

Häufig interessiert man sich nicht so sehr für konkrete Links bzw. Knoten, sondern eher für Klassen von Links bzw. Knoten, welche sich glatt ineinander überführen lassen. Dies wird in folgenden Definitionen präzisiert:

**Definition 1.3.** Sei  $Y$  eine glatte Mannigfaltigkeit.

- (a) Sei zudem  $X$  eine glatte Mannigfaltigkeit und  $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$  seien zwei glatte Abbildungen. Dann heißen  $f_0$  und  $f_1$  *Umgebungs-isotop*, falls es eine glatte Abbildung

$$h : Y \times [0, 1] \rightarrow Y$$

gibt, sodass für jedes  $t \in I$  die Abbildung  $h_t : Y \rightarrow Y$  mit  $h_t(y) = h(y, t)$  ein Diffeomorphismus ist und zudem  $h_0 = \text{id}_Y$  und  $f_1 = h_1 \circ f_0$  gilt. Ein solches  $h$  nennt man *Umgebungs-Isotopie von  $f_0$  nach  $f_1$* .

- (b) Seien  $L_0, L_1 \subseteq Y$  Links. Falls eine glatte Abbildung  $h : Y \times [0, 1] \rightarrow Y$  existiert, sodass für jedes  $t \in I$  die Abbildung  $h_t : Y \rightarrow Y$  mit  $h_t(y) = h(y, t)$  ein Diffeomorphismus ist und zudem  $h_0 = \text{id}_Y$  und  $h_1(L_0) = L_1$  gilt, so nennt man  $h$  eine *Umgebungs-Isotopie von  $L_0$  nach  $L_1$* .

**Bemerkung 1.4.** (a) Die Abbildungsschar  $(h_t \circ f_0)_{t \in I}$  gibt für eine Umgebungs-Isotopie  $h$  zwischen Abbildungen  $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$  insbesondere eine Homotopie zwischen den Abbildungen  $f_0$  und  $f_1$ . Da von jedem  $h_t$  auch gefordert wird, ein Diffeomorphismus zu sein, übertragen sich Eigenschaften wie z.B. Injektivität oder Immersivität von  $f_0$  auf alle  $f_t := h_t \circ f_0$  (für  $t \in I$ ). Daraus folgt unter anderem, dass zwei Abbildungen nur umgebungs-isotop sein können, wenn beide solche Eigenschaften teilen.

- (b) Seien  $L_0$  und  $L_1$  Links in  $Y$  und  $\iota_0 : k \cdot \mathbb{S}^1 \rightarrow Y$  eine glatte Einbettung für  $L_0$ . Sei weiter  $h$  eine Umgebungs-Isotopie von  $L_0$  nach  $L_1$ . Dann ist für jedes  $t \in I$  die Abbildung

$$\iota_t := h_t \circ \iota_0 : k \cdot \mathbb{S}^1 \rightarrow Y$$

eine glatte Einbettung, denn Glattheit, Injektivität und Immersivität bleiben bei Verkettung mit einem Diffeomorphismus erhalten. Wegen

$$\iota_1(k \cdot \mathbb{S}^1) = h_1(\iota_0(k \cdot \mathbb{S}^1)) = h_1(L_0) = L_1$$

ist dann  $\iota_1$  eine glatte Einbettung für  $L_1$  und allgemein für jedes  $t \in I$  die Abbildung  $\iota_t$  eine glatte Einbettung für

$$L_t := \iota_t(k \cdot \mathbb{S}^1) = h_t(L_0).$$

Daher trägt  $L_t$  für jedes  $t \in I$  die Struktur eines Links mit  $k$  Komponenten in  $Y$ . Insbesondere ist die Anzahl der Komponenten eines Links eine Größe, die sich unter Umgebungs-Isotopie nicht ändert.

- (c) Die beiden Definitionen für Umgebungs-Isotopie stehen also in folgender Beziehung zueinander: Sind  $L_0$  und  $L_1$  Links in  $Y$  und  $\iota_0 : k \cdot \mathbb{S}^1 \rightarrow Y$  eine glatte Einbettung für  $L_0$ , so induziert eine Umgebungs-Isotopie  $h$  von  $L_0$  nach  $L_1$  eine Einbettung  $\iota_1 := h_1 \circ \iota_0$  derart, dass  $h$  auch Umgebungs-Isotopie von  $\iota_0$  nach  $\iota_1$  ist.

**Bemerkung 1.5.** Der Begriff der Umgebungs-Isotopie erlaubt es nun auch, eine *disjunkte Vereinigung*  $\sqcup$  von Links zu definieren: Sind zwei Links  $L_0, L_1 \subseteq Y$  gegeben, so wählt man Isotopien welche  $L_0$  in  $L'_0$  und  $L_1$  in  $L'_1$  überführen, sodass  $L'_0$  und  $L'_1$  in disjunkten Bällen  $B_0, B_1 \subseteq Y$  enthalten sind. Man beachte, dass (für  $Y = \mathbb{R}^3$ ) bereits Translationen als Isotopien ausreichend sind, da Links kompakte eindimensionale Untermannigfaltigkeiten sind. Man setzt dann

$$L_0 \sqcup L_1 := L'_0 \cup L'_1$$

und sieht durch Verkettung der jeweiligen Einbettungen mit den finalen Diffeomorphismen der Isotopien, dass auch  $L_0 \sqcup L_1$  die Struktur eines Links trägt (mit  $k_0 + k_1$  Komponenten, falls  $k_i$  die Anzahl der Komponenten von  $L_i$  ist, für  $i = 0, 1$ ). Die Definition von  $\sqcup$  hängt nun zwar von der Wahl geeigneter Isotopien ab, es stellt sich aber heraus, dass der für die Knotentheorie wesentliche Gehalt unabhängig von diesen Wahlen ist (vergleiche die nun folgende Definition 1.6 und die anschließende Diskussion).

**Definition 1.6.** Seien  $Y$  eine glatte Mannigfaltigkeit und  $L_0, L_1 \subseteq Y$  Links.

## 1. Knoten, Links und Diagramme

- (a) Falls es eine Umgebungs-Isotopie  $h$  von  $L_0$  nach  $L_1$  gibt, so notiert man  $L_0 \simeq L_1$  und sagt, dass  $L_0$  und  $L_1$  vom selben Linktyp sind.
- (b) Falls  $L_0$  und  $L_1$  orientierte Links sind, so sagt man, dass  $L_0$  und  $L_1$  vom selben orientierten Linktyp sind, falls es eine Umgebungs-Isotopie  $h$  von  $L_0$  nach  $L_1$  gibt, welche eine (und dann jede) orientierungserhaltende Einbettung  $\iota_0$  für  $L_0$  in eine orientierungserhaltende Einbettung  $\iota_1 = h_1 \circ \iota_0$  für  $L_1$  überführt. Man notiert auch in diesem Fall

$$L_0 \simeq L_1.$$

Man kann zeigen, dass die Relation  $\simeq$  eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Links in  $Y$  ist: Dabei sind Reflexivität und auch Symmetrie von  $\simeq$  durch konstante bzw. rückwärts durchlaufene Isotopien leicht zu zeigen, bei der Transitivität ist allerdings etwas Vorsicht geboten: Beim Aneinanderfügen zweier Umgebungsisotopien muss man den Übergang ggf. „ausglätten“ (vergleiche Proposition 2.7).

Alternativ könnte man zunächst nur Umgebungsisotopien betrachten, die in offenen Umgebungen von  $Y \times \{0\}$  und von  $Y \times \{1\}$  konstant sind (und zeigen, dass es zu jeder Umgebungsisotopie eine modifizierte Variante gibt, die diese Eigenschaft erfüllt).

Eine Äquivalenzklasse unter  $\simeq$  wird nun im Einklang mit Definition 1.6 als (orientierter) Linktyp bezeichnet. In der Literatur werden häufig diese Klassen selbst als Links (bzw. Knoten) bezeichnet, teilweise gar simultan sowohl die Klassen als auch einzelne Repräsentanten jener. In dieser Arbeit soll die Unterscheidung präzise nach obigen Definitionen erfolgen.

Eine – vielleicht *die* – zentrale Frage der Knotentheorie ist es, festzustellen, ob zwei Knoten bzw. Links zum selben Linktyp gehören. Ist dies der Fall, so genügt die Angabe einer Umgebungs-Isotopie. Um zu zeigen, dass zwei Links nicht äquivalent sind, also keine solche Isotopie existiert, bedient man sich eines (im Besonderen in der Topologie) geläufigen Verfahrens:

Man versucht, sogenannte *Invarianten* für Links zu finden. Eine Invariante ist eine Zuordnung der Form

$$\Theta : \text{Link}(Y) \rightarrow M,$$

wobei  $\text{Link}(Y)$  die Menge der Links in  $Y$  ist und  $M$  eine Menge, sodass

$$L_0 \simeq L_1 \Rightarrow \Theta(L_0) = \Theta(L_1)$$

erfüllt ist. Haben dann zwei Links  $L_0, L_1$  unterschiedliche Ausprägungen einer solchen Invariante,  $\Theta(L_0) \neq \Theta(L_1)$  (man betrachte die Anzahl der Komponenten eines Links als einfaches Beispiel), so können sie nicht dem selben Linktyp angehören.

Die Kombinatorik bietet Hilfe bei der Konstruktion solcher Invarianten; zu diesem Zweck muss man den Links allerdings zunächst in geeigneter Weise kombinatorische Modelle zuordnen. Die geeigneten Objekte werden hierbei die *Linkdiagramme* sein, deren mathematische Beschreibung nun erfolgt.

**Definition 1.7.** Sei  $k \in \mathbb{N}_0$  und  $\varphi : k \cdot \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine glatte Immersion und ferner existiere eine endliche Menge  $\kappa = \kappa_u \dot{\cup} \kappa_o \subseteq k \cdot \mathbb{S}^1$  mit  $\kappa_u = \{z_1, \dots, z_n\}$ ,  $\kappa_o = \{z_{n+1}, \dots, z_{2n}\}$  für ein  $n \in \mathbb{N}_0$ , sodass

- (i)  $\varphi|_{k \cdot \mathbb{S}^1 \setminus \kappa_u}$  injektiv ist und
- (ii) für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$  gilt:  $\varphi(z_i) = \varphi(z_{n+i})$  und  $d\varphi_{z_i}(v)$  und  $d\varphi_{z_{n+i}}(w)$  sind linear unabhängig für Tangentialvektoren  $v \in T_{z_i}k \cdot \mathbb{S}^1 \setminus \{0\}$  und  $w \in T_{z_{n+i}}k \cdot \mathbb{S}^1 \setminus \{0\}$ .

Ein solches  $\varphi$  nennt man dann *Diagramm-Immersion*. Die ( $n$ -elementige) Menge  $\chi := \varphi(\kappa) = \varphi(\kappa_o) = \varphi(\kappa_u)$  heißt *Menge der Kreuzungspunkte von  $\varphi$* . Man beachte, dass die Menge  $\kappa$  der *Doppelpunkte von  $\varphi$*  bereits durch die Abbildung  $\varphi$  festliegt, nicht aber die *Doppelpunkt-Zerlegung  $\kappa = \kappa_u \dot{\cup} \kappa_o$* .

Eine Diagramm-Immersion ist also eine glatte Immersion, die injektiv ist außerhalb endlich vieler Doppelpunkte, deren Bilder – die Kreuzungspunkte – transversale Schnittpunkte der Immersion sind.

**Bemerkung 1.8.** Sei  $\varphi$  eine Diagramm-Immersion mit  $n$  Kreuzungspunkten und einer Doppelpunkt-Zerlegung  $\kappa = \kappa_u \dot{\cup} \kappa_o$ . Betrachte einen Kreuzungspunkt  $p \in \chi$  mit  $i \in \{1, \dots, n\}$  derjenigen Indexzahl, für welche  $\varphi^{-1}(p) = \{z_i, z_{n+i}\}$  gilt. Dann zeichnet die Doppelpunkt-Zerlegung einen der beiden Urbildpunkte von  $p$ , nämlich  $z_i \in \kappa_u$ , als *unteren Doppelpunkt*, und den anderen,  $z_{n+i} \in \kappa_o$ , als *oberen Doppelpunkt* aus. Durch Vertauschen der Zugehörigkeit dieser beiden Punkte, also  $z'_i := z_{n+i}$  und  $z'_{n+i} := z_i$  (und  $z'_j = z_j$  sonst) erhält man eine andere Doppelpunkt-Zerlegung  $\kappa = \kappa'_u \dot{\cup} \kappa'_o$ . Insgesamt gibt es für eine Diagramm-Immersion mit  $n$  Kreuzungspunkten also genau  $2^n$  mögliche Doppelpunkt-Zerlegungen.

**Definition 1.9.** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  eine kompakte Menge, sodass außerdem für jeden Punkt  $p \in D$  eine Umgebung  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  und eine glatte Karte  $\tau : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $\tau(p) = (0, 0)$  existiert, sodass

$$\tau(D \cap U) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = 0\}$$

oder

$$\tau(D \cap U) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 x_2 = 0\}$$

gilt. Eine solche Menge  $D$  nennen wir *Kringeldiagramm*.

1. Knoten, Links und Diagramme

**Bemerkung 1.10.** (a) Für einen Punkt  $p \in D$  kann es nicht Karten  $\tau_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  und  $\tau_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  geben, sodass einerseits

$$\tau_1(D \cap U_1) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = 0\}$$

und andererseits

$$\tau_2(D \cap U_2) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 x_2 = 0\}$$

gilt, denn ansonsten zerfiel die Menge

$$(D \cap U_1 \cap U_2) \setminus \{p\}$$

(lokal um  $p$ ) einerseits in genau zwei Zusammenhangskomponenten und andererseits in genau vier Zusammenhangskomponenten.

(b) Daher und aufgrund der Kompaktheit hat jedes Kringeldiagramm  $D$  nur endlich viele Punkte  $p \in D$ , für welche zentrierte Karten  $\tau : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $\tau(D \cap U) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 x_2 = 0\}$  existieren. Man bezeichnet einen solchen Punkt als *Kreuzungspunkt* von  $D$  und ferner mit  $\chi \subseteq D$  die endliche Menge der Kreuzungspunkte von  $D$ .

**Lemma 1.11.** Für jedes Kringeldiagramm  $D$  existieren eine (eindeutige) Zahl  $k \in \mathbb{N}_0$  und eine Diagramm-Immersion  $\varphi : k \cdot \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , sodass

$$\varphi(k \cdot \mathbb{S}^1) = D.$$

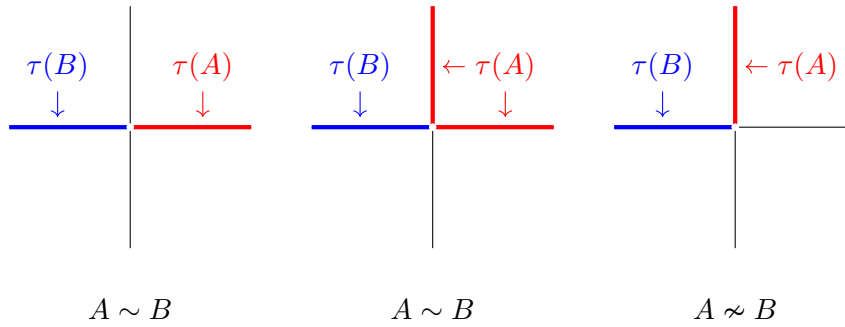
*Beweis.* Zunächst betrachtet man die Menge  $X$  der Zusammenhangskomponenten von  $D \setminus \chi$ . Da  $D$  aufgrund der Kompaktheit nur endlich viele Zusammenhangskomponenten hat und durch sukzessives Entfernen von Punkten  $p \in \chi$  aus  $D$  die Anzahl der Zusammenhangskomponenten sich jeweils höchstens um 3 erhöhen kann, ist auch nach Entfernen aller Punkte der endlichen Menge  $\chi$  aus  $D$  die Anzahl der Zusammenhangskomponenten und damit die Kardinalität der Menge  $X$  endlich. Jede Zusammenhangskomponente von  $D \setminus \chi$  trägt die Struktur einer zusammenhängenden eindimensionalen Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^2$ , welche entweder abgeschlossen und damit diffeomorph zur 1-Sphäre  $\mathbb{S}^1$  ist oder deren Abschluss in  $\mathbb{R}^2$  durch Vereinigung mit zwei (nicht notwendig verschiedenen) Punkten aus  $\chi$  entsteht. Wir definieren nun zunächst eine Relation  $\sim$  auf  $X$ : Sind  $A, B \in X$  und grenzen beide an den Kreuzungspunkt  $p \in \chi$  (mit Karte  $\tau : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  wie in 1.9) an, so setzen wir  $A \sim B$ , falls

$$\tau((A \cup B \cup \{p\})) \supseteq \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 0\}$$

oder

$$\tau((A \cup B \cup \{p\})) \supseteq \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = 0\}$$

gilt.



Wann immer sowohl  $A$  als auch  $B$  als zweiten angrenzenden Kreuzungspunkt einen anderen als  $p$  haben, wird die Inklusion  $\tau((A \cup B \cup \{p\})) \supseteq \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 0\}$  bzw.  $\tau((A \cup B \cup \{p\})) \supseteq \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = 0\}$  zu einer Gleichheit (wie im ersten Bild). In diesem Fall lässt sich die Vereinigung der glatten Untermannigfaltigkeiten  $A \cap U$  und  $B \cap U$  durch Hinzunahme des Punktes  $p$  zu einer zusammenhängenden, *glatten* Untermannigfaltigkeit fortsetzen.

Falls eine der beiden Komponenten (oder auch beide)  $p$  als doppelten berandenden Kreuzungspunkt haben, gilt stets  $A \sim B$ , weil das Bild dieser Komponente unter  $\tau$ , o.B.d.A.  $\tau(A)$ , dann zwei der vier an  $\tau(p) = (0, 0)$  angrenzenden Komponenten von  $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 x_2 = 0, (x_1, x_2) \neq 0\}$  beinhaltet und vereinigt mit  $\tau(B)$  dann insgesamt mindestens drei der vier Komponenten, wodurch zwingend eine der beiden Inklusionen erfüllt ist.

Ein eher globales Argument zeigt, dass nun eine der beiden Komponenten von  $\tau(A)$  in  $\{x_1 = 0\}$  und die andere in  $\{x_2 = 0\}$  liegt (wie im zweiten Bild dargestellt): Ansonsten schließt die geschlossene Kurve  $A \cup \{p\} \subseteq \mathbb{R}^2$  eine Fläche ein, innerhalb derer zwar eine natürliche Anzahl von Zusammenhangskomponenten  $C_i \in X$ , aber eine ungerade Anzahl an (ggf. doppelt gezählten) Randpunkten von  $\cup C_i$  liegen müsste. Daher trifft  $\tau(B)$  in  $(0, 0)$  auf eine der beiden Komponenten von  $\tau(A)$  geradlinig (und nicht orthogonal) und man hat auf der Vereinigung von  $B$  mit dem Urbild dieser Komponente von  $\tau(A)$  (und  $p$ ) eine Fortsetzung zu einer glatten Untermannigfaltigkeit.

Anschaulich gilt also  $A \sim B$ , falls man in  $p$  glatt von  $A$  zu  $B$  übergehen kann.

Die Relation  $\sim$  erzeugt auf der Menge  $X$  eine Äquivalenzrelation, deren Äquivalenzklassen diejenigen Teilmengen von  $X$  sind, die sich durch eine Abfolge von „glattem Überqueren von Kreuzungspunkten“ und „Durchlaufen der jeweiligen Elemente von  $X$ “ verbinden lassen. Die Anzahl der Äquivalenzklassen der von  $\sim$  erzeugten Äquivalenzrelation ist nun der geeignete Kandidat für die Zahl  $k$ . Die Endlichkeit der Menge  $X$  und die vorangegangene Überlegung stellt sicher, dass man die Elemente einer Äquivalenzklasse nach der Reihenfolge des Durchlaufens (bis auf Orientierung eindeutig) zyklisch anordnen kann. Ziel ist es nun, für jede

## 1. Knoten, Links und Diagramme

Äquivalenzklasse eine Parametrisierung durch  $\mathbb{S}^1$  zu konstruieren, d.h. eine Abbildung

$$\iota : 1 \cdot \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

deren Bild gerade die Vereinigung aller Elemente der Äquivalenzklasse und zusätzlich der Menge aller involvierter Kreuzungspunkte ist.

Jede einelementige Äquivalenzklasse ist dabei schnell erledigt: Hierbei muss es sich um eine Zusammenhangskomponente von  $D \setminus \chi$  handeln, welche diffeomorph zur 1-Sphäre  $\mathbb{S}^1$  ist und somit erhält man eine Parametrisierung, wie gewünscht. In mehrelementigen Äquivalenzklassen  $\bar{A} = \{A_0, \dots, A_l\}$  (für ein  $l \geq 1$ ) besteht jedes Element  $A_i$  aus einer zu  $\mathbb{R}^1$  diffeomorphen Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^2$ , deren Abschluss in  $\mathbb{R}^2$  durch Vereinigung mit zwei (nicht notwendig verschiedenen) Punkten  $p_i, p_{i+1} \in \chi$  entsteht. Die Untermannigfaltigkeit  $A_i$  lässt sich also durch das offene Intervall  $(i, i+1)$  parametrisieren, wobei die Nummerierung der  $A_i$  zyklisch nach Reihenfolge des Durchlaufens angeordnet sei (sodass also für  $i = 0, \dots, l-1$  die Untermannigfaltigkeiten  $A_i \sim A_{i+1}$  in einem Kreuzungspunkt glatt ineinander übergehen und zudem auch  $A_l \sim A_0$  glatt ineinander übergehen). Insgesamt erhält man eine Parametrisierung

$$\psi : \bigcup_{i=0, \dots, l} (i, i+1) \rightarrow \bigcup A_i \subseteq \mathbb{R}^2$$

für  $\bigcup A_i$ , welche sich in den Punkten  $i = 0, \dots, l+1$  durch den jeweiligen Kreuzungspunkt zu einer Parametrisierung

$$\tilde{\psi} : [0, l+1] \rightarrow \left( \bigcup A_i \right) \cup \chi_{\bar{A}}$$

(wo  $\chi_{\bar{A}} \subseteq \chi$  die Teilmenge derjenigen Kreuzungspunkte bezeichnet, welche im Abschluss von Komponenten  $A_i$  aus  $\bar{A}$  liegen) fortsetzen lässt.

Diese ist zwar im Allgemeinen in den Punkten  $i = 0, \dots, l+1$  nicht glatt, sondern nur stetig, aber da lokal um einen solchen Kreuzungspunkt  $\tilde{\psi}(i)$  ein Urbild einer Geraden  $\{x_2 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$  unter einer Karte  $\tau$  parametrisiert wird, kann man annehmen (das Argument beruht auf einer Teilung der Eins), dass die stückweise glatte Abbildung  $\tilde{\psi}$  auch in den Punkten, in denen zunächst nur Stetigkeit gilt, glatt ist.

Die Abbildung  $\tilde{\psi}$  erfüllt zudem  $\tilde{\psi}(0) = \tilde{\psi}(l+1)$  und induziert eine glatte Abbildung  $\psi_{\bar{A}}$  auf dem Quotienten

$$[0, l+1] / \{0, l+1\} \cong \mathbb{S}^1,$$

also insgesamt für jede Äquivalenzklasse  $\bar{A}$  eine Parametrisierung

$$\psi_{\bar{A}} : \mathbb{S}^1 \rightarrow \left( \bigcup A_i \right) \cup \chi_{\bar{A}}.$$



Bildet man die Summe dieser Abbildungen, erhält man eine glatte Abbildung von der  $k$ -fachen Summe der 1-Sphäre nach  $\mathbb{R}^2$ , deren Bild gerade  $D$  ist:

$$\varphi := \bigoplus \psi_{\bar{A}} : k \cdot \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

mit  $\varphi(k \cdot \mathbb{S}^1) = D$ . Es folgt nun, dass diese Abbildung  $\varphi$  tatsächlich eine Diagramm-Immersion für das Kringeldiagramm  $D$  ist: Die Kreuzungspunkte des Kringeldiagramms entsprechen dabei gerade den Kreuzungspunkten der Diagramm-Immersion und die Transversalität in den Kreuzungspunkten wird durch die Karten  $\tau$  sichergestellt.  $\square$

**Definition 1.12.** Sei  $D$  ein Kringeldiagramm und  $\varphi : k \cdot \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine Diagramm-Immersion für  $D$ . Dann nennt man die Zahl  $k \in \mathbb{N}_0$  die *Zahl der Komponenten von  $D$* .

**Bemerkung 1.13.** Umgekehrt gilt ebenso: Das Bild  $D = \varphi(k \cdot \mathbb{S}^1)$  einer Diagramm-Immersion  $\varphi$  ist stets ein Kringeldiagramm. Dabei wird die Menge  $\chi$  der Kreuzungspunkte von  $\varphi$  gerade zur Menge der Kreuzungspunkte des Kringeldiagramms  $D$ . Dies sieht man, da außerhalb der Menge der Kreuzungspunkte die Diagramm-Immersion  $\varphi$  eine Parametrisierung der eindimensionalen Untermannigfaltigkeit  $D \setminus \chi$  gibt und somit für  $p \in D \setminus \chi$  eine glatte Karte  $\tau : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  für eine Umgebung  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  um  $p$  mit  $\tau(D \cap U) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = 0\}$  induziert. Die Transversalität in einem Kreuzungspunkt  $p \in \chi$  erlaubt wiederum, eine Karte der zweiten Art zu konstruieren, d.h. eine Umgebung  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  um  $p$  und eine glatte Karte  $\tau : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $\tau(D \cap U) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 x_2 = 0\}$ .

Die Beziehung zwischen Kringeldiagrammen und Diagramm-Immersionen gibt nun die Möglichkeit, den Begriff der Orientierung auf Kringeldiagramme auszudehnen, obwohl diese nur außerhalb der Kreuzungspunkte eine (Unter-)Mannigfaltigkeitsstruktur tragen.

**Definition 1.14.** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  ein Kringeldiagramm und  $\chi \subseteq D$  die Menge der Kreuzungspunkte von  $D$  sowie  $X$  die Menge der Zusammenhangskomponenten von  $D \setminus \chi$ . Sei  $\sigma$  eine Orientierung auf  $D \setminus \chi$ , das entspricht einer Auswahl von Orientierungen  $(\sigma_A)_{A \in X}$  auf den Zusammenhangskomponenten von  $D \setminus \chi$ . Dann heißt  $\sigma$  eine *Orientierung des Kringeldiagramms  $D$* , falls sich die Orientierungen  $\sigma_A$  bei jedem glatten Übergang eines Kreuzungspunktes ineinander überführen lassen, also konkret für den Übergang von  $A$  zu  $B$  im Kreuzungspunkt  $p$  mit Karte  $\tau$  (o.B.d.A. im Fall  $\tau(A \cup B \cup \{p\}) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = 0\}$ ) die Orientierungen  $\sigma_A$  und  $\sigma_B$  auf der Mannigfaltigkeit  $A \cup B \cup \{p\}$  zu einer Orientierung  $\sigma_{A,B,p}$  fortgesetzt werden können.

**Kommentar 1.15.** Die Definition erweckt zunächst den Eindruck, dass es eine Bedingung an die Existenz von Orientierungen für Kringeldiagramme gibt. Dem ist aber nicht so: Ist

## 1. Knoten, Links und Diagramme

$D$  ein Kringeldiagramm und  $\varphi : k \cdot \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine Diagramm-Immersion für  $D$ , so induziert die Wahl einer Orientierung auf  $k \cdot \mathbb{S}^1$  eine Orientierung des Kringeldiagramms  $D$ , denn Diagramm-Immersionen parametrisieren gerade den glatten Übergang in Kreuzungspunkten. Andererseits kann man zeigen, dass jede Orientierung eines Kringeldiagramms auf diese Art zustande kommt. Daher ist die Anzahl der Orientierungen eines Kringeldiagramms  $D$  mit  $k$  Komponenten gegeben durch  $2^k$ .

Im Folgenden soll beschrieben werden, wie man den Kreuzungspunkten eines Kringeldiagramms durch eine Doppelpunktzerlegung einer Diagramm-Immersion zusätzliche Struktur verleihen kann.

**Definition 1.16.** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  ein Kringeldiagramm mit  $n$  durchnummerierten Kreuzungspunkten,  $K = \{p_1, \dots, p_n\}$ . Sei weiter  $\varphi : k \cdot \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine Diagramm-Immersion für  $D$ . Seien für alle Doppelpunkte  $z_j \in \kappa$  ( $j = 1, \dots, 2n$ ) paarweise disjunkte, zusammenhängende Umgebungen  $U_j \subseteq k \cdot \mathbb{S}^1$  gewählt. Zuletzt sei  $\kappa = \kappa_u \dot{\cup} \kappa_o$  eine Doppelpunkt-Zerlegung für  $\varphi$ . Sei o.B.d.A. die Indizierung von  $\kappa$  so gegeben, dass (wie zuvor) gilt:  $\kappa_u = \{z_1, \dots, z_n\}$  und  $\kappa_o = \{z_{n+1}, \dots, z_{2n}\}$  mit  $\varphi(z_i) = \varphi(z_{n+i}) = p_i$ , für  $i = 1, \dots, n$ .

Für jeden unteren Doppelpunkt  $z_i \in \kappa_u$  ( $i = 1, \dots, n$ ) setzt man nun

$$B_i := \varphi(U_i \setminus \{z_i\}) \subseteq D$$

und nennt die Familie  $(B_i)_{i=1}^n$  eine *Prä-Kreuzungsinformation* für  $D$ .

**Bemerkung 1.17.** (a) Für ein Kringeldiagramm  $D$  und eine Prä-Kreuzungsinformation  $(B_i)_{i=1}^n$  liegt im Abschluss jeder Menge  $B_i$  genau ein Kreuzungspunkt von  $D$ , nämlich der Bildpunkt  $\varphi(z_i)$  des Doppelpunktes  $z_i$  nach entsprechender Wahl einer Diagramm-Immersion  $\varphi$  und der Umgebungen  $U_i$ . Daher ist schon implizit durch Angabe einer Prä-Kreuzungsinformation eine *kohärente Nummerierung* der Kreuzungspunkte von  $D$  vorgegeben. Andersherum induziert eine Umnummerierung der Kreuzungspunkte eine geeignete Umnummerierung der betreffenden Prä-Kreuzungsinformation.

(b) Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  ein Kringeldiagramm,  $(B_i)_{i=1}^n$  eine Prä-Kreuzungsinformation und die Menge  $\chi$  der Kreuzungspunkte von  $D$  sei kohärent durchnummeriert,  $\chi = \{p_1, \dots, p_n\}$ . Sei ferner  $\varphi$  irgendeine Diagramm-Immersion für  $D$ . Für einen Kreuzungspunkt  $p_i$  mit Doppelpunkten  $z, z'$  bezüglich  $\varphi$  ist

$$\varphi^{-1}(B_i \dot{\cup} \{p_i\}) = \varphi^{-1}(B_i) \dot{\cup} \varphi^{-1}(\{p_i\}) = V_i \dot{\cup} \{z\} \dot{\cup} \{z'\}$$

mit  $V_i := \varphi^{-1}(B_i)$  und genau eine der beiden Mengen  $V_i \dot{\cup} \{z\}$  und  $V_i \dot{\cup} \{z'\}$  ist offen in  $k \cdot \mathbb{S}^1$  und damit eine offene Umgebung des Doppelpunktes  $z$  bzw.  $z'$ . Die Anga-

be eines Kringeldiagramms und einer Prä-Kreuzungsinformation legt daher für jede Diagramm-Immersion  $\varphi$  bereits eine Doppelpunkt-Zerlegung  $\kappa = \kappa_u \dot{\cup} \kappa_o$  fest, für welche die Urbilder der Mengen  $B_i$  unter  $\varphi$  punktierte Umgebungen der Doppelpunkte aus  $\kappa_u$  sind.

**Kommentar 1.18.** Eine Prä-Kreuzungsinformation für ein Kringeldiagramm  $D$  hängt zunächst von verschiedenen Wahlen ab: Man wählt eine Diagramm-Immersion, die Umgebungen  $U_j$  und eine Doppelpunkt-Zerlegung.

Dabei ist die Wahl der Diagramm-Immersion vernachlässigbar: Man kann zeigen, dass für Diagramm-Immersionen  $\varphi$  und  $\varphi'$  die Umgebungen  $U_j$  und die Doppelpunkt-Zerlegung so von  $\varphi$  zu  $\varphi'$  übertragen werden können, dass die resultierende Prä-Kreuzungsinformation  $(B_i)_{i=1}^n$  dieselbe ist (einige der benötigten Argumente wurden schon in 1.17 vorgestellt).

Die Abhängigkeit von der Doppelpunkt-Zerlegung ist sogar gewünscht, vgl. 1.17, denn Ziel ist es, in jedem Kreuzungspunkt  $p_i$  einen der beiden sich kreuzenden „Stränge“ als „unteren Strang“ (und den anderen damit als „oberen Strang“) auszuzeichnen. Die  $2^n$  Möglichkeiten, allen Kreuzungspunkten von  $D$  obere und untere Stränge zuzuweisen, sollen dann gerade in 1 : 1-Beziehung zu den  $2^n$  verschiedenen Doppelpunkt-Zerlegungen einer Diagramm-Immersion  $\varphi$  von  $D$  stehen.

Die Abhängigkeit von den Wahlen der Umgebungen  $U_j$  ist jedoch ein Problem. Für jede der  $2^n$  Doppelpunkt-Zerlegungen hat man (überabzählbar) unendlich viele Prä-Kreuzungsinformationen, eben je nachdem, „wie groß“ man die Umgebungen  $U_j$  um die unteren Doppelpunkte  $z_j$  gewählt hat. Damit eng verwandt ist das Problem, dass eine Prä-Kreuzungsinformation keine Chance hat, eine *lokale* Information der Kreuzungspunkte zu sein. Abhilfe soll folgende Konstruktion schaffen, welche z.B. vergleichbar ist mit der Konstruktion der Funktionskeime in der Differentialgeometrie.

**Definition 1.19.** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  ein Kringeldiagramm. Dann definiert man folgendermaßen eine Relation  $\sim$  auf der Menge der Prä-Kreuzungsinformationen für  $D$ : Seien  $(B_i)_{i=1}^n$  und  $(C_i)_{i=1}^n$  Prä-Kreuzungsinformationen und o.B.d.A. beide kohärent nummeriert zur selben Nummerierung  $\chi = \{p_1, \dots, p_n\}$  der Kreuzungspunkte von  $D$ . Es gelte

$$(B_i)_{i=1}^n \approx (C_i)_{i=1}^n$$

genau dann, wenn auch

$$(B_i \cap C_i)_{i=1}^n$$

eine Kreuzungsinformation für  $D$  ist.

**Lemma 1.20.** *Die Relation  $\approx$  ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Prä-Kreuzungsinformationen für  $D$ .*

*Beweis.* Reflexivität und Symmetrie sind erfüllt, weil Schnittbildung von Mengen  $A \cap A = A$  erfüllt und symmetrisch ist,  $A \cap B = B \cap A$ .

Zur Transitivität: Sei  $D$  ein Kringeldiagramm mit  $n$  durchnummerierten Kreuzungspunkten  $p_1, \dots, p_n$ . Seien  $(A_i)_{i=1}^n$ ,  $(B_i)_{i=1}^n$  und  $(C_i)_{i=1}^n$  kohärent nummerierte Prä-Kreuzungsinformationen für  $D$ , sodass auch  $(A_i \cap B_i)_{i=1}^n$  und  $(B_i \cap C_i)_{i=1}^n$  Prä-Kreuzungsinformationen sind. Zu zeigen ist, dass auch  $(A_i \cap C_i)_{i=1}^n$  eine Prä-Kreuzungsinformation ist. Sei dazu nun eine Diagramm-Immersion  $\varphi : k \cdot \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  fixiert und eine Doppelpunktzerlegung  $\kappa = \kappa_u \dot{\cup} \kappa_o$  mit  $\kappa_u = \{z_1, \dots, z_n\}$  und  $\kappa_o = \{z_{n+1}, \dots, z_{2n}\}$  für  $\varphi$  so gewählt, dass

$$V_i := \varphi^{-1}(B_i) \cup \{z_i\}$$

offene Umgebungen von  $z_i$  sind ( $i = 1, \dots, n$ ) (beachte, dass für jeden Kreuzungspunkt  $p_i$  das Urbild von  $B_i$  unter  $\varphi$  punktierte Umgebung einer der beiden Doppelpunkte über  $p_i$  ist, vgl. Bemerkung 1.17(b)). Da nun auch  $(A_i \cap B_i)_{i=1}^n$  Prä-Kreuzungsinformation ist, muss auch  $\varphi^{-1}(A_i)$  punktierte Umgebung des selben Doppelpunktes  $z_i$  über  $p_i$  (und nicht von  $z_{n+i}$ ) sein und mit

$$U_i := \varphi^{-1}(A_i) \cup \{z_i\}$$

ist dann gerade

$$A_i \cap B_i = \varphi((U_i \cap V_i) \setminus \{z_i\}).$$

Analog verfährt man für  $(C_i)_{i=1}^n$  und erhält zusammenhängende Umgebungen  $W_i$  der  $z_i$  mit

$$B_i \cap C_i = \varphi((V_i \cap W_i) \setminus \{z_i\}).$$

Setzt man nun für  $i = 1, \dots, n$

$$T_i := U_i \cap W_i,$$

so ist für jedes  $i \in \{1, \dots, n\}$  die Menge  $T_i$  eine zusammenhängende Umgebung von  $z_i$  und man erhält, dass

$$A_i \cap C_i = \varphi(T_i) \setminus \{z_i\}$$

tatsächlich auch eine Prä-Kreuzungsinformation ist (indem man für die Doppelpunkte aus  $\kappa_o = \{z_{n+1}, \dots, z_{2n}\}$  z.B. die Umgebungen  $T_{n+i} = U_{n+i}$  wählt ( $i = 1, \dots, n$ ), welche bereits aus der Prä-Kreuzungsinformation  $(A_i)_{i=1}^n$  hervorgehen).  $\square$

**Definition 1.21.** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  ein Kringeldiagramm und  $(B_i)_{i=1}^n$  eine Prä-Kreuzungsinformation für  $D$ . Dann heißt die Äquivalenzklasse

$$\xi = [(B_i)_{i=1}^n]$$

eine *Kreuzungsinformation* für  $D$ .

**Kommentar 1.22.** Eine Kreuzungsinformation  $\xi$  für ein Kringeldiagramm  $D$  behebt nun tatsächlich die angesprochenen Probleme. Ist  $\varphi$  eine Diagramm-Immersion für  $D$ , so liefert eine Verkleinerung der entsprechenden Doppelpunkt-Umgebungen  $U_i$  einer Prä-Kreuzungsinformation  $(B_i)_{i=1}^n$  eine äquivalente Prä-Kreuzungsinformation und damit folgt letztlich die Lokalität der Kreuzungsinformation  $[(B_i)_{i=1}^n]$  um die Kreuzungspunkte. Der Beweis, dass für eine fixierte Diagramm-Immersion  $\varphi$  die Kreuzungsinformationen für  $D$  in 1 : 1-Beziehung zu Doppelpunkt-Zerlegungen von  $\varphi$  stehen, wird mit ähnlichen Argumenten wie beim Beweis der Transitivität der Relation  $\approx$  geführt.

**Definition 1.23.** Ein Paar  $(D, \xi)$ , bestehend aus einem Kringeldiagramm  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  und einer Kreuzungsinformation  $\xi$ , nennt man *Linkdiagramm (in  $\mathbb{R}^2$ )*.

Häufig unterdrückt man die Kreuzungsinformation in der Notation und schreibt etwas unsauber nur  $D$  für ein Linkdiagramm  $(D, \xi)$ . Begriffe wie „zusammenhängend“ überträgt man auf Linkdiagramme  $(D, \xi)$ , indem man das Kringeldiagramm  $D$  als topologischen Raum  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  betrachtet.

Es sei an die Anzahl  $k$  der Komponenten eines Kringeldiagramms  $D$  erinnert. Man definiert die *Anzahl der Komponenten eines Linkdiagramms*  $(D, \xi)$  als Anzahl der Komponenten des Kringeldiagramms  $D$ . Man beachte, dass die Zahl der Komponenten eines Kringeldiagramms  $D$  nicht mit der Anzahl der Zusammenhangskomponenten von  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  übereinstimmen muss (ein Kringeldiagramm  $D$  hat aber stets mindestens so viele Komponenten wie  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  Zusammenhangskomponenten hat).

Nun soll der Zusammenhang zwischen Links und Linkdiagrammen geklärt werden. Die Verbindung liefert der Begriff der regulären Linkprojektion, welche anschaulich wiedergibt, dass ein Linkdiagramm aus einem Link entsteht, indem man den Raum  $\mathbb{R}^3$  auf eine Ebene  $E \subseteq \mathbb{R}^3$  projiziert.

**Definition 1.24.** Sei  $L \subseteq \mathbb{R}^3$  ein Link und  $E \subseteq \mathbb{R}^3$  ein zweidimensionaler Untervektorraum des euklidischen Raumes  $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ . Weiter sei  $\nu \in \mathbb{R}^3$  ein zu  $E$  orthonormaler Vektor und  $v_1, v_2 \in E$ , sodass  $(v_1, v_2, \nu)$  eine positiv orientierte Orthonormalbasis von  $\mathbb{R}^3$  ist. Die

## 1. Knoten, Links und Diagramme

Projektion

$$\text{pr}_\nu : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad x \mapsto (\langle x, v_1 \rangle, \langle x, v_2 \rangle)$$

heißt *reguläre Link-Projektion* für  $L$ , falls es eine endliche Menge  $K = K_o \dot{\cup} K_u \subseteq L$  und eine Bijektion  $\psi : K_o \rightarrow K_u$  gibt, sodass folgende Eigenschaften erfüllt sind:

- (i)  $\text{pr}_\nu|_{L \setminus K_u}$  ist injektiv
- (ii) für jedes  $p \in K_o$  gilt  $\text{pr}_\nu(p) = \text{pr}_\nu(\psi(p))$
- (iii) für jedes  $p \in K_o$  stehen  $D\text{pr}_\nu(T_p L)$  und  $D\text{pr}_\nu(T_{\psi(p)} L)$  transversal (d.h. spannen ganz  $\mathbb{R}^2$  auf)
- (iv) Für jeden Punkt  $p \in L$  gilt  $\nu \notin T_p L$
- (v) für jedes  $p \in K_o$  gilt  $\langle p, \nu \rangle > \langle \psi(p), \nu \rangle$

**Kommentar 1.25.** Die ersten beiden Eigenschaften stellen sicher, dass die Projektion als Abbildung auf dem Link  $L$  bis auf endlich viele Doppelpunkte injektiv ist. Die dritte Eigenschaft stellt sicher, dass die Bilder der Doppelpunkte keine Berührungspunkte sind, sondern transversale Schnittpunkte. Mit der vierten Eigenschaft wird erreicht, dass  $L$  in keinem Punkt in Richtung von  $\nu$  verläuft. Betrachtet man die auf  $L$  eingeschränkte Projektion, so bedeutet dies gerade, dass deren Differential nirgends verschwindet. Die letzte Eigenschaft markiert einen Punkt  $p \in K_o \subseteq K$  als denjenigen Urbildpunkt eines Schnittpunktes, der eine höhere Komponente in Richtung  $\nu$  aufweist als sein Korrespondent  $\psi(p)$ .  $p$  ist also von Blickrichtung  $\nu$  betrachtet der obere Punkt von  $L$  über dem Schnittpunkt  $\text{pr}_\nu(p)$ . Man sieht daran insbesondere, dass die Mengen  $K, K_u$  und  $K_o$  und auch die Bijektion  $\psi$  – falls sie mit obigen Eigenschaften existieren – schon eindeutig bestimmt sind durch  $L$  und  $\nu$ .

**Lemma 1.26.** *Für jeden Link  $L \subseteq \mathbb{R}^3$  existiert eine Umgebungs-Isotopie  $h$ , sodass  $\pi = \text{pr}_{e_3}$  eine reguläre Projektion für  $h_1(L)$  ist.*

*Beweis.* Ein Link  $L \subseteq \mathbb{R}^3$  kann nach Definition als glatte Einbettung der Codimension 2 verstanden werden. Die Aussage ist damit ein Spezialfall von Theorem 4.3 in D. Rosemans Arbeit [23]. Dem dortigen Beweis lässt sich sogar die etwas stärkere Aussage entnehmen, dass die Isotopie so gewählt werden kann, dass die Einbettungen für  $L$  und  $h_1(L)$  sich nur geringfügig unterscheiden (bezüglich einer geeignet gewählten Kompakt-Offen-Topologie auf dem Raum der glatten Abbildungen  $k \cdot \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ). Anders ausgedrückt: Für jeden Link  $L$  genügt eine kleine Deformation, damit die Projektion  $\pi$  regulär wird. Der Beweis von Roseman fußt auf dem Thom'schen Transversalitätssatz, welcher mit dem Satz von Sard eng verwandt ist. □

**Kommentar 1.27.** Man könnte hier sogar die noch etwas stärkere Aussage beweisen, dass im Falle von Links in  $\mathbb{R}^3$  eine (kleine) Drehung  $\psi \in SO(3)$  als Deformation genügt. Die Aussage von 1.26 ließe sich dann auch so formulieren:

Für jeden Link  $L \subseteq \mathbb{R}^3$  existiert eine Projektionsrichtung  $\nu$ , sodass  $\text{pr}_\nu$  eine reguläre Projektion für  $L$  ist.

