

Pinning-Phasenübergang von Bose-Einstein-Kondensaten in rückstoßauflösenden optischen Ringresonatoren

Dissertation

der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Eberhard Karls Universität Tübingen

zur Erlangung des Grades eines

Doktors der Naturwissenschaften

(Dr. rer. nat.)

vorgelegt von

Simon Schuster

aus Radolfzell am Bodensee

Tübingen

2020

Tag der mündlichen Qualifikation: 03.07.2020
Dekan: Prof. Dr. Wolfgang Rosenstiel
1. Berichterstatter: Prof. Dr. Claus Zimmermann
2. Berichterstatter: Prof. Dr. Sebastian Slama

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	5
2	Theoretische Grundlagen	9
2.1	Einzelnes Atom im Lichtfeld	9
2.1.1	Semiklassische Behandlung	9
2.1.2	Photonenbild	12
2.2	Optischer Ringresonator	13
2.3	Einzelnes Atom in Resonatormode	15
2.4	CARL	17
2.5	N Atome in Resonatormode - CARL Gleichungen	18
2.6	3-Moden Modell	19
2.7	4-Moden Modell	22
2.7.1	Materiezustände	22
2.7.2	Strukturfaktor	25
2.7.3	Phasenbedingung	26
2.7.4	Analysemode mit Gleichgewichtsbedingung	26
2.7.5	Umskalierung der Strukturfaktoren	27
2.7.6	Gleichgewichtskonfigurationen der Amplituden von Strukturfaktor und Testmodenfeld	30
2.7.7	Gleichgewichtskonfigurationen der Phasen von Strukturfaktor und Testmodenfeld	32
2.7.8	Kritische Verstimmung	36
3	Experimenteller Aufbau	39
3.1	Optischer Aufbau	42
3.1.1	MOT System	42
3.1.2	Absorptionsabbildung	43
3.1.3	Resonator Lasersystem	45
3.2	Experimentsteuerung	47
3.3	μ C-Lockbox	53
3.3.1	Relockprozedur	54
3.4	Ringresonator	55
3.4.1	Zusammenfassung der Resonatoreigenschaften	57

3.5	Resonatorverluste	57
3.5.1	Highfinesse Linienbreite	58
3.5.2	Rückstreurrate	59
3.5.3	Lowfinesse Linienbreite	60
3.5.4	Zerfallszeit	60
3.6	Frequenzdrift der Resonatormoden	61
4	Messungen	67
4.1	Messung der Ein-Photon-Lichtverschiebung U_0	67
4.2	Zeitliche Entwicklung	70
4.2.1	Ohne Spiegelrückstreuung	70
4.2.2	Messung der Entwicklung mit Spiegelrückstreuung	74
4.3	Stabilitätsdiagramm mit Spiegelrückstreuung	77
4.4	Pinning-Übergang	79
5	Zusammenfassung und Ausblick	83
A	Veröffentlichung	85
B	Schaltpläne der μC-Lockbox	91
	Literatur	97

1 Einleitung

Im Weltraum oder auf der Erde, auf allen Längenskalen sind Phänomene bekannt die selbstorganisiertes Verhalten zeigen. Selbstorganisation tritt in komplexen Systemen auf und äußert sich durch die Herausbildung von räumlichen, zeitlichen oder funktionellen Strukturen in diesen, ohne dass ein externer Einfluss diese Struktur vorgibt [1].

Ein Beispiel auf astronomischen Längenskalen sind Planetensysteme, die ganzzahlige Verhältnisse der Umlaufzeiten ihrer Himmelskörper herausbilden [2]. Die Geologie beschreibt die Entstehung von Mäandern [3] oder Dünenfeldern [4, 5]. Und verschiedene Verkehrsbedingungen im Straßenverkehr lassen sich durch Phasen-zustände beschreiben [6].

Die genannten Beispiele unterliegen alle unterschiedlichen Prozessen und physikalischen Modellen. Dennoch lassen sich für selbstorganisierte komplexe Systeme, wie die genannten, gemeinsame Mechanismen identifizieren. Damit sich ein System selbst organisieren kann, muss eine unspezifische externe Kraft wirken, durch welche erst die physikalischen Eigenschaften des Systems dieses in einen organisierten Zustand bringen können.