**Proposition und Definition 1.28.** Sei  $L \subseteq \mathbb{R}^3$  ein Link und  $\text{pr}_\nu$  eine reguläre Projektion für  $L$ . Dann gibt es (genau) ein Linkdiagramm  $(D_L, [(B_i)_{i=1}^n])$ , sodass

$$D_L = \text{pr}_\nu(L)$$

und durch  $B_i$  gerade derjenige Strang eines Kreuzungspunktes  $p_i$  ausgezeichnet wird, dessen Urbild unter der Projektion (lokal um  $p_i$ ) eine geringere Komponente in Richtung  $\nu$  hat. Man nennt  $(D_L, [(B_i)_{i=1}^n])$  ein *Linkdiagramm für  $L$* .

*Beweis.* Die Menge  $K$  der Projektion  $\text{pr}_\nu$  für  $L$  sei durch  $K = \{x_1, \dots, x_{2n}\} \subseteq \mathbb{R}^3$  mit  $K_u = \{x_1, \dots, x_n\}$  gegeben. Seien dann  $V_i$  paarweise disjunkte, zusammenhängende Umgebungen von  $x_i$  ( $i = 1, \dots, 2n$ ). Setze für  $i \in \{1, \dots, n\}$  noch  $B_i := \text{pr}_\nu(V_i \setminus \{x_i\})$ . Ist nun  $\iota : k \cdot \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine glatte Einbettung für  $L$ , so ist durch  $\varphi := \text{pr}_\nu \circ \iota$  eine Diagramm-Immersion gegeben. Nach Definition gilt außerdem  $\varphi(k \cdot \mathbb{S}^1) = D_L$ , somit ist  $D_L$  als Bild einer Diagramm-Immersion ein Kringeldiagramm und die Teilmengen  $(B_i)_{i=1}^n$  erfüllen gerade die Definition einer Prä-Kreuzungsinformation (mit  $U_i := \iota^{-1}(V_i)$  und  $z_i := \iota^{-1}(x_i)$  für  $i = 1, \dots, 2n$ ).  $\square$

Lemma 1.26 und Proposition 1.28 stellen also sicher, dass es zu jedem Link  $L$  (bis auf Isotopie) auch ein Linkdiagramm  $D_L$  für  $L$  gibt. Es gilt aber auch umgekehrt, dass man zu jedem Linkdiagramm  $D$  einen Link  $L$  findet, sodass  $D$  ein Linkdiagramm für  $L$  ist:

**Lemma 1.29.** Sei  $(D, [(B_i)_{i=1}^n])$  ein Linkdiagramm. Dann existiert ein Link  $L \subseteq \mathbb{R}^3$ , sodass  $(D_L, [(B_i)_{i=1}^n])$  bezüglich der Projektion  $\text{pr}_{e_3}$  ein Linkdiagramm für  $L$  ist.

*Beweis.* Sei also  $\varphi : k \cdot \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine Diagramm-Immersion für  $D$  mit  $\kappa = \{z_1, \dots, z_{2n}\}$  und  $U_i \subseteq k \cdot \mathbb{S}^1$  ( $i = 1, \dots, 2n$ ) mit  $\varphi(U_i \setminus \{z_i\}) = B_i$  für  $i = 1, \dots, n$  wie in 1.23. Definiere dann  $\iota : k \cdot \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ ,  $z \mapsto (\varphi(z), h(z))$ , wobei  $h : k \cdot \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$  eine glatte Abbildung und außerhalb von  $U_1, \dots, U_n$  die Nullfunktion sei,  $h|_{k \cdot \mathbb{S}^1 \setminus (\cup_{i=1}^n U_i)} = 0$ . Für jedes  $i \in \{1, \dots, n\}$  sei  $h|_{U_i}$  durch eine glatte Hutfunktion mit  $h|_{U_i}(z_i) = -1$  gegeben (beachte: jedes  $U_i$  ist diffeomorph zu einem offenen Intervall in  $\mathbb{R}$ ). Ist  $i \in \{1, \dots, n\}$ , so gilt also  $h(z_i) = -1$  und  $h(z_{n+i}) = 0$ . Damit wird  $\iota$  injektiv, denn außerhalb der  $z_i$  ist ja bereits  $\varphi$  injektiv. Außerdem ist  $\iota$  glatt, weil  $\varphi$  und  $h$  es sind. Die Immersivität von  $\iota$  folgt aus der Immersivität von  $\varphi$ . Setze nun  $L := \iota(k \cdot \mathbb{S}^1)$ , so ist  $L$  also ein Link und man sieht

## 1. Knoten, Links und Diagramme

leicht, dass  $\text{pr}_{e_3}$  eine reguläre Link-Projektion für  $L$  mit  $\text{pr}_{e_3} \circ \iota = \varphi$  ist. Insbesondere gilt  $\text{pr}_{e_3}(L) = \text{pr}_{e_3}(\iota(k \cdot \mathbb{S}^1)) = \varphi(k \cdot \mathbb{S}^1) = D$ .  $\square$

**Kommentar 1.30.** In Proposition 1.28 und Lemma 1.29 wird deutlich, dass mit der Kreuzungsinformation eines Linkdiagramms  $(D, \xi)$  jeweils der *unterkreuzende* Strang eines Kreuzungspunktes ausgezeichnet wird. Meist wird die Kreuzungsinformation  $\xi$  graphisch ausgedrückt, indem man einen Repräsentanten  $(B_i)_{i=1}^n$  für  $\xi$  wählt und dann die Mengen  $B_i$  von  $D$  ausnimmt: Man gibt das Linkdiagramm graphisch als die Menge  $D \setminus (\bigcup_{i=1}^n B_i) \subseteq \mathbb{R}^2$  an.

Die Abbildungen 1.1a und 1.1b zeigen Linkdiagramme für einen Knoten vom *Typ des Unknotens* und einen Knoten vom *Typ des Kleeblattknotens*. Man erhält Repräsentanten für den Unknoten und den Kleeblattknoten, indem man wie in 1.29 verfährt. Später (in 1.33) sehen wir, dass alle Links, die sich auf dasselbe Linkdiagramm projizieren lassen, demselben Linktyp angehören müssen. Daher ist auf diese Weise der Typ des Unknotens und des Kleeblattknotens bereits definiert.

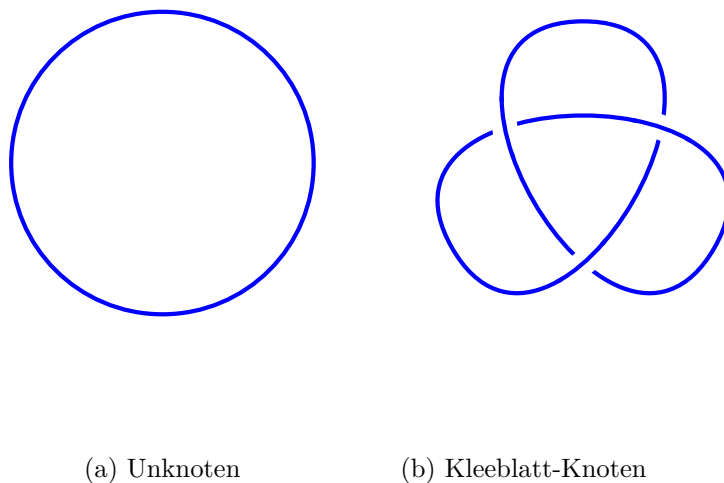


Abbildung 1.1.

Eigentlich wird erst durch Lemma 1.29 klar, weshalb der Begriff „Linkdiagramm“ gerechtfertigt ist: Es kommt tatsächlich jedes Linkdiagramm als Projektion eines geeigneten Links zustande.

Wie bereits angedeutet besteht ein Vorteil von Linkdiagrammen gegenüber Links in ihrer eher kombinatorischen Natur. Gerade bei der Suche nach Linktypinvarianten ist dies besonders nützlich, weil nun eine ganze Bandbreite an kombinatorischen Werkzeugen nutzbar wird. Zunächst muss allerdings die Frage geklärt werden, welcher Äquivalenzbegriff auf der Menge der Linkdiagramme dem Äquivalenzbegriff des Linktyps von Links (siehe 1.6) entspricht. Ein



erster Schritt ist die Äquivalenz von Linkdiagrammen unter „ebenen Isotopien“ (exakte Definition folgt in 1.31), denn mit einer ähnlichen, gleichwohl einfacheren Technik wie im Beweis von 1.29 lässt sich eine solche ebene Isotopie zu einer (dreidimensionalen) Umgebungsisotopie zwischen zwei zugehörigen Links ausbauen.

**Definition 1.31.** Seien  $(D_0, \xi_0)$  und  $(D_1, \xi_1)$  Linkdiagramme. Eine glatte Abbildung  $h : \mathbb{R}^2 \times I \rightarrow \mathbb{R}^2$  heißt *ebene (Umgebungs-)Isotopie von  $D_0$  nach  $D_1$* , falls für jedes  $t \in I$  die Abbildung  $h_t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $h_t(y) := h(y, t)$  ein Diffeomorphismus ist, sodass  $h_0 = \text{id}_{\mathbb{R}^2}$  und zudem  $h_1(D_0) = D_1$  sowie  $h_1(D_0 \setminus \cup B_i) = D_1 \setminus \cup B'_i$  für geeignete Repräsentanten  $(B_i)_{i=1}^{n_0}$  von  $\xi_0$  und  $(B'_i)_{i=1}^{n_1}$  von  $\xi_1$  gilt.

Ist  $\varphi_0$  eine Diagramm-Immersion für  $(D_0, (B_i)_{i=1}^{n_0})$ , so liefert also  $h_1 \circ \varphi_0$  eine Diagramm-Immersion für  $(D_1, (B'_i)_{i=1}^{n_1})$ . Allgemein lässt sich für jedes  $t \in I$  ein Linkdiagramm  $D_t$  vermöge einer Diagramm-Immersion  $h_t \circ \varphi_0$  definieren. Beachte: Da die Abbildung  $h$  glatt und  $h_t$  für jedes  $t \in I$  ein Diffeomorphismus ist, kann sich die Anzahl der Kreuzungspunkte in  $D_t = h_t(D_0)$  nicht ändern. Für die Anzahl der Kreuzungspunkte  $n_0$  und  $n_1$  zweier eben isotoper Linkdiagramme  $(D_0, (B_i)_{i=1}^{n_0})$  und  $(D_1, (B'_i)_{i=1}^{n_1})$  gilt also bereits  $n_0 = n_1$ .

Ist  $(D, \xi)$  ein Linkdiagramm und ist sowohl  $(B_i)_{i=1}^n$  als auch  $(B'_i)_{i=1}^n$  Repräsentant der Kreuzungsinformation  $\xi$ , so lässt sich eine ebene Isotopie  $h$  konstruieren, welche einerseits  $h_t(D) = D$  für alle  $t$  erfüllt und gleichzeitig  $(B_i)_{i=1}^n$  in  $(B'_i)_{i=1}^n$  überführt, d.h.

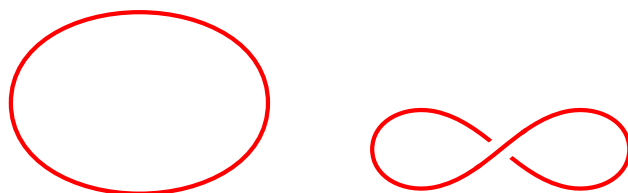
$$h_1(B_i) = B'_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Dies rechtfertigt die graphische Notation eines Linkdiagramms  $(D, [(B_i)_{i=1}^n])$  als  $D \setminus (\cup B_i) \subseteq \mathbb{R}^2$ , falls die Kreuzungspunkte weit genug voneinander entfernt bzw. die  $B_i$  „klein genug“ sind (sodass im Bild hinreichend ersichtlich ist, wie sich die Menge  $D \setminus (\cup B_i)$  zu  $D$  vervollständigt). Wir können also auch in dieser Arbeit der gängigen Praxis folgen, Linkdiagramme und Umformungen von Linkdiagrammen stets graphisch darzustellen, ohne dabei mathematische Rigorosität einzubüßen (wie bereits in den Abbildungen 1.1a und 1.1b für Diagramme vom Typ des Unknotens und des Kleeblattknotens geschehen).

An einfachen Beispielen wird allerdings deutlich, dass der Äquivalenzbegriff „modulo ebener Isotopie“ für Linkdiagramme zu eng gefasst wäre und noch weitere Linkdiagramme als äquivalent deklariert werden müssen, sofern die verschiedenen Linkdiagramme eines Links bzw. dessen Linktyps als äquivalent gelten sollen. Siehe z.B. die Abbildung 1.2:

Zu sehen sind zwei Diagramme für einen Link vom Typ des Unknotens mit unterschiedlicher Anzahl an Kreuzungspunkten, welche somit nicht eben isotop sein können.

## 1. Knoten, Links und Diagramme

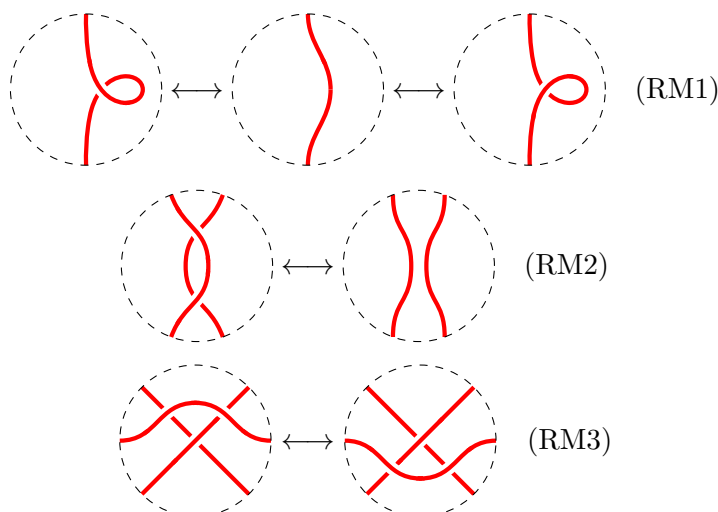


(a) Pferdesattel von oben... (b) ...und von schräg vorne

Abbildung 1.2.: Randlinie eines Pferdesattels

Bei der nun folgenden Definition der Reidemeister-Bewegungen, welche dieses Problem lösen werden, kommt die Eleganz der graphischen Notation erstmals zur Entfaltung.

**Definition 1.32.** Eine *Reidemeister-Bewegung* ist der Übergang von einem Linkdiagramm  $D$  zu einem anderen Linkdiagramm  $D'$ , sodass sich  $D$  und  $D'$  innerhalb einer (kleinen) Kreisfläche auf eine der drei abgebildeten Arten unterscheiden und außerhalb der Kreisfläche identisch sind.



Es gilt dann folgende Aussage:

**Satz 1.33.** Seien  $L_0, L_1 \subseteq \mathbb{R}^3$  Links. Weiter seien  $D_0$  und  $D_1$  Linkdiagramme für  $L_0$  bzw.  $L_1$ . Dann sind  $L_0$  und  $L_1$  genau dann vom selben Linktyp, wenn sich die Linkdiagramme  $D_0$  und  $D_1$  durch eine endliche Abfolge von Reidemeister-Bewegungen und ebenen Isotopien ineinander überführen lassen.

*Beweis.* Für stückweise lineare Knoten und stückweise lineare Knotendiagramme wurde dieser Satz von Kurt Reidemeister selbst bewiesen. Für den hier betrachteten glatten Fall könnte man glatte Kurven durch stückweise lineare Kurven approximieren und die Aussage so auch auf den Fall glatter Links erweitern. Ein direkter Beweis für den glatten Fall ist aber auch möglich und zum Beispiel zu finden in [24], Proposition 8.1.  $\square$

Sind zwei Diagramme *äquivalent* (d.h. ineinander überführbar im Sinne von Satz 1.33), so zeigt man dies durch Angabe einer Abfolge von Reidemeister-Bewegungen (und ebenen Isotopien). Das Problem ist nun, wie man zeigen kann, dass zwei Diagramme sich *nicht* ineinander überführen lassen. Eine Idee ist es, jedem Knoten- bzw. Linkdiagramm  $D$  eine Größe  $\theta(D)$  (z.B. eine Zahl, ein Zahlentupel oder auch ein anderes mathematisches Objekt) zuzuordnen, welche sich unter den Reidemeister-Bewegungen (und ebenen Isotopien) nicht ändert. Unterscheiden sich dann die Größen zweier Diagramme, so können die Diagramme nicht zwei Links vom selben Linktyp repräsentieren. Mit anderen Worten: Die Zuordnung  $\theta$  lässt sich auf eine Zuordnung  $\Theta$  übertragen, die einem jeden Linktyp  $[L]$  eine (wohldefinierte) Größe  $\Theta([L])$  zuordnet, indem man ein Linkdiagramm  $D_L$  für einen Repräsentanten  $L$  des Linktyps  $[L]$  betrachtet und  $\Theta([L]) := \theta(D_L)$  setzt. Der Satz 1.33 garantiert dann die Unabhängigkeit von der Wahl des Repräsentanten und des zugehörigen Linkdiagramms, also die Wohldefiniertheit von  $\Theta$ . Hat man eine solche Zuordnung gefunden, so spricht man daher von einer *Linktypinvariante* (bzw. einer *Knotentypinvariante*). Man beachte, dass in der Literatur häufig Linktypen selbst als Links bezeichnet werden und daher solche Invarianten für gewöhnlich meist als *Linkinvarianten* bzw. *Knoteninvarianten* bezeichnet werden.

Neben einer trivialen Invariante, die jedem Linkdiagramm denselben Wert zuordnet, gibt es ein weiteres einfaches Beispiel: Die Anzahl  $\alpha(D)$  der Komponenten (nicht zu verwechseln mit der Anzahl der Zusammenhangskomponenten!) eines Linkdiagramms  $D$ : Nach Wahl einer Diagramm-Immersion  $\varphi : k \cdot \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  für  $D$  gilt  $k = \alpha(D)$ . Man sieht leicht, dass keine der drei Reidemeister-Bewegungen diese Anzahl zu ändern vermag. Somit handelt es sich um eine Linktypinvariante. Sie gibt gerade die Anzahl der Komponenten eines zugehörigen Links wieder; bei Links stimmen aber die Begriffe „Komponenten“ und „Zusammenhangskomponenten“ überein, daher ist deren Anzahl eine Größe, die sich unter Umgebungs-Isotopie nicht ändern kann und auch daher eine Linktypinvariante ist. Offenbar ist sie aber als *Knotentypinvariante* unbrauchbar, da sie jedem Knoten(diagramm) den Wert 1 zuordnet.

Das berühmte Jones-Polynom ist ein weiteres Beispiel einer Linktypinvariante, welche es z.B. erlaubt, den Typ des Unknotens vom Typ des Kleeblattknotens zu unterscheiden. Sie ermöglicht die Unterscheidung einer Vielzahl von Knoten- und Linktypen und gilt daher als sehr effektive Linktypinvariante.

Im Folgenden soll das Jones-Polynom mit Hilfe (einer modifizierten Version) der Kauffman-Klammer konstruiert werden.

Hierfür muss zunächst erklärt werden, was man unter der „Glättung“ einer Kreuzung in einem Linkdiagramm versteht.

## 1. Knoten, Links und Diagramme

Sei also  $D$  ein Linkdiagramm und  $\chi$  die Menge der Kreuzungspunkte von  $D$ . Zu einer fixierten Kreuzung  $x \in \chi$  von  $D$  definiert man nun Glättungen des Linkdiagramms  $D$  in dieser Kreuzung  $x$  folgendermaßen: Außerhalb einer kleinen Scheibe um  $x$  soll das Linkdiagramm unverändert bleiben, innerhalb wird die Kreuzung durch eine von zwei Möglichkeiten aufgelöst (siehe Abb. 1.3), entweder durch die 0-Glättung oder die 1-Glättung der Kreuzung  $x$ .

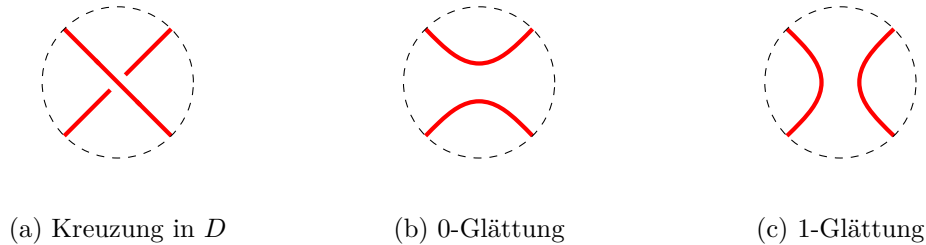


Abbildung 1.3.: Glättungen einer Kreuzung

Man beachte, dass eine Glättung von  $x$  ein Linkdiagramm liefert, welches einen Kreuzungspunkt weniger hat als das ursprüngliche Linkdiagramm  $D$ . Durch sukzessives Glätten aller Kreuzungen (hierbei gibt es für ein Diagramm mit  $|\chi| = n$  Kreuzungspunkten also  $2^n$  Möglichkeiten) erhält man ein Linkdiagramm, welches nur noch aus einer endlichen, disjunkten Vereinigung von glatt eingebetteten Kreislinien besteht. Ein solches Diagramm nennt man dann eine *vollständige Glättung* von  $D$ . Da die Glättung *einer* Kreuzung eines Linkdiagramms die Anzahl der Komponenten des Diagramms entweder beibehält oder um genau eins erhöht oder verkleinert, ist für eine vollständige Glättung eines zusammenhängenden Linkdiagramms  $D$  die Zahl der Komponenten höchstens um eins größer als die Zahl der Kreuzungen von  $D$ .

**Proposition und Definition 1.34.** Es existiert eine Abbildung, die jedem Linkdiagramm  $D$  ein Laurentpolynom  $\langle D \rangle \in \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$  zuordnet, sodass folgende Axiome erfüllt sind:

(i)

$$\langle \emptyset \rangle = 1$$

(ii)

$$\langle \bigcirc \sqcup D \rangle = (q + q^{-1}) \langle D \rangle$$

(iii) Sind drei Linkdiagramme gegeben, die außerhalb einer Kreisscheibe identisch sind und sich innerhalb dieser Kreisscheibe gerade wie abgebildet unterscheiden (also Kreuzung, 0-Glättung und 1-Glättung dieser Kreuzung), so gilt:

$$\langle \text{Kreuzung} \rangle = \langle \text{0-Glättung} \rangle - q \langle \text{1-Glättung} \rangle$$

Wir nennen  $\langle D \rangle$  die *Kauffman-Klammer* von  $D$ .

*Beweis.* Die eindeutige Existenz der Kauffman-Klammer für Linkdiagramme  $S$  ohne Kreuzungspunkte folgt bereits aus den ersten beiden Axiomen: Ist  $k$  die Anzahl der Komponenten von  $S$ , so kann und muss  $\langle S \rangle = (q + q^{-1})^k$  gesetzt werden.

Ein Linkdiagramm  $D$  mit  $n$  Kreuzungen hat genau  $2^n$  vollständige Glättungen. Sei  $S$  eine solche Glättung mit  $k_S$  Komponenten. Weiter sei mit  $n_S$  die Zahl der Kreuzungen bezeichnet, die durch 1-Glättungen ersetzt wurden, um  $S$  aus  $D$  zu erhalten (es ist dann natürlich  $n - n_S$  die Anzahl der Kreuzungen, welche durch 0-Glättungen ersetzt wurden). Summiert man nun über alle  $2^n$  vollständigen Glättungen von  $D$ , so erhält man einen Ausdruck

$$\langle D \rangle := \sum_S (-q)^{n_S} (q + q^{-1})^{k_S}.$$

Dieser Ausdruck ist für jedes Linkdiagramm eindeutig definiert und gerade so gewählt, dass auch das dritte Axiom stets erfüllt ist.  $\square$

**Bemerkung 1.35.** An dieser Stelle sei erwähnt, dass diese Definition eine Version der Kauffman-Klammer ergibt, die von der allgemein bekannten Kauffman-Klammer abweicht. Insbesondere sieht man leicht, dass die Kauffman-Klammer keine Linktypinvariante ist, denn RM1 und (in dieser Version) auch RM2 ändern den Wert von  $\langle D \rangle$ .

Auch die ursprüngliche Kauffman-Klammer ist keine Linktypinvariante für Linkdiagramme, denn auch diese verletzt Invarianz unter der ersten Reidemeister-Bewegung. Allerdings lässt sich sehr wohl eine Invariante für *gerahmte Links und Linkdiagramme* daraus gewinnen. Eine andere und hier bevorzugte Möglichkeit ergibt sich, wenn man *orientierte* Links und *orientierte* Linkdiagramme betrachtet.

**Definition 1.36.** Sei  $D$  ein orientiertes Linkdiagramm. Man nennt eine Kreuzung im Linkdiagramm  $D$  *rechtsgängig*, falls der überkreuzende Strang nach rechts über den unterkreuzenden verläuft und *linksgängig* im anderen Fall.



Abbildung 1.4.: Rechts- und linksgängige Kreuzungen

## 1. Knoten, Links und Diagramme

Es bezeichne dann  $n_+(D) \in \mathbb{N}_0$  die Anzahl der rechtsgängigen Kreuzungen und  $n_-(D) \in \mathbb{N}_0$  die Anzahl der linksgängigen Kreuzungen von  $D$ . Beachte: Im Falle eines *Knotendiagramms* hängt die Rechts- bzw. Linksgängigkeit einer Kreuzung nicht von der Wahl der Orientierung des Knotendiagramms ab (denn hier kehrt sich die Orientierung der beiden Stränge stets gemeinsam um).

Von der Kauffman-Klammer gelangt man durch Skalierung zum (unnormalisierten) Jones-Polynom:

**Definition 1.37.** Das *unnormalisierte Jones-Polynom* eines orientierten Linkdiagramms  $D$  wird definiert durch

$$\hat{J}(D) := (-1)^{n_-} q^{n_+ - 2n_-} \langle D \rangle$$

**Bemerkung 1.38.** (a) Für alle nicht-leeren Linkdiagramme  $D$  ist  $(q + q^{-1})$  ein Teiler von  $\langle D \rangle$  und damit auch von  $\hat{J}(D)$ . Man gelangt durch Normalisierung

$$J(D) := \hat{J}(D)/(q + q^{-1})$$

und anschließend Substitution  $q \rightarrow -t^{1/2}$  zum Jones-Polynom für nicht-leere, orientierte Linkdiagramme in seiner ursprünglichen Darstellung.

(b) Es sei nochmals betont, dass die Orientierung eines Linkdiagramms  $D$  nur in Form der Zahlen  $n_+(D)$  und  $n_-(D)$  in die Definition des Jones-Polynoms eingeht.

**Satz 1.39.** *Das Jones-Polynom ist eine Linktypinvariante.*

*Beweisidee:* Man geht die Reidemeister-Bewegungen durch und zeigt jeweils Invarianz von  $\hat{J}$ . Dabei kompensiert die Skalierung von  $\hat{J}$  gerade die Abweichung von der Invarianz, die die Kauffman-Klammer bei (RM1) und (RM2) aufweist. Der Beweis findet sich zum Beispiel in [6].  $\square$

**Bemerkung 1.40.** Bis zu dieser Stelle wurden vor allem Links in  $\mathbb{R}^3$  und ausschließlich Linkdiagramme in  $\mathbb{R}^2$  betrachtet. Um geometrische und topologische Aspekte in die Theorie mit einbeziehen zu können, wäre es aber wünschenswert, Links und Linkdiagramme als Teilmengen von *kompakten* Mannigfaltigkeiten zu betrachten. Man geht daher bei den umgebenden Räumen zu den jeweiligen Einpunkt-Kompaktifizierungen über, welche selbst eine glatte Mannigfaltigkeitsstruktur tragen: Es ist  $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\} \cong \mathbb{S}^3$  und  $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\} \cong \mathbb{S}^2$ . Unter fixierten Diffeomorphismen, beispielsweise gewonnen durch stereographische Projektion, kann man  $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\} = \mathbb{S}^3$  bzw.  $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\} = \mathbb{S}^2$  schreiben. Die Definitionen dieses Kapitels lassen sich problemlos von  $\mathbb{R}^3$  bzw.  $\mathbb{R}^2$  auf  $\mathbb{S}^3$  bzw.  $\mathbb{S}^2$  übertragen, sodass man insbesondere auch

*Linkdiagramme in  $\mathbb{S}^2$*  betrachten kann. Sämtliche Lemmata und Propositionen dieses Kapitels lassen sich ohne allzu große Mühe auf diesen kompakten Fall übertragen. Man beachte, dass Links und Linkdiagramme als glatte Bilder von eindimensionalen Mannigfaltigkeiten  $\mathbb{R}^3$  bzw.  $\mathbb{R}^2$  nicht komplett überdecken können, dasselbe gilt in  $\mathbb{S}^3$  bzw.  $\mathbb{S}^2$ . Häufig reicht daher bereits ein Argument, dass ein Link bzw. ein Linkdiagramm (ohne Einschränkung) den Punkt  $\infty$  verfehlt. Darauf wird hier nicht näher eingegangen. Lediglich der Begriff der Projektion von  $\mathbb{S}^3$  nach  $\mathbb{S}^2$  soll noch etwas beleuchtet werden. Eine Abbildung  $\text{pr} : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$  heißt *Projektion*, falls  $\text{pr}(\infty) = \infty$  und ein Normalenvektor  $\nu \in \mathbb{R}^3$  existiert, sodass auf  $\mathbb{R}^3$  gilt:  $\text{pr}|_{\mathbb{R}^3} = \text{pr}_\nu$ .

**Vereinbarung 1.41.** Im weiteren Verlauf der Arbeit sei  $\pi : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$  die Projektion mit  $\pi|_{\mathbb{R}^3} = \text{pr}_{e_3}$ , also  $\pi(x, y, z) = (x, y)$  für  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .





## 2. Cobordismen-Kategorien

Im vorangegangenen Kapitel wurde die Suche nach Linktypinvarianten motiviert und einige Beispiele gegeben.

Eine vergleichbare Situation herrscht generell in der Topologie: Man sucht nach Invarianten, mit denen sich (nicht homöomorphe bzw. nicht homotopieäquivalente) topologische Räume unterscheiden lassen. Neben manchen grundlegenden Beispielen wie Zusammenhang oder Kompaktheit gibt es auch elaborierte topologische Invarianten wie die Euler-Charakteristik (z.B. für topologische Räume, welche eine endliche CW-Struktur zulassen).

Diejenigen topologischen Invarianten, welche man mit Hilfe der algebraischen Topologie gewinnt, haben allesamt eine wertvolle Eigenschaft: Sie lassen sich als Funktoren von einer topologischen Kategorie (z.B. die Kategorie der punktierten topologischen Räume im Falle der Fundamentalgruppe) in eine algebraische Kategorie (wie die Kategorie der Gruppen) auffassen.

Die Funktorialität einer solchen Invariante stellt dann gewissermaßen sicher, dass man die mannigfaltigen und wohl erforschten algebraischen Werkzeuge in der Zielkategorie auch voll und ganz ausschöpfen kann. Diese Tatsache hat schon in unzähligen Fällen für bedeutende Fortschritte in der Topologie gesorgt. Ein besonderes Beispiel soll hier etwas beleuchtet werden, die singuläre Homologie: Diese topologische Invariante ist ein Funktor  $H : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Ab}$  von der Kategorie  $\mathbf{Top}$  der topologischen Räume in die Kategorie  $\mathbf{Ab}$  der abelschen Gruppen (genauer ist eigentlich für jedes  $n \in \mathbb{N}_0$  die  $n$ -te (ganzzahlige) Homologiegruppe  $H_n : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Ab}$  ein Funktor und dann  $H$  ein Funktor von  $\mathbf{Top}$  in die Kategorie  $\mathbf{gAb}$  der *graduierten abelschen Gruppen*). Es ergibt sich nun eine besonders elegante Beziehung zwischen der singulären Homologie und der Euler-Charakteristik eines endlichen CW-Komplexes (definiert als alternierende Summe der Anzahlen an Zellen der jeweiligen Dimension): Die Euler-Charakteristik  $\chi(X)$  eines Raumes  $X$  stimmt mit der alternierenden Summe der Ränge der singulären Homologiegruppen  $H_n(X)$  überein,

$$\chi(X) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \operatorname{rg}(H_k(X)).$$

Die singuläre Homologie ist also eine „kategoriale“ Invariante (also ein Funktor), aus der man

## 2. Cobordismen-Kategorien

durch „Projektion“ der Homologiegruppen auf ihren jeweiligen Rang die Euler-Charakteristik gewinnen kann. Hierbei werden also vage formuliert Objekte einer Kategorie zu Elementen einer Menge projiziert. Die Euler-Charakteristik nimmt Werte in den ganzen Zahlen an und hat daher selbst keine Chance, als Funktor von einer topologischen Kategorie in eine gehaltvolle (algebraische) Kategorie aufgefasst zu werden.

Liegt nun eine solche Beziehung zwischen einer funktoriellen Invariante  $F$  und einer „einfacheren“ Invariante  $\theta$  vor, so spricht man von der funktoriellen Invariante  $F$  als einer *Kategorifizierung* der zugrunde liegenden einfacheren Invariante  $\theta$ . Die Invariante  $\theta$  nennt man dann auch einen *Schatten von  $F$* .

Ähnlich wie bei der Euler-Charakteristik verhält es sich auch beim Jones-Polynom, denn auch Polynome lassen sich nicht als Objekte einer bedeutungsvollen (algebraischen) Kategorie auffassen. Das Auffinden einer Kategorifizierung des Jones-Polynoms gelang Mikhail Khovanov im Jahr 1999 mit der nach ihm benannten *Khovanov-Homologie*, siehe [12].

Im nun folgenden Abschnitt sollen die Kategorie der Links und die Kategorie der Linkdiagramme präsentiert und deren Verhältnis zueinander untersucht werden, ehe im dritten Kapitel die Konstruktion der Khovanov-Homologie folgt.

Falls nicht explizit anders vermerkt, seien von nun an mit Linkdiagrammen orientierte Linkdiagramme in  $\mathbb{S}^2$  gemeint. Ebenso seien mit Links stets orientierte Links in  $\mathbb{S}^3$  bezeichnet.

**Definition 2.1.** Seien  $L_0, L_1 \subseteq \mathbb{S}^3$  orientierte Links. Ein *Link-Cobordismus von  $L_0$  nach  $L_1$*  ist eine glatte, orientierte zweidimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand,  $\Sigma \subseteq \mathbb{S}^3 \times [0, 1]$ , sodass für den Rand

$$\partial\Sigma = L_0 \times \{0\} \cup L_1 \times \{1\} \subseteq \mathbb{S}^3 \times \{0, 1\}$$

gilt und bezüglich der induzierten Orientierung auf  $\partial\Sigma$

$$\partial\Sigma = L_0 \cup (-L_1)$$

gilt (wenn  $-L_1$  den Link  $L_1$  mit umgekehrter Orientierung bezeichnet) und außerdem  $\Sigma$  einen  $\varepsilon$ -Kragen hat (für ein  $\varepsilon > 0$ ), d.h.

$$\Sigma \cap (\mathbb{S}^3 \times [0, \varepsilon]) = L_0 \times [0, \varepsilon]$$

und

$$\Sigma \cap (\mathbb{S}^3 \times (1 - \varepsilon, 1]) = L_1 \times (1 - \varepsilon, 1].$$

Für  $t \in [0, 1]$  setzt man

$$\Sigma_t := \text{pr}_1 \left( \Sigma \cap (\mathbb{S}^3 \times \{t\}) \right),$$

sodass

$$\Sigma = \bigcup_{t \in [0,1]} \Sigma_t \times \{t\}$$

gilt.

**Bemerkung 2.2.** (i) Ist  $L \subseteq \mathbb{S}^3$  ein Link, so gibt es stets einen (trivialen) Link-Cobordismus zwischen  $L$  und  $L$ : Den Zylinder  $L \times [0, 1] \subseteq \mathbb{S}^3 \times [0, 1]$ .

(ii) Der Kragen in 2.1 stellt sicher, dass man für drei Links  $L_0, L_1, L_2 \subseteq \mathbb{S}^3$  einen Link-Cobordismus  $\Sigma$  von  $L_0$  nach  $L_1$  und einen Link-Cobordismus  $\Sigma'$  von  $L_1$  nach  $L_2$  *glatt* aneinanderfügen kann zu einem Link-Cobordismus  $\Sigma' \circ \Sigma$  zwischen  $L_0$  und  $L_2$ :

$$\Sigma' \circ \Sigma := \left( \bigcup_{t \in [0, 1/2]} \Sigma_{2t} \times \{t\} \right) \cup \left( \bigcup_{t \in [1/2, 1]} \Sigma'_{2t-1} \times \{t\} \right).$$

**Definition 2.3.** Seien  $L_0, L_1 \subseteq \mathbb{S}^3$  orientierte Links und sowohl  $\Sigma_0$  als auch  $\Sigma_1$  sei ein Link-Cobordismus von  $L_0$  nach  $L_1$ . Dann heißen  $\Sigma_0$  und  $\Sigma_1$  *isotop*, falls es eine glatte Abbildung  $\Psi : (\mathbb{S}^3 \times [0, 1]) \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^3 \times [0, 1]$  gibt, sodass für jedes  $s \in [0, 1]$  die Abbildung  $\Psi_s : (\mathbb{S}^3 \times [0, 1]) \rightarrow (\mathbb{S}^3 \times [0, 1])$  mit  $\Psi_s(x, t) := \Psi(x, t, s)$  ein Diffeomorphismus mit  $\Psi_0 = \text{id}_{\mathbb{S}^3 \times [0, 1]}$  und  $\Psi_1(\Sigma_0) = \Sigma_1$  ist und außerdem ein  $\varepsilon$ -Kragen von  $\Sigma_0$  existiert, der unter der Isotopie  $\Psi$  fixiert bleibt. Ein solches  $\Psi$  heißt *Link-Cobordismen-Isotopie von  $\Sigma_0$  nach  $\Sigma_1$* .

**Bemerkung 2.4.** (a) Es ist dann für jedes  $s \in [0, 1]$  auch  $\Psi_s(\Sigma_0)$  ein Link-Cobordismus von  $L_0$  nach  $L_1$ . Anschaulich ist also eine Link-Cobordismen-Isotopie eine Überführung eines Link-Cobordismus  $\Sigma_0$  in einen Link-Cobordismus  $\Sigma_1$  durch eine glatte Deformation des umgebenden Raumes  $\mathbb{S}^3 \times [0, 1]$ .

(b) Isotopie von Link-Cobordismen ist eine Äquivalenzrelation, denn man kann solche Isotopien auch rückwärts durchlaufen und auch aneinanderreihen. Die Isotopie-Klasse eines Link-Cobordismus  $\Sigma$  sei im Folgenden mit  $[\Sigma]$  bezeichnet.

(c) Seien  $\Sigma$  und  $\Sigma'$  Link-Cobordismen zwischen Links  $L_0$  und  $L_1$  bzw.  $L_1$  und  $L_2$ . Es gilt dann sogar, dass die Isotopieklasse  $[\Sigma' \circ \Sigma]$  nur von  $[\Sigma]$  und  $[\Sigma']$  abhängt, nicht von der Wahl der Repräsentanten  $\Sigma$  und  $\Sigma'$ . Daher lässt sich nun folgende Kategorie definieren:

**Definition 2.5.** Mit **Link** wird die Kategorie bezeichnet, deren Objekte orientierte Links in  $\mathbb{S}^3$  und deren Morphismen Isotopieklassen von Link-Cobordismen sind.

Der Identitätsmorphismus für einen Link  $L$  ist gegeben durch die Äquivalenzklasse  $[L \times [0, 1]]$  des *Zylinder-Cobordismus*  $L \times [0, 1]$  von  $L$ . Die Verkettung zweier Morphismen wird erklärt als die Isotopieklasse zweier aneinandergefügter Repräsentanten der jeweiligen Morphismen. Dies macht **Link** zu einer Kategorie, die *Cobordismen-Kategorie der Links*.

## 2. Cobordismen-Kategorien

**Beispiel 2.6.** Seien  $L_0$  und  $L_1$  Links in  $\mathbb{S}^3$  und  $h : \mathbb{S}^3 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^3$  eine Umgebungsisotopie von  $L_0$  nach  $L_1$ . Dann induziert  $h$  einen Cobordismus  $\Sigma \subseteq \mathbb{S}^3 \times [0, 1]$  durch

$$\Sigma := \bigcup_{t \in [0, 1]} (h_t(L_0) \times \{t\}).$$

Es gilt dann  $\Sigma_0 = h_0(L_0) = L_0$  und  $\Sigma_1 = h_1(L_0) = L_1$  und außerdem ist  $\Sigma$  tatsächlich eine (orientierbare) Fläche, denn ist  $\iota : k \cdot \mathbb{S}^1$  eine Einbettung für  $L_0$ , so ist durch

$$\varphi : k \cdot \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^3 \times [0, 1]$$

mit

$$\varphi(z, t) := (h_t(\iota(z)), t)$$

eine zweidimensionale glatte Parametrisierung für  $\Sigma$  gegeben.

Beachte aber, dass der Cobordismus  $\Sigma$  eigentlich nicht ganz das Gewünschte bietet: Für einen *Link*-Cobordismus benötigt man definitionsgemäß einen Kragen. Dies erfüllt der zu einer Umgebungsisotopie  $h$  gehörige Cobordismus im Allgemeinen nicht. Ich möchte hier eine Möglichkeit andeuten, wie man dieses Problem behebt:

Um einen solchen Kragen zu erhalten, könnte man etwa ein  $\varepsilon > 0$  und eine glatte Abbildung  $\rho : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  mit  $\rho|_{[0, \varepsilon]} = 0$  und  $\rho|_{(1-\varepsilon, 1]} = 1$  wählen und

$$\Sigma := \bigcup_{t \in [0, 1]} (h_{\rho(t)}(L_0) \times \{t\})$$

setzen. Dann gilt für alle  $0 \leq t < \varepsilon$

$$\Sigma_t = h_{\rho(t)}(L_0) = L_0$$

und für alle  $1 - \varepsilon < t \leq 1$

$$\Sigma_t = h_{\rho(t)}(L_0) = L_1.$$

Die Parametrisierung  $\varphi : k \cdot \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^3 \times [0, 1]$  variiert dann zu

$$\varphi(z, t) := (h_{\rho(t)}(\iota(z)), t).$$

Der *Link*-Cobordismus  $\Sigma$  für  $h$  hängt dann zusätzlich von den Wahlen von  $\varepsilon$  und  $\rho$  ab. Man kann aber zeigen, dass unterschiedliche Wahlen isotope *Link*-Cobordismen ergeben.

Wenn im Folgenden von dem durch eine Umgebungsisotopie  $h$  induzierten *Link*-Cobordismus  $\Sigma$  die Rede ist, unterdrücken wir diese technischen Feinheiten meist.

**Proposition 2.7.** *Seien  $L_0$  und  $L_1$  zwei Links in  $\mathbb{S}^3$  vom selben Linktyp,  $L_0 \simeq L_1$ . Dann sind  $L_0$  und  $L_1$  isomorph in **Link**, also kurz:*

$$L_0 \simeq L_1 \Rightarrow L_0 \cong L_1.$$

*Beweis.* Sei  $h : \mathbb{S}^3 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^3$  eine Umgebungsisotopie von  $L_0$  nach  $L_1$ . Durch die rückwärts durchlaufene Abbildung  $h^- : \mathbb{S}^3 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^3$ , definiert durch  $h_t^- := h_{1-t} \circ h_1^{-1}$ , ist dann eine Umgebungsisotopie von  $L_1$  nach  $L_0$  gegeben:

$h^-$  ist glatt als Verkettung glatter Abbildungen,  $h_t^-$  ist für jedes  $t$  als Verkettung zweier Diffeomorphismen ein Diffeomorphismus und es gilt  $h_0^- = h_1 \circ h_1^{-1} = \text{id}_{\mathbb{S}^3}$  und  $h_1^-(L_1) = h_0(h_1^{-1}(L_1)) = h_0(L_0) = L_0$ . Wir notieren  $\Sigma$  für den von  $h$  induzierten Link-Cobordismus von  $L_0$  nach  $L_1$  und  $\Sigma^-$  für den von  $h^-$  induzierten Link-Cobordismus von  $L_1$  nach  $L_0$ . Beachte: Für jedes  $t \in [0, 1]$  ist dann

$$\Sigma_t^- = h_t^-(L_1) = h_{1-t}(h_1^{-1}(L_1)) = h_{1-t}(L_0) = \Sigma_{1-t}.$$

Wir wollen nun zeigen, dass  $\Sigma^- \circ \Sigma$  isotop zum Zylinder  $L_0 \times [0, 1]$  ist. Die Idee ist, dass man ähnlich wie bei der Konstruktion für die Homotopien der inversen Elemente der Fundamentalgruppe vorgeht. Es ist also eine Link-Cobordismen-Isotopie  $\Psi$  gewünscht, welche für fixiertes  $s \in [0, 1]$  den Cobordismus  $\Sigma$  anschaulich nur bis  $\Sigma_s$  laufen lässt und mit  $\Sigma^-$  (von  $\Sigma_{1-s}^- = \Sigma_s$  aus) wieder zurück bis  $\Sigma_1^- = \Sigma_0$  läuft.

*Erster Versuch:*

Man betrachte die Abbildung  $\tilde{\Psi} : (\mathbb{S}^3 \times [0, 1]) \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^3 \times [0, 1]$  mit

$$\tilde{\Psi}(x, t, s) = \tilde{\Psi}_s(x, t) = \begin{cases} (h_{2st}(x), t), & \text{für } 0 \leq t \leq 1/2 \\ (h_{2s(1-t)}(x), t), & \text{für } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

für  $s \in [0, 1]$ . Diese erfüllt  $\tilde{\Psi}_0(x, t) = (h_0(x), t) = (x, t)$  und

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_1(L_0 \times [0, 1]) &= \left( \bigcup_{t \in [0, 1/2]} h_{2t}(L_0) \times \{t\} \right) \cup \left( \bigcup_{t \in [1/2, 1]} h_{2(1-t)}(L_0) \times \{t\} \right) \\ &= \left( \bigcup_{t \in [0, 1/2]} \Sigma_{2t} \times \{t\} \right) \cup \left( \bigcup_{t \in [1/2, 1]} \Sigma_{1-(2t-1)} \times \{t\} \right) \\ &= \left( \bigcup_{t \in [0, 1/2]} \Sigma_{2t} \times \{t\} \right) \cup \left( \bigcup_{t \in [1/2, 1]} \Sigma_{2t-1}^- \times \{t\} \right) = \Sigma^- \circ \Sigma. \end{aligned}$$

Wie in Beispiel 2.6 hat man jedoch das Problem, dass der Übergang in  $t = 1/2$  für die Cobordismen  $\tilde{\Psi}_s(L_0 \times [0, 1])$  im Allgemeinen nicht glatt ist (genauer ist der Übergang in  $t = 1/2$  nur dann für alle  $s \in [0, 1]$  glatt, wenn  $\Sigma$  der Zylinder-Cobordismus ist).

*Zweiter Versuch:*

Man löst dieses Problem ähnlich wie in 2.6 durch eine glatte Abbildung  $\rho : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  mit  $\rho|_{[0, \varepsilon]} = 0$  und  $\rho|_{(1-\varepsilon, 1]} = 1$ :

## 2. Cobordismen-Kategorien

Setze  $\Psi : \mathbb{S}^3 \times [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^3 \times [0, 1]$ ,

$$\Psi(x, t, s) = \Psi_s(x, t) = \begin{cases} (h_{s, \rho(2t)}(x), t), & \text{für } 0 \leq t \leq 1/2 \\ (h_{s, \rho(2(1-t))}(x), t), & \text{für } 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

dann ist  $\Psi$  eine glatte Abbildung mit  $\Psi_0 = \text{id}_{\mathbb{S}^3 \times [0, 1]}$  und

$$\Psi_1(L_0 \times [0, 1]) = \Sigma^- \circ \Sigma$$

(wobei  $\Sigma$  und  $\Sigma^-$  in diesem Fall für die durch  $\rho$  modifizierten Cobordismen zu  $h$  und  $h^-$  stehen, vergleiche 2.6). Damit ist tatsächlich  $L_0 \times [0, 1]$  isotop zu  $\Sigma^- \circ \Sigma$  und auf die selbe Art zeigt man, dass  $L_1 \times [0, 1]$  isotop zu  $\Sigma \circ \Sigma^-$  ist. Folglich sind  $\Sigma$  und  $\Sigma^-$  Isomorphismen in **Link** und es gilt die Behauptung.  $\square$

**Bemerkung 2.8.** (a) Proposition 2.7 ist einer der Gründe, weshalb man die Morphismen in **Link** als Cobordismen *bis auf Isotopie* definiert. Man hätte sonst außer Zylindern keine Isomorphismen und insbesondere wären zwei Links  $L_0 \neq L_1$ , welche vom selben Linktyp sind, nicht isomorph in **Link**.

(b) Sind  $L_0$  und  $L_1$  isomorph in **Link**, so kann man mit Hilfe des sogenannten *Mazur-Schwindels* zeigen, dass  $L_0 \times \mathbb{R}$  und  $L_1 \times \mathbb{R}$  isotop sind. Daraus kann man folgern, dass  $\mathbb{S}^3 \setminus L_0$  und  $\mathbb{S}^3 \setminus L_1$  homöomorph sind. Falls  $L_0$  und  $L_1$  Knoten sind, folgt daher mit dem *Theorem von Gordon und Luecke*, dass  $L_0$  und  $L_1$  vom selben Linktyp sind, d.h. für Knoten gilt auch die Umkehrung von Proposition 2.7.

Im Folgenden werden  $\mathbb{S}^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$  und  $\mathbb{S}^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$  betrachtet und wir erinnern uns an die Projektion  $\pi : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$ , welche auf  $\mathbb{R}^3$  durch  $(x, y, z) \mapsto (x, y) \in \mathbb{R}^2$  abbildet und zudem  $\infty \mapsto \infty$  erfüllt.

In ähnlicher Weise wie bei **Link** möchte man nun eine Kategorie, deren Objekte durch die Linkdiagramme  $D \subseteq \mathbb{S}^2$  gegeben sind, erklären. Auch hier stellt sich die Frage nach einem geeigneten Morphismenbegriff und daraufhin vor allem, welche Relationen zwischen den Morphismen dieser beiden Kategorien bestehen.

In Analogie zur Definition eines Linkdiagramms als Kringeldiagramm mit Kreuzungsinformation ist man nun versucht, eine *Kringelfläche zwischen zwei Linkdiagrammen* zu definieren. Mit Blick auf Cobordismen zwischen Links  $L$  und  $L'$  hätte man zu entsprechenden Linkdiagrammen  $D$  und  $D'$  gerne einen Begriff von Flächen in  $S \subseteq \mathbb{S}^2 \times [0, 1]$  mit

$$\partial S = D \times \{0\} \cup D' \times \{1\},$$

sodass Cobordismen zwischen  $L$  und  $L'$  (nach evtl. kleiner Störung) unter der Projektion  $\pi \times \text{id} : \mathbb{S}^3 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^2 \times [0, 1]$  gerade in solche Flächen  $S$  übergehen. Wie schon im Falle der Kreuzungspunkte bei Kringeldiagrammen muss man auch hier damit rechnen, dass diese Flächen Singularitäten haben. Es zeigt sich, dass folgendes die richtige Wahl ist:

**Definition 2.9.** Seien  $D, D' \subseteq \mathbb{S}^2$  Kringeldiagramme und  $S \subseteq \mathbb{S}^2 \times [0, 1]$  kompakt mit

$$S \cap (\mathbb{S}^2 \times \{0\}) = D$$

und

$$S \cap (\mathbb{S}^2 \times \{1\}) = D'.$$

Dann heißt  $S$  eine *Kringelfläche zwischen  $D$  und  $D'$* , falls jeder Punkt  $p \in S \cap \mathbb{S}^2 \times (0, 1)$  eine glatte, zentrierte Karte  $\tau : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  um  $p$  besitzt, sodass

$$\tau(U \cap S) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0\} \quad \text{oder} \quad (1)$$

$$\tau(U \cap S) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy = 0\} \quad \text{oder} \quad (2)$$

$$\tau(U \cap S) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xyz = 0\} \quad \text{oder} \quad (3)$$

$$\tau(U \cap S) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq 0, x^2 - y^2z = 0\} \quad (4)$$

gilt.

Punkte mit Karten wie in (1) heißen *reguläre Punkte von  $S$*  und die Menge der regulären Punkte notiert man mit  $R$ ,

Punkte mit Karten wie in (2) heißen *Kreuzungspunkte* und man notiert  $K$  für die Menge der Kreuzungspunkte,

Punkte mit Karten wie in (3) heißen *Tripelpunkte* und man notiert  $T$  für die Menge der Tripelpunkte und

Punkte mit Karten wie in (4) heißen *Whitney'sche Regenschirmpunkte*, mit der Notation  $W$  für die Menge der Whitney'schen Regenschirmpunkte.

Zusammengefasst nennt man  $K \cup T \cup W$  die *Menge der Singularitäten von  $S$* .

**Bemerkung 2.10.** (a) Ähnlich wie für die Kreuzungspunkte von Kringeldiagrammen kann man aufgrund der Kompaktheit von  $S$  zeigen, dass die Mengen  $T$  und  $W$  der Tripelpunkte und Whitney'schen Regenschirmpunkte endliche Mengen sind.

(b) Ferner ist  $K$  vermöge der Karten  $\tau$  aus (2) eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit.

Für deren (topologischen) Abschluss  $\bar{K}$  in  $\mathbb{S}^2 \times (0, 1)$  gilt

$$\bar{K} = K \cup T \cup W.$$

## 2. Cobordismen-Kategorien

- (c) Schließlich geben die Karten aus (1) der Menge  $R$  der regulären Punkte von  $S$  die Struktur einer zweidimensionalen Untermannigfaltigkeit. Hierbei gilt

$$\bar{R} = R \cup K \cup T \cup W.$$

**Motivation 2.11.** Man stellt dann jedoch fest, dass dies noch nicht genügt; so muss man zum Beispiel noch verlangen, dass für ein  $\delta > 0$  sogar

$$S \cap \mathbb{S}^2 \times [0, \delta] = D \times [0, \delta] \quad \text{und}$$

$$S \cap \mathbb{S}^2 \times (1 - \delta] = D \times (1 - \delta]$$

gilt, um solche Flächen „glatt“ aneinanderreihen zu können.

Möchte man außerdem noch eine elegante (graphische) Darstellung dieser Flächen, so ist es sinnvoll zu verlangen, dass die Abbildung  $\mathbb{S}^2 \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  auf  $R$  und auch auf  $K$  eine *Morse-Funktion* ist (vgl. Anhang, Definition A.1), und dass dann für jedes  $t \in [0, 1]$  höchstens ein Tripelpunkt, Whitneyscher Regenschirmpunkt oder kritischer Punkt der Morse-Funktionen auf  $R$  und  $K$  vorliegt. Man kann dann zeigen, dass es nur endlich viele solcher  $t_i$  geben kann. Es folgt dann, dass in allen anderen  $t \in [0, 1]$  die Menge  $S_t := S \cap \mathbb{S}^2 \times \{t\}$  tatsächlich ein Kringeldiagramm ist.

Aber auch dann ist man noch nicht fertig: Möchte man solche Flächen als Morphismen zwischen *Linkdiagrammen* oder gar *orientierten Linkdiagrammen* begreifen, so muss man außerdem noch klären, wie eine solche Fläche eine Kreuzungsinformation und ggf. eine Orientierung von Linkdiagrammen transportiert.

Wir gehen daher anders vor und definieren die Morphismen nach dem Vorbild von Carter und Saito (vgl. [9]) mit Hilfe von Projektionen von Link-Cobordismen, um die geforderten Eigenschaften zu erhalten.

**Proposition 2.12.** *Sei  $\Sigma \subseteq \mathbb{S}^3 \times [0, 1]$  ein Link-Cobordismus zwischen zwei Links  $L_0$  und  $L_1$  und  $\pi : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$  sei regulär für  $L_0$  und  $L_1$ . Dann existiert eine Link-Cobordismen-Isotopie  $h$ , sodass*

$$S := (\pi \times \text{id})(h_1(\Sigma)) \subseteq \mathbb{S}^2 \times [0, 1]$$

*eine Kringelfläche zwischen  $\pi(L_0)$  und  $\pi(L_1)$  ist.*

*Beweis.* Nach Definition ist  $\Sigma \subseteq \mathbb{S}^3 \times [0, 1]$  eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit (allerdings mit Rand), also eine Einbettung der Codimension 2 in  $\mathbb{S}^3 \times [0, 1]$ . Wie in 1.26 folgt daher auch hier die Aussage aus Theorem 4.3 von [23]. Vergleiche aber auch mit dem zweiten Abschnitt aus [9], insbesondere für die Zerlegung der Singularitäten in Doppel-, Kreuzungs-, Tripel- und Whitney'sche Regenschirmpunkte.  $\square$



**Bemerkung 2.13.** Im dritten Abschnitt ihres Artikels [9] beweisen Carter und Saito darüber hinaus noch mehr:

- (i) Man darf annehmen, dass eine Isotopie  $h$  den Link-Cobordismus  $\Sigma$  so deformiert, dass die *Höhenfunktion*

$$\hat{f} : \mathbb{S}^3 \times [0, 1] \rightarrow [0, 1], \quad (x, t) \mapsto t$$

eine Morse-Funktion auf  $h_1(\Sigma)$  ist und

$$f : \mathbb{S}^2 \times [0, 1] \rightarrow [0, 1], \quad (x, t) \mapsto t$$

als Abbildung auf der Kringelfläche  $S = (\pi \times \text{id})(h_1(\Sigma))$  betrachtet jeweils eine Morse-Funktion auf  $R$  und auf  $K$  ergibt. Genauer ist dies eine Folgerung aus Theorem 3.1 in [9].

- (ii) Bezeichnet  $\text{crit}(f)$  die Menge der kritischen Punkte einer Morse-Funktion  $f$ , so kann man darüber hinaus erreichen, dass die Mengen  $T$ ,  $W$ ,  $\text{crit}(f|_R)$  und  $\text{crit}(f|_K)$  paarweise disjunkt und endlich sind und somit insbesondere

$$T \cup W \cup \text{crit}(f|_R) \cup \text{crit}(f|_K)$$

eine isolierte Menge ist.

- (iii) In einem letzten Schritt kann man nun außerdem annehmen, dass für jedes  $t \in (0, 1)$  höchstens ein Element der Menge  $T \cup W \cup \text{crit}(f|_R) \cup \text{crit}(f|_K)$  in  $S_t = S \cap (\mathbb{S}^2 \times \{t\})$  liegt.

**Definition 2.14.** Kann man für einen Link-Cobordismus  $\Sigma$  als Link-Cobordismen-Isotopie die Identität wählen,  $h = \text{id}$ , sodass all die Eigenschaften wie in 2.13 gelten, so nennt man  $\Sigma$  einen *Link-Cobordismus in allgemeiner Lage*. Man nennt dann ein  $t$  mit  $S_t \cap (T \cup W \cup \text{crit}(f|_R) \cup \text{crit}(f|_K)) \neq \emptyset$  ein *kritisches Niveau von  $S = (\pi \times \text{id})(\Sigma)$*  und einen Punkt  $p \in T \cup W \cup \text{crit}(f|_R) \cup \text{crit}(f|_K)$  mit  $f(p) = t$  einen *kritischen Punkt von  $S$  zum Niveau  $t$* .

**Kommentar 2.15.** Die Bezeichnung *allgemeine Lage* rührt daher, dass bezüglich einer geeigneten Topologie auf der Menge der Link-Cobordismen-Isotopien diejenigen Link-Cobordismen-Isotopien, welche obige Bedingungen erfüllen, eine offene und dichte Teilmenge bilden, siehe den Beweis von Theorem 3.1 in [9]. Man sagt daher auch, dass ein *generischer* Link-Cobordismus  $\Sigma$  diese Eigenschaften besitzt. Es ist sozusagen „Pech“, wenn ein Link-Cobordismus  $\Sigma$  die Eigenschaften von  $h_1(\Sigma)$  aus 2.13 nicht selbst schon hat, sondern durch eine nichttriviale Link-Cobordismen-Isotopie  $h$  deformiert werden muss.

## 2. Cobordismen-Kategorien

**Lemma 2.16.** Sei  $\Sigma \subseteq \mathbb{S}^3 \times [0, 1]$  ein Link-Cobordismus in allgemeiner Lage und  $S = (\pi \times \text{id})(\Sigma)$  die zugehörige Kringelfläche. Seien  $t_1 < \dots < t_l \in (0, 1)$  die kritischen Niveaus von  $S$ . Dann ist für jedes  $t \in [0, 1] \setminus \{t_1, \dots, t_l\}$  die Menge  $S_t = S \cap (\mathbb{S}^2 \times \{t\})$  ein Kringeldiagramm in  $\mathbb{S}^2 \cong \mathbb{S}^2 \times \{t\}$ .

*Beweis.* Nach Definition gilt die Aussage für  $t = 0, 1$ , denn hier gilt  $S_0 = \pi(L_0)$  bzw.  $S_1 = \pi(L_1)$ . Sei für eine Menge  $A \in \mathbb{S}^2 \times (0, 1)$  und ein  $t \in (0, 1)$  mit  $A_t$  die Menge  $A_t = A \cap (\mathbb{S}^2 \times \{t\})$  bezeichnet. Für  $t \in (0, 1) \setminus \{t_1, \dots, t_l\}$  gilt dann

$$S_t = R_t \cup K_t,$$

denn es ist  $T_t = W_t = \emptyset$ , weil  $t$  kein kritisches Niveau von  $S$  ist. Zudem liegen in  $R_t$  keine kritischen Punkte von  $f|_R$ , wodurch der Schnitt  $R_t = R \cap (\mathbb{S}^2 \times \{t\})$  transversal ist und somit  $R_t$  eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{S}^2 \times \{t\}$  ist. Der topologische Abschluss von  $R_t$  in  $\mathbb{S}^2 \times \{t\}$  muss aus  $R_t$  vereinigt mit Punkten von  $K_t \cup T_t \cup W_t$  bestehen, weil  $\bar{R} = R \cup K \cup T \cup W$  in  $\mathbb{S}^2 \times [0, 1]$  gilt. Wegen  $T_t = W_t = \emptyset$  folgt dann  $\bar{R}_t = R_t \cup K_t$ , wobei die Punkte aus  $K_t$  transversale Schnittpunkte von  $\bar{R}_t$  sind (wegen (2) aus 2.9 und weil  $f|_R$  und  $f|_K$  keine kritischen Punkte im Niveau  $\{t\}$  haben). Die Endlichkeit von  $K_t$  ist wiederum ein Kompaktheitsargument und insgesamt folgt dann, dass  $S_t$  tatsächlich ein Kringeldiagramm ist.  $\square$

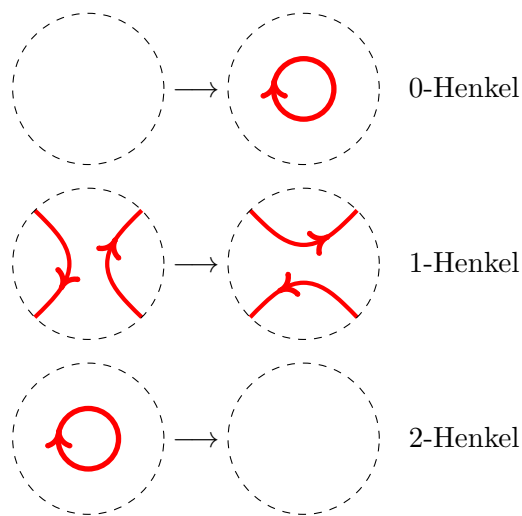
**Kommentar 2.17.** (i) Sei  $\Sigma \subseteq \mathbb{S}^3 \times [0, 1]$  ein Link-Cobordismus in allgemeiner Lage und  $S = (\pi \times \text{id})(\Sigma)$  die zugehörige Kringelfläche. Man kann zeigen, dass die kritischen Punkte der Morse-Funktion  $\hat{f}$  auf  $\Sigma$  unter  $\pi \times \text{id} : \mathbb{S}^3 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^2 \times [0, 1]$  auf kritische Punkte von  $f|_R$  projiziert werden. Daher trägt insbesondere für  $t \in [0, 1] \setminus \{t_1, \dots, t_l\}$  jedes  $\Sigma_t = \Sigma \cap \mathbb{S}^3 \times \{t\} \subseteq \mathbb{S}^3 \times \{t\}$  die Struktur einer eingebetteten eindimensionalen (kompakten) Mannigfaltigkeit, d.h.  $\Sigma_t \subseteq \mathbb{S}^3 \times \{t\} \cong \mathbb{S}^3$  ist ein Link in  $\mathbb{S}^3$ . Die Orientierung von  $\Sigma$  induziert dann eine Orientierung auf  $\Sigma_t$ , welche für  $t \in \{0, 1\}$  mit den Orientierungen von  $L_0$  und  $L_1$  übereinstimmt.

(ii) Ist  $t \in [0, 1] \setminus \{t_1, \dots, t_l\}$ , so ist die Projektion  $\pi : \mathbb{S}^3 \times \{t\} \rightarrow \mathbb{S}^2 \times \{t\}$  regulär für  $\Sigma_t$  und es gilt gerade  $\pi(\Sigma_t) = S_t$ . Daher induziert ein Link-Cobordismus  $\Sigma$  in allgemeiner Lage außerhalb der kritischen Niveaus der Kringelfläche  $S$  Orientierungen der Kringeldiagramme  $S_t$ .

(iii) Außerdem induziert die reguläre Projektion außerhalb der kritischen Niveaus von  $S$  auch Kreuzungsinformationen  $\xi_t$  für  $S_t$ . Insgesamt liefert ein Link-Cobordismus in allgemeiner Lage also für jedes  $t \in [0, 1] \setminus \{t_1, \dots, t_l\}$  ein orientiertes Linkdiagramm  $(S_t, \xi_t)$ .

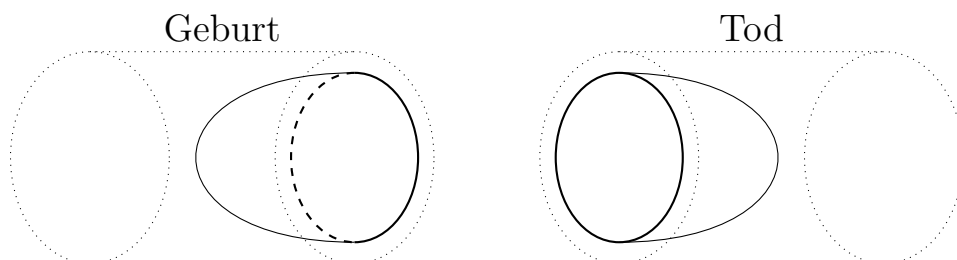
- (iv) Man kann nun zeigen, dass für Intervalle  $[r, s] \subseteq [0, 1]$  mit  $[r, s] \cap \{t_1, \dots, t_l\} = \emptyset$  die Deformation  $(S_t)_{t \in [r, s]}$  durch eine ebene Isotopie realisiert werden kann.
- (v) Die letzte verbleibende Frage ist also, wie sich die Linkdiagramme  $S_t$  beim Übergang von kritischen Niveaus  $t \in \{t_1, \dots, t_l\}$  verhalten.

**Definition 2.18.** Seien  $D, D' \subseteq \mathbb{S}^2$  Linkdiagramme. Man sagt,  $D$  geht durch eine *lokale Bewegung* in  $D'$  über, falls  $D$  und  $D'$  außerhalb einer Kreisscheibe übereinstimmen und innerhalb dieser Kreisscheibe entweder durch eine Reidemeister-Bewegung (siehe 1.32) oder durch ein (*orientiertes*) *diagrammatisches Ankleben eines 0-, 1- oder 2-Henkels* ineinander übergehen:



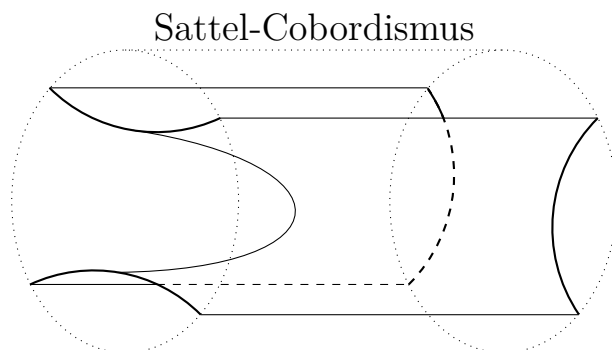
Das Ankleben eines Henkels nennt man auch *Morse-Modifikation*.

**Bemerkung 2.19.** Der Begriff Morse-Modifikation ergibt sich, weil man solche als (lokale) Cobordismen in Zylindern  $B \times [0, 1]$  über einer Scheibe  $B$  auffassen kann. Genauer kann eine Morse-Modifikation durch eine Fläche  $S \subseteq B \times [0, 1]$  beschrieben werden, für die  $f = \text{pr}_2 : B \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  eine Morse-Funktion auf  $S$  mit genau einem kritischen Punkt  $p \in S$  ist. Der *Index*  $\text{ind}_p(f) \in \{0, 1, 2\}$  (siehe Anhang, Definition A.1) gibt dann gerade an, um welchen Henkel es sich handelt. Das Ankleben eines 0-Henkels bzw. das Ankleben eines 2-Henkels in einer Scheibe  $B \subseteq \mathbb{S}^2$  nennt man auch *Geburt* bzw. *Tod einer Komponente*. Dies wird realisiert durch Cobordismen  $S \subseteq B \times [0, 1]$  von folgender Gestalt:



## 2. Cobordismen-Kategorien

Das Ankleben eines 1-Henkels hat eine etwas herausragende Position, denn hier geschieht tatsächlich eine Interaktion mit den bereits bestehenden Linkdiagrammen. Man spricht manchmal auch von einem *Sattel-Cobordismus*; dieser ist von folgender Gestalt:



**Proposition 2.20.** Sei  $\Sigma \subseteq \mathbb{S}^3 \times [0, 1]$  ein Link-Cobordismus in allgemeiner Lage und

$$S = (\pi \times \text{id})(\Sigma) \subseteq \mathbb{S}^2 \times [0, 1]$$

die zugehörige Kringelfläche mit kritischen Niveaus  $\{t_1, \dots, t_l\}$ . Dann existiert für jedes kritische Niveau  $t_i$  ( $i = 1, \dots, l$ ) ein  $\delta_i > 0$ , sodass für jedes  $\delta < \delta_i$  der Übergang vom Linkdiagramm  $S_{t_i-\delta}$  zum Linkdiagramm  $S_{t_i+\delta}$  eine lokale Bewegung ist. Genauer gilt: Ist  $p$  ein kritischer Punkt von  $S$  zum Niveau  $t_i$ , so ist der Übergang von  $S_{t_i-\delta}$  zu  $S_{t_i+\delta}$  gegeben durch

- (a) eine (RM3)-Bewegung in einer Scheibe um  $\text{pr}_1(p)$ , falls  $p$  ein Tripelpunkt von  $S$  ist,  $p \in T$ ,
- (b) eine (RM1)-Bewegung in einer Scheibe um  $\text{pr}_1(p)$ , falls  $p$  ein Whitney'scher Regenschirmpunkt von  $S$  ist,  $p \in W$ ,
- (c) eine (RM2)-Bewegung in einer Scheibe um  $\text{pr}_1(p)$ , falls  $p$  ein kritischer Punkt der Morse Funktion  $f|_K$  ist,  $p \in \text{crit}(f|_K)$ ,
- (d) eine Morse-Modifikation in einer Scheibe um  $\text{pr}_1(p)$ , falls  $p$  ein kritischer Punkt der Morse Funktion  $f|_R$  ist,  $p \in \text{crit}(f|_R)$ . Hierbei gilt noch präziser:
  - (i) Falls  $\text{ind}_p(f|_R) = 0$ , so entspricht der Übergang von  $S_{t_i-\delta}$  zu  $S_{t_i+\delta}$  dem Ankleben eines 0-Henkels;
  - (ii) falls  $\text{ind}_p(f|_R) = 1$ , so entspricht der Übergang von  $S_{t_i-\delta}$  zu  $S_{t_i+\delta}$  dem Ankleben eines 1-Henkels;
  - (iii) falls  $\text{ind}_p(f|_R) = 2$ , so entspricht der Übergang von  $S_{t_i-\delta}$  zu  $S_{t_i+\delta}$  dem Ankleben eines 2-Henkels.

*Beweis.* Die Aussage ergibt sich aus Theorem 5.2 von [9]. Beachte auch die vorausgehende Diskussion ebenda (und speziell Abschnitt 3 über die Morse-Funktionen).  $\square$

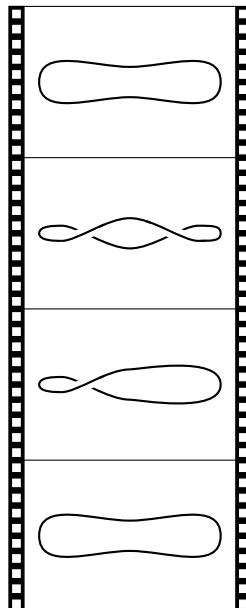
**Definition 2.21.** Seien  $D_0, D_1 \subseteq \mathbb{S}^2$  Linkdiagramme und  $\Sigma \subseteq \mathbb{S}^3 \times [0, 1]$  ein Link-Cobordismus in allgemeiner Lage zwischen zwei Links  $L_0$  und  $L_1$  mit  $\pi(L_0) = D_0$  und  $\pi(L_1) = D_1$ . Sei  $\{t_1, \dots, t_l\}$  die Menge der kritischen Niveaus der Kringelfläche  $S = (\pi \times \text{id})(\Sigma)$  und für  $t \in [0, 1] \setminus \{t_1, \dots, t_l\}$  sei  $(S_t, \xi_t)$  das von  $\Sigma$  induzierte orientierte Linkdiagramm.

Dann nennt man das Paar  $M_\Sigma := \left( S, (S_t, \xi_t)_{t \in [0, 1] \setminus \{t_1, \dots, t_l\}} \right)$  einen *Movie von  $D_0$  nach  $D_1$* .

**Kommentar 2.22.** Ein Movie besteht also aus der Angabe einer Kringelfläche  $S$  und der Angabe einer Linkdiagramm-Struktur auf  $S_t$  außerhalb singulärer Niveaus. Zudem stellt die Definition sicher, dass die Linkdiagramm-Struktur für variierendes  $t$  nur durch ebene Isotopie oder durch lokale Bewegungen variiert. Dies ermöglicht nun die gewünschte graphische Darstellung:

**Bemerkung 2.23.** Da sich die Linkdiagramme  $(S_t, \xi_t)$  auf dem offenen Intervall zwischen zwei benachbarten kritischen Niveaus nur um ebene Isotopien unterscheiden, werden Movies zwischen Linkdiagrammen  $D_0$  und  $D_1$  meist als eine endliche Abfolge von Linkdiagrammen dargestellt, beginnend mit  $D_0$ , endend mit  $D_1$  und dazwischen für jedes Intervall zwischen zwei kritischen Niveaus einem weiteren Linkdiagramm.

Hier folgt ein Beispiel für die Darstellung eines Movie, wie diese in der Literatur häufig auftauchen. Es handelt sich um einen Movie mit drei kritischen Niveaus (eine RM2-Bewegung gefolgt von zwei RM1-Bewegungen):



## 2. Cobordismen-Kategorien

**Kommentar 2.24.** Dies gibt einen Einblick für die Wahl des Begriffs „Movie“: Die stetige (sogar glatte) Deformation  $(S_t)_{t \in [0,1]}$  eines Linkdiagramms wird annähernd präzise wiedergegeben durch eine Aneinanderreihung mehrerer diskret in dieser Deformation auftauchender Linkdiagramme, so wie (für das menschliche Auge) ein Bewegtbild genügend gut approximiert wird durch eine schnelle Abfolge von jeweils leicht variierenden Standbildern.

Ähnlich wie man die Äquivalenz zweier Links in Termen von zugehörigen Linkdiagrammen und Reidemeister-Bewegungen ausdrücken kann (siehe 1.33), wünscht man nun, die Isotopie zweier Link-Cobordismen durch Äquivalenz zweier zugehöriger Movies ausdrücken zu können. Die Frage nach den geeigneten Analoga zu den Reidemeister-Bewegungen für Movies wird von Carter und Saito durch die *movie moves* beantwortet (für die Definition dieser siehe die Abschnitte 6 und 7 in [9]).

**Definition 2.25.** Zwei Movies  $M$  und  $M'$  werden als *äquivalent* bezeichnet, wenn sie durch eine endliche Abfolge von movie moves ineinander überführt werden können. Dies definiert eine Äquivalenzrelation (denn die Vereinigung zweier endlicher Mengen bleibt endlich) und man notiert  $[M]$  für die Äquivalenzklasse eines Movies  $M$ .

Das zum Reidemeister-Theorem analoge Theorem ist das Folgende:

**Theorem 2.26.** Seien  $L_0, L_1 \subseteq \mathbb{S}^3$  Links mit Diagrammen  $D_0, D_1 \subseteq \mathbb{S}^2$ . Seien weiter  $\Sigma$  und  $\Sigma'$  Cobordismen von  $L_0$  nach  $L_1$  und  $M_{h_1(\Sigma)}$  und  $M_{h'_1(\Sigma')}$  mit geeigneten Link-Cobordismen-Isotopien  $h, h'$  Movies von  $D_0$  nach  $D_1$ . Dann sind  $\Sigma$  und  $\Sigma'$  genau dann isotop, wenn  $M_{h_1(\Sigma)}$  und  $M_{h'_1(\Sigma')}$  äquivalente Movies sind.

*Beweis.* Dies ist die zentrale Aussage der Arbeit von Carter und Saito, Theorem 7.1 in [9].  $\square$

Wie schon bei den Link-Cobordismen lassen sich zwei Movies durch Aneinanderfügen verketteten. Und auch hier gibt es zu jedem Linkdiagramm  $(D, \xi)$  einen natürlichen Movie, den *Zylinder-Movie*  $(D \times [0, 1], (D, \xi)_{t \in [0,1]})$  über  $(D, \xi)$ .

**Proposition und Definition 2.27.** Mit **Diag** sei die Kategorie der Linkdiagramme bezeichnet, deren Objekte die orientierten Linkdiagramme in  $\mathbb{S}^2$  und deren Morphismen Äquivalenzklassen  $[M]$  von Movies  $M$  sind. Die Verkettung zweier Morphismen geschieht dabei repräsentantenweise und ist wohldefiniert.

*Beweisskizze:* Ähnlich wie bei der Kategorie der Link-Cobordismen sieht man auch hier, dass die Äquivalenzklassen der Zylinder-Movies geeignete Identitätsmorphismen liefern und die Äquivalenzklasse zweier aneinandergefügtter Movies nicht von den Repräsentanten selbst abhängt, sondern nur von deren jeweiliger Äquivalenzklasse.  $\square$

Es soll nun noch geklärt werden, in welcher Beziehung die Kategorien **Link** und **Diag** zueinander stehen.

**Definition 2.28.** Eine *Link-Repräsentantenwahl*  $\alpha$  ist eine Zuordnung, die jedem Link  $L \subseteq \mathbb{S}^3$  eine glatte Umgebungsisotopie  $\phi_L^\alpha$  so zuordnet, dass  $L$  durch  $\phi_L^\alpha$  in einen Link  $\phi_L^\alpha(L)$  überführt wird, für den die Projektion  $\pi : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$  regulär ist.

**Bemerkung 2.29.** (a) Proposition 1.28 erlaubt es,  $\pi(\phi_L^\alpha(L))$  als Linkdiagramm für  $\phi_L^\alpha(L)$  zu betrachten.

(b) Die Existenz von Umgebungsisotopien  $\phi_L^\alpha$  wird durch 1.26 sichergestellt. Man beachte außerdem (siehe Beispiel 2.6), dass eine solche Umgebungsisotopie einen Link-Cobordismus zwischen  $L$  und  $\phi_L^\alpha(L)$  induziert, welcher nun ebenfalls mit  $\phi_L^\alpha$  bezeichnet wird. Man hat also einen Morphismus  $[\phi_L^\alpha] \in \text{Mor}(L, \phi_L^\alpha(L))$  in der Kategorie **Link**.

(c) Genauso induziert die rückwärts durchlaufene Umgebungsisotopie einen Cobordismus  $(\phi_L^\alpha)^{-1}$  und es ist tatsächlich  $(\phi_L^\alpha)^{-1} \circ \phi_L^\alpha$  isotop zum Zylinder  $L \times [0, 1]$ , d.h.  $[\phi_L^\alpha]$  ist ein Isomorphismus in **Link**, siehe Proposition 2.7.

Sind nun  $L_0, L_1 \subseteq \mathbb{S}^3$  Links und  $[S] \in \text{Mor}(L_0, L_1)$ , so betrachten wir nun

$$[\phi_{L_1}^\alpha \circ S \circ (\phi_{L_0}^\alpha)^{-1}] \in \text{Mor}(\phi_{L_0}^\alpha(L_0), \phi_{L_1}^\alpha(L_1)).$$

**Erinnerung 2.30.** Es gibt einen Repräsentanten  $\tilde{S}$  von  $[\phi_{L_1}^\alpha \circ S \circ (\phi_{L_0}^\alpha)^{-1}]$ , welcher ein Link-Cobordismus in allgemeiner Lage ist (siehe 2.13). Daher hat man nach Definition 2.21 einen Movie  $M_{\tilde{S}}$  von  $D_0 = \pi(\phi_{L_0}^\alpha(L_0))$  nach  $D_1 = \pi(\phi_{L_1}^\alpha(L_1))$ .

**Proposition und Definition 2.31.** Es sei  $\Pi_\alpha : \mathbf{Link} \rightarrow \mathbf{Diag}$  auf Objekten von **Link** gegeben durch

$$\Pi_\alpha(L) := \pi(\phi_L^\alpha(L))$$

und auf Morphismen von **Link** durch

$$\Pi_\alpha([S]) := [M_{\tilde{S}}]$$

(wobei  $L, L_0, L_1 \subseteq \mathbb{S}^3$  Links und  $[S] \in \text{Mor}(L_0, L_1)$  und  $M_{\tilde{S}}$  wie oben). Dann ist  $\Pi_\alpha$  ein Funktor.

*Beweis.* Es ist zu prüfen, dass  $\Pi_\alpha$  auf Morphismen wohldefiniert ist und die Funktoreigenschaften erfüllt. Die Wohldefiniertheit auf Morphismen folgt gerade aus dem Theorem 2.26 von Carter und Saito, wonach eine andere Wahl eines Repräsentanten einen äquivalenten

## 2. Cobordismen-Kategorien

Movie liefert. Ferner sieht man, da  $\phi_L^\alpha \circ (\phi_L^\alpha)^{-1}$  isotop zum Zylinder  $\phi_L^\alpha(L) \times [0, 1]$  ist, dass die Äquivalenzklasse eines Zylinders  $L \times [0, 1]$  auf die Äquivalenzklasse des konstanten Movies  $\pi(\phi_L^\alpha(L)) \times [0, 1]$  abgebildet wird. Ähnlich lässt sich auch die Verträglichkeit mit Verkettungen nachvollziehen.  $\square$

Hat man zwei verschiedene Link-Repräsentantenwahlen  $\alpha$  und  $\beta$  vorliegen, so vertragen sich die zugehörigen Funktoren  $\Pi_\alpha, \Pi_\beta$  in einem schönen kategorientheoretischen Sinn. Wir erinnern daher an einige Begriffe aus der Kategorientheorie:

**Erinnerung 2.32.** Seien  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  Kategorien.

- (a) Der Funktor  $I_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ , welcher jedem Objekt und jedem Morphismus in  $\mathcal{C}$  sich selbst zuweist, heißt *Identitätsfunctor auf  $\mathcal{C}$* .
- (b) Ein Funktor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  heißt *wesentlich surjektiv*, falls zu jedem Objekt  $D \in \mathcal{D}$  ein  $C \in \mathcal{C}$  existiert, sodass  $F(C)$  in  $\mathcal{D}$  isomorph zu  $D$  ist. Weiter heißt  $F$  *volltreu*, falls für jedes Paar  $(A, B)$  von Objekten aus  $\mathcal{C}$  die Abbildung

$$F_{A,B} : \text{Mor}(A, B) \rightarrow \text{Mor}(F(A), F(B))$$

mit

$$F_{A,B}(\varphi) := F(\varphi)$$

bijektiv ist.

- (c) Seien  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  und  $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  Funktoren. Eine *natürliche Transformation von  $F$  nach  $G$*  ist eine Zuordnung  $\theta$ , welche jedem Objekt  $C \in \mathcal{C}$  einen Morphismus

$$\theta_C : F(C) \rightarrow G(C)$$

derart zuweist, dass für jeden Morphismus  $\varphi : C_1 \rightarrow C_2$  von Objekten  $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$  gilt:

$$\theta_{C_2} \circ F(\varphi) = G(\varphi) \circ \theta_{C_1}.$$

- (d) Zwei Funktoren  $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  heißen *natürlich isomorph*, falls es natürliche Transformationen  $\theta$  von  $F$  nach  $G$  und  $\eta$  von  $G$  nach  $F$  gibt, sodass für jedes  $C \in \mathcal{C}$

$$\eta_C \circ \theta_C = \text{id}_{F(C)}$$

und

$$\theta_C \circ \eta_C = \text{id}_{G(C)}$$

gilt. Die natürlichen Transformationen  $\theta$  und  $\eta$  heißen (zueinander inverse) *natürliche Isomorphismen* von  $F$  nach  $G$  bzw. von  $G$  nach  $F$ .



(e) Eine (natürliche) Äquivalenz von Kategorien  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{D}$  ist ein Funktor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ , für den ein Funktor  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  existiert, sodass  $G \circ F$  natürlich isomorph zum Identitätsfunktor  $I_{\mathcal{C}}$  und  $F \circ G$  natürlich isomorph zum Identitätsfunktor  $I_{\mathcal{D}}$  ist.

(f) Es gilt dann die Aussage, dass ein Funktor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  genau dann eine Äquivalenz von Kategorien ist, wenn er wesentlich surjektiv und volltreu ist.

**Proposition 2.33.** *Seien  $\alpha$  und  $\beta$  zwei Link-Repräsentantenwahlen. Dann sind die zugehörigen Funktoren  $\Pi_{\alpha}$  und  $\Pi_{\beta}$  natürlich isomorph.*

*Beweis.* Sei  $L$  ein Link. Betrachte dann den Cobordismus

$$\Sigma := \phi_L^{\beta} \circ (\phi_L^{\alpha})^{-1}$$

von  $\phi_L^{\alpha}(L)$  nach  $\phi_L^{\beta}(L)$ . O.B.d.A. sei  $\Sigma$  in allgemeiner Lage. Dann repräsentiert der Movie  $M_{\Sigma}$  einen Morphismus von  $\Pi_{\alpha}(L) = \pi(\phi_L^{\alpha}(L))$  nach  $\Pi_{\beta}(L) = \pi(\phi_L^{\beta}(L))$  in **Diag**. Wir setzen dann

$$\theta_{\beta}^{\alpha}(L) := [M_{\Sigma}] \in \text{Mor}(\Pi_{\alpha}(L), \Pi_{\beta}(L)).$$

Dann ist  $\theta_{\beta}^{\alpha}$  eine natürliche Transformation. Es ist  $\theta_{\beta}^{\alpha}$  sogar ein natürlicher Isomorphismus mit inversem natürlichen Isomorphismus  $\theta_{\alpha}^{\beta}$  (vgl. Proposition 2.13 in [2]).  $\square$

**Bemerkung 2.34.** Es gilt zudem

$$\theta_{\gamma}^{\alpha} = \theta_{\gamma}^{\beta} \circ \theta_{\beta}^{\alpha}$$

für die natürlichen Isomorphismen  $\theta_{\gamma}^{\alpha}, \theta_{\gamma}^{\beta}, \theta_{\beta}^{\alpha}$  zu drei Link-Repräsentantenwahlen  $\alpha, \beta$  und  $\gamma$ .

**Proposition 2.35.** *Für jede Link-Repräsentantenwahl  $\alpha$  ist der Funktor*

$$\Pi_{\alpha} : \mathbf{Link} \rightarrow \mathbf{Diag}$$

*eine Äquivalenz von Kategorien.*

*Beweis.* Da die Funktoren  $\Pi_{\alpha}$  natürlich isomorph sind, genügt es, die Aussage für *eine* Wahl  $\alpha$  zu zeigen. Wähle nun  $\alpha$  so, dass  $\phi_L^{\alpha} = L \times [0, 1]$  (die triviale Isotopie) für alle Links  $L \subseteq \mathbb{S}^3$ , für die  $\pi$  bereits regulär ist. Dann ist  $\Pi_{\alpha}$  auf den Objekten surjektiv nach Lemma 1.29. Ferner ist für Links  $L_0, L_1$  die Abbildung  $\Pi_{\alpha} : \text{Mor}(L_0, L_1) \rightarrow \text{Mor}(\Pi_{\alpha}(L_0), \Pi_{\alpha}(L_1))$  bijektiv: Die Surjektivität liegt in der Definition der Movies begründet, Injektivität ist abermals auf das Theorem [9] von Carter und Saito zurückzuführen. Insgesamt ist  $\Pi_{\alpha}$  also ein (wesentlich) surjektiver, volltreuer Funktor und somit eine Äquivalenz von Kategorien.  $\square$



### 3. Khovanov-Homologie

In diesem Abschnitt soll erklärt werden, wie man für ein orientiertes Linkdiagramm  $D \subseteq \mathbb{S}^2$  einen Co-Kettenkomplex gewinnen kann, indem man eine topologische Quantenfeldtheorie (kurz: TQFT) geschickt auf die vollständigen Glättungen von  $D$  anwendet. Später soll aufgezeigt werden, wie die Homologie dieses Co-Kettenkomplexes (bezeichnet als Khovanov-Homologie) als funktorielle Linktypinvariante

$$Kh : \mathbf{Diag} \rightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$$

bzw.

$$Kh : \mathbf{Link} \rightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$$

verstanden werden kann. Zunächst sollen allerdings die benötigten Konzepte vorgestellt und erklärt werden.