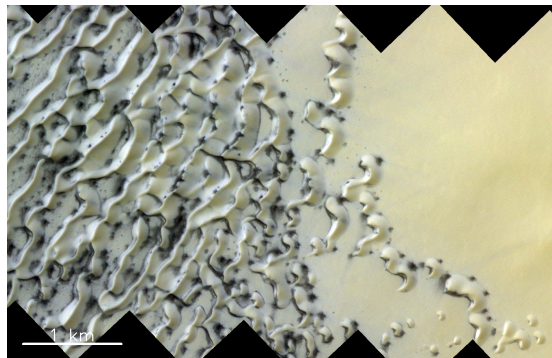


Abbildung 1.1: Dünenfeld in der Polarregion des Mars, Quelle: ESA/Roscosmos/CaSSIS, CC BY-SA 3.0 IGO

Am Beispiel der Dünenfelder führt erst die externe Kraft in Form von Wind zur Herausbildung ihrer regelmäßigen Strukturierung. Er wirkt unspezifisch, da er die Dünenstruktur nicht vorgibt. Diese entsteht, indem die vom Wind bewegten Sandkörner durch Stöße mit ruhenden Sandkörnern ihre Energie verlieren und liegen bleiben. So entstehen zuerst zufällige Ablagerungen, welche die Ablagerungswahr-

scheinlichkeit von weiteren Sandkörnern an ihnen erhöhen [4]. Diese positive Rückkopplung auf die Sandkornablagerung führt zu einer Vergrößerung vorhandener Strukturen und wirkt so formgebend für die Dünenfelder wie in Abbildung 1.1.

Allgemeiner ausgedrückt, selbstorganisierte Strukturen können in einem komplexen System entstehen, wenn auf dieses eine treibende *Kraft* wirkt und es einen Mechanismus *positiver Rückkopplung* besitzt, der rücktreibende Kräfte verstärkt. Selbstorganisation entsteht also durch die *Wechselwirkung* der Systemkomponenten miteinander.

Im Jahr 1999 beschrieb die Arbeitsgruppe von Wolfgang Ketterle erstmals das selbstorganisierte Phänomen der superradianten Rayleigh Streuung (SRS) von Laserlicht an einem Bose-Einstein-Kondensat (BEC)[7, 8]. In dem Experiment wurde eine elliptisch geformte Wolke aus ultrakalten Natriumatomen mit einem kurzen Puls aus fernverstimmttem Laserlicht beleuchtet (gepumpt). Dabei ist eine exponentiell ansteigende Umstreuung des Pumplichts in Richtung der Längsachse der Atomwolke zu beobachten. Zu Beginn des Laserpulses streuen die Atome das Pumplicht in alle Raumrichtungen ab. Durch die Interferenz des gestreuten Lichts mit dem Pumplicht kann sich ein Dipolpotential ausbilden, durch welches eine Kraft auf die Atome wirkt. Die streuenden Atome beginnen sich durch den Impulsübertrag des gestreuten Lichts zu bewegen und gleichzeitig in dem erzeugten Dipolpotential anzuordnen. Die durch die Anordnung veränderte atomare Dichteverteilung wirkt als Bragg-Gitter, das die Umstreuerrichtung beeinflusst. Durch diese positive Rückkopplung begeben sich die Atome kollektiv in die Anordnung, welche das tiefste Dipolpotential erzeugen kann. Dies geschieht durch die Ausrichtung des Bragg-Gitters, welche das Laserlicht in Richtung der Längsachse der Atomwolke streuen, da auf dieser Achse die meisten Atome beitragen können. Hier findet die Wechselwirkung zwischen den Atomen über die gestreuten Photonen statt. Die Wechselwirkungsdauer zwischen den Atomen ist nicht länger als die Laufzeit eines gestreuten Photons durch die Längsachse, entspricht also der Lebensdauer eines gestreuten Photons in der Atomwolke.

Die theoretische Grundlage für dieses Experiment wurde bereits 1994 von Rodolfo Bonifacio durch die Interpretation des Phänomens als kollektiver atomarer Rückstoß-Laser (CARL) geschaffen, der dieses System basierend auf der Anregung von atomaren Zweiniveausystemen als Analogie zum Freie-Elektronen-Laser (FEL) beschreibt [9, 10, 11]. Eine Erweiterung erfährt das Konzept, indem den gestreuten Photonen, anstatt sie in den freien Raum streuen zu lassen, die Mode eines Ringresonators angeboten wird [12, 13]. Die um Größenordnungen längere Lebensdauer von gestreuten Photonen in der optischen Mode und die resonante Überhöhung ihrer Feldamplitude, bewirkt eine stärkere Rückkopplung im System.