**Definition 3.1.** Eine *monoidale Kategorie* ist eine Kategorie  $\mathcal{C}$  mit einem Bifunktor

$$\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C},$$

der (bis auf natürliche Isomorphie) assoziativ ist. Zusätzlich soll es in  $\mathcal{C}$  ein Objekt  $I$  geben, welches (wiederum bis auf natürliche Isomorphie) für alle Objekte  $A$  aus  $\mathcal{C}$  rechts- und linksneutral ist, d.h.

$$I \otimes A \cong A \cong A \otimes I.$$

$I$  heißt dann *neutrales Objekt bezüglich  $\otimes$* .

**Beispiel 3.2.** (a) Die Kategorie  $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$  der Vektorräume über einem Körper  $\mathbb{K}$  mit dem Tensorprodukt als Bifunktor und dem Vektorraum  $\mathbb{K}$  als neutralem Objekt bildet eine monoidale Kategorie.

(b) Die Kategorie  $\mathbf{Link}$  könnte man zu einer monoidalen Kategorie machen, indem man die disjunkte Vereinigung  $\sqcup$  von orientierten Links auf Isotopieklassen von Link-Cobordismen erweitert und dann  $\sqcup$  als Bifunktor erhält. Ähnlich könnte man auch bei der Kategorie  $\mathbf{Diag}$  vorgehen.

### 3. Khovanov-Homologie

- (c) Ein weiteres wichtiges Beispiel ist die Kategorie  $\mathbf{Cob}_2$  der zweidimensionalen Cobordismen (vergleiche den vierten Abschnitt aus [1]): Die Objekte dieser Kategorie sind disjunkte Vereinigungen von kompakten eindimensionalen Mannigfaltigkeiten. Ein Tripel  $(W, M, N)$ , sodass  $W$  eine zweidimensionale (orientierbare) Mannigfaltigkeit mit Rand ist,  $M$  und  $N$  eindimensionale Mannigfaltigkeiten und ferner

$$\partial W = M \dot{\cup} N$$

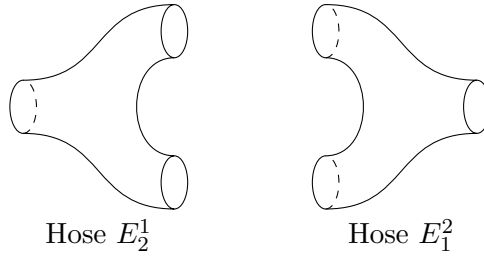
gilt, nennen wir *Cobordismus von  $M$  nach  $N$* . Ein Morphismus von  $M$  nach  $N$  sei dann durch eine Diffeomorphieklasse von Cobordismen  $(W, M, N)$  gegeben. Verkettung von Morphismen sei repräsentantenweise durch (glattes) Verkleben der entsprechenden Randkomponenten erklärt. Man hat dann sowohl für Objekte als auch für (Repräsentanten von) Morphismen eine disjunkte Vereinigung. Mit der disjunkten Vereinigung erhält  $\mathbf{Cob}_2$  die Struktur einer monoidalen Kategorie.

**Kommentar 3.3.** (a) Man kann Kategorie  $\mathbf{Cob}_2$  auch folgendermaßen auffassen: Man betrachtet zunächst eine 2-Kategorie  $\mathbf{2Cob}_2$ , deren Objekte durch disjunkte Vereinigung eines erzeugenden Objektes, einer eindimensionalen kompakten zusammenhängenden Mannigfaltigkeit (konkret z.B. einer Kreislinie  $\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{R}^2$  oder auch  $\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{S}^2$ ) entstehen. Die 1-Morphismen sind Cobordismen  $W$ . Die 2-Morphismen sind dann Diffeomorphismen zwischen den Cobordismen. Man erhält dann  $\mathbf{Cob}_2$  aus  $\mathbf{2Cob}_2$ , indem man (durch die 2-Morphismen induzierte) Äquivalenzklassen der 1-Morphismen als Morphismen von  $\mathbf{Cob}_2$  auffasst (siehe erneut [1], Abschnitt 4).

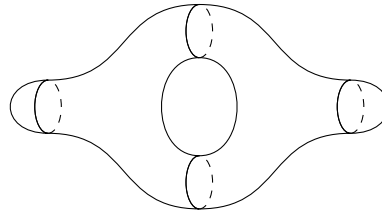
- (b) Durch die Äquivalenzklassenbildung der Cobordismen erhalten auch die Morphismen eine elegante Darstellung durch Erzeuger (mit Relationen zwischen diesen):

Da kompakte (orientierbare) zusammenhängende Flächen durch ihr Geschlecht bis auf Diffeomorphie klassifiziert sind, ist ein zusammenhängender Morphismus in  $\mathbf{Cob}_2$  eindeutig charakterisiert durch die Angabe der Anzahl der einlaufenden Randkomponenten und der auslaufenden Randkomponenten und die Angabe des Geschlechts. Betrachte daher die folgenden fünf Erzeuger  $E_j^i$  (wo  $i$  für die Anzahl einlaufender Komponenten und  $j$  für die Anzahl auslaufender Komponenten von  $E_j^i$  steht):





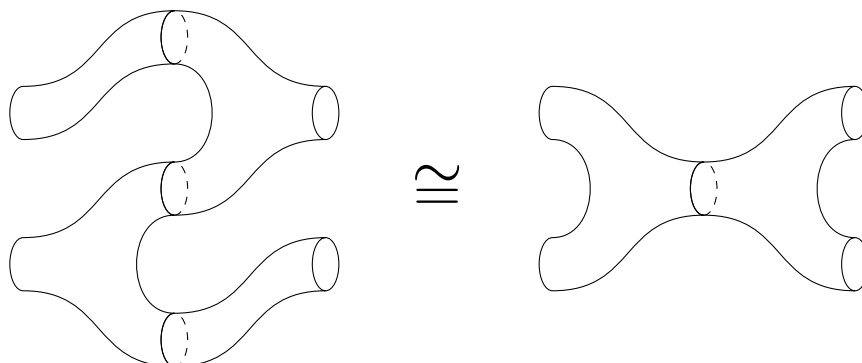
Jeder Morphismus in **Cob** hat dann einen Repräsentanten welcher durch Verkettung und disjunkte Vereinigung dieser Erzeuger entsteht. Hier folgt ein Beispiel für einen Morphismus vom leeren Objekt  $\emptyset \in \mathbf{Cob}_2$  zum leeren Objekt mit Geschlecht 1 (das ist gerade ein Torus):



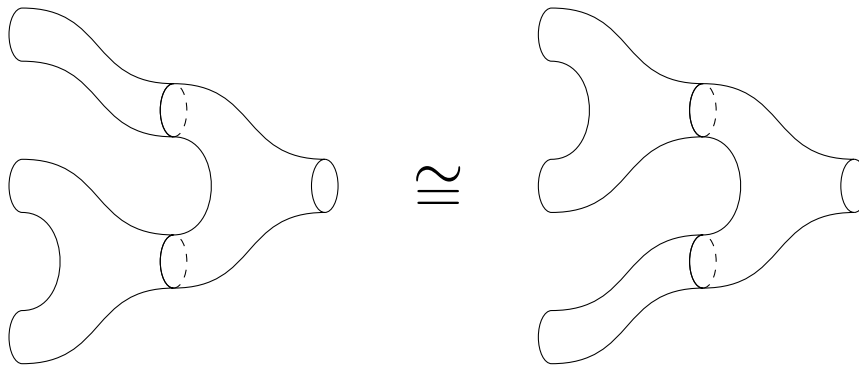
- (c) Insbesondere sieht man nun, dass die Angabe von  $M$  und  $N$  im Tripel  $(W, M, N)$  sich dadurch ausdrücken lässt, dass man Cobordismen von  $M \subseteq \mathbb{R}^2$  nach  $N \subseteq \mathbb{R}^2$  als Flächen  $W \subseteq \mathbb{R}^2 \times [0, 1]$  darstellt mit

$$\partial W = M \times \{0\} \cup N \times \{1\}.$$

- (d) Allerdings ist die Darstellung durch die Erzeuger  $E_j^i$  nicht eindeutig. Zwei wichtige Relationen der Erzeuger, die *Frobenius-Relation* und die *Assoziativität* seien hier dargestellt, für die anderen sei abermals auf [1], Abschnitt 4, verwiesen.



### 3. Khovanov-Homologie



**Bemerkung 3.4.** Betrachte nun folgende Unterkategorie von **Diag**: Wähle als Objekte all diejenigen unorientierten Linkdiagramme in  $\mathbb{S}^2$  aus, welche keine Kreuzungspunkte haben. Das sind gerade diejenigen Linkdiagramme, welche sich als disjunkte Vereinigung von Einbettungen der Kreislinie  $\mathbb{S}^1$  in  $\mathbb{S}^2$  auffassen lassen. Bei der Morphismenmenge zweier solcher Linkdiagramme  $D$  und  $D'$  ohne Kreuzungspunkte schränkt man sich auf diejenigen Morphismen ein, die sich durch einen (unorientierten) Movie repräsentieren lassen, welcher in den kritischen Niveaus nur Übergänge durch Morse-Modifikationen hat; man beschränkt sich also auf Morphismen, die sich durch zweidimensionale Untermannigfaltigkeiten  $W \subseteq \mathbb{S}^2 \times [0, 1]$  mit Rand repräsentieren lassen, sodass

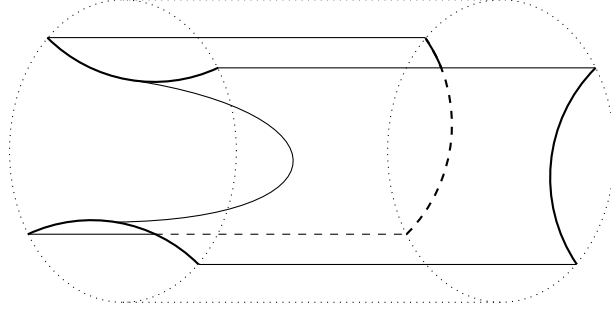
$$\partial W = D \times \{0\} \cup D' \times \{1\}$$

gilt. Auf diese Weise kann man die Unterkategorie der unorientierten Linkdiagramme ohne Kreuzungspunkte als **Cob**<sub>2</sub> auffassen – mit denselben Erzeugern  $E_j^i$  und Relationen, nur betrachtet in  $\mathbb{S}^2 \times [0, 1]$ . Die beiden *Hosen*  $E_1^2$  und  $E_2^1$  entsprechen der Morse-Modifikation „Ankleben eines 1-Henkels“, die Kappe  $E_1^0$  entspricht dem „Ankleben eines 0-Henkels“ und die Kappe  $E_0^1$  entspricht dem „Ankleben eines 2-Henkels“.

Erinnere an die vollständigen Glättungen  $S_\alpha$  eines Linkdiagramms  $D$ . Diese sind unorientierte Linkdiagramme ohne Kreuzungspunkte und können daher nach obiger Diskussion als Objekte der Kategorie **Cob**<sub>2</sub> aufgefasst werden.

**Bemerkung 3.5.** Seien  $S_\alpha$  und  $S_{\alpha'}$  zwei vollständige Glättungen eines Linkdiagramms  $D$ , welche sich durch genau eine unterschiedlich geglättete Kreuzung  $x_i$  voneinander unterscheiden. Sei konkret  $B$  eine Scheibe um  $x_i$ , sodass sich  $S_\alpha$  und  $S_{\alpha'}$  innerhalb von  $B$  wie in Abbildung 1.3 darstellen,  $S_\alpha$  als 0-Glättung der Kreuzung  $x_i$  und  $S_{\alpha'}$  als 1-Glättung. Es gibt dann einen Cobordismus  $W = W_{\alpha'}^\alpha$  von  $S_\alpha$  nach  $S_{\alpha'}$ , welcher außerhalb des Zylinders  $B \times [0, 1]$  zylindrisch über  $S_\alpha$  verläuft und innerhalb von  $B \times [0, 1]$  genau einen Sattelpunkt hat. Man nennt diesen Cobordismus daher auch *Sattel-Cobordismus* (vgl. 2.19). Dies entspricht gerade

der Morse-Modifikation „Ankleben eines 1-Henkels“ zwischen den beiden Strängen von  $S_\alpha$ , welche durch  $B$  verlaufen.



Je nachdem, ob die beiden innerhalb  $B$  verlaufenden Stränge von  $S_\alpha$  zu einer Komponente oder zu zwei verschiedenen Komponenten von  $S_\alpha$  gehören, ist der Cobordismus  $W$  also entweder diffeomorph zu einer Hose  $E_2^1$  disjunkt vereinigt mit Zylindern  $E_1^1$  (ein Zylinder  $E_1^1$  über jeder Komponente von  $S_\alpha$ , welche komplett außerhalb  $B$  liegt) oder zu einer Hose  $E_2^2$  disjunkt vereinigt mit Zylindern  $E_1^1$ . Im Falle der Hose  $E_2^1$  wird also eine Komponente von  $S_\alpha$  „aufgeteilt“ zu zwei Komponenten von  $S_{\alpha'}$  und im Falle der Hose  $E_2^2$  „verschmelzen“ zwei Komponenten von  $S_\alpha$  zu einer Komponente von  $S_{\alpha'}$ .

**Definition 3.6.** Eine zweidimensionale *topologische Quantenfeldtheorie* (kurz: *TQFT*) über einem Körper  $\mathbb{K}$  ist ein Funktor  $F : \mathbf{Cob}_2 \rightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ , welcher multiplikativ bezüglich der monoidalen Strukturen auf  $\mathbf{Cob}_2$  und  $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$  ist, sodass also für Objekte  $M, N$  von  $\mathbf{Cob}_2$

$$F(M \sqcup N) = F(M) \otimes F(N)$$

und für Morphismen  $W$  von  $M_0$  nach  $M_1$  und  $W'$  von  $N_0$  nach  $N_1$

$$F(W \sqcup W') = F(W) \otimes F(W') \in \text{Mor}(F(M_0 \sqcup N_0), F(M_1 \sqcup N_1))$$

gilt.

**Kommentar 3.7.** Eine TQFT  $F$  muss aufgrund der Multiplikativität dem neutralen Objekt  $\emptyset$  von  $\mathbf{Cob}_2$  das neutrale Objekt  $\mathbb{K}$  von  $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$  zuordnen. Legt man dann noch einen  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $F(\mathbb{S}^1)$  für den Erzeuger  $\mathbb{S}^1$  der Objekte von  $\mathbf{Cob}_2$  fest und schließlich noch fünf lineare Abbildungen für die Erzeuger der Morphismen von  $\mathbf{Cob}_2$ , welche die Relationen unter den Erzeugern respektieren, so liegt (durch Multiplikativität und Verkettung) bereits die gesamte TQFT fest.

Im Folgenden soll Khovanovs Konstruktion nachgezeichnet werden, die jedem Linkdiagramm  $D$  mittels einer geschickt eingesetzten TQFT auf den vollständigen Glättungen von  $D$  einen Co-Kettenkomplex  $C(D)$  zuordnet. Die zu diesem Co-Kettenkomplex gehörige Homologie

### 3. Khovanov-Homologie

nennt man dann *Khovanov-Homologie von  $D$* , von der Khovanov bereits in seiner Arbeit [12] zeigte, dass diese (bis auf Isomorphie) eine Linktypinvariante ist. Zudem soll erklärt werden, wie die Khovanov-Homologie als Kategorifizierung des Jones-Polynoms aufgefasst werden kann.

**Beispiel 3.8.** Sei  $V$  der von der Menge  $\{v_+, v_-\}$  erzeugte zweidimensionale  $\mathbb{F}_2$ -Vektorraum. Es soll nun eine TQFT  $\mathcal{F}$  über  $\mathbb{F}_2$  definiert werden, welche dem Objekt  $\mathbb{S}^1$  den Vektorraum  $\mathcal{F}(\mathbb{S}^1) = V$  zuordnet. Seien dazu auf den Erzeugern der Morphismen von  $\mathbf{Cob}_2$  Abbildungen wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(E_1^1) &= \text{id} : V \rightarrow V, \\ \epsilon := \mathcal{F}(E_1^0) : \mathbb{F}_2 &\rightarrow V, \begin{cases} 1 \mapsto v_+ \end{cases} \\ \eta := \mathcal{F}(E_0^1) : V &\rightarrow \mathbb{F}_2, \begin{cases} v_+ \mapsto 0 \\ v_- \mapsto 1 \end{cases} \\ \Delta := \mathcal{F}(E_2^1) : V &\rightarrow V \otimes V, \begin{cases} v_+ \mapsto v_+ \otimes v_- + v_- \otimes v_+ \\ v_- \mapsto v_- \otimes v_- \end{cases} \\ m := \mathcal{F}(E_1^2) : V \otimes V &\rightarrow V, \begin{cases} v_+ \otimes v_+ \mapsto v_+ \\ v_+ \otimes v_- \mapsto v_- \\ v_- \otimes v_+ \mapsto v_- \\ v_- \otimes v_- \mapsto 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Dann respektieren die Abbildungen die Relationen der Erzeuger, es gilt zum Beispiel

$$(m \otimes \text{id}) \circ (\text{id} \otimes \Delta) = \Delta \circ m$$

für die Frobenius-Relation, wie man auf der Basis  $(v_+ \otimes v_+, v_+ \otimes v_-, v_- \otimes v_+, v_- \otimes v_-)$  von  $V \otimes V$  nachrechnen kann: Es gilt

$$\begin{aligned} (m \otimes \text{id}) \circ (\text{id} \otimes \Delta)(v_+ \otimes v_+) &= (m \otimes \text{id})(v_+ \otimes v_+ \otimes v_- + v_+ \otimes v_- \otimes v_+) \\ &= v_+ \otimes v_- + v_- \otimes v_+ \\ &= \Delta(v_+) = \Delta(m(v_+ \otimes v_+)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (m \otimes \text{id}) \circ (\text{id} \otimes \Delta)(v_+ \otimes v_-) &= (m \otimes \text{id})(v_+ \otimes v_- \otimes v_-) = v_- \otimes v_- \\ &= \Delta(v_-) = \Delta(m(v_+ \otimes v_-)), \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
(m \otimes \text{id}) \circ (\text{id} \otimes \Delta)(v_- \otimes v_+) &= (m \otimes \text{id})(v_- \otimes v_+ \otimes v_- + v_- \otimes v_- \otimes v_+) \\
&= v_- \otimes v_- + 0 \otimes v_+ = v_- \otimes v_- \\
&= \Delta(v_-) = \Delta(m(v_- \otimes v_+))
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
(m \otimes \text{id}) \circ (\text{id} \otimes \Delta)(v_- \otimes v_-) &= (m \otimes \text{id})(v_- \otimes v_- \otimes v_-) \\
&= 0 \otimes v_- = 0 = \Delta(0) = \Delta(m(v_- \otimes v_-)).
\end{aligned}$$

Ähnlich (aber meist einfacher) rechnet man die übrigen Relationen nach und man erhält eine TQFT über  $\mathbb{F}_2$ .

Diese TQFT wird für die Konstruktion eines Co-Kettenkomplexes ausgenutzt, aus welchem zu guter Letzt die Khovanov-Homologie resultiert.

Zweites Hilfsmittel für die Konstruktion ist der Würfel  $[0, 1]^n \subseteq \mathbb{R}^n$ :

**Notation 3.9.** Seien  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  und  $\alpha' = (\alpha'_1, \dots, \alpha'_n)$  Elemente aus  $\{0, 1\}^n$ .

(a) Man schreibt

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$$

für die Koordinatensumme von  $\alpha$ .

(b) Falls  $\alpha_i \leq \alpha'_i$  für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$  gilt, so notiert man

$$\alpha \leq \alpha'.$$

(c) Falls genau ein  $j \in \{1, \dots, n\}$  existiert, sodass  $\alpha_j + 1 = \alpha'_j$  und ansonsten  $\alpha_i = \alpha'_i$  gilt, so notiert man

$$\alpha <_1 \alpha'.$$

Insbesondere gilt hier  $|\alpha'| = |\alpha| + 1$ .

(d) Allgemeiner notiert man für  $\alpha \leq \alpha'$  und ein  $k \in \{0, \dots, n\}$

$$\alpha <_k \alpha',$$

falls  $\alpha'$  in genau  $k$  Indizes um eins größer ist als  $\alpha$ .

**Kommentar 3.10.** Betrachte nun den Würfel  $Q := [0, 1]^n \subseteq \mathbb{R}^n$ .

(a) Die *Ecken* des Würfels  $Q$  sind gerade gegeben durch die Elemente  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \{0, 1\}^n$ . Auf den ersten Blick etwas kompliziert kann man die Ecken also auch als Paare  $(\alpha, \alpha')$  mit  $\alpha <_0 \alpha'$  schreiben.

### 3. Khovanov-Homologie

- (b) Eine *Kante* des Würfels  $Q$  ist die parallel zu einer Koordinatenachse verlaufende Verbindungslinie zwischen zwei Ecken  $\alpha$  und  $\alpha'$ . Eine solche Kante existiert für gegebene  $\alpha, \alpha'$  genau dann, wenn

$$\alpha <_1 \alpha'$$

oder

$$\alpha' <_1 \alpha$$

gilt. Daher sind die Kanten von  $Q$  gerade durch Paare  $(\alpha, \alpha')$  mit  $\alpha <_1 \alpha'$  gegeben.

- (c) Eine *Fläche* des Würfels  $Q$  kann ähnlich beschrieben werden, nämlich als Paar  $(\alpha, \alpha')$  mit  $\alpha <_2 \alpha'$ . Beachte: Zu solch einem Paar existieren genau zwei Ecken  $\beta, \beta' \in \{0, 1\}^n$ , für die  $\alpha <_1 \beta <_1 \alpha'$  bzw.  $\alpha <_1 \beta' <_1 \alpha'$  gilt, je nachdem, welchen der beiden Einträge von  $\alpha$  man zuerst um eins erhöht, um von  $\alpha$  zu  $\alpha'$  zu gelangen.

- (d) Diese „Zellzerlegung“ des Würfels könnte man noch bis zur Dimension  $n$  des Würfels weitertreiben und man hätte zuletzt eine  $n$ -Zelle gegeben durch das einzige Paar  $(\alpha, \alpha')$  aus  $\{0, 1\}^n$  mit  $\alpha <_n \alpha'$ , nämlich  $\alpha = (0, \dots, 0)$  und  $\alpha' = (1, \dots, 1)$ .

- (e) Man kann die Zellzerlegung eines  $n$ -dimensionalen Würfels auch induktiv erklären: Der 0-dimensionale Würfel besteht aus genau einer Ecke (und keinen höher-dimensionalen Zellen). Der  $(n+1)$ -dimensionale Würfel  $Q'$  entsteht aus dem  $n$ -dimensionalen Würfel  $Q \subseteq \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  mit Ecken identifiziert als  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n, 0) \in \{0, 1\}^n \times \{0\}$ , indem man eine Kopie  $\hat{Q} \subseteq \mathbb{R}^n \times \{1\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  von  $Q$  bildet (dann mit Ecken  $\hat{\alpha} = (\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_n, 1) \in \{0, 1\}^n \times \{1\}$ ) und noch Kanten (und höher-dimensionale Zellen) zwischen den beiden Kopien von  $Q$  errichtet, genauer einer  $k$ -Zelle für jedes Paar von Ecken  $(\alpha, \hat{\alpha})$  in  $\{0, 1\}^{n+1}$  mit

$$\alpha \in \{0, 1\}^n \times \{0\} \subseteq \{0, 1\}^{n+1} \quad \text{und}$$

$$\hat{\alpha} \in \{0, 1\}^n \times \{1\} \subseteq \{0, 1\}^{n+1},$$

welches  $\alpha <_k \hat{\alpha}$  erfüllt.

**Konstruktion 3.11.** Sei  $D$  ein orientiertes Linkdiagramm und  $\chi = \{x_1, \dots, x_n\}$  die Menge der Kreuzungspunkte von  $D$ . Sei wie zuvor  $n_-$  die Anzahl der linksgängigen Kreuzungen und  $n_+$  die Anzahl der rechtsgängigen Kreuzungen von  $D$ . Die  $2^n$  vollständigen Glättungen von  $D$  sind durch die Nummerierung der Kreuzungspunkte eindeutig identifiziert durch Elemente der Menge  $\{0, 1\}^n$ : Es sei konkret für  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \{0, 1\}^n$  mit  $S_\alpha$  diejenige vollständige Glättung von  $D$  bezeichnet, für welche im Kreuzungspunkt  $x_i$  die  $\alpha_i$ -Glättung der Kreuzung

vorliegt ( $i = 1, \dots, n$ ). Sei  $\mathcal{F}$  die TQFT aus dem vorangegangenen Beispiel 3.8. Für  $r \in \mathbb{Z}$  definiert man

$$[[D]]^r := \bigoplus_{\alpha: r=|\alpha|-n_-} \mathcal{F}(S_\alpha).$$

Hier wird also zunächst jeder Ecke  $\alpha$  des Würfels  $[0, 1]^n \subseteq \mathbb{R}^n$  ein  $\mathbb{F}_2$ -Vektorraum  $\mathcal{F}(S_\alpha)$  zugeordnet. Man erhält dann  $[[D]]^r$  als direkte Summe über all jene Eckpunkte  $\alpha$  des Würfels, welche eine fixierte Koordinatensumme

$$|\alpha| = r + n_-$$

haben. So wird beispielsweise  $[[D]]^{-n_-}$  durch Summation lediglich über die Ecke  $(0, \dots, 0)$  zu  $\mathcal{F}(S_{(0, \dots, 0)})$  und  $[[D]]^{n_+}$  zu  $\mathcal{F}(S_{(1, \dots, 1)})$ . Dazwischen entstehen „echte“ Summen und für  $r$  außerhalb von  $[-n_-, n_+]$  sind alle Vektorräume  $[[D]]^r$  trivial als leere Summen. Der *Versatz* um  $-n_-$  ist also gerade so angelegt, dass alle nichttrivialen Vektorräume  $[[D]]^r$  im Bereich  $r \in \{-n_-, \dots, n_+\} \subseteq \mathbb{Z}$  (anstelle von  $r \in \{0, \dots, n\}$ ) liegen.

Man möchte nun die Vektorräume  $[[D]]^r$  als Co-Kettengruppen eines Co-Kettenkomplexes  $[[D]]$  identifizieren. Ziel ist es also, für jedes  $r \in \mathbb{Z}$  eine Abbildung

$$d^r : [[D]]^r \rightarrow [[D]]^{r+1}$$

zu konstruieren, sodass  $(([[D]]^r)_{r \in \mathbb{Z}}, (d^r)_{r \in \mathbb{Z}})$  zu einem Co-Kettenkomplex wird. Bei der Definition dieses Co-Differentials  $d$  kommt nun der funktorielle Charakter der TQFT  $\mathcal{F}$  zum Einsatz. Außerdem spielen die Kanten des Würfels  $[0, 1]^n$  eine Rolle.

Seien  $\alpha, \alpha' \in \{0, 1\}^n$  mit  $\alpha <_1 \alpha'$ . Dann unterscheiden sich  $S_\alpha$  und  $S_{\alpha'}$  durch genau eine unterschiedlich geglättete Kreuzung  $x_i$  voneinander. Sei also  $B$  eine Scheibe um  $x_i$ , sodass sich  $S_\alpha$  und  $S_{\alpha'}$  innerhalb von  $B$  wie in Abbildung 1.3 darstellen. Erinnere an den Sattel-Cobordismus  $W = W_{\alpha'}^\alpha$  von  $S_\alpha$  nach  $S_{\alpha'}$ , welcher außerhalb des Zylinders  $B \times [0, 1]$  zylindrisch über  $S_\alpha$  verläuft und innerhalb von  $B \times [0, 1]$  genau einen Sattelpunkt hat (vgl. 3.5).

Es wird also entweder eine Komponente von  $S_\alpha$  aufgeteilt zu zwei Komponenten von  $S_{\alpha'}$  oder zwei Komponenten von  $S_\alpha$  verschmelzen zu einer Komponente von  $S_{\alpha'}$ .

In jedem Fall liefert die TQFT  $\mathcal{F}$  aus Beispiel 3.8 eine Abbildung

$$d_{\alpha'}^\alpha := \mathcal{F}(W) : \mathcal{F}(S_\alpha) \rightarrow \mathcal{F}(S_{\alpha'}),$$

welche entweder durch die Abbildung  $\Delta$  oder die Abbildung  $m$  induziert wird. Die Abbildung  $d^r : [[D]]^r \rightarrow [[D]]^{r+1}$  definiert man nun als eine geeignete Summe der  $d_{\alpha'}^\alpha$ : Man definiert zunächst für ein  $\alpha \in \{0, 1\}^n$

$$d^\alpha := \sum_{\alpha': \alpha <_1 \alpha'} d_{\alpha'}^\alpha : \mathcal{F}(S_\alpha) \rightarrow \bigoplus_{\alpha': \alpha <_1 \alpha'} \mathcal{F}(S_{\alpha'})$$

### 3. Khovanov-Homologie

und dann

$$d^r := \sum_{\alpha: r=|\alpha|-n_-} d^\alpha : \llbracket D \rrbracket^r \rightarrow \llbracket D \rrbracket^{r+1}.$$

**Proposition 3.12.** *Sei  $D$  ein orientiertes Linkdiagramm. Dann ist  $((\llbracket D \rrbracket^r)_{r \in \mathbb{Z}}, (d^r)_{r \in \mathbb{Z}})$  ein Co-Kettenkomplex.*

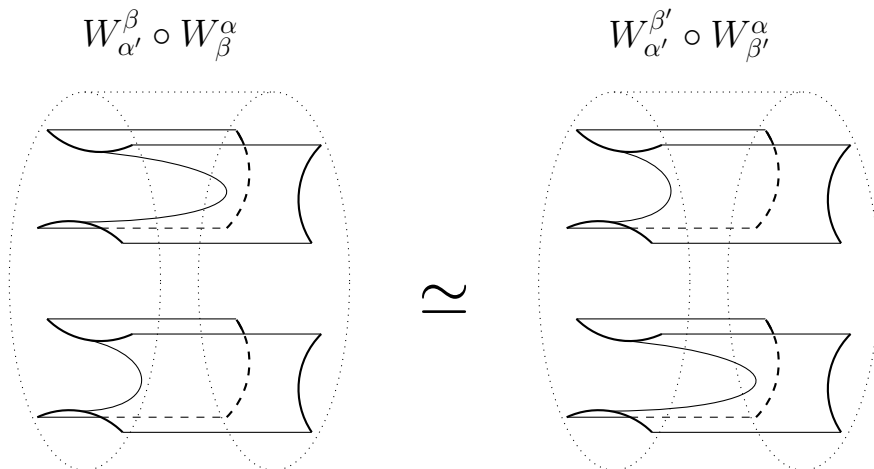
*Beweis.* Zu zeigen ist also  $d^{r+1} \circ d^r = 0$  für  $r \in \mathbb{Z}$ . Dies muss man nur prüfen für  $-n_- \leq r \leq n_+ - 2$ , da für  $r < -n_-$  und für  $r + 2 > n_+$  nach Definition bereits mindestens eine der beteiligten Kettengruppen trivial ist. Sei nun  $\alpha \in \{0, 1\}^n$  mit  $|\alpha| - n_- = r$ . Wir zeigen nun, dass das Bild  $d^{r+1} \circ d^r(\mathcal{F}(S_\alpha)) \subseteq \llbracket D \rrbracket^{r+2}$  trivial sein muss. Nach Definition liegt das Bild ausschließlich in Komponenten  $\mathcal{F}(S_{\alpha'})$  von  $\llbracket D \rrbracket^{r+2}$ , für die sogar  $\alpha <_2 \alpha'$  gilt (und nicht nur  $|\alpha'| = |\alpha| + 2$ ).

Seien daher  $\beta \neq \beta' \in \{0, 1\}^n$  mit

$$\alpha <_1 \beta <_1 \alpha' \quad \text{sowie} \quad \alpha <_1 \beta' <_1 \alpha'$$

und  $x \neq x'$  die beiden Kreuzungspunkte von  $D$ , deren Glättungen beim Übergang von  $\alpha$  zu  $\alpha'$  verändert werden und seien  $B$  bzw.  $B'$  entsprechende Scheiben um  $x$  bzw.  $x'$ .

Die beiden Cobordismen  $W_{\alpha'}^\beta \circ W_\beta^\alpha$  und  $W_{\alpha'}^{\beta'} \circ W_{\beta'}^\alpha$  haben beide in  $B \times [0, 1]$  und in  $B' \times [0, 1]$  jeweils genau einen Sattelpunkt. Sie unterscheiden sich nur in der „zeitlichen“ Reihenfolge, in der diese beiden auftreten (wenn man die  $[0, 1]$ -Komponente von Cobordismen als Zeitkomponente betrachten möchte; im Sinne der Morse-Theorie würde man eher von der Höhe sprechen). Eine solche zeitliche Umordnung voneinander durch Zylinder  $B \times [0, 1]$  und  $B' \times [0, 1]$  isolierter kritischer Punkte eines Cobordismus lässt sich durch eine einfache Isotopie realisieren (engl. *time reordering*).



Daher gilt

$$\mathcal{F}(W_{\alpha'}^\beta \circ W_\beta^\alpha) = \mathcal{F}(W_{\alpha'}^{\beta'} \circ W_{\beta'}^\alpha) : \mathcal{F}(S_\alpha) \rightarrow \mathcal{F}(S_{\alpha'}).$$

Für die Komponente  $(d \circ d)_{\alpha'}^{\alpha}$  von  $d^{r+1} \circ d^r$  mit Definitionsbereich  $\mathcal{F}(S_{\alpha})$  und Bildbereich  $\mathcal{F}(S_{\alpha'})$  gilt dann also

$$\begin{aligned} (d \circ d)_{\alpha'}^{\alpha} &= d_{\alpha'}^{\beta} \circ d_{\beta}^{\alpha} + d_{\alpha'}^{\beta'} \circ d_{\beta'}^{\alpha} = \mathcal{F}(W_{\alpha'}^{\beta}) \circ \mathcal{F}(W_{\beta}^{\alpha}) + \mathcal{F}(W_{\alpha'}^{\beta'}) \circ \mathcal{F}(W_{\beta'}^{\alpha}) \\ &= \mathcal{F}(W_{\alpha'}^{\beta} \circ W_{\beta}^{\alpha}) + \mathcal{F}(W_{\alpha'}^{\beta'} \circ W_{\beta'}^{\alpha}) = 0, \end{aligned}$$

da  $\mathbb{F}_2$  Charakteristik 2 hat. Da dies für jede Komponente von  $d^{r+1} \circ d^r$  gilt, folgt die Behauptung.  $\square$

**Kommentar 3.13.** (a) Der geneigten Leserin und dem geneigten Leser wird aufgefallen sein, dass beim Beweis nun auch die Flächen  $\alpha <_2 \alpha'$  des Würfels in Erscheinung treten.

(b) Beachte, dass beim Beweis keine explizite Definition der Abbildungen  $m$  und  $\Delta$  einfließt. Das Hauptargument liegt in der Diffeomorphie (hier sogar Isotopie) zweier Cobordismen. Von der TQFT  $\mathcal{F}$  wird dann lediglich die Funktorialität ausgenutzt.

**Bemerkung 3.14.** Man kann die Konstruktion dieses Co-Kettenkomplexes auch über anderen Körpern oder allgemeiner auch über Ringen (wie ursprünglich Khovanov) vollziehen, dann muss man aber mehr Vorsicht bei der Definition der Komponenten  $d_{\beta}^{\alpha}$  des Co-Differentials walten lassen. Genauer muss man diese Komponenten so mit Vorzeichen  $\sigma \in \{\pm 1\}$  versehen, dass für jede Fläche  $\alpha <_2 \alpha'$  des Würfels  $[0, 1]^n$  stets eine ungerade Zahl der vier Differential-Komponenten  $d_{\alpha'}^{\beta}$ ,  $d_{\beta}^{\alpha}$ ,  $d_{\alpha'}^{\beta'}$  und  $d_{\beta'}^{\alpha}$  ein negatives Vorzeichen trägt, sodass

$$d_{\alpha'}^{\beta} \circ d_{\beta}^{\alpha} = -d_{\alpha'}^{\beta'} \circ d_{\beta'}^{\alpha}$$

und damit schließlich

$$(d \circ d)_{\alpha'}^{\alpha} = d_{\alpha'}^{\beta} \circ d_{\beta}^{\alpha} + d_{\alpha'}^{\beta'} \circ d_{\beta'}^{\alpha} = 0$$

gilt. Siehe hierzu Khovanovs Arbeit [12] oder auch Dror Bar-Natans Zugang in [7].

**Motivation 3.15.** Man könnte nun versuchen zu zeigen, dass Reidemeister-Bewegungen  $D \rightarrow D'$  Kettenhomotopieäquivalenzen zwischen den Co-Kettenkomplexen  $[[D]]$  und  $[[D']]$  induzieren. Daraus würde folgen, dass der Isomorphietyp der Homologiegruppen eine Linktypinvariante ist. Allerdings wäre diese Invariante nicht besonders aussagekräftig und es ließe sich auch nicht das Jones-Polynom daraus zurückgewinnen. Der eigentliche Vorteil von Khovanovs Konstruktion besteht nämlich darin, dass sich auf diesen Co-Kettenkomplexen neben der obligatorischen *homologischen Graduierung* noch eine weitere Graduierung, die *q-Graduierung*, definieren lässt. Diese *q-Graduierung* vererbt sich auch auf die Homologiegruppen und gibt diesen eine zusätzliche Graduierung; insgesamt trägt die Homologie also eine *Bigraduierung*. Zu diesem Zwecke werden zunächst die benötigten Begriffe vorgestellt.

### 3. Khovanov-Homologie

**Definition 3.16.** (a) Ein *graduierter* (oder auch *q-graduierter*)  $\mathbb{K}$ -Vektorraum ist ein Paar  $(W, (W_m)_{m \in \mathbb{Z}})$  bestehend aus einem endlich-dimensionalen  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $W$  und einer Familie  $(W_m)_{m \in \mathbb{Z}}$  von Untervektorräumen  $W_m \subseteq W$ , sodass

$$W = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} W_m$$

gilt. Häufig schreibt man auch nur

$$\bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} W_m$$

für einen graduierten Vektorraum  $(W, (W_m)_{m \in \mathbb{Z}})$  oder man unterdrückt die Angabe der Zerlegung in der Notation sogar ganz und schreibt einfach nur  $W$  für den graduierten Vektorraum  $(W, (W_m)_{m \in \mathbb{Z}})$ . Die Untervektorräume  $W_m$  heißen *graduierte Bestandteile von  $W$*  und ein Element  $w \in W_m$  heißt *homogen vom (q-)Grad  $m$* .

(b) Die *graduierte Dimension* von  $(W, (W_m)_{m \in \mathbb{Z}})$  ist dann gegeben durch das Laurentpolynom (mit ganzzahligen Koeffizienten)

$$q\dim(W) := \sum_{m \in \mathbb{Z}} q^m \dim(W_m) \in \mathbb{Z}[q, q^{-1}].$$

(c) Der *Versatz des q-Grades um  $l \in \mathbb{Z}$*  ordnet einem graduierten Vektorraum  $(W, (W_m)_{m \in \mathbb{Z}})$  den graduierten Vektorraum  $(W\{l\}, (W\{l\}_m)_{m \in \mathbb{Z}})$  zu, wobei  $W\{l\} = W$  als ungraduierte Vektorräume gelte und die graduierten Bestandteile durch  $W\{l\}_m = W_{m-l}$  gegeben seien.

(d) Eine lineare Abbildung  $f : V \rightarrow W$  zwischen graduierten Vektorräumen  $V$  und  $W$  heißt *graduiert mit (q-)Graduierung  $k \in \mathbb{Z}$* , falls für jedes  $m \in \mathbb{Z}$

$$f(V_m) \subseteq W_{m+k}$$

gilt.

**Kommentar 3.17.** Ein *q-graduierter* Vektorraum ist schlicht ein  $\mathbb{Z}$ -graduierter Vektorraum (mit einem an die Graduierung angepassten Dimensionsbegriff). Der Begriff „*q-Graduierung*“ dient deshalb vor allem zur Abgrenzung von einer homologischen Graduierung, falls beide präsent sind. In der Literatur wird häufig auch der Begriff „*quantum grading*“ verwendet.

**Beispiel 3.18.** Ist  $(C, d)$  ein Co-Kettenkomplex über einem Körper, so kann man wie bereits angedeutet auch die Angabe der Co-Kettengruppen als Graduierung des Vektorraumes

$$C = \bigoplus_{r \in \mathbb{Z}} C^r$$

auffassen. Möchte man die homologische Graduierung dieses Komplexes versetzen, so muss man auch die Differentiale  $d^r$  entsprechend versetzen, wenn man die Struktur eines Komplexes erhalten möchte. Daher notiert man  $C[l]$  anstelle von  $C\{l\}$ , wenn man ausdrücken möchte, dass nicht nur die Kettengruppen, sondern auch die Differentiale des Komplexes  $(C, d)$  um  $l \in \mathbb{Z}$  versetzt werden sollen. Man nennt dies auch den *Höhen-Versatz eines Komplexes um  $l$* . Im Prinzip ist uns ein solcher Höhen-Versatz schon begegnet: Man hätte die Kettengruppen in 3.11 intuitiv vermutlich eher als

$$C'(D)^r := \bigoplus_{\alpha: r=|\alpha|} \mathcal{F}(S_\alpha)$$

definiert. Die nichttrivialen Kettengruppen lägen dann im Bereich  $\{0, \dots, n\}$ . Der resultierende Kettenkomplex  $C'(D)$  unterscheidet sich also gerade durch einen Höhen-Versatz um  $n_-$  von  $\llbracket D \rrbracket$ ; es gilt:

$$C'(D)[-n_-] = \llbracket D \rrbracket.$$

Nun soll aber das Beispiel vorgestellt werden, für welches eigentlich die Definition der  $q$ -Graduierung hier eingeführt wurde:

**Beispiel 3.19.** Sei  $V$  der von der Menge  $\{v_+, v_-\}$  erzeugte zweidimensionale  $\mathbb{F}_2$ -Vektorraum und seien  $\langle v_- \rangle$  bzw.  $\langle v_+ \rangle$  die von  $v_-$  bzw.  $v_+$  erzeugten Unterräume von  $V$ . Dann ist durch

$$V_m := \begin{cases} \langle v_- \rangle & m = -1 \\ \langle v_+ \rangle & m = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

eine  $q$ -Graduierung auf  $V$  (mit  $V = V_{-1} \oplus V_1$ ) gegeben. Es gilt

$$q\dim(V) = q + q^{-1}$$

für die graduierte Dimension von  $V$ .

**Bemerkung 3.20.** Seien  $V$  und  $W$  graduierte Vektorräume.

(a) Tensorprodukt und direkte Summe von  $V$  und  $W$  tragen eine kanonische Graduierung

$$(V \otimes W)_m = \sum_{k+l=m} V_k \otimes W_l$$

$$(V \oplus W)_m = V_m \oplus W_m$$

und es gilt dann:

$$q\dim(V \otimes W) = q\dim(V) \cdot q\dim(W) \quad \text{und}$$

$$q\dim(V \oplus W) = q\dim(V) + q\dim(W).$$

### 3. Khovanov-Homologie

(b) Für einen Versatz des  $q$ -Grades um  $l$  gilt

$$q\dim(W\{l\}) = q^l \cdot q\dim(W).$$

**Beispiel 3.21.** (i) Sei  $W$  ein graduierter Vektorraum. Dann tragen also auch die *Tensorpotenzen*

$$W^{\otimes k} = W \otimes \dots \otimes W \quad (k\text{-mal})$$

eine kanonische  $q$ -Graduierung.

(ii) Sei  $D$  ein Linkdiagramm. Jede Co-Kettengruppe  $\llbracket D \rrbracket^r$  entsteht durch die TQFT  $\mathcal{F}$  als direkte Summe von Tensorpotenzen des  $\mathbb{F}_2$ -Vektorraumes  $V$  mit Basis  $\{v_+, v_-\}$  aus Beispiel 3.8. In Beispiel 3.19 hatten wir diesen Vektorraum mit einer  $q$ -Graduierung versehen. Wegen Bemerkung 3.20 ist damit auch auf  $\llbracket D \rrbracket^r$  eine  $q$ -Graduierung

$$\llbracket D \rrbracket^r = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} \llbracket D \rrbracket_m^r$$

gegeben.

**Lemma 3.22.** *Betrachte die Abbildungen  $\Delta : V \rightarrow V \otimes V$  und  $m : V \otimes V \rightarrow V$  der TQFT aus Beispiel 3.8. Sei ferner auf  $V$  die  $q$ -Graduierung aus 3.19 gegeben und auf  $V \otimes V$  die davon induzierte  $q$ -Graduierung. Dann sind  $\Delta$  und  $m$  graduierte Abbildungen mit  $q$ -Graduierung  $-1$ , d.h.*

$$\Delta(V_k) \subseteq (V \otimes V)_{k-1} \quad \text{und}$$

$$m((V \otimes V)_k) \subseteq V_{k-1},$$

jeweils für alle  $k \in \mathbb{Z}$ .

*Beweis.* Es sind  $v_+$  bzw.  $v_-$  homogen vom Grad 1 bzw.  $-1$  in  $V$ . Außerdem sind  $v_+ \otimes v_+$  homogen vom Grad 2,  $v_- \otimes v_-$  homogen vom Grad  $-2$  und  $v_+ \otimes v_-$  sowie  $v_- \otimes v_+$  homogen vom Grad 0 in  $V \otimes V$ . Daher folgt die Aussage direkt mit den Definitionen der Abbildungen  $\Delta$  und  $m$ .  $\square$

**Korollar 3.23.** *Betrachte den Co-Kettenkomplex  $((\llbracket D \rrbracket^r)_{r \in \mathbb{Z}}, (d^r)_{r \in \mathbb{Z}})$  eines Linkdiagramms  $D$ . Bezüglich der  $q$ -Graduierung aus Beispiel 3.21 auf den Co-Kettengruppen  $\llbracket D \rrbracket^r$  ist das Co-Differential  $d^r : \llbracket D \rrbracket^r \rightarrow \llbracket D \rrbracket^{r+1}$  eine graduierte Abbildung mit  $q$ -Graduierung  $-1$ , d.h.*

$$d^r(\llbracket D \rrbracket_m^r) \subseteq \llbracket D \rrbracket_{m-1}^{r+1}.$$



**Kommentar 3.24.** Beachte hier die Unterscheidung zwischen homologischem Grad und  $q$ -Grad: Das Co-Differential  $d$  erhöht (wie definitionsgemäß jedes Co-Differential) den homologischen Grad um eins, denn das Bild der  $r$ -ten Co-Kettengruppe liegt in der  $(r + 1)$ -ten Co-Kettengruppe. Die Aussage ist hier, dass das Co-Differential noch eine weitere Graduierung berücksichtigt, nämlich die  $q$ -Graduierung (es ist  $d$  also insgesamt eine *bigradierte* Abbildung mit Bigraduierung  $(1, -1)$ , wenn man zuerst die homologische und dann die  $q$ -Graduierung notiert).

**Motivation 3.25.** Besonders elegant wäre es allerdings, wenn das Co-Differential  $d^r$   $q$ -Graduierung 0 hätte, denn dann könnte man den gesamten Co-Kettenkomplex zerlegen in bezüglich der  $q$ -Graduierung homogene Co-Kettenkomplexe

$$\left( ([D]_m^r)_{r \in \mathbb{Z}}, (d^r |_{[D]_m^r})_{r \in \mathbb{Z}} \right),$$

weil

$$d^r([D]_m^r) \subseteq [D]_m^{r+1}$$

wäre. Man hätte also ein *graduiertes Objekt* in der Kategorie der Co-Kettenkomplexe. Glücklicherweise lässt sich dies erreichen, indem man die  $q$ -Graduierungen der Co-Kettengruppen mit einem Versatz versieht: Man versetzt die  $q$ -Graduierung der  $r$ -ten Co-Kettengruppe um  $r$  und erhält, dass das Co-Differential nun nicht mehr

$$d^r([D]_m^r) \subseteq [D]_{m-1}^{r+1},$$

sondern tatsächlich

$$d^r([D]_m^r) \subseteq [D]_m^{r+1}$$

erfüllt. Dieser Versatz wird in der folgenden Definition realisiert.

Außerdem sollen alle Co-Kettengruppen zusätzlich noch um die Konstante  $n_+ - n_-$  in der  $q$ -Graduierung versetzt werden. Dieser für ein fixiertes Linkdiagramm  $D$  konstante Versatz wird benötigt, um zu erreichen, dass die von Reidemeister-Bewegungen induzierten Kettenhomotopieäquivalenzen (vgl. 3.38, deren Konstruktion ist in [12] bzw. [7] zu finden) auch die  $q$ -Graduierung berücksichtigen und außerdem um das Jones-Polynom tatsächlich als sogenannte „graduierte Eulercharakteristik“ des Komplexes zu erhalten; vergleiche hierzu die Skalierung in Definition 1.37, welche die Invarianz des Jones-Polynoms unter Reidemeister-Bewegungen liefert.

**Definition 3.26.** Zu einem Linkdiagramm  $D$  mit Co-Kettenkomplex  $(([D]_m^r)_{r \in \mathbb{Z}}, (d^r)_{r \in \mathbb{Z}})$  definiert man für jedes  $r \in \mathbb{Z}$  einen graduierten Vektorraum  $C(D)^r$  durch

$$C(D)^r := [D]_m^r \{r + n_+ - n_-\}.$$

### 3. Khovanov-Homologie

Wie bereits in der Motivation der Definition vorweggenommen, folgern wir nun:

**Bemerkung 3.27.** (a) Das Co-Differential  $d = (d^r)_{r \in \mathbb{Z}}$  ist auch auf  $C(D) = (C(D)^r)_{r \in \mathbb{Z}}$  ein Co-Differential, denn als ungraduierte Vektorräume sind  $[[D]]^r$  und  $C(D)^r$  für jedes  $r \in \mathbb{Z}$  definitionsgemäß identisch. Als bigraduierte Abbildung auf  $C(D)$  betrachtet hat  $d$  jedoch Bigraduierung  $(1, 0)$  (und explizit  $q$ -Graduierung  $0$ ), d.h.

$$d^r(C(D)_m^r) \subseteq C(D)_m^{r+1},$$

für jedes  $r \in \mathbb{Z}$  und jedes  $m \in \mathbb{Z}$ .

(b) Es ist somit für jedes  $m \in \mathbb{Z}$

$$(C(D)_m, d_m) = ((C(D)_m^r)_{r \in \mathbb{Z}}, (d^r|_{C(D)_m^r})_{r \in \mathbb{Z}})$$

ein Unterkomplex von  $(C(D), d) = ((C(D)^r)_{r \in \mathbb{Z}}, (d^r)_{r \in \mathbb{Z}})$ .

(c) Zusammengefasst gilt

$$(C(D), d) = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} (C(D)_m, d_m),$$

und in diesem Sinne ist  $C(D)$  ein *graduierter Komplex* oder genauer ein *graduiertes Objekt* in der Kategorie der Co-Kettenkomplexe.

**Definition 3.28.** Sei  $D$  ein Linkdiagramm.

(a) Dann nennt man  $(C(D), d)$  den *Khovanov-Komplex von  $D$* .

(b) Die Homologiegruppen des Unterkomplexes  $(C(D)_m, d_m)$  von  $(C(D), d)$  bezeichnet man mit

$$Kh^{r,m}(D) := H^r(C(D)_m).$$

(c) Die zum Khovanov-Komplex  $(C(D), d)$  gehörige Homologie  $Kh(D) = H(C(D))$  mit der induzierten Bigraduierung

$$Kh(D) = \bigoplus_{i,j \in \mathbb{Z}} Kh^{i,j}(D)$$

heißt *Khovanov-Homologie von  $D$* .

**Beispiel 3.29.** (a) Das leere Linkdiagramm  $\emptyset \subseteq \mathbb{S}^2$  hat einen sehr einfachen Khovanov-Komplex: Aufgrund der Definition durch die TQFT hat  $C(\emptyset)$  als einzige nichttriviale Co-Kettengruppe den Grundkörper  $\mathbb{F}_2$  (als eindimensionalen Vektorraum) in Bigraduierung  $(0, 0)$ ,

$$C(\emptyset)_0^0 = \mathbb{F}_2,$$

und  $C(\emptyset)_m^r = 0$  sonst. Somit müssen alle Co-Differentiale trivial sein und es gilt

$$Kh^{i,j}(\emptyset) = C(\emptyset)_j^i = \begin{cases} \mathbb{F}_2, & \text{falls } (i,j) = (0,0) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

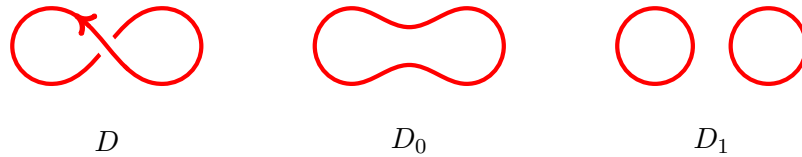
(b) Ein Diagramm  $D$  des Unknotens ohne Kreuzungspunkte erfüllt gemäß Definition

$$C(D)^i = \begin{cases} V, & \text{falls } i = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und somit gilt hier

$$Kh^{i,j}(D) \cong \begin{cases} \mathbb{F}_2, & \text{falls } (i,j) = (0, \pm 1) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(c) Betrachte nun ein Diagramm  $D$  des Unknotens mit genau einer Kreuzung  $x$ , welche linksgängig sei. Dann hat  $D$  genau zwei vollständige Glättungen  $D_0$  und  $D_1$ .



Dabei besteht  $D_0$  aus einer Komponente und  $D_1$  aus zwei Komponenten und mit den Grad-Versätzen sind die einzigen nicht-trivialen Co-Kettengruppen von  $C(D)$  durch die graduierten Vektorräume

$$C(D)^{-1} = V\{-2\}$$

und

$$C(D)^0 = V \otimes V\{-1\}$$

gegeben. Explizit kann man die  $q$ -Graduierung von  $C(D)^{-1}$  durch die Grade der homogenen Basiselemente  $v_+$  und  $v_-$  ausdrücken, weil diese nach Definition gerade die Erzeuger der graduierten Bestandteile von  $C(D)^{-1}$  sind (vgl. Definition 3.16). Es ist dann (beachte den Grad-Versatz)

$$\text{grad}(v_+) = -1 \quad \text{und} \quad \text{grad}(v_-) = -3,$$

d.h. der zweidimensionale  $\mathbb{F}_2$ -Vektorraum  $C(D)^{-1}$  hat einen eindimensionalen graduierten Bestandteil  $C(D)^{-1}_{-1}$  und einen eindimensionalen graduierten Bestandteil

### 3. Khovanov-Homologie

$C(D)_{-3}^{-1}$ . Ähnlich haben im vierdimensionalen  $\mathbb{F}_2$ -Vektorraum  $C(D)^0$  die Basiselemente  $v_+ \otimes v_+, v_+ \otimes v_-, v_- \otimes v_+$  und  $v_- \otimes v_-$  die Grade

$$\text{grad}(v_+ \otimes v_+) = 1,$$

$$\text{grad}(v_+ \otimes v_-) = -1,$$

$$\text{grad}(v_- \otimes v_+) = -1$$

und

$$\text{grad}(v_- \otimes v_-) = -3.$$

Somit hat  $C(D)^0$  einen eindimensionalen graduierten Bestandteil  $C(D)_1^0$  zur  $q$ -Graduierung 1, einen zweidimensionalen graduierten Bestandteil  $C(D)_{-1}^0$  und einen eindimensionalen graduierten Bestandteil  $C(D)_{-3}^0$ .

Das Co-Differential  $d^{-1} : C(D)^{-1} \rightarrow C(D)^0$  wird in diesem Fall offenbar durch die zum Erzeuger  $E_2^1$  gehörige Abbildung  $\Delta$  der TQFT  $\mathcal{F}$  induziert, erinnere:

$$\Delta = \mathcal{F}(E_2^1) : V \rightarrow V \otimes V, \begin{cases} v_+ \mapsto v_+ \otimes v_- + v_- \otimes v_+ \\ v_- \mapsto v_- \otimes v_- . \end{cases}$$

Daher hat  $d^{-1} : C(D)^{-1} \rightarrow C(D)^0$  trivialen Kern, also ist die  $-1$ -te Homologiegruppe von  $C(D)$  trivial. Die  $0$ -te Homologiegruppe ergibt sich gemäß Definition als

$$\ker(d^0)/\text{im}(d^{-1}) = C(D)^0/\text{im}(d^{-1})$$

Das Bild von  $d^{-1}$  besteht aus dem Erzeugnis von  $v_- \otimes v_-$  und dem Erzeugnis von  $v_+ \otimes v_- + v_- \otimes v_+$ . Ersteres ergibt die gesamte (eindimensionale) Komponente  $C(D)_{-3}^0$  und letzteres einen eindimensionalen Unterraum der Komponente  $C(D)_{-1}^0$ . Nach Homologiebildung bleibt also

$$Kh^{i,j}(D) \cong \begin{cases} \mathbb{F}_2, & \text{falls } (i, j) = (0, \pm 1) \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

wie im Falle eines Diagramms des Unknotens ohne Kreuzungspunkte.

**Bemerkung 3.30.** Erinnere nochmals an die Konstruktion der Co-Kettenkomplexe

$$\llbracket D \rrbracket \quad \text{und} \quad C(D)$$

eines orientierten Linkdiagramms  $D$ . Die einzige Art und Weise, wie die Orientierung des Linkdiagramms  $D$  in die Definitionen einfließt, ist in Form der Anzahlen  $n_+(D)$  und  $n_-(D)$

der links- und rechtsgängigen Kreuzungen von  $D$ . Es genügt also die Angabe eines unorientierten Linkdiagramms  $D$  zusammen mit dem Paar  $(n_+(D), n_-(D))$  zur Konstruktion des Khovanov-Komplexes.

Fixiert man nun eine Kreuzung  $x$  von  $D$  und betrachtet die 0-Glättung  $D_0$  und die 1-Glättung  $D_1$  von  $x$  in einer Scheibe  $B$  um  $x$ , so sind dies auch Linkdiagramme. Allerdings lässt sich die Orientierung, welche  $D$  trägt, nicht auf  $D_0$  und  $D_1$  „übertragen“: Man kann nicht  $D_0$  und  $D_1$  so orientieren, dass deren Orientierung außerhalb von  $B$  jeweils mit der von  $D$  übereinstimmt (genauer: es lässt sich stets eine der beiden Glättungen  $D_0, D_1$  in diesem Sinne orientieren und die andere nicht). Möchte man trotzdem den unorientierten Linkdiagrammen  $D_0$  und  $D_1$  Khovanov-Komplexe  $C(D_0)$  und  $C(D_1)$  zuordnen, so bedient man sich eines naheliegenden Tricks: Man setzt im Falle einer rechtsgängigen Kreuzung  $x$

$$\begin{aligned} n_+(D_0) &= n_+(D_1) = n_+(D) - 1 & \text{sowie} \\ n_-(D_0) &= n_-(D_1) = n_-(D) \end{aligned}$$

und im Falle einer linksgängigen Kreuzung  $x$

$$\begin{aligned} n_+(D_0) &= n_+(D_1) = n_+(D) & \text{sowie} \\ n_-(D_0) &= n_-(D_1) = n_-(D) - 1 \end{aligned}$$

und definiert die Komplexe  $C(D_0)$  und  $C(D_1)$  dann für die unorientierten Linkdiagramme  $D_0$  und  $D_1$  mit den Paaren  $(n_+(D_0), n_-(D_0))$  bzw.  $(n_+(D_1), n_-(D_1))$ .

Aufgrund der Bedeutung für den weiteren Verlauf der Arbeit sei an dieser Stelle an die Konstruktion des Abbildungskegels in der homologischen Algebra erinnert:

**Erinnerung 3.31.** Seien  $(A, d_A)$  und  $(B, d_B)$  Co-Kettenkomplexe. Dann ist auf  $A \oplus B[1]$  (also mit  $(A \oplus B[1])_m = A_m \oplus B_{m-1}$ ) durch

$$d_{A \oplus B[1]} = \begin{pmatrix} d_A & 0 \\ 0 & d_{B[1]} \end{pmatrix}$$

ein Co-Differential gegeben. Ist  $f : A \rightarrow B$  eine Kettenabbildung, so kann man auf  $\Gamma(f) := A \oplus B[1]$  noch ein weiteres Co-Differential definieren: Die Abbildung

$$d_{\Gamma(f)} = \begin{pmatrix} -d_A & 0 \\ f & d_{B[1]} \end{pmatrix}$$

erfüllt  $d_{\Gamma(f)} \circ d_{\Gamma(f)} = 0$ , weil  $f$  eine Kettenabbildung ist: Für  $a \in A$  gilt

$$\begin{aligned} d_{\Gamma(f)} \circ d_{\Gamma(f)}(a) &= d_{\Gamma(f)}(-d_A(a) + f(a)) \\ &= (-d_A)^2(a) + f(-d_A(a)) + d_B(f(a)) \\ &= d_B(f(a)) - f(d_A(a)) = 0, \end{aligned}$$

### 3. Khovanov-Homologie

weil  $(-d_A)^2 = 0$  und  $f \circ d_A = d_B \circ f$  gilt. Für  $b \in B$  gilt  $d_{\Gamma(f)} \circ d_{\Gamma(f)} = (d_B)^2(b) = 0$  wegen  $(d_B)^2 = 0$ ; insgesamt also

$$d_{\Gamma(f)} \circ d_{\Gamma(f)} = 0.$$

Beachte, dass für Komplexe über  $\mathbb{F}_2$  das negative Vorzeichen von  $d_A$  in der Definition von  $d_{\Gamma(f)}$  ignoriert werden darf.

**Definition 3.32.** Seien  $(A, d_A)$  und  $(B, d_B)$  Co-Kettenkomplexe und  $f : A \rightarrow B$  eine Kettenabbildung, so heißt der Komplex  $(\Gamma(f), d_{\Gamma(f)})$  *Abbildungskegel über  $f$* .

Das folgende Beispiel gibt einen Eindruck, wie diese Abbildungskegel-Struktur in natürlicher Weise im Kontext der Khovanov-Homologie auftaucht.

**Beispiel 3.33.** Sei nun  $D$  ein orientiertes Linkdiagramm mit  $n + 1$  Kreuzungen  $x_1, \dots, x_{n+1}$  und  $D_0$  und  $D_1$  seien die 0- bzw. 1-Glättung der  $(n + 1)$ -ten Kreuzung  $x_{n+1}$ . Seien wie zuvor  $n_+(D)$  und  $n_-(D)$  die Anzahlen der rechts- bzw. linksgängigen Kreuzungen von  $D$  und  $(n_+(D_0), n_-(D_0)), (n_+(D_1), n_-(D_1))$  wie in 3.30. Betrachte dann die Komplexe  $C(D), C(D_0)$  und  $C(D_1)$ . Zu jedem  $\alpha \in \{0, 1\}^n$  ist gemäß 3.11 eine Abbildung  $d_{\alpha \times \{1\}}^{\alpha \times \{0\}} : \mathcal{F}(S_{\alpha \times \{0\}}) \rightarrow \mathcal{F}(S_{\alpha \times \{1\}})$  gegeben. Diese lässt sich einerseits als eine Komponente des Co-Differentials  $d$  auf  $C(D)$  auffassen, andererseits kann man nun aber  $d_{\alpha \times \{1\}}^{\alpha \times \{0\}}$  auch als Abbildung zwischen  $\mathcal{F}(S_{D_0, \alpha})$  und  $\mathcal{F}(S_{D_1, \alpha})$  auffassen, wobei  $S_{D_0, \alpha}$  die vollständige Glättung von  $D_0$  zur Ecke  $\alpha \in \{0, 1\}^n$  und  $S_{D_1, \alpha}$  die vollständige Glättung von  $D_1$  zur Ecke  $\alpha$  ist. Man erhält somit Abbildungen

$$\psi^r := \sum_{\alpha \in \{0, 1\}^n : r = |\alpha| - n_-(D_0)} d_{\alpha \times \{1\}}^{\alpha \times \{0\}} : C(D_0)^r \rightarrow C(D_1)^r.$$

Mit denselben Argumenten wie im Beweis von 3.12 zeigt man dann, dass  $\psi : C(D_0) \rightarrow C(D_1)$  eine Kettenabbildung ist. Beachtet man auch die Graduierungen von  $C(D), C(D_0)$  und  $C(D_1)$ , so zeigt diese Argumentation sogar noch mehr. Versetzt man nämlich den  $q$ -Grad von  $C(D_1)$  um eins und betrachtet die graduierte Kettenabbildung  $\psi : C(D_0) \rightarrow C(D_1)\{1\}$  so lässt sich der Khovanov-Komplex  $C(D)$  von  $D$  sogar als Abbildungskegel von  $\psi$  auffassen: Falls  $x_{n+1}$  eine rechtsgängige Kreuzung ist, so folgt

$$C(D) = \Gamma(\psi)$$

und im Falle einer linksgängigen Kreuzung  $x_{n+1}$  ergibt sich

$$C(D) = \Gamma(\psi)[-1].$$

**Kommentar 3.34.** Auch hier hilft die Anschauung des  $n + 1$ -dimensionalen Würfels  $Q$ : Der Komplex  $C(D)$  wird über die Ecken und Kanten von  $Q$  konstruiert. Der Komplex

$C(D_0)$  entspricht dann (den Ecken und Kanten) der  $n$ -dimensionalen Zelle  $Q_{n,0}$ , welche von  $\alpha, \beta \in \{0, 1\}^{n+1}$  mit  $\alpha = (0, \dots, 0, 0)$  und  $\beta = (1, \dots, 1, 0)$  aufgespannt wird (beachte:  $\alpha <_n \beta$ ). Analog entspricht der Komplex  $C(D_1)$  der von  $\alpha = (0, \dots, 0, 1)$  und  $\beta = (1, \dots, 1, 1)$  aufgespannten  $n$ -Zelle  $Q_{n,1}$ . Die Kettenabbildung  $\psi$  ist dann gerade die Summe über all diejenigen Komponenten  $d_{\alpha'}^{\alpha}$  des Co-Differentials  $d$  von  $C(D)$ , für die sich  $\alpha$  und  $\alpha'$  gerade in der  $n + 1$ -ten Komponente unterscheiden. Anders ausgedrückt sind das alle Komponenten von  $d$ , welche zu Kanten gehören, die zwischen den beiden  $n$ -Zellen  $Q_{n,0}$  und  $Q_{n,1}$  verlaufen.

**Bemerkung 3.35.** Betrachte nun ein Linkdiagramm  $D$  und ein Linkdiagramm  $U$  des Unknotens ohne Kreuzungspunkte. Es ist dann  $C(U)^0 \cong V$  (als graduierte Vektorräume) und  $C(U)^r = 0$  sonst nach Beispiel 3.29. Insbesondere hat  $C(U)$  triviales Co-Differential und wir schreiben kurz  $C(U) = V$ . Ist nun  $D$  ein Linkdiagramm mit Khovanov-Komplex  $C(D)$ , so betrachte man den Khovanov-Komplex von  $D \sqcup U$ . Die Glättungen von  $D$  und von  $D \sqcup U$  stimmen bis auf die jeweils zusätzliche Komponente  $U$  überein und die TQFT übersetzt die zusätzliche Komponente stets durch eine zusätzliche  $V$ -Komponente im Tensorprodukt. Man kann deshalb auch kurz

$$C(D \sqcup U) = C(D) \otimes V$$

schreiben (mit Differential  $d_{C(D)} \otimes \text{id}$ ).

Gemeinsam mit Beispiel 3.29 und Beispiel 3.33 lässt sich der Khovanov-Komplex in Anlehnung an die Definition 1.34 der Kauffman-Klammer also folgendermaßen ausdrücken:

**Proposition 3.36.** *Der Khovanov Komplex für Linkdiagramme erfüllt folgende Eigenschaften:*

(i) *Das leere Linkdiagramm  $\emptyset$  hat den trivialen Komplex*

$$C(\emptyset) = \mathbb{F}_2$$

*in Bigraduierung  $(0, 0)$ .*

(ii) *Ist  $D$  ein Linkdiagramm und  $U$  ein Diagramm des Unknotens ohne Kreuzungspunkte, so gilt*

$$C(D \sqcup U) = C(D) \otimes V.$$

(iii) *Ist  $D$  ein Linkdiagramm und ist  $D_0$  bzw.  $D_1$  die 0- bzw. 1-Glättung einer fixierten Kreuzung  $x$  von  $D$ , so entsteht  $C(D)$  als Abbildungskegel*

$$C(D) = \Gamma(C(D_0) \xrightarrow{\psi} C(D_1)\{1\}),$$

### 3. Khovanov-Homologie

*falls  $x$  rechtsgängig und*

$$C(D) = \Gamma(C(D_0) \xrightarrow{\psi} C(D_1)\{1\})[-1],$$

*falls  $x$  linksgängig.*

□

**Bemerkung 3.37.** Berücksichtigt man außerdem den Grad-Versatz von  $C(D)$ , so sieht man bereits hier, dass der Übergang zur alternierenden Summe der graduierten Dimensionen der Kettengruppen von  $C(D)$  das Jones-Polynom  $\hat{J}(D)$  von  $D$  ergibt,

$$\hat{J}(D) = \sum_{r \in \mathbb{Z}} (-1)^r q^{\dim(C(D)^r)}.$$

Zum Beweis seien die Bezeichnungen wie zuvor, also  $D$  ein orientiertes Linkdiagramm mit  $n = n_- + n_+$  Kreuzungen und Glättungen  $S_\alpha$  zu  $\alpha \in \{0, 1\}^n$ . Mit  $k_\alpha$  sei zudem die Anzahl der Komponenten von  $S_\alpha$  bezeichnet, dann gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{r \in \mathbb{Z}} (-1)^r q^{\dim(C(D)^r)} &= \sum_{r \in \mathbb{Z}} (-1)^r \sum_{\alpha: |\alpha|=r+n_-} q^{\dim(\mathcal{F}(S_\alpha))} \cdot q^{r+n_+-n_-} \\ &= \sum_{r \in \mathbb{Z}} (-1)^r \sum_{\alpha: |\alpha|=r+n_-} q^{\dim(V^{\otimes k_\alpha})} \cdot q^{r+n_+-n_-} \\ &= \sum_{r \in \mathbb{Z}} (-1)^r \sum_{\alpha: |\alpha|=r+n_-} (q + q^{-1})^{k_\alpha} \cdot q^{r+n_+-n_-} \\ &= q^{n_+-n_-} \sum_{r \in \mathbb{Z}} (-q)^r \sum_{\alpha: |\alpha|=r+n_-} (q + q^{-1})^{k_\alpha} \\ &= q^{n_+-n_-} \sum_{\alpha \in \{0,1\}^n} (-q)^{|\alpha|-n_-} (q + q^{-1})^{k_\alpha} \\ &= (-1)^{n_-} q^{n_+-2n_-} \sum_{\alpha \in \{0,1\}^n} (-q)^{|\alpha|} (q + q^{-1})^{k_\alpha} \\ &= (-1)^{n_-} q^{n_+-2n_-} \langle D \rangle = \hat{J}(D) \end{aligned}$$

□

Im Gegensatz zum Jones-Polynom ist der Khovanov-Komplex allerdings keine Linktypinvariante, wie man bereits durch die Beispiele 3.29 (b) und (c) sieht. Man beachte aber, dass in diesen beiden Beispielen die Khovanov-Homologiegruppen als bigraduierte Vektorräume isomorph sind. In der Tat stellt sich heraus:

**Theorem 3.38.** *Die Isomorphieklassen der Khovanov-Homologiegruppen  $Kh^{i,j}(D)$  sind Linktyp-Invarianten.*



*Beweis.* Die Aussage samt Beweis ist zu finden in Khovanovs Arbeit [12] als Theorem 1.

Zu zeigen ist auch hier wieder, dass sich die Khovanov-Homologie eines Linkdiagramms  $D$  unter ebenen Isotopien und Reidemeister-Bewegungen (bis auf Isomorphie) nicht ändert. Man zeigt, dass eine Reidemeister-Bewegung zwischen Linkdiagrammen  $D$  und  $D'$  zunächst eine Kettenhomotopieäquivalenz zwischen den Co-Kettenkomplexen  $C(D)$  und  $C(D')$  induziert. Diese wiederum induziert Isomorphismen in der Homologie wie behauptet. In [12] werden die Kettenhomotopieäquivalenzen für jede einzelne Reidemeister-Bewegung im fünften Abschnitt konstruiert.

Der Fall einer ebenen Isotopie zwischen Linkdiagrammen  $D$  und  $D'$  ist einfacher: Durch die Definition des Khovanov-Komplexes über die TQFT  $\mathcal{F}$  folgt, dass eine ebene Isotopie sogar einen (kanonischen) Co-Kettenkomplex-Isomorphismus zwischen  $C(D)$  und  $C(D')$  liefert, welcher insbesondere einen Isomorphismus in der Homologie induziert.  $\square$

Es lässt sich nun einsehen, dass die Khovanov-Homologie tatsächlich eine Verallgemeinerung des Jones-Polynoms darstellt. Hierzu muss lediglich erklärt werden, wie einem graduierten Komplex (erinnere: d.i. ein Co-Kettenkomplex mit einer (zusätzlichen)  $q$ -Graduierung neben der homologischen Graduierung) eine  $q$ -graduierte Variante der Eulercharakteristik zugeordnet wird:

**Definition 3.39.** Die *graduierte Eulercharakteristik* eines graduierten Komplexes  $(C, d)$  über einem Körper ist gegeben durch

$$\chi_q(C) := \sum (-1)^r q \dim(H^r(C)),$$

wobei  $H^r(C)$  die  $r$ -te Homologiegruppe des Co-Kettenkomplexes  $(C, d)$  sei.

**Bemerkung 3.40.** (a) Die graduierte Eulercharakteristik ist also gerade die alternierende Summe der  $q$ -graduierten Dimensionen der Homologiegruppen.

(b) Falls die  $q$ -Graduierung des Co-Differentials  $d$  gleich 0 ist und außerdem alle Co-Kettengruppen  $C^r$  endlich-dimensional sind, so gilt allgemein

$$\sum (-1)^r q \dim H^r(C) = \sum (-1)^r q \dim C^r$$

und für den Khovanov-Komplex im Speziellen folgt wegen

$$\hat{J}(D) = \sum_{r \in \mathbb{Z}} (-1)^r q \dim(C(D)^r) :$$

**Satz 3.41.** Sei  $D$  ein Linkdiagramm. Dann gilt

$$\chi_q(C(D)) = \sum (-1)^r q \dim(Kh^r(D)) = \hat{J}(D),$$

### 3. Khovanov-Homologie

d.h. der Übergang von der Khovanov-Homologie zur graduierten Eulercharakteristik der Khovanov-Homologie liefert das Jones-Polynom.  $\square$

Damit nun die Khovanov-Homologie als Kategorifizierung des Jones-Polynoms betrachtet werden kann, soll sie als Funktor  $Kh : \mathbf{Diag} \rightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{F}_2}$  realisiert werden (wobei mit  $\mathbf{Vect}_{\mathbb{F}_2}$  genau genommen die Kategorie der bigraduierten  $\mathbb{F}_2$ -Vektorräume gemeint ist). Hierfür ist noch zu klären, wie einem Morphismus aus  $\mathbf{Diag}$  ein Morphismus aus  $\mathbf{Vect}_{\mathbb{F}_2}$  zugeordnet werden soll.

Man beachte dabei, dass ein Morphismus aus  $\mathbf{Diag}$  eine Äquivalenzklasse  $[M]$  von Movies ist. Möchte man also die Zuordnung repräsentantenweise erklären, so muss auch begründet werden, weshalb äquivalente Repräsentanten (also Movies) *denselben* Morphismus in  $\mathbf{Vect}_{\mathbb{F}_2}$  induzieren.

**Kommentar 3.42.** (a) Zwischen den singulären Niveaus eines Movies  $M = (D_t)_{t \in I}$  variieren die Linkdiagramme durch ebene Isotopie, was kanonische Isomorphismen (sogar bereits auf Ebene der Khovanov-Komplexe) induziert (vgl. 3.38), und somit für jeden Movie  $M$ , der durch ebene Isotopie gegeben ist, einen (Iso-)Morphismus

$$Kh(M) : Kh(D_0) \rightarrow Kh(D_1).$$

(b) Dann wird jeder lokalen Bewegung ein Morphismus der zugehörigen Homologiegruppen zugeordnet. Für die drei Reidemeister-Bewegungen hat man Kettenhomotopieäquivalenzen der zugehörigen Co-Kettenkomplexe, welche somit Isomorphismen in der Homologie induzieren (vgl. 3.38). Man erhält also auch hier eine Zuordnung, welche einem elementaren Movie  $M$ , der eine Reidemeister-Bewegung  $D_0 \rightarrow D_1$  darstellt, einen (Iso-)Morphismus

$$Kh(M) : Kh(D_0) \rightarrow Kh(D_1)$$

zuweist.

Es bleiben also noch die Morse-Modifikationen. Für diese findet man ebenfalls Kettenabbildungen der zugehörigen Co-Kettenkomplexe, also werden auch in diesem Fall Morphismen (hier aber nicht mehr unbedingt Isomorphismen!) in der Homologie induziert: Besonders hervorgehoben sei hier die Morse-Modifikation, die durch das orientierte Ankleben eines 1-Henkels gegeben ist.

**Bemerkung 3.43.** Sei also  $M$  ein elementarer Movie, der durch die lokale Bewegung *Ankleben eines 1-Henkels* gegeben ist. Hierbei hat man zwei orientierte Linkdiagramme  $D_0$  und  $D_1$ , welche sich nur in einer Scheibe  $B$  unterscheiden (siehe Definition 2.18). Man findet dann

ein (unorientiertes) Linkdiagramm  $D$  mit einer Kreuzung mehr als  $D_0$  und  $D_1$ , sodass  $D_0$  die 0-Glättung und  $D_1$  die 1-Glättung von  $D$  in dieser zusätzlichen Kreuzung verkörpern. Nach einer kleinen Überlegung für die Kreuzungszahlen  $(n_+, n_-)$  von  $D$  und damit einhergehend den geeigneten Versatz der Graduierungen sieht man dann wie in Beispiel 3.33, dass  $C(D)$  als Abbildungskegel  $\Gamma(\psi)$  für eine Kettenabbildung  $\psi : C(D_0) \rightarrow C(D_1)$  identifiziert werden kann. Man nimmt dann die von  $\psi$  in der Homologie induzierte Abbildung

$$Kh(M) := \psi_* : Kh(D_0) \rightarrow Kh(D_1)$$

als Morphismus.

Für die 0- und 2-Henkel kommen die Abbildungen  $\epsilon$  und  $\eta$  der TQFT  $\mathcal{F}$  zum Zuge. Ist  $D$  ein Linkdiagramm und  $U$  eine Komponente, welche durch Geburt hinzu kommt, so wird durch  $\epsilon$  eine Kettenabbildung

$$C(D) \rightarrow C(D \sqcup U)$$

und ähnlich beim Tod einer Komponente durch  $\eta$  eine Kettenabbildung

$$C(D \sqcup U) \rightarrow C(D)$$

induziert. Hierbei geht die kanonische Identifikation

$$W \otimes \mathbb{F}_2 \cong W$$

beim Tensorieren mit dem Grundkörper  $\mathbb{F}_2$  ein. Auch für das Ankleben von 0- und 2-Henkeln erhält man also induzierte Abbildungen in der Homologie,

$$Kh(M) : Kh(D) \rightarrow Kh(D \sqcup U)$$

beziehungsweise

$$Kh(M) : Kh(D \sqcup U) \rightarrow Kh(D).$$

All diese Morphismen hat bereits Khovanov selbst in seiner Arbeit [12] konstruiert. Da jeder Movie aus einer Abfolge von lokalen Bewegungen (und dazwischen ebenen Isotopien) besteht, kann man nun durch Verkettung der obigen elementaren Morphismen jedem Movie  $M$  von  $D_0$  nach  $D_1$  einen Morphismus zwischen den zugehörigen Objekten  $Kh(D_0)$  und  $Kh(D_1)$  in  $\mathbf{Vect}_{\mathbb{F}_2}$  zuordnen.

Es bleibt zu zeigen, dass äquivalente Movies denselben Morphismus induzieren. In [11] beschreibt Jacobsson dieses Vorgehen sehr detailliert. Das dortige Theorem 2 gibt sogar die Aussage, dass die Morphismen für die Khovanov-Homologie über einer allgemeineren Koeffizientengruppe als dem zweielementigen Körper unter Äquivalenz von Movies bis auf ein

### 3. Khovanov-Homologie

Vorzeichen invariant sind. Im Falle der Koeffizienten über  $\mathbb{F}_2$  erübrigt sich dann die Vorzeichenfrage und man erhält tatsächlich die Invarianz von  $Kh(M)$  unter Äquivalenz von Movies. Somit ist die repräsentantenweise Definition von  $Kh([M])$  wohldefiniert und man bekommt die Khovanov-Homologie als Funktor

$$Kh : \mathbf{Diag} \rightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{F}_2}.$$

Um die Khovanov-Homologie mit anderen funktoriellen Linktypinvarianten vergleichen zu können, ist es häufig von Vorteil, wenn man sie auch als Funktor von der Kategorie **Link** in die Kategorie  $\mathbf{Vect}_{\mathbb{F}_2}$  auffassen kann, denn viele geometrische Linktypinvarianten, unter anderem gewisse *Knoten-Floer-Homologien* (siehe Anhang A für Beispiele), werden eben nicht kombinatorisch über Linkdiagramme, sondern über Links in  $\mathbb{S}^3$  (als geometrische Objekte) definiert. Daher soll im letzten Teil des Kapitels erklärt werden, wie man einen Funktor  $F : \mathbf{Diag} \rightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{F}_2}$  mit Hilfe von Link-Repräsentantenwahlen zu einem Funktor  $\hat{F} : \mathbf{Link} \rightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{F}_2}$  fortsetzt.

Betrachte zu einer Link-Repräsentantenwahl  $\alpha$  den Funktor

$$\Pi_\alpha : \mathbf{Link} \rightarrow \mathbf{Diag}$$

und erinnere, dass  $\Pi_\alpha$  nach Proposition 2.35 eine Äquivalenz von Kategorien ist.

**Bemerkung 3.44.** Für eine fixierte Link-Repräsentantenwahl  $\alpha$  lässt sich die Khovanov-Homologie als Funktor

$$Kh_\alpha : \mathbf{Link} \rightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{F}_2}$$

auffassen, indem man

$$Kh_\alpha := Kh \circ \Pi_\alpha$$

setzt.

Möchte man nun diesen Funktor noch unabhängig von der Wahl  $\alpha$  machen, so hilft ein kategorientheoretisches Konstrukt, der *inverse Limes eines transitiven Systems*:

**Definition 3.45.** Sei  $M$  eine Menge und für jedes  $\alpha \in M$  sei  $V_\alpha$  ein Vektorraum. Weiter sei für jedes Paar  $(\alpha, \beta)$  mit  $\alpha, \beta \in M$  ein Vektorraum-Isomorphismus  $\pi_\beta^\alpha : V_\alpha \rightarrow V_\beta$  gegeben. Dann heißt  $((V_\alpha)_{\alpha \in M}, (\pi_\beta^\alpha)_{\alpha, \beta \in M})$  ein *transitives System von Vektorräumen*, falls

- (i) für jedes  $\alpha \in M$  :  $\pi_\alpha^\alpha = \text{id}_{V_\alpha}$  und
- (ii) für alle  $\alpha, \beta \in M$  :  $\pi_\gamma^\beta \circ \pi_\beta^\alpha = \pi_\gamma^\alpha$  gilt.

**Proposition und Definition 3.46.** Sei  $((V_\alpha)_{\alpha \in M}, (\pi_\beta^\alpha)_{\alpha, \beta \in M})$  ein transitives System von Vektorräumen. Dann trägt

$$V := \{f : M \rightarrow \cup_{\alpha \in M} V_\alpha : f(\alpha) \in V_\alpha, \forall \alpha \in M \quad \text{und} \quad f(\beta) = \pi_\beta^\alpha(f(\alpha)), \forall \alpha, \beta \in M\}$$

die Struktur eines Vektorraums vermöge

$$(f + g)(\alpha) := f(\alpha) +_\alpha g(\alpha) \quad (\text{für } f, g \in V, \alpha \in M),$$

$$(\lambda \cdot f)(\alpha) := \lambda \cdot_\alpha f(\alpha), \quad (\text{für } \lambda \in \mathbb{F}_2, f \in V, \alpha \in M)$$

und für jedes  $\alpha \in M$  ist  $\varphi_\alpha : V \rightarrow V_\alpha, f \mapsto f(\alpha)$  ein Vektorraum-Isomorphismus.  $V$  heißt *inverser Limes des transitiven Systems*  $((V_\alpha)_{\alpha \in M}, (\pi_\beta^\alpha)_{\alpha, \beta \in M})$ , Notation:

$$\varprojlim_{\alpha \in M} V_\alpha = V.$$

*Beweis.* Zunächst ist  $V \neq \emptyset$ , denn die Abbildung  $0_V : M \rightarrow \cup_{\alpha \in M} V_\alpha, \alpha \mapsto 0 \in V_\alpha$  erfüllt alle Bedingungen an Elemente aus  $V$ . Desweiteren ist für  $f, g \in V$  und  $\alpha, \beta \in M$  wegen

$$(f + g)(\alpha) = f(\alpha) + g(\alpha) \in V_\alpha$$

und

$$(f + g)(\beta) = f(\beta) + g(\beta) = \pi_\beta^\alpha(f(\alpha)) + \pi_\beta^\alpha(g(\alpha)) = \pi_\beta^\alpha(f(\alpha) + g(\alpha)) = \pi_\beta^\alpha((f + g)(\alpha))$$

auch die Abbildung  $f + g$  ein (wohldefiniertes) Element von  $V$ . Ähnlich zeigt man dies für  $\lambda \cdot f$ . Die übrigen Vektorraumaxiome gelten in  $V$ , weil sie punktweise gelten (mit  $0_V \in V$  als neutralem Element bezüglich der Addition). Somit ist  $V$  ein Vektorraum.

Die Abbildung  $\varphi_\alpha : V \rightarrow V_\alpha$  ist zunächst linear, denn

$$\varphi_\alpha(f + g) = (f + g)(\alpha) = f(\alpha) + g(\alpha) = \varphi_\alpha(f) + \varphi_\alpha(g)$$

und ähnlich für die skalare Multiplikation.

Zeige also noch, dass  $\varphi_\alpha$  bijektiv ist: Für  $f, g \in V$  mit  $f \neq g$  existiert ein  $\beta \in M$ , sodass  $f(\beta) \neq g(\beta)$ . Da  $\pi_\alpha^\beta$  ein Isomorphismus ist, gilt dann auch

$$\varphi_\alpha(f) = f(\alpha) = \pi_\alpha^\beta(f(\beta)) \neq \pi_\alpha^\beta(g(\beta)) = g(\alpha) = \varphi_\alpha(g),$$

also ist  $\varphi_\alpha$  injektiv. Ist nun  $v_\alpha \in V_\alpha$ , so betrachte  $f : M \rightarrow \cup_{\alpha} V_\alpha$  definiert durch  $f(\beta) := \pi_\beta^\alpha(v_\alpha)$  für  $\beta \in M$ . Es ist dann tatsächlich  $f \in V$  und

$$\varphi_\alpha(f) = f(\alpha) = \pi_\alpha^\alpha(v_\alpha) = v_\alpha,$$

somit also  $\varphi_\alpha$  auch surjektiv und damit ein Isomorphismus. □

### 3. Khovanov-Homologie

Nun also zurück zur Khovanov-Homologie:

**Lemma 3.47.** *Seien  $\alpha, \beta, \gamma$  Link-Repräsentantenwahlen. Dann induzieren die natürlichen Isomorphismen aus 2.33 für jeden Link  $L$  kanonische Isomorphismen  $Kh_\beta^\alpha(L) : Kh_\alpha(L) \rightarrow Kh_\beta(L)$  mit*

$$Kh_\gamma^\beta(L) \circ Kh_\beta^\alpha(L) = Kh_\gamma^\alpha(L) \quad \text{und} \quad Kh_\alpha^\alpha(L) = \text{id}.$$

*Beweis.* Dies folgt aus 2.33 und der Bemerkung danach.  $\square$

**Korollar 3.48.** *Somit wird  $(Kh_\alpha(L))_\alpha$  zusammen mit den Isomorphismen  $(Kh_\beta^\alpha(L))_{\alpha,\beta}$  zu einem transitiven System von Vektorräumen.*

**Definition 3.49.** Man definiert  $Kh(L)$  als inversen Limes des transitiven Systems  $((Kh_\alpha(L))_\alpha, (Kh_\beta^\alpha(L))_{\alpha,\beta})$ ,

$$Kh(L) := \varprojlim_{\alpha \in M} Kh_\alpha(L).$$

**Lemma 3.50.** *Ein Morphismus  $[S] \in \text{Mor}(L_0, L_1)$  induziert eine (wohldefinierte) lineare Abbildung  $Kh([S]) : Kh(L_0) \rightarrow Kh(L_1)$ .*

*Beweis.* Für eine Repräsentantenwahl  $\alpha$  seien  $\varphi_\alpha^0 : Kh(L_0) \rightarrow Kh_\alpha(L_0)$  und  $\varphi_\alpha^1 : Kh(L_1) \rightarrow Kh_\alpha(L_1)$  die kanonischen Isomorphismen wie in 3.46. Dann ist mit

$$Kh([S]) := (\varphi_\alpha^1)^{-1} \circ Kh_\alpha([S]) \circ \varphi_\alpha^0$$

die gewünschte Abbildung gegeben. Man zeigt wiederum mit den natürlichen Isomorphismen aus 2.33, dass diese Definition unabhängig von der Wahl von  $\alpha$  ist.  $\square$

Damit ergibt sich schließlich die gewünschte Aussage:

**Korollar 3.51.** *Die Khovanov-Homologie definiert einen Funktor  $Kh : \mathbf{Link} \rightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{F}_2}$ .*

$\square$

## 4. Spektralsequenzen

Das folgende Kapitel soll einen Überblick über Spektralsequenzen geben, welche sich zu einem effektiven Werkzeug in der algebraischen Topologie und darüber hinaus in vielen anderen mathematischen Gebieten entwickelt haben.

Außerdem wird eine Möglichkeit vorgestellt, wie man Spektralsequenzen aus vorhandenen Strukturen konstruiert, namentlich die Spektralsequenz eines filtrierten Kettenkomplexes.

**Definition 4.1.** Sei  $R$  ein Ring. Eine *ungraduierte Spektralsequenz über  $R$*  ist eine Folge von Tripeln  $(E_i, d_i, h_i)_{i \geq i_0}$  (für ein  $i_0 \in \mathbb{N}_0$ ), sodass für jedes  $i \geq i_0$

- $E_i$  ein  $R$ -Modul ist (die  $i$ -te Seite);
- $d_i : E_i \rightarrow E_i$  ein  $R$ -Modulhomomorphismus mit  $d_i \circ d_i = 0$  ist (das *Differential der  $i$ -ten Seite*);
- $h_i : H(E_i, d_i) \rightarrow E_{i+1}$  ein  $R$ -Modul-Isomorphismus ist, wobei  $H(E_i, d_i)$  die *Homologie* von  $E_i$  bezüglich  $d_i$  bezeichnet:

$$H(E_i, d_i) = \ker(d_i) / \text{im}(d_i).$$

**Definition 4.2.** Sei  $R$  ein Ring. Eine (*cohomologisch bigraduierte*) *Spektralsequenz über  $R$*  ist eine (zunächst) ungraduierte Spektralsequenz  $(E_i, d_i, h_i)_{i \geq i_0}$ , sodass außerdem für jedes  $i \geq i_0$

- eine *Bigraduierung* auf der  $i$ -ten Seite  $E_i$  gegeben ist, d.i. eine Zerlegung

$$E_i = \bigoplus_{p, q \in \mathbb{Z}} E_i^{p, q}$$

in  $R$ -Untermoduln  $E_i^{p, q} \subseteq E_i$  ( $p, q \in \mathbb{Z}$ );

- das Differential der  $i$ -ten Seite  $d_i : E_i \rightarrow E_i$  eine *bigradierte Abbildung* mit Bigraduierung  $(i, 1 - i)$  ist, d.h.

$$d_i(E_i^{p, q}) \subseteq E_i^{p+i, q+1-i}, \quad \forall p, q \in \mathbb{Z}$$

#### 4. Spektralsequenzen

notiere dann

$$d_i = \bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} d_i^{p,q}$$

mit  $d_i^{p,q} : E_i^{p,q} \rightarrow E_i^{p+i,q+1-i}$  definiert durch  $d_i^{p,q} := d_i|_{E_i^{p,q}}$ ;

- die Abbildung  $h_i$  bigraduiert mit Bigraduierung  $(0, 0)$  ist, also

$$h_i(H(E_i, d_i)^{p,q}) \subseteq E_{i+1}^{p,q},$$

wobei auf  $H(E_i, d_i)$  die durch  $d_i$  induzierte Bigraduierung gegeben sei,

$$H(E_i, d_i)^{p,q} := \ker(d_i^{p,q}) / \text{im}(d_i^{p-i,q-1+i}).$$

**Kommentar 4.3.** (a) Häufig ergeben sich die Isomorphismen  $h_i$  aus dem Kontext, zum Beispiel als kanonische Isomorphismen (oder bei iterativer Definition der Seiten einer Spektralsequenz,  $E_{i+1} := H(E_i, d_i)$ , gar als  $h_i = \text{id}$ ). In solchen Fällen unterdrückt man meist die Isomorphismen  $h_i$  und schreibt  $(E_i, d_i)_{i \geq i_0}$  für die betreffende Spektralsequenz.

- (b) Tatsächlich sind die Moduln  $H(E_i, d_i) = \ker(d_i) / \text{im}(d_i)$  und  $\bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} H(E_i, d_i)^{p,q}$  a priori nicht gleich. In vielen Fällen sind sie allerdings kanonisch isomorph (als ungraduierte Moduln), insbesondere für die in dieser Arbeit auftretenden Spektralsequenzen. Die kanonische Isomorphie folgt hier mit der Aussage aus der Algebra, dass für  $R$ -Moduln  $A, B$  mit Untermoduln  $A' \subseteq A$  und  $B' \subseteq B$

$$(A \oplus B) / (A' \oplus B') \cong (A/A') \oplus (B/B')$$

kanonisch isomorph sind. Mit der Bigraduierung von  $H(E_i, d_i)$  ist daher eigentlich die von dem kanonischen Isomorphismus

$$H(E_i, d_i) \cong \bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} H(E_i, d_i)^{p,q}$$

induzierte Graduierung gemeint. Aber auch hier werden solche kanonischen Isomorphismen in der Notation meist unterdrückt.

- (c) Die Bigraduierung gibt auch die Möglichkeit, jedes Paar  $(E_i, d_i)$  als Co-Kettenkomplex über  $R$  aufzufassen: Man definiert die  $n$ -te Co-Kettengruppe als den  $R$ -Modul  $(E_i)^n := \bigoplus_{p+q=n} E_i^{p,q}$ . Für das Differential gilt dann gerade  $d_i((E_i)^n) \subseteq (E_i)^{n+1}$ , womit man tatsächlich ein Co-Differential und somit einen Co-Kettenkomplex  $(E_i, d_i)$  hat. Die homologische (einfache) Graduierung  $n = p + q$  für den Co-Kettenkomplex  $(E_i, d_i)$  ergibt sich also als Summe der beiden Indizes der Bigraduierung; man „summiert



entlang von Neben-Diagonalen“. Für die Homologie dieses Co-Kettenkomplexes gilt dann  $H^n(E_i, d_i) = \bigoplus_{p+q=n} H(E_i, d_i)^{p,q}$ , in diesem Sinne ist es also gerechtfertigt, mit  $H(E_i, d_i)$  die Homologie von  $(E_i, d_i)$  zu benennen. Man beachte aber, dass jeder Homologiegruppe  $H^n(E_i, d_i)$  nun noch eine zusätzliche Graduierung zugewiesen werden kann (indiziert z.B. über  $p \in \mathbb{Z}$ ).

- (d) Es ist gleichwertig, ob man für die Bigraduierung der Spektralsequenz eine Indizierung  $(n, p)$  oder  $(p, q)$  wählt. Erstere ist eine Bigraduierung nach *homologischem Grad*  $n$  und *Filtrierungsgrad*  $p$  und heißt *Adams-Graduierung* einer Spektralsequenz, wohingegen Letztere durch Filtrierungsgrad  $p$  und eine Differenz  $q = n - p$  aus homologischem Grad und Filtrierungsgrad entsteht und als *Serre-Graduierung* bezeichnet wird. Man könnte die in 4.2 definierte bigraduierte Spektralsequenz etwas präziser also auch als *Serre-graduierte Spektralsequenz* bezeichnen.

Im Falle von Spektralsequenzen über dem Ring  $R = \mathbb{Z}$  der ganzen Zahlen oder über einem Körper  $\mathbb{K}$  ergibt sich aus der Definition einer Spektralsequenz eine wichtige Folgerung:

**Bemerkung 4.4.** (a) Sei  $(E_i, d_i)_{i \geq i_0}$  eine (cohomologisch bigraduierte) Spektralsequenz über  $\mathbb{Z}$  und seien  $p, q \in \mathbb{Z}$  sowie  $i \geq i_0$ . Dann sind  $E_i^{p,q}$  und  $E_{i+1}^{p,q}$  abelsche Gruppen (weil sie  $\mathbb{Z}$ -Moduln sind) und es gilt für die Ränge der abelschen Gruppen  $E_i^{p,q}$  und  $E_{i+1}^{p,q}$

$$\text{rg}(E_{i+1}^{p,q}) \leq \text{rg}(E_i^{p,q}),$$

da  $E_{i+1}^{p,q}$  Quotient der  $\mathbb{Z}$ -Untermoduln  $\ker(d_i^{p,q})$  und  $\text{im}(d_i^{p-i, q-1+i})$  von  $E_i^{p,q}$  ist. Ebenso gilt (auch im ungraduierten Fall)

$$\text{rg}(E_{i+1}) \leq \text{rg}(E_i).$$

- (b) Für eine (cohomologisch bigraduierte) Spektralsequenz  $(E_i, d_i)_{i \geq i_0}$  über einem Körper  $\mathbb{K}$  werden Moduln zu Vektorräumen und man erhält obige Abschätzung für die Dimensionen der Vektorräume, da  $E_{i+1}^{p,q}$  nun ein Quotient von Unterräumen von  $E_i^{p,q}$  ist:

$$\dim(E_{i+1}^{p,q}) \leq \dim(E_i^{p,q})$$

beziehungsweise

$$\dim(E_{i+1}) \leq \dim(E_i)$$

im ungraduierten Fall.

#### 4. Spektralsequenzen

**Definition 4.5.** Seien  $i_0, i'_0 \in \mathbb{N}_0$  und seien  $(E_i, d_i, h_i)_{i \geq i_0}$  sowie  $(E'_i, d'_i, h'_i)_{i \geq i'_0}$  Spektralsequenzen. Ein *Morphismus von Spektralsequenzen* ist eine Folge

$$(f_i : (E_i, d_i) \rightarrow (E'_i, d'_i))_{i \geq \max\{i_0, i'_0\}}$$

von Kettenabbildungen, also

$$d'_i \circ f_i = f_i \circ d_i,$$

sodass außerdem für die in der Homologie induzierten Abbildungen  $H_*(f_i)$  gilt:

$$f_{i+1} \circ h_i = h'_i \circ H_*(f_i)$$

**Bemerkung 4.6.** (a) Unterdrückt man die (kanonischen) Isomorphismen  $h_i$  und  $h'_i$ , so ergibt sich für die letzte Bedingung die elegante Formulierung

$$f_{i+1} = H_*(f_i).$$

In jedem Falle gilt aber, dass ein Morphismus  $(f_i)_{i \geq i_0}$  von Spektralsequenzen – wenn er existiert – bereits eindeutig durch sein erstes Folgenglied  $f_{i_0}$  festgelegt ist.

(b) Man sieht schnell, dass jeder Spektralsequenz ein Identitätsmorphismus zugeordnet werden kann (nämlich gerade der Morphismus, der auf jeder Seite die Identitätsabbildung gibt). Verkettungen von Morphismen werden erklärt als Verkettung der entsprechenden Abbildungen und sind auch wieder Morphismen: Für Morphismen  $f$  und  $g$  mit  $(E_i, d_i, h_i) \xrightarrow{f} (E'_i, d'_i, h'_i) \xrightarrow{g} (E''_i, d''_i, h''_i)$  gilt

$$d''_i \circ g_i \circ f_i = g_i \circ d'_i \circ f_i = g_i \circ f_i \circ d_i$$

und, da  $H_*$  ein (kovarianter) Funktor ist, auch

$$g_{i+1} \circ f_{i+1} \circ h_i = g_{i+1} \circ h'_i \circ H_*(f_i) = h''_i \circ H^*(g_i) \circ H_*(f_i) = h''_i \circ H^*(g_i \circ f_i).$$

Daher definiert man:

**Definition 4.7.** Spektralsequenzen über einem Ring  $R$  bilden zusammen mit den Morphismen von Spektralsequenzen die *Kategorie der Spektralsequenzen über  $R$* , welche man mit  $\mathbf{Spect}_R$  bezeichnet.

**Bemerkung 4.8.** Auf den Objekten von  $\mathbf{Spect}_R$  kann man für  $i \in \mathbb{N}_0$  die Zuordnung betrachten, die einer Spektralsequenz  $(E_i, d_i, h_i)_{i \geq i_0}$  die  $i$ -te Seite  $E_i$  zuordnet (genauer eigentlich nur auf der Unterkategorie der Spektralsequenzen, die spätestens mit der  $i$ -ten Seite starten; alternativ kann man jede Spektralsequenz zu einer bei  $i_0 = 0$  beginnenden ausbauen,

indem man für  $i < i_0$  einfach  $E_i = E_{i_0}$  mit trivialem Co-Differential  $d_i = 0$  und  $h_i = \text{id}$  setzt). Man bezeichnet diese Projektion auf die  $i$ -te Seite selbst als  $E_i$  und mit  $E_i(f) := f_i$  für einen Morphismus  $f = (f_i)$  wird  $E_i$  tatsächlich zu einem Funktor

$$E_i : \mathbf{Spect}_R \rightarrow \mathbf{Mod}_R$$

bzw. (wenn man auch berücksichtigt, dass die  $f_i$  Kettenabbildungen sind)

$$E_i : \mathbf{Spect}_R \rightarrow \mathbf{KK}_{\mathbb{R}}$$

von der Kategorie der Spektralsequenzen in die Kategorie der  $R$ -Moduln bzw. der Kettenkomplexe (über  $R$ ).

Spektralsequenzen haben sich in der algebraischen Topologie und Geometrie zu einem effektiven Werkzeug entwickelt. Sie finden vor allem Anwendung bei der Beschreibung von Relationen zwischen verschiedenen Homologie(theorie)n, wenn diese Relationen sich nicht einfach (z.B. durch exakte Sequenzen) ausdrücken lassen. In solchen Fällen wird meist ausgenutzt, dass die betreffende Spektralsequenz eine *Konvergenzeigenschaft* erfüllt. Daher sollen nun zunächst wichtige Begriffe definiert werden, mit deren Hilfe man das Konzept der Konvergenz einer Spektralsequenz erklären kann.

Hier und später auch an anderer Stelle spielen *filtrierte Objekte* eine Rolle. Obwohl man diese auch für beliebige Kategorien definieren könnte, sei hier mit  $\mathcal{C}$  entweder die Kategorie der Moduln über einem Ring  $R$  oder die der Kettenkomplexe über  $R$  (mit den jeweiligen Morphismen) fixiert.

**Definition 4.9.** Sei  $X$  ein Objekt in  $\mathcal{C}$ . Eine *absteigende Filtrierung auf  $X$*  ist ein System  $(F^p)_{p \in \mathbb{Z}}$  von Objekten  $F^p$  aus  $\mathcal{C}$  mit

$$0 \subseteq \dots \subseteq F^{p+1} \subseteq F^p \subseteq \dots \subseteq X.$$

Die Filtrierung heißt *hausdorffsch*, falls  $\bigcap_{p \in \mathbb{Z}} F^p = 0$  und *ausschöpfend*, falls  $\bigcup_{p \in \mathbb{Z}} F^p = X$ . Falls  $p_0 < p_1 \in \mathbb{Z}$  existieren, sodass

$$F^{p_0} = X \quad \text{und} \quad F^{p_1} = 0,$$

so heißt  $F$  eine *beschränkte Filtrierung*.

**Kommentar 4.10.** Eine beschränkte Filtrierung ist also insbesondere hausdorffsch und ausschöpfend.

#### 4. Spektralsequenzen

**Beispiel 4.11.** (a) Ist  $(C, d)$  ein Co-Kettenkomplex über einem Ring und sind  $F^p$  ( $p \in \mathbb{Z}$ ) Subkomplexe von  $C$  mit  $F^{p+1} \subseteq F^p$ , so ist mit  $F = (F^p)_{p \in \mathbb{Z}}$  eine Filtrierung auf  $(C, d)$  gegeben. Man nennt  $(C, F)$  einen *filtrierten Komplex*.

Man beachte dabei, dass für jedes  $p \in \mathbb{Z}$  und jedes  $n \in \mathbb{Z}$  auch  $F^p C^n := (F^p)^n$  ein Untermodul der  $n$ -ten Co-Kettengruppe  $C^n$  ist, weil die  $F^p$  Subkomplexe von  $C$  sind. Da für die Subkomplexe insbesondere  $(F^{p+1})^n \subseteq (F^p)^n$  gilt, liefert eine Filtrierung  $F$  eines Co-Kettenkomplexes  $C$  auch Filtrierungen

$$\dots \subseteq F^{p+1} C^n \subseteq F^p C^n \subseteq \dots \subseteq C^n$$

der Kettengruppen  $C^n$ .

(b) Sei nun  $(C, F)$  ein filtrierter Komplex und seien für  $p \in \mathbb{Z}$  mit

$$i_p : F^p \rightarrow F^{p-1}$$

und

$$j_p : F^p \rightarrow C$$

die Inklusionen bezeichnet. Es gilt für jedes  $p \in \mathbb{Z}$  also

$$j_{p+1} = j_p \circ i_{p+1}.$$

Die Abbildungen  $i_p$  und  $j_p$  induzieren Abbildungen in der Homologie:

$$(i_p)_* : H(F^p) \rightarrow H(F^{p-1})$$

und

$$(j_p)_* : H(F^p) \rightarrow H(C).$$

Da Homologie (von Co-Kettenkomplexen) ein kovarianter Funktor ist, gilt

$$(j_{p+1})_* = (j_p \circ i_{p+1})_* = (j_p)_* \circ (i_{p+1})_*.$$

Setzt man für  $p \in \mathbb{Z}$  nun

$$F_H^p := (j_p)_*(H(F^p)) \subseteq H(C),$$

so gilt außerdem

$$F_H^{p+1} = (j_{p+1})_*(H(F^{p+1})) = (j_p)_*((i_{p+1})_*(H(F^{p+1}))) \subseteq (j_p)_*(H(F^p)) = F_H^p$$

und damit ist durch  $F_H := (F_H^p)_{p \in \mathbb{Z}}$  eine Filtrierung von  $H(C)$  gegeben. Man nennt  $F_H$  die *von  $F$  in der Homologie induzierte Filtrierung*.

Ist die Filtrierung  $F$  beschränkt, so ist auch die induzierte Filtrierung  $F_H$  beschränkt, denn sind  $p_0 \leq p_1 \in \mathbb{Z}$  mit  $F^{p_0} = C$  und  $F^{p_1} = 0$ , so gilt

$$j_{p_0} = \text{id} : F^{p_0} \rightarrow F^{p_0} = C$$

und  $j_{p_1} : 0 \rightarrow C$  ist der Nullhomomorphismus, daher folgt

$$F_H^{p_0} = (j_{p_0})_*(H(F^{p_0})) = \text{id}_*(H(C)) = H(C)$$

und

$$F_H^{p_1} = (j_{p_1})_* \underbrace{(H(F^{p_1}))}_{=0} = 0,$$

womit  $F_H$  beschränkt ist.

**Definition 4.12.** Sei  $(X, (F^p)_{p \in \mathbb{Z}})$  ein filtriertes Objekt in  $\mathcal{C}$ , also  $X$  ein Objekt in  $\mathcal{C}$  mit Filtrierung  $F = (F^p)_{p \in \mathbb{Z}}$ . Dann nennt man

$$\text{Gr}_F(X) := \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} F^p / F^{p+1}$$

mit

$$(\text{Gr}_F(X))_p := F^p / F^{p+1}$$

das zu  $(X, (F^p))$  assoziierte graduierte Objekt.

**Kommentar 4.13.** Das zu einem filtrierten Objekt assoziierte graduierte Objekt ist also als direkte Summe von Quotienten selbst ein Objekt in  $\mathcal{C}$ , welches zusätzlich per Definition eine Graduierung trägt.

**Beispiel 4.14.** (a) Sei  $V$  ein Vektorraum und  $0 = F^{p_1} \subseteq \dots \subseteq F^0 = V$  eine beschränkte Filtrierung mit Untervektorräumen  $F^p \subseteq V$  für  $p = 0, \dots, p_1$ . Es ist dann

$$\text{Gr}_F(V) = \bigoplus_{p=0}^{p_1-1} F^p / F^{p+1}$$

und weiter sind  $\text{Gr}_F(V)$  und  $V$  als ungraduierte Vektorräume isomorph,

$$\text{Gr}_F(V) \cong V,$$

weil die exakten Sequenzen

$$0 \rightarrow F^{p+1} \rightarrow F^p \rightarrow F^p / F^{p+1} \rightarrow 0$$

für Vektorräume  $F^p$  spalten.

#### 4. Spektralsequenzen

- (b) Ist  $(C, d)$  ein Co-Kettenkomplex über einem Körper  $\mathbb{K}$  und  $F$  eine beschränkte Filtrierung von  $C$  mit

$$0 = F^{p_1} \subseteq \dots \subseteq F^1 \subseteq F^0 = C,$$

so hat man für jede Co-Kettengruppe  $C^n$  und jedes  $p \in \{0, \dots, p_1 - 1\}$  eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow F^{p+1}C^n \rightarrow F^pC^n \rightarrow F^pC^n/F^{p+1}C^n \rightarrow 0$$

von Vektorräumen.

Da für Vektorräume diese Sequenzen spalten, erhält man eine (nicht kanonische) Zerlegung

$$C^n \cong \bigoplus_{p=0}^{p_1-1} (F^pC^n)/(F^{p+1}C^n).$$

Durch geeignete Basiswahl kann man dies identifizieren mit einer Zerlegung

$$C^n = \bigoplus_{p=0}^{p_1-1} C^{n,p}$$

in Untervektorräume  $C^{n,p}$  von  $C^n$ .

Schreibe auch

$$C^n = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} C^{n,p}$$

mit  $C^{n,p} = 0$  für  $p < 0$  und für  $p \geq p_1$ . Für  $n, p \in \mathbb{Z}$  sei mit  $\text{pr}^{n,p} : C^n \rightarrow C^{n,p}$  die Projektion bezeichnet. Definiere dann für  $n, p, s \in \mathbb{Z}$  Abbildungen

$$d^{n,p,s} := \text{pr}^{n+1,p+s} \circ d^n|_{C^{n,p}} : C^{n,p} \rightarrow C^{n+1,p+s}.$$

Da die  $F^p$  Subkomplexe sind, kann das Co-Differential  $d^n : C^n \rightarrow C^{n+1}$  den Filtrierungsindex  $p$  nicht verkleinern, d.h. für  $s < 0$  gilt stets

$$d^{n,p,s} = 0.$$

Setze nun für  $n \in \mathbb{Z}$  und  $s \geq 0$

$$d^{n,s} := \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} d^{n,p,s} : C^n \rightarrow C^{n+1},$$

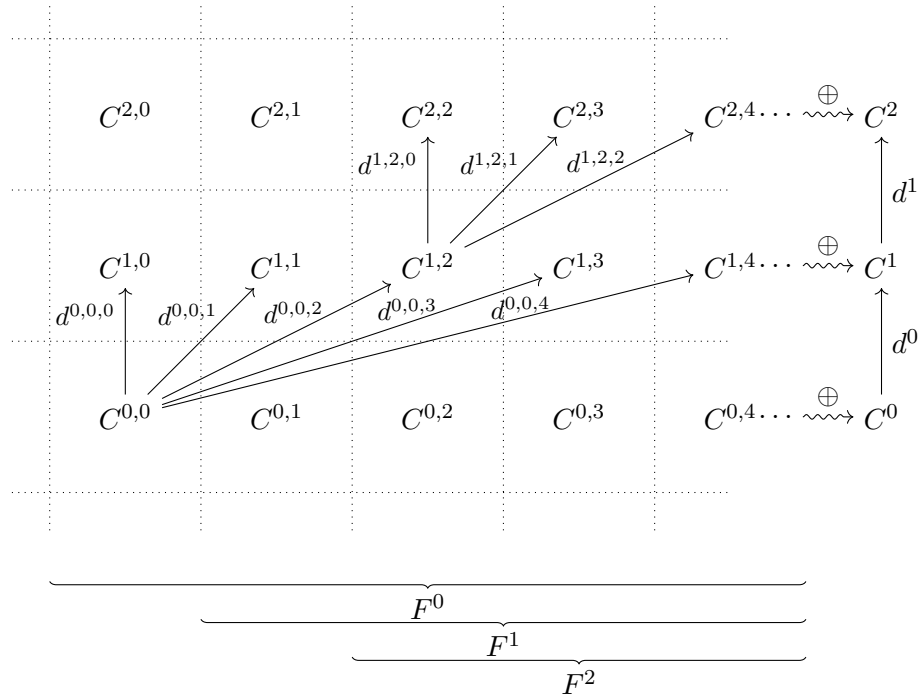
so besteht  $d^{n,s}$  also gerade aus dem Teil von  $d^n : C^n \rightarrow C^{n+1}$ , welcher den Filtrierungsindex um genau  $s$  erhöht, d.h. für jedes  $p \in \mathbb{Z}$  gilt

$$d^{n,s}(C^{n,p}) \subseteq C^{n+1,p+s}.$$

Man kann  $d^n$  also schreiben als Summe

$$d^n = d^{n,0} + d^{n,1} + \dots = \bigoplus_{s \geq 0} d^{n,s}.$$

Das folgende Bild veranschaulicht die Zerlegungen der Co-Kettengruppen  $C^n$  und der Co-Differentiale  $d^n$  (für  $0 \leq n \leq 2$ ), wobei zwecks Übersichtlichkeit nur einige der Komponenten  $d^{n,p,s}$  dargestellt sind.



Aus obigen Zerlegungen

$$C^n = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} C^{n,p}$$

lässt sich die ursprüngliche Filtrierung  $F$  von  $C$  durch

$$F^p C^n = \bigoplus_{s \geq p} C^{n,s}$$

wieder zurückgewinnen. Man benennt daher häufig auch einen Co-Kettenkomplex  $C$  über einem Körper  $\mathbb{K}$  gemeinsam mit solchen Zerlegungen

$$C^n = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} C^{n,p}$$

und Co-Differentialen

$$d^n = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}, s \geq 0} d^{n,p,s}$$

als *filtrierten Komplex* (über  $\mathbb{K}$ ).

Möchte man nun von Konvergenz einer Spektralsequenz sprechen, so muss man zunächst erklären, was hierbei Konvergenz bedeuten soll. Dies geschieht, indem man jeder Spektralsequenz eine „letzte Seite“ zuordnet, meist mit  $E_\infty$  bezeichnet. Hier folgt die Konstruktion:

#### 4. Spektralsequenzen

**Definition 4.15.** Sei  $(E_i, d_i, h_i)_{i \geq i_0}$  eine Spektralsequenz über  $R$ . Für  $r \geq i_0$  setze

$$Z_r^r := \ker(d_r) \subseteq E^r$$

und

$$B_r^r := \operatorname{im}(d_r) \subseteq E^r$$

und es bezeichne  $\pi_r : Z_r^r \rightarrow E_{r+1}$  die verkettete Abbildung

$$\pi_r : Z_r^r = \ker(d_r) \xrightarrow{\text{pr}} \ker(d_r)/\operatorname{im}(d_r) = H(E_r) \xrightarrow{h_r} E_{r+1}.$$

Für  $s > r$  setze nun induktiv

$$Z_r^s := \pi_r^{-1}(Z_{r+1}^s) \subseteq E_r$$

und

$$B_r^s := \pi_r^{-1}(B_{r+1}^s) \subseteq E_r.$$

**Kommentar 4.16.** (a) Direkt an der Definition sieht man für  $s > r$

$$Z_r^s = \pi_r^{-1}(\dots \pi_{s-1}^{-1}(Z_s^s)).$$

(b) Man erhält für  $s \geq r$  also, dass  $Z_r^s \subseteq E_r$  gerade die Teilmenge ist, auf welcher die Abbildung  $\pi_s \circ \pi_{s-1} \circ \dots \circ \pi_r$  definiert ist. Es gilt dann

$$Z_r^s = \{x \in Z_r^{s-1} : d_s(\pi_{s-1} \circ \dots \circ \pi_r(x)) = 0\},$$

während sich für  $B_r^s$  gerade die Charakterisierung

$$B_r^s = \{x \in Z_r^s : \pi_{s-1} \circ \dots \circ \pi_r(x) = d_s(y), \text{ für ein } y \in E_s\}$$

ergibt. Insbesondere ist

$$Z_r^s \subseteq Z_r^{s-1}$$

und

$$B_r^s \subseteq Z_r^s.$$

Man sagt,  $Z_r^s$  besteht aus denjenigen Elementen von  $E_r$ , welche (mindestens) bis zur  $s$ -ten Seite überleben und auch dort noch Zykel sind und  $B_r^s$  besteht aus denjenigen Elementen von  $E_r$ , welche (spätestens) auf der  $s$ -ten Seite zu Rändern werden.

(c) Aus der Charakterisierung von  $B_r^s$  ergibt sich zudem noch die Inklusion  $B_r^s \subseteq B_r^{s+1}$ , denn für  $x \in B_r^s$  gibt es ein  $y \in E_s$ , sodass  $\pi_{s-1} \circ \dots \circ \pi_r(x) = d_s(y) \in \operatorname{im}(d_s) = \ker(\pi_s)$ ,



also  $\pi_s \circ \dots \circ \pi_r(x) = \pi_s(d_s(y)) = 0 = d_{s+1}(0)$ , und damit  $x \in B_r^{s+1}$ . Man hat insgesamt also für jedes  $r \geq i_0$

$$B_r^r \subseteq \dots \subseteq B_r^s \subseteq B_r^{s+1} \dots \subseteq \dots \subseteq Z_r^{s+1} \subseteq Z_r^s \subseteq \dots \subseteq Z_r^r \subseteq E_r.$$

Diese „iterierten Ränder und Zykel“ tragen einen beträchtlichen Teil der Information der Spektralsequenz, wie im folgenden Lemma deutlich wird:

**Lemma 4.17.** *Sei  $s \geq r$ . Die Abbildung  $\pi_s \circ \dots \circ \pi_r : Z_r^s \rightarrow E_{s+1}$  induziert einen Isomorphismus*

$$Z_r^s/B_r^s \rightarrow E_{s+1}.$$

*Beweis.* Per Induktion über  $k = s - r$ : Der Induktionsstart  $r = s$  folgt direkt aus den Definitionen von  $Z_r^r$  und  $B_r^r$ : Hierbei induziert  $\pi_r$  gerade den Isomorphismus  $h_r$ . Für den Induktionsschritt  $k \mapsto k + 1$  nehmen wir also an, dass die Aussage bereits für alle  $s \geq r$  mit  $s - r \leq k$  gilt. Dann induziert nach Induktionsvoraussetzung die Abbildung  $\pi_s \circ \dots \circ \pi_{r+1}$  einen Isomorphismus

$$Z_{r+1}^s/B_{r+1}^s \rightarrow E_{s+1}.$$

Somit bleibt zu zeigen, dass  $\pi_r : Z_r^r \rightarrow E_{r+1}$  einen Isomorphismus

$$Z_r^s/B_r^s \xrightarrow{\cong} Z_{r+1}^s/B_{r+1}^s$$

induziert. Zunächst induziert  $\pi_r$ , wie beim Induktionsanfang gesehen, den Isomorphismus

$$Z_r^r/B_r^r \xrightarrow{h_r} E_{r+1}.$$

Wegen

$$B_r^r \subseteq B_r^s \subseteq Z_r^s \subseteq Z_r^r$$

drückt sich dieser Isomorphismus auf den Untergruppen  $B_r^s$  und  $Z_r^s$  von  $Z_r^r$  durch Isomorphismen

$$B_r^s/B_r^r \xrightarrow{h_r} B_{r+1}^s$$

und

$$Z_r^s/B_r^r \xrightarrow{h_r} Z_{r+1}^s$$

aus, denn nach Definition gilt  $B_r^s = \pi_r^{-1}(B_{r+1}^s)$  und  $Z_r^s = \pi_r^{-1}(Z_{r+1}^s)$ . Der nach dem Isomorphiesatz kanonische Isomorphismus

$$Z_r^s/B_r^s \xrightarrow{\cong} (Z_r^s/B_r^r)/(B_r^s/B_r^r)$$

#### 4. Spektralsequenzen

wird aber gerade induziert durch die Projektion

$$\text{pr} : Z_r^r \rightarrow Z_r^r/B_r^r.$$

Insgesamt induziert daher  $\pi_r = h_r \circ \text{pr}$  gerade den Isomorphismus

$$Z_r^s/B_r^s \xrightarrow{\cong} (Z_r^s/B_r^r)/(B_r^s/B_r^r) \xrightarrow{\cong} Z_{r+1}^s/B_{r+1}^s.$$

Zusammengenommen induziert  $\pi_s \circ \dots \circ \pi_r$  also einen Isomorphismus

$$Z_r^s/B_r^s \xrightarrow{\cong} E_{s+1}$$

und die Aussage ist bewiesen. □

**Definition 4.18.** Sei  $(E_i, d_i, h_i)_{i \geq i_0}$  eine Spektralsequenz. Für jedes  $r \geq i_0$  nennt man

$$Z_r^\infty := \bigcap_{s \geq r} Z_r^s \subseteq E_r$$

die *permanenten Zyklen* in  $E_r$  und

$$B_r^\infty := \bigcup_{s \geq r} B_r^s$$

die *kumulierten Ränder* in  $E^r$ .

Da für alle  $s \geq r \geq i_0$  die Inklusionen

$$B_r^s \subseteq B_r^{s+1}, \quad Z_r^{s+1} \subseteq Z_r^s \quad \text{und} \quad B_r^s \subseteq Z_r^s$$

gelten, folgt auch

$$B_r^\infty \subseteq Z_r^\infty.$$

Ähnlich wie in 4.17 zeigt man:

**Proposition 4.19.** Für  $s \geq r$  induziert die Abbildung  $\pi_{s-1} \circ \dots \circ \pi_r$  einen Isomorphismus

$$Z_r^\infty/B_r^\infty \xrightarrow{\pi_s^r} Z_s^\infty/B_s^\infty.$$

□

**Bemerkung 4.20.** Die Quotienten  $Z_r^\infty/B_r^\infty$  mit den Isomorphismen  $\pi_s^r$  bilden (gemeinsam mit den zu  $\pi_s^r$  inversen Isomorphismen  $\pi_r^s := (\pi_s^r)^{-1}$ ) ein transitives System – hier von  $R$ -Moduln, vgl. 3.45. Daher ist die folgende Definition möglich (vgl. 3.46):

**Definition 4.21.** Sei  $(E_i, d_i, h_i)_{i \geq i_0}$  eine Spektralsequenz. Dann nennt man den inversen Limes des transitiven Systems  $((Z_r^\infty/B_r^\infty), (\pi_s^r))$  die *Grenzseite* oder auch  $E_\infty$ -Seite der Spektralsequenz  $(E_i, d_i, h_i)_{i \geq i_0}$ , Notation:

$$E_\infty := \varprojlim Z_r^\infty/B_r^\infty.$$

**Kommentar 4.22.** (a) Die Definition der  $E_\infty$ -Seite einer Spektralsequenz wird auf diese Art unabhängig von der Wahl eines  $r \geq i_0$ . Nichtsdestotrotz ist für jedes  $r \geq i_0$  die  $E_\infty$ -Seite kanonisch isomorph zu  $Z_r^\infty/B_r^\infty$ , weil  $((Z_r^\infty/B_r^\infty), (\pi_s^r))$  ein transitives System bildet, vgl. 3.46.

(b) Hat man eine bigraduierte Spektralsequenz  $(E_i, d_i, h_i)_{i \geq i_0}$ , so erben wegen der geforderten Bigraduierungen der Abbildungen  $d_i$  und  $h_i$  auch die Objekte  $Z_r^s$  und  $B_r^s$  eine Bigraduierung von  $E_r$  und schließlich die  $E_\infty$ -Seite eine Bigraduierung,

$$E_\infty = \bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} E_\infty^{p,q}.$$

Aus 4.4 folgern wir nun für die  $E_\infty$ -Seite von Spektralsequenzen über  $\mathbb{Z}$  bzw. über einem Körper:

**Bemerkung 4.23.** (a) Sei  $(E_i, d_i)_{i \geq i_0}$  eine (cohomologisch bigraduierte) Spektralsequenz über  $\mathbb{Z}$  und seien  $p, q \in \mathbb{Z}$  sowie  $i \geq i_0$ . Dann gilt für die Ränge der abelschen Gruppen  $E_i^{p,q}$  und  $E_\infty^{p,q}$

$$\text{rg}(E_\infty^{p,q}) \leq \text{rg}(E_i^{p,q})$$

bzw. im ungraduierten Fall

$$\text{rg}(E_\infty) \leq \text{rg}(E_i).$$

(b) Für eine (cohomologisch bigraduierte) Spektralsequenz  $(E_i, d_i)_{i \geq i_0}$  über einem Körper  $\mathbb{K}$  gilt für die Dimensionen der Vektorräume  $E_i^{p,q}$  und  $E_\infty^{p,q}$

$$\dim(E_\infty^{p,q}) \leq \dim(E_i^{p,q})$$

(beziehungsweise

$$\dim(E_\infty) \leq \dim(E_i)$$

im ungraduierten Fall).

Man könnte nun Konvergenz einer Spektralsequenz folgendermaßen definieren: Eine bigraduierte Spektralsequenz  $(E_i, d_i, h_i)_{i \geq i_0}$  konvergiert gegen das bigraduierte Objekt  $H$ , falls  $H \cong E_\infty$  als bigraduierte Objekte gilt. Dies ist allerdings in den meisten Anwendungen von Spektralsequenzen nicht sehr praktisch. Man hat stattdessen häufig einfach graduierte Objekte wie die Homologie  $H(C) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} H^n(C)$  eines Co-Kettenkomplexes  $C$ , welche Kandidaten für das „Grenzobjekt“ darstellen. Hat man auf einem graduierten Objekt  $H = \bigoplus H^n$  aber noch eine (mit der Graduierung verträgliche) Filtrierung  $F = (F^p)$  mit  $\dots \subseteq F^{p+1} \subseteq F^p \subseteq \dots \subseteq H$  gegeben, so gibt dies durch Übergang zum assoziierten graduierten Objekt  $\text{Gr}_F(H)$  die Möglichkeit, ein bigraduiertes Objekt aus diesem filtrierten, graduierten Objekt zu erhalten.

#### 4. Spektralsequenzen

**Definition 4.24.** Sei  $(E_i, d_i)_{i \geq i_0}$  eine bigraduierte Spektralsequenz über einem Ring  $R$  und sei  $H$  ein graduierter  $R$ -Modul und  $F = (F^p)$  eine Filtrierung von  $H$ . Man sagt, *die Spektralsequenz  $(E_i, d_i)_{i \geq i_0}$  konvergiert bezüglich der Filtrierung  $F$  gegen  $H$* , falls ein Isomorphismus

$$\omega : E_\infty \rightarrow \text{Gr}_F(H)$$

von bigraduierten  $R$ -Moduln existiert (d.h. insbesondere  $\omega$  bigraduiert mit Bigraduierung  $(0, 0)$ ). Man notiert dies durch

$$(E_i, d_i) \Rightarrow H$$

oder noch knapper auch

$$E \Rightarrow H$$

und unterdrückt dabei sowohl die Filtrierung von  $H$  als auch den Isomorphismus  $\omega$ .

Sei nun  $(C, F)$  ein filtrierter Komplex, siehe 4.11. Man hat dann für jedes  $p \in \mathbb{Z}$  eine kurze exakte Sequenz von Co-Kettenkomplexen

$$0 \rightarrow F^{p+1} \rightarrow F^p \rightarrow F^p/F^{p+1} \rightarrow 0.$$

Dies induziert lange exakte Sequenzen in der Homologie

$$\dots \rightarrow H^n(F^{p+1}) \xrightarrow{i} H^n(F^p) \xrightarrow{j} H^n(F^p/F^{p+1}) \xrightarrow{k} H^{n+1}(F^{p+1}) \rightarrow \dots$$

oder, wenn man mit  $q = n - p$  die Differenz des homologischen Grades und des Filtrierungsgrades notiert:

$$\dots \rightarrow H^{p+q}(F^{p+1}) \xrightarrow{i^{p+1, q-1}} H^{p+q}(F^p) \xrightarrow{j^{p, q}} H^{p+q}(F^p/F^{p+1}) \xrightarrow{k^{p, q}} H^{p+q+1}(F^{p+1}) \xrightarrow{i^{p+1, q}} \dots$$

mit Abbildungen

$$\begin{aligned} i^{p, q} &: H^{p+q}(F^p) \rightarrow H^{p+q}(F^{p-1}) \\ j^{p, q} &: H^{p+q}(F^p) \rightarrow H^{p+q}(F^p/F^{p+1}) \\ k^{p, q} &: H^{p+q}(F^p/F^{p+1}) \rightarrow H^{p+q+1}(F^{p+1}). \end{aligned}$$

Häufig wird der homologische Grad unterdrückt und man notiert

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & H(F^{p+1}) & \xrightarrow{i^{p+1}} & H(F^p) & \xrightarrow{i^p} & H(F^{p-1}) & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow j^{p+1} & \swarrow k^p & \downarrow j^p & \swarrow k^{p-1} & \downarrow j^{p-1} & & \\ & & H(F^{p+1}/F^{p+2}) & & H(F^p/F^{p+1}) & & H(F^{p-1}/F^p) & & \end{array}$$

Man nennt ein solches Diagramm auch ein *entrolltes exaktes Paar*. Noch kürzer wird die Notation, wenn man auch den Filtrierungsgrad unterdrückt. Man erhält

$$\begin{array}{ccc} H(F^\bullet) & \longrightarrow & H(F^\bullet) \\ & \searrow & \downarrow \\ & & H(F^\bullet/F^{\bullet+1}) \end{array}$$

und nennt diese Struktur ein *exaktes Paar* (vergleiche Abschnitt 4.1 in [19]).

Jedem exakten Paar lässt sich durch ein Standard-Verfahren eine Spektralsequenz zuordnen. Hat man einen filtrierten Komplex vorliegen, so kann man diesem wie oben vorgestellt ein exaktes Paar zuordnen und somit schließlich eine Spektralsequenz. Diese lässt sich für filtrierte Komplexe aber auch folgendermaßen direkt konstruieren (vgl. Abschnitt 4.2 in [19]):

**Definition 4.25.** Sei  $(C, F)$  ein filtrierter Komplex und seien  $i, j, k$  wie oben. Dann definiert man für jedes  $r \in \mathbb{N}_0$  bigraduierte Gruppen

$$Z_r := k^{-1}(\text{im}(\underbrace{i \circ \dots \circ i}_{r \text{ mal}})) \subseteq \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} H(F^p/F^{p+1})$$

und

$$B_r := j(\ker(\underbrace{i \circ \dots \circ i}_{r \text{ mal}})) \subseteq \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} H(F^p/F^{p+1})$$

beziehungsweise genauer

$$Z_r^{p,q} := (k^{p,q})^{-1}(i^{p+2,q-1} \circ \dots \circ i^{p+r+1,q-r}(H^{p+q+1}(F^{p+r+1}))) \subseteq H^{p+q}(F^p/F^{p+1})$$

und

$$B_r^{p,q} := j^{p,q}(\ker(i^{p-r+1,q+r-1} \circ \dots \circ i^{p,q})) \subseteq H^{p+q}(F^p/F^{p+1}).$$

**Kommentar 4.26.** Die  $R$ -Moduln  $Z_r$  und  $B_r$  erinnern durch ihre Notation an die für eine Spektralsequenz intrinsisch definierten Gruppen  $Z_r^s$  und  $B_r^s$ . Man beachte, dass zudem auch

$$0 = B_0 \subseteq B_1 \subseteq \dots \subseteq B_r \subseteq \text{im}(j) = \ker(k) \subseteq Z_r \subseteq \dots \subseteq Z_1 \subseteq Z_0 = \bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} H^{p+q}(F^p/F^{p+1})$$

gilt. Ziel ist es, nun eine Spektralsequenz mit

$$E_1 := H(F^\bullet/F^{\bullet+1}) = H(\text{Gr}_F(C)),$$

beziehungsweise genauer

$$E_1^{p,q} := H^{p+q}(F^p/F^{p+1})$$

zu definieren, für welche  $Z_r = Z_1^r$  und  $B_r = B_1^r$  gilt. Daher motiviert das Lemma 4.17 die folgende Definition:

#### 4. Spektralsequenzen

**Definition 4.27.** Sei  $(C, F)$  ein filtrierter Komplex mit den Gruppen  $Z_r$  und  $B_r$  ( $r \geq 0$ ) wie zuvor. Dann setzt man

$$E_{r+1} := Z_r/B_r$$

(versehen mit den von  $Z_r$  und  $B_r$  induzierten Bigraduierungen) und nennt dies *die zum filtrierten Komplex  $(C, F)$  gehörige  $(r + 1)$ -te Seite*.

**Proposition und Definition 4.28.** Zu jedem  $z \in E_{r+1} = Z_r/B_r$  existiert ein  $x \in Z_r$  mit  $[x]_r = z$  und dann wiederum ein  $y \in H(F^\bullet)$ , sodass

$$i^r(y) = k(x).$$

Dann ist die Abbildung  $d_{r+1} : E_{r+1} \rightarrow E_{r+1}$  mit

$$d_{r+1}(z) := [j(y)]_r$$

ein wohldefinierter Gruppenhomomorphismus mit Bigraduierung  $(r + 1, -r)$ . Außerdem gilt

$$d_{r+1} \circ d_{r+1} = 0.$$

Man nennt  $d_{r+1}$  das *Co-Differential der  $(r + 1)$ -ten Seite*.

*Beweis.* Siehe den Beweis von Proposition 4.4 in [19] □

**Proposition 4.29.** *Es gilt*

$$\ker(d_{r+1}) = Z_{r+1}/B_r$$

und

$$\operatorname{im}(d_{r+1}) = B_{r+1}/B_r.$$

*Beweis.* Siehe den Beweis von Proposition 4.5 in [19] □

**Korollar 4.30.** *Es gibt für jedes  $r \geq 0$  einen (kanonischen) Isomorphismus*

$$h_{r+1} : H(E_{r+1}, d_{r+1}) \rightarrow E_{r+2}$$

*Beweis.* Nach dem zweiten Isomorphiesatz gilt

$$H(E_{r+1}) = \ker(d_{r+1})/\operatorname{im}(d_{r+1}) = (Z_{r+1}/B_r)/(B_{r+1}/B_r) \cong Z_{r+1}/B_{r+1} = E_{r+2}$$

und der Isomorphismus ist kanonisch. □

**Definition 4.31.** Man nennt die so konstruierte Spektralsequenz  $(E_r, d_r, h_r)_{r \geq 1}$  die *Spektralsequenz des filtrierten Komplexes  $(C, F)$* .

**Bemerkung 4.32.** Man beachte, dass die erste Seite dieser Spektralsequenz auch schon als Homologie zustande kommt, denn es ist ja

$$E_1^{p,q} = H^{p+q}(F^p/F^{p+1}).$$

Dies ist gerade die Homologie des zu  $(C, F)$  assoziierten graduierten Objektes

$$\mathrm{Gr}_F(C) = \bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} (F^p C^{p+q}) / F^{p+1} C^{p+q}$$

bezüglich des von  $d$  induzierten Co-Differentials  $d_0$  auf  $\mathrm{Gr}_F(C)$ , vgl. 4.14. Vorsicht: Anstelle des homologischen Grades  $n$  wird hier die Differenz  $q = n - p$  als zweite Graduierung neben  $p$  für  $\mathrm{Gr}_F(C)$  bevorzugt, also die Serre-Graduierung.

Nun kann man die Spektralsequenz von  $(C, F)$  noch um diese nullte Seite erweitern,

$$E_0 := \mathrm{Gr}_F(C),$$

mit von  $d$  induziertem Co-Differential  $d_0 : E_0 \rightarrow E_0$  (und kanonischem Isomorphismus  $h_0 = \mathrm{id} : H(E_0, d_0) \rightarrow E_1$ ).

**Satz 4.33.** Sei  $(C, d)$  ein Co-Kettenkomplex und  $F$  eine beschränkte Filtrierung von  $C$ . Dann konvergiert die Spektralsequenz  $E(C, F)$  des filtrierten Komplexes  $(C, F)$  bezüglich der Filtrierung  $F_H$  gegen die Homologie  $H(C)$ ,

$$E(C, F) \Rightarrow H(C).$$

*Beweis.* Dieser Satz ist ein Spezialfall von Korollar 4.12 bzw. Theorem 4.11 aus [19].  $\square$

**Kommentar 4.34.** Erinnerung, dass der graduierte  $R$ -Modul  $H(C)$  durch die von  $F$  in der Homologie induzierte Filtrierung  $F_H$  (zusätzlich zur Graduierung) auch filtriert ist. Das zum filtrierten Objekt  $(H(C), F_H)$  assoziierte graduierte Objekt  $\mathrm{Gr}_{F_H}(H(C))$  trägt somit eine Bigraduierung. Satz 4.33 garantiert nach Definition 4.24 also die Existenz eines Isomorphismus zwischen der bigraduierten  $E_\infty$ -Seite von  $E(C, F)$  und  $\mathrm{Gr}_{F_H}(H(C))$ .

**Bemerkung 4.35.** Sei nun  $(C, F)$  ein filtrierter Komplex über einem Körper. Da in diesem Fall (vergleiche Beispiel 4.14)

$$\mathrm{Gr}_F(C) \cong C$$

als *einfach* graduierte Vektorräume (nicht als Co-Kettenkomplexe!) und auch

$$H(C) \cong \mathrm{Gr}_{F_H}(H(C))$$

als *einfach* graduierte Vektorräume gilt, besagt Satz 4.33, dass die  $E_\infty$ -Seite der zugehörigen Spektralsequenz bis auf Isomorphie die Homologie des ursprünglichen Co-Kettenkomplexes

#### 4. Spektralsequenzen

$(C, d)$  wiedergibt. Die Seiten  $E_i$  der Spektralsequenz stellen in diesem Fall also eine Annäherung an die Homologie von  $(C, d)$  dar.

**Beispiel 4.36.** Sei  $\mathbb{F}_2$  der zweielementige Körper. Betrachte

$$C^{n,p} = \begin{cases} \mathbb{F}_2, & \text{falls } n = 0, p = 0 \\ \mathbb{F}_2, & \text{falls } n = 0, p = 2 \\ \mathbb{F}_2, & \text{falls } n = 1, p = 2 \\ \mathbb{F}_2, & \text{falls } n = 1, p = 4 \quad \text{und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir notieren

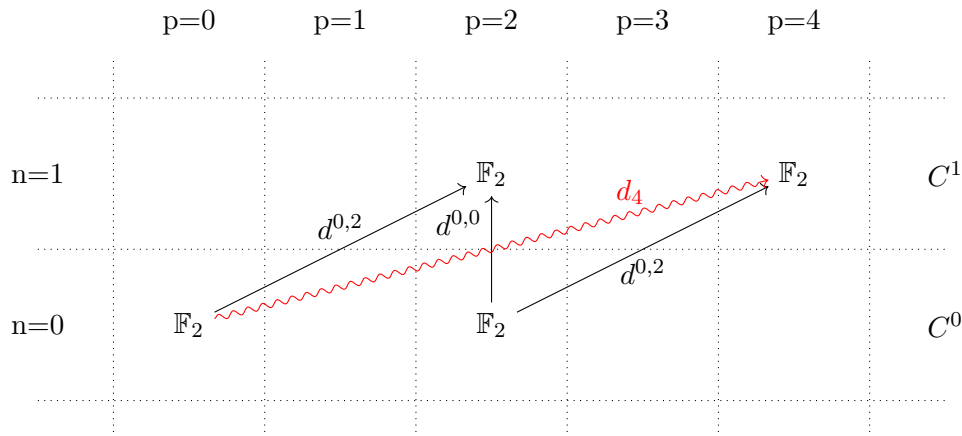
$$C^0 := C^{0,0} \oplus C^{0,2} = \mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{F}_2$$

sowie

$$C^1 := C^{1,2} \oplus C^{1,4} = \mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{F}_2$$

und  $C^n = 0$  sonst. Sei auf  $(C^n)_{n \in \mathbb{Z}}$  ein Co-Differential  $d = (d^n)_{n \in \mathbb{Z}}$  gegeben mit  $d^n = 0$ , für  $n \neq 0$  und  $d^0 : C^0 \rightarrow C^1$  durch

$$d^0(a, b) := (a + b, b).$$



Wegen  $\ker(d^0) = 0$  und  $\text{im}(d^0) = C^1$  sieht man schnell, dass die Homologie von  $(C, d)$  trivial ist,  $H(C) = 0$ . Andererseits trägt  $(C, d)$  die Struktur eines filtrierten Komplexes im Sinne von Beispiel 4.14(b) mit Zerlegung des Differentials  $d^0 : C^0 \rightarrow C^1$  in  $\sum d^{0,s}$  durch

$$d^{0,s}(a, b) = \begin{cases} (b, 0), & \text{falls } s = 0 \\ (a, b), & \text{falls } s = 2 \end{cases}$$



Homologie-Bildung bezüglich  $d_0 = \sum d^{n,0} = d^{0,0} : C^0 \rightarrow C^1$  löscht gerade die beiden Komponenten  $C^{0,2}$  und  $C^{1,2}$  aus, es bleibt also

$$E_1^{n,p} \cong \begin{cases} \mathbb{F}_2, & \text{falls } (n,p) = (0,0) \text{ oder } (n,p) = (1,4) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da die Filtrierung beschränkt ist, muss nach Satz 4.33 auf der  $E_\infty$ -Seite der Spektralsequenz bis auf Isomorphie die Homologie  $H(C) = 0$  des unfiltrierten Komplexes  $(C, d)$  stehen. Daher muss eine weitere Seite mit nicht-trivialem Co-Differential auftauchen. Weil die beiden verbleibenden Komponenten eine Differenz von vier im Filtrierungsgrad aufweisen, kann dies nur durch das Co-Differential  $d_4$  auf  $E_4$  realisiert werden. Es wird also ein nicht-triviales Co-Differential  $d_4$  induziert, obwohl es ursprünglich keine Komponenten  $d^{n,s}$  von  $d$  mit  $s = 4$  gab.

Dieses Beispiel ist ein Spezialfall der *Kürzungsregel für Komplexe*  $(C, d)$  über  $\mathbb{F}_2$  (siehe Lemma 2.4 von [2]):

**Lemma 4.37.** *Sei  $(C, d)$  ein Komplex über  $\mathbb{F}_2$ , wobei  $C$  von Elementen  $\{x_i\}$  frei erzeugt wird und das Differential  $d : C \rightarrow C$  durch Koeffizienten  $d(x_i, x_j) \in \mathbb{F}_2$  charakterisiert ist, sodass also*

$$d(x_i) = \sum_{j:d(x_i, x_j)=1} x_j$$

*gilt. Falls  $d(x_k, x_l) = 1$  für ein (fixiertes) Paar  $(k, l)$  gilt, so ist der Komplex  $(C', d')$  mit Erzeugern  $\{x_i | i \neq k, l\}$  und Differential*

$$d'(x_i) = d(x_i) + d(x_i, x_l)d(x_k)$$

*kettenhomotopieäquivalent zum Komplex  $(C, d)$ .*

*Beweisskizze:* Sei  $P : C \rightarrow C'$  die Projektion und  $I : C' \rightarrow C$  die Inklusion und weiter  $h : C \rightarrow C$  die Abbildung mit  $h(x_l) = x_k$  und  $h(x_i) = 0$  sonst.

Dann sind die Abbildungen

$$\pi = P \circ (\text{id} + d \circ h) : C \rightarrow C'$$

und

$$\iota = (\text{id} + h \circ d) \circ I : C' \rightarrow C$$

(zueinander inverse) Kettenhomotopieäquivalenzen. □

#### 4. Spektralsequenzen

Man sagt dann, dass der Komplex  $(C', d')$  aus  $(C, d)$  hervorgeht durch *Kürzen der Komponente von  $d$  zwischen  $x_k$  und  $x_l$* .

Wir schränken von nun an unser Interesse auf filtrierte Komplexe über dem Körper  $\mathbb{F}_2$  ein und dürfen daher die Kürzungsregel nutzen.

**Beispiel 4.38.** Erinnerung an das Beispiel 4.14 für filtrierte Komplexe  $(C, F)$  (dort noch über einem allgemeinen Körper  $\mathbb{K}$ ) mit beschränkter Filtrierung  $F$ . Über  $\mathbb{F}_2$  lässt sich die zugehörige Spektralsequenz dann elegant so beschreiben:

Setze  $(C_{(0)}, d_{(0)}) := (C, d)$  und erhalte induktiv  $(C_{(i+1)}, d_{(i+1)})$  aus  $(C_{(i)}, d_{(i)})$  durch Kürzen aller Komponenten des Co-Differentials  $d_{(i)}$ , welche den Filtrierungsgrad um genau  $s = i$  erhöhen. Die zu  $(C, F)$  gehörige Spektralsequenz hat dann als Seiten gerade

$$E_i(C) = C_{(i)}$$

und als Differential  $d_i(C)$  auf  $E_i(C)$  gerade die Summe all derer Komponenten von  $d_{(i)}$ , welche den Filtrierungsgrad um genau  $s = i$  erhöhen. Also entsteht die erste Seite  $E_1$  aus

$$E_0 = \bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} E_0^{p,q} = \bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} C^{p+q,p},$$

indem man nur den  $(s = 0)$ -Teil

$$d_0 := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} d^{n,0}$$

des Co-Differentials  $d$  als Co-Differential der nullten Seite betrachtet. Dann induziert

$$\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} d^{n,1}$$

ein Co-Differential  $d_1$  auf  $E_1$  usw.

**Bemerkung 4.39.** (a) Beachte, dass die induzierten Co-Differentiale  $d_i$  nicht nur von  $(d^{n,i})_{n \in \mathbb{Z}}$  abhängen, sondern dass implizit auch die Co-Differentiale  $(d^{n,j})_{n \in \mathbb{Z}}$  für  $j < i$  in die Konstruktion der Seiten  $(E_{j+1}, d_{j+1})$  einfließen. Man hat ja für jedes  $i \geq 0$  einen filtrierte Komplex

$$\left( C_{(i)}^{n,p}, (d_{(i)}^{n,s})_{n \in \mathbb{Z}, s \geq i} \right)$$

mit  $E_i = C_{(i)}^{n,p}$  und  $d_i = \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_{(i)}^{n,i}$ .

Daher kann es für ein  $i \geq 1$  z.B. durchaus passieren, dass trotz der Trivialität der ursprünglichen  $d^{n,i}$ , also  $d^{n,i} = 0, \forall n$ , das induzierte Co-Differential  $d_{(i)}$  auf der Seite  $E_i$  nicht-trivial ist. Man bezeichnet dies manchmal als *Zick-Zack-Effekt*. Diesen Effekt hatten wir bereits in Beispiel 4.36 beobachtet.

- (b) Allerdings kann die Situation eines nichttrivialen Co-Differentials  $d_s$  zu einem  $s \in \mathbb{N}$  nur dann auftreten, falls  $s_1, \dots, s_k$  mit  $\sum_{l=1}^k s_l = s$  existieren, sodass es zu jedem  $l = 1, \dots, k$  nicht-triviale Komponenten  $d^{n, s_l}$  gibt, wie man durch die Kürzungsregel sieht.
- (c) Hat zum Beispiel das Co-Differential nur Komponenten zu geradzahigen Filtrierungsgraden, so können auch nur auf den geradzahigen Seiten der zugehörigen Spektralsequenz nichttriviale Co-Differentiale auftauchen.

Hat man nun Kettenabbildungen zwischen filtrierten Kettenkomplexen (über einem Körper), so stellt sich die Frage, ob diese Kettenabbildungen Morphismen zwischen den zugehörigen Spektralsequenzen induzieren. Dies leisten Kettenabbildungen, welche die in folgender Definition erklärte Verträglichkeit mit den Filtrierungen der Kettenkomplexe erfüllen.

**Definition 4.40.** Seien  $(C, F)$  und  $(C', F')$  filtrierte Komplexe mit beschränkten Filtrierungen. Eine *filtrierte Kettenabbildung vom Grad  $k$*  besteht aus der Angabe eines  $k \in \mathbb{Z}$  und einer Kettenabbildung  $f : C \rightarrow C'$ , welche eine Zerlegung

$$f = f^k + f^{k+1} + \dots$$

zulässt, sodass für jedes  $s \geq k$  gilt:

$$f^s(C^{n,p}) \subseteq (C')^{n+1,p+s}.$$

**Kommentar 4.41.** (a) Eine filtrierte Kettenabbildung besteht also aus einer Kettenabbildung  $f$  und einer Zerlegung von  $f$  in Komponenten  $f^s$ , welche den Filtrierungsgrad jeweils um genau  $s$  ändern.

- (b) Man beachte, dass man aus einer filtrierten Kettenabbildung  $f$  vom Grad  $k$  für jedes  $l < k$  eine filtrierte Kettenabbildung vom Grad  $l$  machen kann, indem man

$$f^l = \dots = f^{k-1} = 0$$

setzt.

Es gibt ein naheliegendes Verfahren, wie man einer filtrierten Kettenabbildung  $f$  vom Grad  $k$  zwischen  $(C, F)$  und  $(C', F')$  einen Morphismus  $E(f)$  zwischen den zugehörigen Spektralsequenzen zuweisen kann:

Man betrachtet dabei den Abbildungskegel  $\Gamma(f)$ . Bei jedem Kürzen einer Komponente von  $(C, d)$  oder  $(C', d')$  kann man dann auch  $f$  (welches als Bestandteil des Differentials von  $\Gamma(f)$  aufgefasst werden kann) nach der Kürzungsregel modifizieren. Für jedes  $i \geq 0$  erhält man somit eine Abbildung

$$f_{(i)} : (C_{(i)}, d_{(i)}) \rightarrow (C'_{(i)}, d'_{(i)})$$

#### 4. Spektralsequenzen

Man definiert dann  $E_i(f) : E_i(C) \rightarrow E_i(C')$  als Summe aller Komponenten von  $f_{(i)}$ , welche den Filtrierungsgrad um genau  $k$  erhöhen. Daher ist die Angabe von  $k \in \mathbb{Z}$  für eine filtrierte Kettenabbildung ein relevantes Datum, und für eine Wahl  $l$  anstatt  $k$  ergibt sich im Allgemeinen ein anderer Morphismus zwischen den zugehörigen Spektralsequenzen, vergleiche die Bemerkungen 2.6 und 2.7 in [2].

## 5. Khovanov-Floer-Theorien

Schon bald nach der Entwicklung der Khovanov-Homologie wurden Zusammenhänge mit verschiedenen für Links definierten Floer-Homologien vermutet und später auch bewiesen, zum Beispiel in [20] für die Heegaard-Floer-Homologie oder [16] und [15] für die Instanton-Floer-Homologie.

Dabei gelingt es häufig, den Komplex der betreffenden Floer-Homologie so mit einer Filtrierung zu versehen, dass die zweite Seite der resultierenden Spektralsequenz isomorph zur Khovanov-Homologie des Link(diagramm)s ist. Allerdings werden zur Definition des filtrierten Komplexes meist noch zusätzliche Wahlen getroffen (wie z.B. eine riemannsche Metrik oder andere differentialgeometrische Strukturen). Die Idee von Baldwin, Hedden und Lobb (siehe [2]), eine von diesen Wahlen unabhängige, funktorielle Linktypinvariante zu gewinnen, spiegelt sich in dem Konzept der  $V$ -Komplexe wieder. Es stellt sich heraus, dass die Spektralsequenz eines  $V$ -Komplexes ab der zweiten Seite unabhängig von allen zuvor getroffenen Wahlen ist. Daher erhofft man sich, somit eine funktorielle Invariante

$$F : \mathbf{Diag} \rightarrow \mathbf{Spect}_{\mathbb{F}_2}$$

zu gewinnen.

Tatsächlich zeigten Baldwin, Hedden und Lobb, dass wenige weitere Bedingungen genügen, um eine solche Funktorialität zu erhalten. Die zusätzlichen Bedingungen formen die Definition einer Khovanov-Floer-Theorie (in Anlehnung daran, dass auf der zweiten Seite der Spektralsequenz die Khovanov-Homologie und auf der  $E_\infty$ -Seite nach Satz 4.33 die betreffende Floer-Homologie auftaucht).

Ich gebe in diesem Kapitel einen Einblick in  $V$ -Komplexe und Khovanov-Floer-Theorien und verweise für die Details auf Abschnitt 2.2 in [2], welcher die wesentlichen Aspekte der involvierten homologischen Algebra vorstellt, sowie die Kapitel 3 und 4 in [2], welche sich mit den Definitionen und zentralen Resultaten über Khovanov-Floer-Theorien befassen.

**Definition 5.1.** Sei  $V$  ein graduerter  $\mathbb{F}_2$ -Vektorraum und  $C$  ein filtrierter Kettenkomplex über  $\mathbb{F}_2$ . Ist  $q : V \rightarrow E_2(C)$  ein graduierungs-erhaltender Vektorraum-Isomorphismus (be-

zöglich der von der Filtrierung induzierten einfachen Graduierung auf  $E_2(C)$ ), so nennt man das Paar  $(C, q)$  einen  $V$ -Komplex.

Wir betrachten fortan, wenn nicht explizit anders erklärt, stets Vektorräume, Kettenkomplexe und Spektralsequenzen über dem Körper  $\mathbb{F}_2$ .

Sind  $V$  und  $W$  graduierte Vektorräume, so kann man die Frage stellen, was der richtige Begriff eines Morphismus zwischen einem  $V$ -Komplex und einem  $W$ -Komplex ist. Eine wünschenswerte Eigenschaft wäre dabei, dass ein solcher Morphismus auf der  $E_2$ -Seite einen Vektorraum-Homomorphismus induziert, der zusätzlich auch die Graduierungen von  $V$  und  $W$  berücksichtigt. Man legt in der nun folgenden Definition daher solchen Morphismen eine lineare Abbildung  $T : V \rightarrow W$  zugrunde, welche *homogen vom Grad  $k$*  ist (für ein  $k \in \mathbb{Z}$ ), d.h. es gilt  $T(V_i) \subseteq W_{i+k}$  für jedes  $i \in \mathbb{Z}$ .

**Definition 5.2.** Seien  $V$  und  $W$  graduierte Vektorräume und  $T : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung, welche homogen vom Grad  $k$  ist. Sei weiter  $(C, q)$  ein  $V$ -Komplex und  $(C', q')$  ein  $W$ -Komplex. Ist  $f : C \rightarrow C'$  eine filtrierte Kettenabbildung vom Grad  $k$  mit

$$E_2(f) = q' \circ T \circ q^{-1}$$

für die von  $f$  induzierte Abbildung zwischen den  $E_2$ -Seiten der zugehörigen Spektralsequenzen, so nennt man  $f$  einen *Morphismus von  $(C, q)$  nach  $(C', q')$ , der in  $E_2$  mit  $T$  übereinstimmt*.

**Bemerkung 5.3.** Sind  $f$  und  $g$  Morphismen von einem  $V$ -Komplex  $(C, q)$  in einen  $W$ -Komplex  $(C', q')$ , die in  $E_2$  mit (demselben)  $T$  übereinstimmen, so gilt also  $E_2(f) = E_2(g)$ . Nach Lemma 2.2 in [2] gilt dann  $E_i(f) = E_i(g)$ , für jedes  $i \geq 2$ .

Ähnlich wie man zwischen (gewöhnlichen) Kettenkomplexen eine Kettenabbildung als *Quasi-Isomorphismus* bezeichnet, wenn sie Isomorphismen in der Homologie induziert, möchte man diesen Begriff auch auf  $V$ -Komplexe und deren Morphismen übertragen:

**Definition 5.4.** Sei  $V$  ein gradierter Vektorraum und seien  $(C, q)$  und  $(C', q')$   $V$ -Komplexe. Ein *Quasi-Isomorphismus von  $V$ -Komplexen* ist ein Morphismus  $f$  von  $(C, q)$  nach  $(C', q')$ , der in  $E_2$  mit der Identität  $\text{id} : V \rightarrow V$  übereinstimmt, wobei man  $\text{id}$  als homogen vom Grad 0 auffasst.

**Bemerkung 5.5.** (a) Hat man zwei Quasi-Isomorphismen  $f, g : (C, q) \rightarrow (C', q')$ , so gilt wegen 5.3 also  $E_i(f) = E_i(g)$ ,  $\forall i \geq 2$ .

(b) Falls ein Quasi-Isomorphismus  $f : (C, q) \rightarrow (C', q')$  existiert, so folgt mit Lemma 2.1 aus [2] auch die Existenz eines Quasi-Isomorphismus von  $(C', q')$  nach  $(C, q)$ .

- (c) Zusammen mit der Eigenschaft, dass die Verkettung von Quasi-Isomorphismen einen Quasi-Isomorphismus ergibt, lässt sich Quasi-Isomorphie von  $V$ -Komplexen also als Äquivalenzrelation (auf der Menge aller  $V$ -Komplexe) auffassen.
- (d) Sind  $(C, q)$  und  $(C', q')$  quasi-isomorphe  $V$ -Komplexe, so sind die Seiten  $E_i(C)$  und  $E_i(C')$  (für  $i \geq 2$ ) der zugehörigen Spektralsequenzen also kanonisch isomorph, und zwar nicht nur als Vektorräume, sondern sogar als Kettenkomplexe, denn die induzierten Abbildungen  $E_i(f)$  eines Quasi-Isomorphismus  $f$  sind ja sogar Kettenabbildungen.

Man kann nun für jedes  $i \geq 2$  die Konstruktion des inversen Limes eines transitiven Systems anwenden, um einer Quasi-Isomorphieklasse  $\mathcal{A}$  von  $V$ -Komplexen einen wohldefinierten, graduierten Kettenkomplex  $(E_i(\mathcal{A}), d_i(\mathcal{A}))$  zuzuordnen:

**Bemerkung 5.6.** Sei  $\mathcal{A}$  eine Quasi-Isomorphieklasse von  $V$ -Komplexen und  $i \geq 2$ . Seien weiter  $(C, q)$  und  $(C', q')$  aus  $\mathcal{A}$  und  $f$  ein Quasi-Isomorphismus von  $(C, q)$  nach  $(C', q')$ . Dann ist der Kettenkomplex-Isomorphismus  $\pi_{C'}^C := E_i(f) : E_i(C) \rightarrow E_i(C')$  unabhängig von der Wahl von  $f$  und die (graduierten) Kettenkomplexe  $((E_i(C), d_i(C)))_{C \in \mathcal{A}}$  bilden gemeinsam mit den Isomorphismen  $(\pi_{C'}^C)_{C, C' \in \mathcal{A}}$  ein *transitives System von (graduierten) Kettenkomplexen*.

Wie in 3.46 für Vektorräume vorgestellt, zeigt man nun, dass auch für graduierte Kettenkomplexe der inverse Limes eines transitiven Systems (eindeutig) existiert und als graduiertes Kettenkomplex kanonisch isomorph zu jedem Mitglied des transitiven Systems ist.

**Definition 5.7.** Sei  $\mathcal{A}$  eine Quasi-Isomorphieklasse von  $V$ -Komplexen und  $i \geq 2$ . Der inverse Limes des Systems  $((E_i(C), d_i(C)))_{C \in \mathcal{A}}, (\pi_{C'}^C)_{C, C' \in \mathcal{A}}$  ist also ein graduiertes Kettenkomplex, der mit  $(E_i(\mathcal{A}), d_i(\mathcal{A}))$  bezeichnet wird.

Bis auf kanonische Isomorphie ist nun  $H(E_i(\mathcal{A}), d_i(\mathcal{A})) = E_{i+1}(\mathcal{A})$ , da repräsentantenweise nach 4.30 kanonische Isomorphie gilt (und der Isomorphismus zwischen dem inversen Limes und einem Mitglied eines transitiven Systems ebenfalls kanonisch ist). Daher lässt sich jeder Quasi-Isomorphieklasse eine wohldefinierte Spektralsequenz zuordnen:

**Definition 5.8.** Sei  $\mathcal{A}$  eine Quasi-Isomorphieklasse von  $V$ -Komplexen. Dann heißt  $(E_i(\mathcal{A}), d_i(\mathcal{A}))_{i \geq 2}$  die zu  $\mathcal{A}$  gehörige *Spektralsequenz*.

Einer Quasi-Isomorphieklasse  $\mathcal{A}$  von  $V$ -Komplexen wird also ein Objekt aus der Kategorie  $\mathbf{Spect}_{\mathbb{F}_2}$  zugeordnet.

**Definition 5.9.** Sei  $\mathcal{A}$  eine Quasi-Isomorphieklasse von  $V$ -Komplexen und  $\mathcal{B}$  eine Quasi-Isomorphieklasse von  $W$ -Komplexen und  $T : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung, welche homogen

## 5. Khovanov-Floer-Theorien

vom Grad  $k \in \mathbb{N}_0$  ist. Man sagt, dass ein *Morphismus von  $\mathcal{A}$  nach  $\mathcal{B}$  existiert, der in  $E_2$  mit  $T$  übereinstimmt*, falls es Repräsentanten  $(C, q)$  von  $\mathcal{A}$  und  $(C', q')$  von  $\mathcal{B}$  und einen Morphismus  $f : (C, q) \rightarrow (C', q')$  gibt, der in  $E_2$  mit  $T$  übereinstimmt.

Ein Repräsentant  $f$  eines Morphismus von  $\mathcal{A}$  nach  $\mathcal{B}$ , der in  $E_2$  mit  $T$  übereinstimmt, welcher wie zuvor gegeben sei durch  $f : (C, q) \rightarrow (C', q')$ , induziert für jedes  $i \geq 2$  eine Abbildung  $E_i(\mathcal{A}) \rightarrow E_i(\mathcal{B})$ : Dazu wird lediglich die von  $f$  induzierte Abbildung  $E_i(f) : E_i(C) \rightarrow E_i(C')$  mit den kanonischen Isomorphismen  $E_i(\mathcal{A}) \rightarrow E_i(C)$  und  $E_i(C') \rightarrow E_i(\mathcal{B})$  verkettet, welche mit der Konstruktion des inversen Limes einhergehen. Es ist dann  $E_i(\mathcal{A}) \rightarrow E_i(\mathcal{B})$  eine Kettenabbildung, welche homogen vom Grad  $k$  ist.

Sind  $(C'', q'')$  bzw.  $(C''', q''')$  andere Repräsentanten für  $\mathcal{A}$  bzw.  $\mathcal{B}$  und ist  $g : C'' \rightarrow C'''$  ebenfalls ein Morphismus, der in  $E_2$  mit  $T$  übereinstimmt, so induziert  $g$  für jedes  $i \geq 2$  *dieselbe* Abbildung  $E_i(\mathcal{A}) \rightarrow E_i(\mathcal{B})$  wie  $f$ . Dies folgt leicht mit Hilfe der Bemerkung aus 5.3 und den kanonischen Isomorphismen zwischen inversen Limiten und Mitgliedern der jeweiligen transitiven Systeme.

Anders ausgedrückt liefert die bloße Existenz eines Morphismus von  $\mathcal{A}$  nach  $\mathcal{B}$ , der in  $E_2$  mit  $T$  übereinstimmt, einen wohldefinierten Morphismus  $(E_i(\mathcal{A}), d_i(\mathcal{A}))_{i \geq 2} \rightarrow (E_i(\mathcal{B}), d_i(\mathcal{B}))_{i \geq 2}$  in der Kategorie  $\mathbf{Spect}_{\mathbb{F}_2}$  der Spektralsequenzen.

Wie für graduierte Vektorräume und für Kettenkomplexe lässt sich auch für  $V$ -Komplexe ein Tensor-Produkt bilden: Für einen  $V$ -Komplex  $(C, q)$  und einen  $W$ -Komplex  $(C', q')$  wird auf dem (filtrierten) Kettenkomplex  $C \otimes C'$  durch

$$q \otimes q' : V \otimes W \rightarrow E_2(C \otimes C') \cong E_2(C) \otimes E_2(C')$$

die Struktur eines  $V \otimes W$ -Komplexes gegeben. Auch diese Konstruktion lässt sich (durch repräsentantenweise Definition) auf ein Tensorprodukt  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$  zwischen einer Quasi-Isomorphieklasse  $\mathcal{A}$  von  $V$ -Komplexen und einer Quasi-Isomorphieklasse  $\mathcal{B}$  von  $W$ -Komplexen übertragen.

Zur nun folgenden Definition von Khovanov-Floer-Theorien ist es notwendig, die Khovanov-Homologie  $Kh(D)$  eines Linkdiagramms  $D$  als *einfach* graduierten Vektorraum aufzufassen. Dies ist aber definitionsgemäß ein bigraduierter Vektorraum (mit einer *homologischen* und einer *q-Graduierung*). Man kann dies z.B. erreichen, indem man eine (einzige) Graduierung auf  $Kh(D)$  durch eine (dann für alle  $D$  fixierte) Linearkombination aus homologischer und  $q$ -Graduierung wählt.

**Definition 5.10.** Eine *Khovanov-Floer-Theorie* ist eine Zuordnung  $\mathcal{A}$ , welche jedem Linkdiagramm  $D$  eine Quasi-Isomorphieklasse  $\mathcal{A}(D)$  von  $Kh(D)$ -Komplexen zuordnet, sodass folgende Eigenschaften erfüllt sind:



- (i) Gibt es eine ebene Isotopie, welche ein Linkdiagramm  $D$  in ein Linkdiagramm  $D'$  überführt, so existiert ein Morphismus  $\mathcal{A}(D) \rightarrow \mathcal{A}(D')$ , welcher in  $E_2$  mit dem (von der ebenen Isotopie) induzierten Isomorphismus  $Kh(D) \rightarrow Kh(D')$  übereinstimmt.
- (ii) Resultiert  $D'$  aus  $D$  durch diagrammatisches Ankleben eines 1-Henkels, so existiert ein Morphismus  $\mathcal{A}(D) \rightarrow \mathcal{A}(D')$ , welcher in  $E_2$  mit dem (durch das Ankleben eines 1-Henkels) induzierten Morphismus  $Kh(D) \rightarrow Kh(D')$  übereinstimmt.
- (iii) Ist  $D \sqcup D'$  ein Linkdiagramm, welches als Vereinigung zweier Linkdiagramme  $D$  und  $D'$  entsteht, so existiert ein Morphismus  $\mathcal{A}(D \sqcup D') \rightarrow \mathcal{A}(D) \otimes \mathcal{A}(D')$ , welcher in  $E_2$  mit dem Standard-Isomorphismus  $Kh(D \sqcup D') \rightarrow Kh(D) \otimes Kh(D')$  übereinstimmt.
- (iv) Für jedes Diagramm  $D$  eines *Unlinks* (das ist eine disjunkte Vereinigung von  $k$  Unknoten) *kollabiert* die zu  $\mathcal{A}(D)$  gehörige Spektralsequenz auf der zweiten Seite:

$$E_2(\mathcal{A}(D)) = E_\infty(\mathcal{A}(D)).$$

**Bemerkung 5.11.** Unmittelbar an der Definition sieht man, dass eine Khovanov-Floer-Theorie jeder ebenen Isotopie und auch jedem diagrammatischen Ankleben eines 1-Henkels einen (kanonischen) Morphismus  $(E_i(\mathcal{A}(D)), d_i(\mathcal{A}(D)))_{i \geq 2} \rightarrow (E_i(\mathcal{A}(D')), d_i(\mathcal{A}(D'))))_{i \geq 2}$  von Spektralsequenzen zuordnet.

Um aus einer Khovanov-Floer-Theorie einen Funktor  $F : \mathbf{Diag} \rightarrow \mathbf{Spect}_{\mathbb{F}_2}$  zu erhalten, müsste allerdings jedem Movie zwischen zwei Diagrammen  $D$  und  $D'$  ein Morphismus der zugehörigen Spektralsequenzen zugeordnet werden, sodass äquivalente Movies denselben Morphismus von Spektralsequenzen induzieren. Man definiert daher:

**Definition 5.12.** Eine Khovanov-Floer-Theorie heißt *funktoriell*, falls für jeden Movie  $M$  zwischen Linkdiagrammen  $D$  und  $D'$  ein Morphismus  $\mathcal{A}(D) \rightarrow \mathcal{A}(D')$  existiert, der in  $E_2$  mit der durch den Movie induzierten Abbildung  $Kh(M) : Kh(D) \rightarrow Kh(D')$  übereinstimmt.

**Lemma 5.13.** *Eine funktorielle Khovanov-Floer-Theorie induziert einen Funktor*

$$F : \mathbf{Diag} \rightarrow \mathbf{Spect}_{\mathbb{F}_2}.$$

*Beweis.* Es bleibt zu zeigen, dass äquivalente Movies denselben Morphismus von Spektralsequenzen induzieren. Seien also  $M$  und  $\tilde{M}$  zwei äquivalente Movies von  $D$  nach  $D'$ . Dann gilt zunächst  $Kh(M) = Kh(\tilde{M})$  (denn wir hatten die Khovanov-Homologie als Funktor  $Kh : \mathbf{Diag} \rightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{F}_2}$  identifiziert). Wegen 5.3 sind dann aber die beiden Morphismen der Spektralsequenzen identisch, da beide in  $E_2$  mit  $Kh(M) = Kh(\tilde{M})$  übereinstimmen.  $\square$

## 5. Khovanov-Floer-Theorien

Daher ist das letzte Puzzlestück, um aus einer Khovanov-Floer-Theorie einen Funktor

$$F : \mathbf{Diag} \rightarrow \mathbf{Spect}_{\mathbb{F}_2}$$

zu erhalten, der folgende Satz:

**Theorem 5.14.** *Jede Khovanov-Floer-Theorie ist funktoriell.*

*Beweis.* Diese Aussage ist als Theorem 3.5 der zentrale Satz der Arbeit [2] von Baldwin, Hedden und Lobb. Dem Beweis dieses Theorems ist das gesamte vierte Kapitel in [2] gewidmet. Genauer werden in Proposition 4.1 die Morphismen für das Ankleben von Henkeln und in Proposition 4.2 die Morphismen für die Reidemeister-Bewegungen konstruiert.  $\square$

## 6. Anwendungen

### 6.1. Die Spektralsequenz von Kronheimer und Mrowka

Im Jahr 2010 veröffentlichten Kronheimer und Mrowka einen Artikel [15] mit einem vielbeachteten Resultat:

**Satz 6.1.** *Die Khovanov-Homologie detektiert den Typ des Unknotens.*

Die alte Fragestellung, ob auch das Jones-Polynom dies leistet, bleibt dadurch zwar ungelöst, aber dass die Khovanov-Homologie als kategorifizierte Variante des Jones-Polynoms, welche sich wie das Jones-Polynom kombinatorisch und durch einen programmierbaren Algorithmus berechnen lässt, dies ermöglicht, ist eines der spektakulärsten Resultate der jüngeren Geschichte der Knotentheorie. Es ist daher naheliegend, auch dem Beweis selbst und den dort eingehenden Beweistechniken Beachtung zu schenken.

*Beweisidee:* In einem ersten Schritt zeigten Kronheimer und Mrowka, dass die reduzierte singuläre Instanton-Knoten-Homologie  $I^{\natural}(\mathbb{S}^3, K)$  mit Koeffizienten in  $\mathbb{Z}$  eines Knotens  $K \subseteq \mathbb{S}^3$  für nicht-triviale Knoten (also Knoten nicht vom Typ des Unknotens) stets Rang echt größer als eins hat (für die Idee der Konstruktion von  $I^{\natural}(\mathbb{S}^3, K)$  betrachte A.8 aus dem Anhang A). Da die *reduzierte* Khovanov-Homologie (siehe [12]) für Knoten vom Typ des Unknotens Rang eins hat, ist das letzte fehlende Argument die Aussage, dass die Ränge der reduzierten Khovanov-Homologie und der reduzierten singulären Instanton-Knoten-Homologie in Relation zueinander stehen, genauer, dass für jeden Knoten  $K$  gilt:

$$\text{rg}(Kh)(K) \geq \text{rg}(I^{\natural}(\mathbb{S}^3, K)).$$

Diesen zweiten Schritt bewiesen Kronheimer und Mrowka, indem sie eine Konstruktion angaben, die jedem Knoten eine Spektralsequenz über  $\mathbb{Z}$  zuweist, welche (bis auf Isomorphie) auf der zweiten Seite die Khovanov-Homologie (mit Koeffizienten in  $\mathbb{Z}$ ) und als  $E_{\infty}$ -Seite die singuläre Instanton-Knoten-Homologie hat. Die gewünschte Abschätzung ergibt sich dann aus Bemerkung 4.23. □

## 6. Anwendungen

In ihrer Arbeit warfen sie bereits selbst die Frage auf, ob und wie sich diese Zuordnung, welche einem Knoten eine Spektralsequenz zuordnet, als funktorielle Zuordnung verstehen lässt. Die Kategorien **Link**, **Diag** und **Spect<sub>R</sub>**, welche hierbei eine Rolle spielen, wurden von mir in den ersten Kapiteln der hier vorliegenden Arbeit vorgestellt. Es wurde insbesondere ersichtlich, dass die Wahl der Koeffizienten von  $\mathbb{Z}$  eher zu  $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  variiert werden sollte. Damit erreicht man zumindest, dass die Khovanov-Homologie als zweite Seite der Spektralsequenz funktoriell wird, eine notwendige Voraussetzung für die Funktorialität der gesamten Spektralsequenz. Die Bestätigung der Vermutung, dass die gesamte Zuordnung (mit Koeffizienten in  $\mathbb{F}_2$ ) funktoriell *ist*, gaben Baldwin, Hedden und Lobb in [2], indem sie das Konzept der Khovanov-Floer-Theorien einführten und zeigten, dass die von Kronheimer und Mrowka konstruierte Spektralsequenz eine Khovanov-Floer-Theorie bildet (dies ist die Aussage von Proposition 5.2 in [2]).

### 6.2. Die filtrierte Bar-Natan-Theorie

Neben der Spektralsequenz von Kronheimer und Mrowka waren schon zuvor mehrere Spektralsequenz-Konstruktionen bekannt, welche die Khovanov-Homologie mit verschiedenen Typen von Floer-Homologien in Relation brachten. Es ist allen diesen Konstruktionen gemein, dass die Khovanov-Homologie auf der zweiten Seite erscheint und die betreffende Floer-Homologie als letzte Seite. Diese Konstruktionen durch ein gemeinsames Konzept zu vereinheitlichen war wohl (neben der von Kronheimer und Mrowka vermuteten Funktorialität ihrer Konstruktion) die hauptsächliche Motivation für die Arbeit [2] von Baldwin, Hedden und Lobb. Unter den weiteren bekannten Kandidaten für Khovanov-Floer-Theorien sind Konstruktionen von Ozsvath und Szabo (siehe [20]) hervorzuheben und besonders die Spektralsequenz von Lee (siehe [17]) in einer von Dror Bar-Natan modifizierten Variante (siehe Abschnitt 9.2 und 9.3 in [7]), welche z.B. in der Einführung von [26] als *filtrierte Bar-Natan-Theorie* bezeichnet wird:

In [7] wird für ein orientiertes Linkdiagramm  $D$  ein filtrierter Co-Kettenkomplex  $C'(D)$  konstruiert, für den die zweite Seite  $E_2(C'(D))$  der zugehörigen Spektralsequenz bis auf Isomorphie die Khovanov-Homologie  $Kh(D)$  wiedergibt. Die Konstruktion ist mit den in dieser Arbeit vorgestellten Konzepten gut zu erklären und wird nun vorgestellt.

**Erinnerung 6.2.** Zu einem orientierten Linkdiagramm  $D$  hatten wir in 3.11 und der folgenden Diskussion einen Co-Kettenkomplex  $\llbracket D \rrbracket$  mit graduierten Kettengruppen konstruiert. Die  $q$ -Grade dieser Kettengruppen wurden durch einen Grad-Versatz so angepasst, dass daraus ein graduierter Komplex, der Khovanov-Komplex  $C(D)$ , wurde (siehe 3.28). Eine wichtige

Rolle bei der Konstruktion spielte die zweidimensionale TQFT aus Beispiel 3.8, welche dem Erzeuger der Objekte von  $\mathbf{Cob}_2$  einen  $q$ -graduierten zweidimensionalen  $\mathbb{F}_2$ -Vektorraum  $V$  zuordnet und auf den Erzeugern der Morphismen von  $\mathbf{Cob}_2$  durch Angabe von linearen Abbildungen  $\eta, \epsilon, m$  und  $\Delta$  erklärt wurde.

Was passiert nun, wenn man die Abbildungen  $\eta, \epsilon, m$  und  $\Delta$  variiert? Sofern diese abgeänderten Abbildungen noch immer die Relationen zwischen den Erzeugern der Morphismen von  $\mathbf{Cob}_2$  respektieren, erhält man eine neue TQFT  $\mathcal{F}'$ . Man kann dann die Konstruktion 3.11 mit dieser modifizierten TQFT wiederholen. Kommentar 3.13(b) stellt sicher, dass man auch in diesem Fall einen Kettenkomplex erhält. Die filtrierte Bar-Natan-Theorie lässt sich gerade als eine solche Modifikation der TQFT  $\mathcal{F}$  interpretieren:

**Definition 6.3.** Seien der  $\mathbb{F}_2$ -Vektorraum  $V$  und die Abbildungen  $\eta, \epsilon, m$  und  $\Delta$  wie in Beispiel 3.8 gegeben. Definiere nun Abbildungen  $\eta', \epsilon', m'$  und  $\Delta'$  durch

$$\begin{aligned} \epsilon' &:= \epsilon : \mathbb{F}_2 \rightarrow V, \\ \eta' &:= \eta : V \rightarrow \mathbb{F}_2, \\ \Delta' : V &\rightarrow V \otimes V, \begin{cases} v_+ \mapsto v_+ \otimes v_- + v_- \otimes v_+ + v_+ \otimes v_+ \\ v_- \mapsto v_- \otimes v_- \end{cases} \\ m' : V \otimes V &\rightarrow V, \begin{cases} v_+ \otimes v_+ \mapsto v_+ \\ v_+ \otimes v_- \mapsto v_- \\ v_- \otimes v_+ \mapsto v_- \\ v_- \otimes v_- \mapsto v_- \end{cases} \end{aligned}$$

**Bemerkung 6.4.** Es gilt also  $\epsilon' = \epsilon$ ,  $\eta' = \eta$  und für  $m'$  und  $\Delta'$  hat man die Zerlegungen

$$m' = m + \hat{m}$$

und

$$\Delta' = \Delta + \hat{\Delta}$$

mit linearen Abbildungen  $\hat{\Delta}$  und  $\hat{m}$  gegeben durch

$$\hat{\Delta} : V \rightarrow V \otimes V, \begin{cases} v_+ \mapsto v_+ \otimes v_+ \\ v_- \mapsto 0 \end{cases}$$

## 6. Anwendungen

und

$$\hat{m} : V \otimes V \rightarrow V, \begin{cases} v_+ \otimes v_+ \mapsto 0 \\ v_+ \otimes v_- \mapsto 0 \\ v_- \otimes v_+ \mapsto 0 \\ v_- \otimes v_- \mapsto v_- . \end{cases}$$

**Proposition 6.5.** *Seien mit  $\mathbb{S}^1$  der Erzeuger der Objekte von  $\mathbf{Cob}_2$  und mit  $E_1^1, E_0^1, E_1^0, E_2^1$  und  $E_1^2$  die fünf Erzeuger der Morphismen von  $\mathbf{Cob}_2$  wie in 3.3 gegeben. Dann ist durch*

$$\mathcal{F}'(\mathbb{S}^1) = V$$

sowie

$$\mathcal{F}'(E_1^1) := \text{id} : V \rightarrow V,$$

$$\mathcal{F}'(E_1^0) := \epsilon',$$

$$\mathcal{F}'(E_0^1) := \eta',$$

$$\mathcal{F}'(E_2^1) := \Delta' \quad \text{und}$$

$$\mathcal{F}'(E_1^2) := m'$$

eine TQFT  $\mathcal{F}' : \mathbf{Cob}_2 \rightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{F}_2}$  gegeben.

*Beweis.* Es ist lediglich zu zeigen, dass die Abbildungen  $\eta', \epsilon', m'$  und  $\Delta'$  die Relationen der Erzeuger respektieren. Dies geschieht ebenfalls durch Nachrechnen wie in 3.8.  $\square$

**Bemerkung 6.6.** Man beachte, dass den Abbildungen  $m'$  und  $\Delta'$  bezüglich der  $q$ -Graduierungen auf  $V$  und  $V \otimes V$  keine (homogene) Graduierung zugewiesen werden kann. Die Zerlegungen  $m' = m + \hat{m}$  und  $\Delta' = \Delta + \hat{\Delta}$  geben aber Zerlegungen von  $m$  und  $\Delta$  in graduierte Abbildungen: Nach Lemma 3.22 wissen wir bereits, dass  $m$  und  $\Delta$  jeweils  $q$ -Graduierung  $-1$  haben. Für  $\hat{m}$  und  $\hat{\Delta}$  stellt sich mit denselben Argumenten wie in 3.22 heraus, dass beide  $q$ -Graduierung  $+1$  haben.

**Proposition und Definition 6.7.** Sei  $D$  ein Linkdiagramm. Analog zu 3.11 definiert man nun einen Kettenkomplex  $C'(D)$  mit Hilfe der TQFT  $\mathcal{F}'$ . Die Kettengruppen  $C'(D)^r$  stimmen dann (als ungraduierte Vektorräume) mit den Kettengruppen  $[[D]]^r$  überein. Man stattet die Kettengruppen mit der durch  $V$  induzierten  $q$ -Graduierung und demselben Grad-Versatz wie in 3.26 aus. Dann erhält man einen Co-Kettenkomplex

$$(C'(D), d_{BN}),$$

wobei sich das *Bar-Natan-Differential*  $d_{BN}$  auf  $C'(D)$  in eine Summe

$$d_{BN} = d_0 + d_2$$

von Abbildungen zerlegt, sodass  $d_0$  mit dem Khovanov-Differential übereinstimmt und somit Bigraduierung  $(1, 0)$  hat und  $d_2$  die durch  $\hat{m}$  und  $\hat{\Delta}$  erzeugten Komponenten von  $d_{BN}$  umfasst und eine Bigraduierung von  $(1, 2)$  aufweist.

*Beweis.* Da  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{F}'$  auf Objekten übereinstimmen, sind die durch  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{F}'$  induzierten Kettengruppen identisch. Auf Morphismen unterscheiden sich  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{F}'$  gerade durch die von  $\hat{m}$  bzw.  $\hat{\Delta}$  zusätzlich erzeugten Komponenten von  $d_{BN}$ . Da  $\hat{m}$  und  $\hat{\Delta}$   $q$ -Graduierung 1 haben, ist wegen des Grad-Versatzes der Kettengruppen die induzierte Abbildung  $d_2$  graduiert mit  $q$ -Graduierung 2 (vergleiche 3.27).  $\square$

**Bemerkung 6.8.** (a) Man beachte, dass nun  $(C'(D), d_{BN})$  einen Co-Kettenkomplex darstellt, dessen Kettengruppen bigraduiert sind und dessen Co-Differential die homologische Graduierung wie jedes Co-Differential um eins erhöht. Die  $q$ -Graduierung bleibt durch  $d_{BN}$  nicht erhalten, daher ist  $(C'(D), d_{BN})$  im Gegensatz zum Khovanov-Komplex  $(C(D), d)$  aus 3.28 kein graduierter Komplex. Jedoch wird die  $q$ -Graduierung durch  $d_{BN}$  zumindest nicht verkleinert, da  $d_{BN}$  in zwei Komponenten zerfällt, von denen eine Komponente die  $q$ -Graduierung belässt und die andere Komponente die  $q$ -Graduierung um zwei erhöht. Daher kann man  $(C'(D), d_{BN})$  im Sinne von Beispiel 4.14(b) als filtrierte Komplex auffassen. Der filtrierte Komplex  $C'(D)$  induziert somit eine Spektralsequenz  $(E_i(C'(D)), d_i(C'(D)))_{i \geq 0}$ . Für das Differential  $d_0(C'(D))$  der nullten Seite  $E_0(C'(D)) = C'(D)$  gilt, wie in der Notation schon angedeutet,

$$d_0(C'(D)) = d_0.$$

Die nullte Seite  $(E_0, d_0)$  der Spektralsequenz stimmt also mit dem Khovanov-Komplex  $(C(D), d)$  überein,

$$(E_0, d_0) = (C(D), d).$$

(b) Es gilt also  $E_1(C'(D)) = Kh(D)$  für die erste Seite der Spektralsequenz. Außerdem kann die Spektralsequenz immer nur auf geradzahigen Seiten nichttriviale Differentiale haben, weil das ursprüngliche Differential  $d_{BN}$  nur Komponenten mit geradzahigen  $q$ -Graduierungen hat, siehe Kommentar 4.39(c).

Daher gilt  $d_1(C') = 0$  und somit auch

$$E_2(C'(D)) = Kh(D).$$

## 6. Anwendungen

**Definition 6.9.** Man nennt die Zuordnung, welche einem Linkdiagramm  $D$  den filtrierten Komplex  $(C'(D), d_{BN})$  zuweist, die *filtrierte Bar-Natan-Theorie*.

Die Besonderheit der filtrierten Bar-Natan-Theorie besteht allerdings darin, dass die letzte Seite der Spektralsequenz, anders als bei den zuvor genannten Beispielen, nicht eine Floer-Homologie ergibt. Es gilt stattdessen:

**Satz 6.10.** Für ein Linkdiagramm  $D$  mit  $k$  Komponenten ist die (ungraduierte) Dimension von  $E_\infty(C'(D))$  gegeben durch

$$\dim(E_\infty(C'(D))) = 2^k$$

*Beweis.* Dies zeigt Turner in [26], Theorem 3.1. □

Für ein Diagramm  $D$  eines Knotens  $K$  ist wegen  $k = 1$  also

$$E_\infty(C(D)) \cong \mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{F}_2,$$

wobei die  $E_\infty$ -Seite noch eine Bigraduierung trägt. Ich zeige gleich (in 6.11), dass die filtrierte Bar-Natan-Theorie eine Khovanov-Floer-Theorie bildet. Daher ist insbesondere die bigraduierte  $E_\infty$ -Seite eine funktorielle Linktyp-Invariante (also insbesondere im Falle eines Knotens  $K$  unabhängig von der Wahl des Diagramms  $D$  für  $K$ ). Folglich ist auch das arithmetische Mittel der  $q$ -Graduierung der beiden Komponenten von  $E_\infty(C'(D))$  eine – da numerisch allerdings nicht mehr funktorielle – Knotentypinvariante. Diese Zahl, bezeichnet als  $s(K)$ , ist bekannt als *Rasmussen-Invariante* des Knotens  $K$ , welche von Rasmussen in [22] eingeführt wurde. Der Zugang durch Khovanov-Floer-Theorien liefert einen neuen (einfacheren) Beweis, dass dies tatsächlich eine Knotentypinvariante ist.

Von großer Bedeutung ist die Rasmussen-Invariante in der Knotentheorie besonders aus dem Grund, dass sie eine Beziehung zum *glatten Scheiben-Geschlecht* eines Knotens herstellt. Hierbei beschäftigt man sich unter anderem mit der Frage, ob sich ein Knoten  $K \subseteq \mathbb{S}^3$  als Rand einer eingebetteten Scheibe  $Z \subseteq \mathbb{B}^4$  realisieren lässt. Gelingt dies durch eine *lokal flache* Einbettung  $Z \subseteq \mathbb{B}^4$ , so nennt man den Knoten  $K$  einen *topologischen Scheibenknoten*; falls sogar eine glatte Einbettung  $Z \subseteq \mathbb{B}^4$  gewählt werden kann, so nennt man den Knoten einen *glatten Scheibenknoten*. Lisa Piccirillo zeigte in ihrer hochdekorierten Arbeit [21] aus dem Jahr 2018, dass der berühmte Conway-Knoten kein glatter Scheibenknoten ist, wohingegen zuvor schon bekannt war, dass der Conway-Knoten ein topologischer Scheibenknoten ist. Sie löste damit eine etwa 50 Jahre lang bestehende Frage, welche von Conway formuliert wurde. Der Conway-Knoten ist damit der einzige topologische, aber nicht glatte Scheibenknoten, welcher



ein Diagramm mit weniger als 12 Kreuzungspunkten besitzt. In ihrem Beweis nutzte sie die Rasmussen-Invariante aus, von der bekannt ist, dass diese für einen glatten Scheibenknoten  $K$  stets verschwindet,  $s(K) = 0$ .

Zwar gelang ihr nicht direkt für den Conway Knoten  $K$  die Ungleichheit  $s(K) \neq 0$  zu zeigen, wohl aber  $s(K') \neq 0$  für einen Knoten  $K'$ , von dem sie zuvor gezeigt hatte, dass  $K'$  genau dann ein Scheibenknoten ist, wenn der Conway-Knoten  $K$  ein solcher ist.

Die Behauptung, dass die filtrierte Bar-Natan-Theorie eine Khovanov-Floer liefert, findet sich (ohne Beweis) in Proposition 5.8 in [2]. Ich gebe nun den Beweis für diese Aussage:

**Satz 6.11.** *Die Spektralsequenz der filtrierten Bar-Natan-Theorie ist eine Khovanov-Floer-Theorie.*

*Beweis.* Die filtrierte Bar-Natan-Theorie ordnet einem orientierten Linkdiagramm  $D$  einen filtrierten Kettenkomplex  $(C'(D), d_{BN})$  zu.

Die zugehörige Spektralsequenz erfüllt wegen Bemerkung 6.8

$$E_2(C'(D)) = Kh(D),$$

weshalb  $C'(D)$  Repräsentant einer Quasi-Isomorphieklasse  $\mathcal{A}(D)$  von  $Kh(D)$ -Komplexen ist (wobei man hierfür  $E_2(C'(D))$  und  $Kh(D)$  als durch die  $q$ -Graduierung einfach graduierte Vektorräume auffasst). Ich zeige nun, dass die Zuordnung  $D \mapsto \mathcal{A}(D)$  die vier Bedingungen einer Khovanov-Floer-Theorie erfüllt.

- (i) Sei  $h$  eine ebene Isotopie, welche ein Linkdiagramm  $D$  in ein Linkdiagramm  $D'$  überführt. Dann induziert  $h$  einen Isomorphismus von filtrierten Co-Kettenkomplexen

$$\psi_h : C'(D) \rightarrow C'(D').$$

Wegen der Zerlegung  $d_{BN} = d_0 + d_2$  (und weil  $d_0$  mit dem Khovanov-Differential übereinstimmt) sieht man, dass der von  $h$  in der Khovanov-Homologie induzierte Isomorphismus

$$Kh(h) : Kh(D) \rightarrow Kh(D')$$

mit dem von  $\psi_h$  in  $E_2(C'(D)) = Kh(D)$  induzierten Isomorphismus übereinstimmt. Daher repräsentiert  $\psi_h$  einen Morphismus von  $\mathcal{A}(D)$  nach  $\mathcal{A}(D')$ , welcher in  $E_2$  mit dem von der Khovanov-Homologie induzierten Isomorphismus übereinstimmt.

## 6. Anwendungen

- (ii) Sei  $D_0$  ein Linkdiagramm mit  $n$  Kreuzungen ( $n \in \mathbb{N}$ ) und  $D_1$  ein weiteres, welches aus  $D_0$  durch diagrammatisches Ankleben eines 1-Henkels hervorgeht und  $M$  ein elementarer Movie von  $D_0$  nach  $D_1$ , welcher dieses diagrammatische Ankleben repräsentiert. Es gibt dann ein (unorientiertes) Linkdiagramm  $D$  mit  $n + 1$  Kreuzungen, welches außerhalb einer Kreisscheibe  $B$  mit  $D_0$  und  $D_1$  übereinstimmt und innerhalb der Scheibe genau eine Kreuzung  $x$  besitzt (vgl. Bemerkung 3.43). Die Kreuzungsinformation auf  $D$  sei so gewählt, dass sie in Kreuzungen außerhalb von  $B$  mit den Kreuzungsinformationen von  $D_0$  und  $D_1$  übereinstimmt und auf  $x$  so, dass  $D_0$  die 0-Glättung und  $D_1$  die 1-Glättung von  $D$  in der Kreuzung  $x$  ist. Wie in 3.43 lässt sich der Komplex  $C'(D)$  dann als Abbildungskegel  $\Gamma(f)$  einer filtrierten Kettenabbildung  $f$  vom Grad 0,

$$f : C'(D_0) \rightarrow C'(D_1),$$

auffassen. Nun sieht man (durch Vergleich der Konstruktionen von  $Kh(D)$  und  $C'(D)$ ), dass die von  $f$  induzierte Abbildung auf der zweiten Seite,

$$E_2(f) : E_2(C'(D_0)) \rightarrow E_2(C'(D_1)),$$

mit der durch  $M$  induzierten Abbildung

$$Kh(M) : Kh(D_0) \rightarrow Kh(D_1)$$

(siehe abermals 3.43) übereinstimmt. Zusammengefasst repräsentiert  $f$  einen Morphismus von  $\mathcal{A}(D_0)$  nach  $\mathcal{A}(D_1)$ , welcher in  $E_2$  mit dem von der Khovanov-Homologie induzierten Isomorphismus übereinstimmt.

- (iii) Da eine TQFT ein monoidaler Funktor ist und somit disjunkte Vereinigungen in Tensorprodukte überführt, gilt für Linkdiagramme  $D$  und  $D'$ :

$$C'(D \sqcup D') \cong C'(D) \otimes C'(D')$$

als filtrierte Kettenkomplexe. Daraus folgt, dass  $\mathcal{A}$  die dritte Bedingung erfüllt.

- (iv) Für ein Diagramm  $D$  eines Unlinks mit  $k$  Komponenten gilt für die Khovanov-Homologie wegen Beispiel 3.29 und Bemerkung 3.35

$$Kh(D) \cong V^{\otimes k},$$

also insbesondere

$$\dim(E_2(C'(D))) = \dim(Kh(D)) = 2^k$$

für die (ungraduierte) Dimension der Khovanov-Homologie von  $D$ . Wegen Satz 6.10 gilt aber auch

$$\dim(E_\infty(C'(D))) = 2^k.$$

Daher kann wegen der Kürzungsregel 4.37 ab der  $E_2$ -Seite kein weiteres nichttriviales Differential mehr auftreten, denn sonst müsste

$$\dim(E_\infty(C'(D))) < \dim(E_2(C'(D)))$$

gelten. Also kollabiert die Spektralsequenz für Unlinks in der  $E_2$ -Seite und es gilt

$$E_2(\mathcal{A}(D)) = E_\infty(\mathcal{A}(D)).$$

Somit ist auch die vierte Bedingung erfüllt und die Zuordnung

$$D \mapsto \mathcal{A}(D)$$

definiert eine Khovanov-Floer-Theorie.

□



# A. Floer-Homologie

Dieser Anhang soll einen Eindruck über Floer-Homologien vermitteln und in groben Zügen diejenige Variante der Floer-Homologie vorstellen, welche Kronheimer und Mrowka für die Konstruktion ihrer Spektralsequenz in [15] nutzten.

Seit der Entwicklung der Floer-Homologie durch Andreas Floer wurden viele Variationen derselben gebildet. Floer-Homologien kann man als unendlich-dimensionale Varianten der Morse-Homologie verstehen. Daher sollen zunächst die grundsätzlichen Ideen der Morse-Homologie umrissen werden und daran anknüpfend die Konstruktion der Instanton-Floer-Homologie.

**Definition A.1.** Sei  $M$  eine kompakte, orientierte Mannigfaltigkeit. Eine Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *Morse-Funktion*, falls in jedem *kritischen Punkt*  $p \in M$  (d.h.  $df_p = 0$ ) die Hessesche  $D^2 f_p : TM_p \times TM_p \rightarrow \mathbb{R}$  nicht entartet ist. Die maximale Dimension eines Unterraumes von  $TM_p$ , auf dem die Hessesche negativ definit ist, nennt man dann den *Index* von  $f$  in  $p$ ,

$$\text{ind}_p(f) := \text{ind}(D^2 f_p).$$

**Bemerkung A.2.** (a) Für einen kritischen Punkt  $p$  einer Morse-Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  liefert das Morse-Lemma eine lokale Darstellung von  $f$  um  $p$ , genauer: Es existieren Koordinaten  $x = (x_1, \dots, x_n)$  um  $p$ , sodass  $f$  die Darstellung

$$f(x) = (x_1)^2 + \dots + (x_k)^2 - (x_{k+1})^2 - \dots - (x_n)^2$$

hat, wobei  $k = \text{ind}_p(f)$  der Index von  $f$  in  $p$  ist. Für eine präzise Formulierung und einen Beweis des Morse-Lemmas siehe zum Beispiel [18].

(b) Eine direkte Folgerung aus dem Morse-Lemma ist, dass die Menge der kritischen Punkte  $\text{crit}(f) \subseteq M$  von  $f$  isoliert ist. Da  $M$  kompakt ist, ist somit  $\text{crit}(f)$  eine endliche Menge.

Nun kann man bereits die Kettengruppen des Morse-Komplexes definieren:

**Definition A.3.** Man setzt für  $k \in \mathbb{Z}$

$$C_k := \bigoplus_{p \in \text{crit}_k(f)} \mathbb{Z},$$

wobei  $\text{crit}_k(f)$  die Menge der kritischen Punkte von  $f$  zum Index  $k$  sei.

## A. Floer-Homologie

**Konstruktion A.4.** Die Idee bei der Definition des Differential des Morse-Komplexes ist, der Morse-Funktion  $f$  einen Fluss zuzuordnen und dann Trajektorien zwischen den kritischen Punkten zu zählen (allerdings mit Gewichten in  $\{\pm 1\}$ ).

Dazu wählt man zunächst eine riemannsche Metrik  $g = (\langle \cdot, \cdot \rangle_p)_{p \in M}$  auf  $M$  und bildet das Gradienten-Vektorfeld  $\text{grad}(f)$  von  $f$ , charakterisiert durch

$$\langle \text{grad}(f)(p), \xi \rangle = df_p(\xi), \quad \forall \xi \in TM_p.$$

Für  $p, q \in \text{crit}(f)$  mit  $p \neq q$  definiert man den Trajektorienraum

$$\mathcal{C}(p, q) := \{ \alpha : \mathbb{R} \rightarrow M : \dot{\alpha} = -\text{grad}(f) \circ \alpha, \lim_{t \rightarrow -\infty} \alpha(t) = p, \lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha(t) = q \}.$$

Die Trajektorien parametrisieren also gerade die Bahnen des negativen Gradientenflusses von  $f$  (bzgl.  $g$ ). Allerdings liefert eine Umparametrisierung durch eine Translation um  $s$  zwar eine andere Trajektorie, die allerdings dasselbe Bild (auch genannt die *Bahn* der Trajektorie) hat. Daher bildet man den Quotienten bezüglich dieser  $\mathbb{R}$ -Wirkung, um zum *Bahnenraum*  $B(p, q)$  zu gelangen:

$$B(p, q) := \mathcal{C}(p, q) / \mathbb{R}.$$

Die Bahnen zwischen kritischen Punkten sind nun die geeigneten Objekte zur Definition des Differential für den Morse-Komplex. Nach einer eventuellen Störung der Morse-Funktion zur Erfüllung der sogenannten Morse-Smale-Bedingung gilt nämlich:

**Satz A.5.** *Für  $p, q \in \text{crit}(f)$  ist der Bahnenraum  $B(p, q)$  eine glatte kompakte Mannigfaltigkeit der Dimension*

$$\dim(B(p, q)) = \text{ind}_p(f) - \text{ind}_q(f) - 1$$

□

**Kommentar A.6.** Die Formulierung der Morse-Smale-Bedingung und auch der Beweis von A.5 finden sich in [5].

Anschaulich zählt man nun einfach die Bahnen zwischen zwei kritischen Punkten, deren Index sich um 1 unterscheidet, denn das ist eine 0-dimensionale kompakte Mannigfaltigkeit, also eine endliche Menge. Es tut sich jedoch eine technische Schwierigkeit bei der Wahl des Vorzeichens auf, mit dem eine jede Bahn gezählt werden soll. Man hat zwei Möglichkeiten, dieses Problem zu lösen. Entweder betrachtet man Homologie mit Koeffizienten in  $\mathbb{F}_2$ , dann muss man sich nicht mehr um Vorzeichen kümmern. Möchte man jedoch auch andere Koeffizientengruppen wie z.B.  $\mathbb{Z}$  zulassen, so führt kein Weg daran vorbei. Und wie in den meisten Fällen, wo eine Homologie aus geometrischen Strukturen gewonnen werden soll, übersetzt sich dieses Problem

auch hier in eine Frage über Orientierungen, in diesem Fall der Bahnen  $[\alpha] \in B(p, q)$ . Es stellt sich heraus, dass mit Hilfe der Orientierung von  $M$  jeder Bahn eine Orientierung  $\text{sgn}[\alpha]$  so zugewiesen werden kann, dass die Abbildung  $\partial = (\partial_k : C_k \rightarrow C_{k-1})_{k \in \mathbb{Z}}$ , welche auf den Erzeugern  $p \in \text{crit}_k(f)$  von  $C_k$  durch

$$\partial_k p = \sum_{q \in \text{crit}_{k-1}(f)} \sum_{[\alpha] \in B(p, q)} \text{sgn}[\alpha] \cdot q$$

gegeben ist, die Bedingung  $\partial^2 = 0$  erfüllt (beachte auch hier wieder [5] für Details). Dies gibt  $(C, \partial)$  die Struktur eines Kettenkomplexes, dessen Homologiegruppen mit

$$H_k^{\text{Morse}}(M) = \ker(\partial_k) / \text{im}(\partial_{k+1})$$

bezeichnet werden. Die Homologie

$$H^{\text{Morse}}(M) = (H_k^{\text{Morse}}(M))_{k \in \mathbb{Z}}$$

heißt *Morse-Homologie* von  $M$ . Es gilt dann (siehe abermals [5]):

**Satz A.7.** *Die Morse-Homologiegruppen  $H_k^{\text{Morse}}(M)$  sind unabhängig von den Wahlen der Morse-Funktion  $f$  und der Riemannschen Metrik  $g$  und es gilt*

$$H_k^{\text{Morse}}(M) \cong H_k^{\text{sing}}(M).$$

□

In diesem Sinne ist die Morse-Homologie zu verstehen als ein differentialgeometrisches Werkzeug zur Berechnung der singulären Homologie einer Mannigfaltigkeit  $M$ .

Eine neue Bedeutung kommt der Morse-Homologie als endlich-dimensionales Vorbild zur Konstruktion der Floer-Homologien bei. Hier sollen nun die Grundzüge der *Instanton-Floer-Homologie* für 3-Mannigfaltigkeiten erklärt werden. Die präzise Konstruktion ist zu finden in [13], [14] und für den speziellen Fall eines Knotens in einer 3-Mannigfaltigkeit in [16].

Sei dazu im Folgenden stets  $Y$  eine geschlossene dreidimensionale Mannigfaltigkeit und  $\pi : P \rightarrow Y$  ein  $SU(2)$ -Hauptfaserbündel über  $Y$ .

Man betrachtet nun das zu  $P$  adjungierte Bündel  $\text{ad}(P)$  und Zusammenhänge auf demselben und setzt

$$\mathcal{C}(Y, P) := \{A : A \text{ ist ein Zusammenhang in } \text{ad}(P)\}.$$

Dieser Raum von Zusammenhängen soll die Rolle des Trajektorienraumes spielen, anders als bei der Morse-Homologie handelt es sich hierbei nun aber um einen (affinen) Raum von unendlicher Dimension.

## A. Floer-Homologie

Jedem Zusammenhang  $A \in \mathcal{C}(Y, P)$  möchte man nun eine reelle Zahl zuordnen und dann einen Gradienten-Fluss bilden, so wie das für die Morse-Funktion im endlich-dimensionalen Fall geschah. Diese Rolle übernimmt nun gerade das *Chern-Simons-Funktional*  $CS : \mathcal{C}(Y, P) \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch

$$CS(A) = \int_Y \text{Tr}(dA \wedge A + \frac{2}{3}A \wedge A \wedge A) d\mu.$$

Die kritischen Punkte des Chern-Simons-Funktional lassen sich elegant charakterisieren; es sind gerade diejenigen Zusammenhänge, deren Krümmungsform verschwindet:

$$\text{crit}(CS) = \{A \in \mathcal{C}(Y, P) : F_A = 0\}$$

(Man vergleiche dies auch mit dem Prinzip der kleinsten Wirkung im Lagrange-Formalismus der klassischen Mechanik.)

Wie beim Trajektorienraum in der Morse-Homologie muss man zunächst noch den Quotienten bezüglich einer Gruppenwirkung bilden, in diesem Fall bezüglich der *Eichgruppe*

$$\mathcal{G}(Y, P) := \{\varphi : P \rightarrow P : \varphi \text{ ist Automorphismus mit } \det \varphi(y) = 1, \forall y \in Y\}.$$

Den entstehenden Raum

$$B(Y, P) := \mathcal{C}(Y, P)/\mathcal{G}(Y, P)$$

nennt man *Konfigurationsraum*. Durch eine kleine Störung des Chern-Simons-Funktional kann man erreichen, dass der Konfigurationsraum eine endlich-dimensionale geschlossene Mannigfaltigkeit ist. Das Chern-Simons-Funktional induziert dann auf  $B(Y, P)$  eine  $\mathbb{S}^1$ -wertige Morse-Funktion  $\tilde{CS} : B(Y, P) \rightarrow \mathbb{S}^1$ .

Man erhält die *Instanton-Floer-Homologie*  $I_*(Y, P)$  von  $(Y, P)$  durch

$$I_*(Y, P) := H_*^{\text{Morse}}(B(Y, P); \tilde{CS}).$$

Ist nun  $K \subseteq Y$  ein Knoten oder ein Link, so möchte man eine geeignete Variante der Floer-Homologie von  $Y$  definieren, welche möglichst zu einer Knoten- bzw. Linktypinvariante werden soll. Man betrachtet hierzu auch wieder  $U(2)$ -Hauptfaserbündel  $\pi : P \rightarrow Y$ . Allerdings betrachtet man nun nicht den Raum aller Zusammenhänge in  $\text{ad}(P)$ , sondern nur Zusammenhänge, die eine Singularitätsbedingung entlang  $K$  erfüllen,

$$\mathcal{C}(Y, K; P) := \{A : A \text{ ist ein Zusammenhang in } \text{ad}(P) \text{ mit Singularität entlang } K\}.$$

Zur präzisen Definition von Zusammenhängen mit Singularität entlang einer Untermannigfaltigkeit der Codimension 2 siehe [13] und [14] oder auch [16]. Wie zuvor definiert man nun eine Eichgruppe und einen Konfigurationsraum und imitiert die Morse-Homologie unter



Benutzung des Chern-Simons-Funktional. Man erhält die *Instanton-Floer-Homologie eines Knotens*  $K \subseteq Y$ ,

$$I_*(Y, K; P)$$

Beachte hierbei, dass die Verschlingung ohne Komponenten  $K = \emptyset$  gerade die ursprüngliche Instanton-Floer-Homologie von  $Y$  liefert.

**Konstruktionsskizze A.8.** Da die Khovanov-Homologie sich über Gebinde-Relationen beschreiben lässt (s. 3.36) und somit diejenigen Link-Cobordismen eine besondere Rolle spielen, deren Projektionen eine Kreuzung eines zugehörigen Linkdiagramms in eine 0- oder 1-Glättung überführen, stellt man eine Forderung an die Instanton-Floer-Homologie eines Knotens bzw. Links: Man hätte gerne, dass die Instanton-Floer-Homologie unter solchen Cobordismen funktoriell wird, insbesondere dass ein Cobordismus einen Homomorphismus unter den zugehörigen Instanton-Floer-Homologien der beiden *Randknoten* des Cobordismus induziert.

Leider stellt sich heraus, dass die oben definierte Instanton-Floer-Homologie für Knoten bzw. Links diese Forderung nicht erfüllt, sodass noch eine weitere Variation, die sogenannte (*reduzierte*) *singuläre Instanton-Knoten-Homologie*, benötigt wird.

Zur Konstruktion der reduzierten singulären Instanton-Knoten-Homologie (für Details siehe [15]):

Zu einem gegebenen Link  $K \subseteq \mathbb{S}^3$  wählt man einen Basispunkt  $x \in K$  und einen Normalenvektor  $v$  zu  $K$  in  $x$ . Ist nun  $L$  der Rand einer kleinen Scheibe, die im Punkt  $x$  normal an den Link  $K$  steht, so bezeichnen wir mit  $\omega$  einen Bogen, der von  $x$  in Richtung  $v$  zum Rand  $L$  der Normalenscheibe verläuft (also gerade ein Radius der Scheibe). Hat man die Scheibe klein genug gewählt (z.B. innerhalb einer Tubenumgebung von  $K$ ), so lässt sich (ähnlich wie zuvor) mit Hilfe von  $\omega$  eine Instanton-Floer-Homologie für den Link  $K^\natural := K \sqcup L$  definieren. Der Bogen  $\omega$  übernimmt dabei in gewisser Weise die Rolle der Bündelstruktur, genauer ist  $\omega$  dual zur zweiten (relativen) Stiefel-Whitney-Klasse  $w_2$  des Bündels  $P$ . Durch diese Wahl wird eine *Nicht-Ganzzahligkeitsbedingung* erfüllt (beachte hierzu auch wieder [16]). Dies stellt sicher, dass man eine Invariante

$$I^\natural(Y, K, x, v) = I^\omega(Y, K^\natural) = I_*(Y, K^\natural; P)$$

erhält, welche als reduzierte singuläre Instanton-Knoten-Homologie bezeichnet wird. Man unterdrückt in der Notation häufig die Wahlen von  $x$  und  $v$  und schreibt lediglich  $I^\natural(Y, K)$ . Falls man sich für die Gruppe  $I^\natural(Y, K)$  nur bis auf Isomorphie interessiert, so beachte man, dass die Wahlen von  $x$  und  $v$  nur die Komponente von  $K$ , in welcher  $x$  liegt, markieren. Es ist

### A. Floer-Homologie

dann also  $I^{\natural}(Y, K)$  eine Invariante für Links  $K \subseteq Y$  mit einer markierten Komponente von  $K$ . Der Vorteil von  $I^{\natural}(Y, K)$  ist nun das Verhalten unter Cobordismen: Betrachtet man (orientierte) Cobordismen zwischen Paaren  $(Y, K_1)$  und  $(Y, K_2)$  als Morphismen in einer Kategorie  $\mathbf{Link}_Y$  (wo die Objekte  $(Y, K)$  Paare einer 3-Mannigfaltigkeit  $Y$  und eines Links  $K \subseteq Y$  (mit markierter Komponente) sind), so induzieren diese Cobordismen nun Homomorphismen in den zugehörigen reduzierten singulären Instanton-Knoten-Homologien der jeweiligen Paare, präziser:

$I^{\natural}$  wird zu einem Funktor zwischen  $\mathbf{Link}$  und der Kategorie  $\mathbf{gAb}$  der (graduierten) abelschen Gruppen. Es stellt sich sogar heraus (vergleiche Abschnitt 6.1), dass die reduzierte singuläre Instanton-Knoten-Homologie (über  $Y = \mathbb{S}^3$ ) Kandidat für eine Khovanov-Floer-Theorie ist: Die Funktorialität unter Cobordismen erlaubt die Konstruktion eines filtrierten Kettenkomplexes, dessen zugehörige Spektralsequenz die reduzierte singuläre Instanton-Knoten-Homologie als  $E_{\infty}$ -Seite und die Khovanov-Homologie als zweite Seite hat.

## Epilog

An dieser Stelle möchte ich noch einen Ausblick über einige der Entwicklungen der letzten Jahre im Kontext der Khovanov-Floer-Theorien geben.

Die Rasmussen-Invariante  $s(K)$  für Knoten wurde von Rasmussen in [22] entwickelt, wo er diese benutzte, um einen rein kombinatorischen Beweis der *Milnor-Vermutung über das glatte Scheiben-Geschlecht von Torus-Knoten* zu geben. Diese wurde zuvor bereits von Kronheimer und Mrowka in [13] mit eichtheoretischen Methoden bewiesen. Dies zeigt, dass auch die filtrierte Bar-Natan-Theorie gewisse Korrelationen mit Eichtheorien (und damit verbunden Floer-Homologien) hat.

Seit der Entdeckung, dass die Khovanov-Homologie den Unknoten detektiert, wurden weitere Resultate über die Khovanov-Homologie gewonnen. Meist kam dabei die Spektralsequenz von Kronheimer und Mrowka (siehe Abschnitt 6.1) oder eine ähnliche Khovanov-Floer-Theorie zum Einsatz. So weiß man heute, dass die Khovanov-Homologie unter anderem

- den Unlink mit  $k$  Komponenten (siehe [8]),
- den Kleeblatt-Knoten (siehe [3]) und
- den Hopf-Link (siehe [4]) detektiert.

Eine Feinheit hatte ich bei der Konstruktion der Khovanov-Floer-Theorien nicht explizit erwähnt. So passiert es manchmal, dass eine Khovanov-Floer-Theorie auf der  $E_\infty$ -Seite zwar den Objekten eine entsprechende Floer-Homologie zuweist, aber die durch  $E_\infty$  induzierten Morphismen stimmen im Allgemeinen nicht mit den in der Floer-Homologie induzierten Morphismen überein. Dies hängt mit der Art und Weise zusammen, wie filtrierte Kettenabbildungen *vom Grad  $k$*  Abbildungen auf den Seiten der Spektralsequenz induzieren, genauer mit der in 4.41(b) angedeuteten Freiheit der Wahl von  $k$ . Es gibt einen Zugang von Adam Saltz zu Khovanov-Floer-Theorien (siehe [25]), bei dem  $V$ -Komplexe vermieden werden: Man erhält unter gewissen Zusatzbedingungen eine funktorielle Zuordnung, welche den Links

filtrierte Komplexe (und nicht nur die zugehörigen Spektralsequenzen) zuweist. Diese filtrierten Komplexe respektieren dann auch die von der Floer-Homologie induzierten Morphismen. Daher spricht man von solchen Zuordnungen als *starken Khovanov-Floer-Theorien*.

Wenn man von der Fülle der hier vorgestellten Knotentheorie nun einen Knoten im Kopf hat, so möchte ich die Arbeit nun beschließen und mit der Tatsache trösten, dass aus differential-topologischer Sicht ein Knoten einfach nur (diffeomorph zu) eine(r) Kreislinie ist.

Zuletzt möchte ich die Gelegenheit nutzen, einigen Personen zu danken, welche mich auf meinem Weg begleitet haben.

So danke ich Prof. Frank Loose, der vom Beginn meines Studiums bis zum heutigen Tage meine Begeisterung für die Mathematik zu entfachen und zu mehren verstand. Die Betreuung meiner Arbeit und die erfolgreiche Initiative, dass meine Familie stets finanziell abgesichert war, weiß ich sehr zu schätzen.

Ich möchte Prof. Christoph Bohle, mit dem ich viele anregende Gespräche, auch abseits der Mathematik, führen durfte, meinen Dank dafür aussprechen, dass er mich eines Tages in die fabelhafte Welt der Knoten entführte.

Prof. Matthew Hedden beantwortete mir einige Fragen, die mich lange beschäftigten – und das, obwohl wir uns nie persönlich getroffen haben. Die teils überraschend einfachen, teils aber auch tiefliegenden Antworten haben mir bei meiner Arbeit in entscheidenden Punkten weitergeholfen. Daher richtet sich dieser Dank nach Michigan: *Thank You, Matt!*

Meinen Eltern und Schwiegereltern danke ich, dass sie mich und meine Familie nach Kräften unterstützt haben. Liebe Marion, dieser Dank gilt ganz besonders dir. Ohne dich hätten wir das alles nicht geschafft.

Schließlich drücke ich meine Dankbarkeit gegenüber Aurelia, Claudius, Emilia und Bettina aus, denn durch euch erfahre ich jeden Tag aufs Neue meines Lebens Glück.

## Literaturverzeichnis

- [1] ABRAMS, Lowell: Two-dimensional topological quantum field theories and Frobenius algebras. In: *Journal of Knot Theory and Its Ramifications* 05 (1996), Nr. 05, 569–587. <http://dx.doi.org/10.1142/S0218216596000333>. – DOI 10.1142/S0218216596000333
- [2] BALDWIN, John A. ; HEDDEN, Matthew ; LOBB, Andrew: On the functoriality of Khovanov-Floer theories. In: *Advances in Mathematics* 345 (2019), 1162–1205. <http://dx.doi.org/10.1016/j.aim.2019.01.026>. – DOI 10.1016/j.aim.2019.01.026. – mit einer in Bezug auf die filtrierte Bar-Natan-Theorie ausführlicheren Pre-Print-Version in arXiv Mathematics e-prints: <https://arxiv.org/abs/1509.04691v2>
- [3] BALDWIN, John A. ; SIVEK, Steven: Khovanov homology detects the trefoils. In: *Duke Mathematical Journal* 171 (2022), Nr. 4, 885–956. <http://dx.doi.org/10.1215/00127094-2021-0034>. – DOI 10.1215/00127094-2021-0034
- [4] BALDWIN, John A. ; SIVEK, Steven ; XIE, Yi: Khovanov homology detects the Hopf links. In: *Mathematical Research Letters* 26 (2019), Nr. 5, 1281–1290. <http://dx.doi.org/10.4310/mrl.2019.v26.n5.a2>. – DOI 10.4310/mrl.2019.v26.n5.a2. – ISSN 1945–001X
- [5] BANYAGA, Augustin ; HURTUBISE, David: *Lectures on Morse homology*. Dordrecht [u.a.] : Kluwer, 2004 <http://swbplus.bsz-bw.de/bsz113733518cov.htm>. – ISBN 1–4020–2695–1
- [6] BAR-NATAN, Dror: On Khovanov’s categorification of the Jones polynomial. In: *Algebraic and Geometric Topology* 2 (2002), Nr. 1, 337–370. <http://dx.doi.org/10.2140/agt.2002.2.337>. – DOI 10.2140/agt.2002.2.337. – ISSN 1472–2747
- [7] BAR-NATAN, Dror: Khovanov’s homology for tangles and cobordisms. In: *Geometry and Topology* 9 (2005), Nr. 3, 1443–1499. <http://dx.doi.org/10.2140/gt.2005.9.1443>. – DOI 10.2140/gt.2005.9.1443. – ISSN 1465–3060

- [8] BATSON, Joshua ; SEED, Cotton: A link-splitting spectral sequence in Khovanov homology. In: *Duke Mathematical Journal* 164 (2015), Nr. 5, 801–841. <http://dx.doi.org/10.1215/00127094-2881374>. – DOI 10.1215/00127094-2881374. – ISSN 0012-7094
- [9] CARTER, J. S. ; SAITO, Masahico: Reidemeister moves for surface isotopies and their interpretation as moves to movies. In: *Journal of Knot Theory and Its Ramifications* 02 (1993), Nr. 03, 251–284. <http://dx.doi.org/10.1142/S0218216593000167>. – DOI 10.1142/S0218216593000167
- [10] HORNER, Kate E. ; MILLER, Mark A. ; STEED, Jonathan W. ; SUTCLIFFE, Paul M.: Knot theory in modern chemistry. In: *Chem. Soc. Rev.* 45 (2016), 6432–6448. <http://dx.doi.org/10.1039/C6CS00448B>. – DOI 10.1039/C6CS00448B
- [11] JACOBSSON, Magnus: An invariant of link cobordisms from Khovanov homology. In: *Algebraic and Geometric Topology* 4 (2004), Nr. 2, 1211–1251. <http://dx.doi.org/10.2140/agt.2004.4.1211>. – DOI 10.2140/agt.2004.4.1211. – ISSN 1472-2747
- [12] KHOVANOV, Mikhail: A categorification of the Jones polynomial. In: *Duke Mathematical Journal* 101 (2000), Nr. 3, 359–426. <http://dx.doi.org/10.1215/S0012-7094-00-10131-7>. – DOI 10.1215/S0012-7094-00-10131-7
- [13] KRONHEIMER, Peter B. ; MROWKA, Tomasz S.: Gauge theory for embedded surfaces, I. In: *Topology* 32 (1993), Nr. 4, 773–826. [http://dx.doi.org/10.1016/0040-9383\(93\)90051-V](http://dx.doi.org/10.1016/0040-9383(93)90051-V). – DOI 10.1016/0040-9383(93)90051-V. – ISSN 0040-9383
- [14] KRONHEIMER, Peter B. ; MROWKA, Tomasz S.: Gauge theory for embedded surfaces, II. In: *Topology* 34 (1995), Nr. 1, 37–97. [http://dx.doi.org/10.1016/0040-9383\(94\)E0003-3](http://dx.doi.org/10.1016/0040-9383(94)E0003-3). – DOI 10.1016/0040-9383(94)E0003-3. – ISSN 0040-9383
- [15] KRONHEIMER, Peter B. ; MROWKA, Tomasz S.: Khovanov homology is an unknot-detector. In: *Publications mathématiques de l’IHÉS* 113 (2011), 97–208. <http://dx.doi.org/10.1007/s10240-010-0030-y>. – DOI 10.1007/s10240-010-0030-y. – ISSN 1618-1913
- [16] KRONHEIMER, Peter B. ; MROWKA, Tomasz S.: Knot homology groups from instantons. In: *Journal of Topology* 4 (2011), Nr. 4, 835–918. <http://dx.doi.org/10.1112/jtopol/jtr024>. – DOI 10.1112/jtopol/jtr024. – ISSN 1753-8416
- [17] LEE, Eun S.: An endomorphism of the Khovanov invariant. In: *Advances in Mathematics*

- 197 (2005), Nr. 2, 554–586. <http://dx.doi.org/10.1016/j.aim.2004.10.015>. – DOI 10.1016/j.aim.2004.10.015. – ISSN 0001–8708
- [18] MILNOR, John ; SPIVAK, M. ; WELLS, R.: *Annals of mathematical studies*. Bd. 51: *Morse Theory*. Princeton University Press, 1969 <http://www.jstor.org/stable/j.ctv3f8rb6>. – ISBN 9780691080086
- [19] NIKOLAUS, Thomas ; HEBESTREIT, Fabian ; KRAUSE, Achim: *Spectral Sequences*. Universität Bonn : Vorlesungsskript, Sommersemester 2017
- [20] OZSVATH, Peter ; SZABO, Zoltan: On the Heegaard Floer homology of branched double-covers. In: *Advances in Mathematics* 194 (2005), Nr. 1, 1–33. <http://dx.doi.org/10.1016/j.aim.2004.05.008>. – DOI 10.1016/j.aim.2004.05.008. – ISSN 0001–8708
- [21] PICCIRILLO, Lisa: The Conway knot is not slice. In: *Annals of Mathematics* 191 (2020), Nr. 2, 581–591. <http://dx.doi.org/10.4007/annals.2020.191.2.5>. – DOI 10.4007/annals.2020.191.2.5
- [22] RASMUSSEN, Jacob A.: Khovanov homology and the slice genus. In: *Inventiones mathematicae* 182 (2010), 419–447. <http://dx.doi.org/10.1007/s00222-010-0275-6>. – DOI 10.1007/s00222-010-0275-6. – ISSN 1432–1297
- [23] ROSEMAN, Dennis ; GORDON, C. M. (Hrsg.) ; JONES, V. F. R. (Hrsg.) ; KAUFFMAN, L. (Hrsg.) ; LAMBROPOULOU, S. (Hrsg.) ; PRZYTYCKI, J. H. (Hrsg.): *Knots Everything*. Bd. 24: „*Knots in Hellas '98*“, Kapitel „*Projections of codimension two embeddings*“. Singapur [u.a.] : World Scientific, 2000. – 380–410 S. [https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/9789812792679\\_0024](https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/9789812792679_0024)
- [24] ROSEMAN, Dennis: Elementary moves for higher dimensional knots. In: *Fundamenta Mathematicae* 184 (2004), Nr. 1, 291–310. <http://eudml.org/doc/283078>
- [25] SALTZ, Adam: Strong Khovanov-Floer Theories and Functoriality. In: *arXiv Mathematics e-prints* (2018). <https://arxiv.org/abs/1712.08272>
- [26] TURNER, Paul: Calculating Bar-Natan’s characteristic two Khovanov homology. In: *Journal of Knot Theory and Its Ramifications* 15 (2006), Nr. 10, 1335–1356. <http://dx.doi.org/10.1142/s0218216506005111>. – DOI 10.1142/s0218216506005111