Aus Sicht wechselwirkender Quantengase spricht man heute in diesem Zusammenhang auch von resonatorinduzierter langreichweitiger Wechselwirkung zwischen den Atomen. Langreichweitige Wechselwirkung kann in ultrakalten atomaren Gasen auch zwischen Rydbergatomen [14] oder durch Feshbachresonanzen [15, 16] er-

zeugt werden. Diese Techniken ermöglichen die Erkundung neuer Phasenzustände, beispielsweise durch die unlängst beobachteten supersoliden Eigenschaften eines dipolaren Quantengases [17]. Ein System aus kalten Atomen, die durch die Mode eines Stehwellenresonators in lichtinduzierte kollektive Kopplung miteinander treten, kann einen Dicke Phasenübergang durchlaufen [18, 19]. Supersolide Phasenzustände wurden auch in einem System bestehend aus zwei gekreuzten Stehwellenresonatoren nachgewiesen [20]. In Stehwellenresonatoren ist im Gegensatz zu Ringresonatoren die Lage des emergenten Bragg-Gitters durch die Randbedingungen der Spiegel festgelegt. Die kontinuierliche Translationsymmetrie von Ringresonatoren ermöglicht dagegen die Erkundung weiterführender Fragestellungen [21, 22, 23]. So erfolgte in Tübingen 2018 der Nachweis subradianter Impulszustände [24] und 2019 die Herstellung von Phasenzuständen mit supersoliden Eigenschaften [25, 26].

Die erste experimentelle Realisierung des CARL im Ringresonator gelang 2003 in Tübingen mit thermischen Atomen [27, 28]. Sebastian Slama realisierte in seiner Dissertation von 2007 das erste BEC in einem optischen (Ring-)Resonator und beschrieb den Zusammenhang zwischen SRS und CARL [29, 30, 31].

Die bei SRS exponentiell ansteigende Umstreuung von Pumplicht in Richtung der Längsachse der Atomwolke, ist auch bei CARL im Ringresonator als Umstreuung von Pumplicht in die Resonatormode zu beobachten. Die dabei entstehende Dichtemodulation der atomaren Verteilung wird durch den Impulsübertrag des Pumplichts beschleunigt. Dieser Prozess wird als „dynamische Instabilität“ bezeichnet. Um ihn zu starten muss eine kritische Pumpleistung überschritten werden. Die Resonatormode führt Randbedingungen ein, die zu einer asymmetrischen Abhängigkeit der Schwelle von der Verstimmung zwischen Pumplicht und Resonatorresonanz führen [32, 33, 34, 35].

Bereits seit der ersten experimentellen Veröffentlichung zu CARL wird eine Beeinflussung der dynamischen Instabilität durch die Spiegelrückstreuung vermutet [27]. Die Rückstreuung von nicht idealen Spiegeln in Hochfinesse-Ringresonatoren sorgt für eine Befüllung der gegenläufigen Resonatormode, bzw. zu einer Kopplung von gegenläufigen Moden [36, 37]. Wird die Atomwolke im Zentrum der Resonatormode platziert und von einer Seite mit der Resonatormode gepumpt, erzeugt die Spiegelrückstreuung einen Stehwellenanteil der bereits zu einer Strukturierung der atomaren Dichteverteilung führen kann. Im Kontext der Selbstorganisation wird dabei eine Struktur von außen vorgegeben.

In dieser Arbeit wird das Verhalten der CARL-Dynamik eines Bose-Einstein Kondensats, in einem rückstoßauflösenden Ringresonator, oberhalb der kritischen Pumpleistung unter Berücksichtigung der Spiegelrückstreuung untersucht. Dabei haben wir erstmals eine kritische Resonatorverstimmung beobachten können, bei der das System von einem selbstorganisierten Zustand in einen stationären Zustand mit von außen vorgegebener Struktur übergeht. Diesen Phasenübergang haben wir unter dem Stichwort „pinning-transition“ bei Physical Review Letters veröffentlicht

[38] (siehe auch Anhang A). In dieser Arbeit behalte ich die Bezeichnung bei und verwende für das neue Phänomen den Ausdruck „Pinning-Übergang“. Des Weiteren wird ein analytisches Modell vorgestellt, durch welches sich die kritische Verstimmung bestimmen lässt, ab der die dynamische Instabilität von der Spiegelrückstreuung festgepinnt wird. Die Vorhersage des Modelles zur kritischen Verstimmung wird von Messungen bestätigt. In einem experimentell ermittelten Phasendiagramm lassen sich die Parameterbereiche der dynamischen und stationären Phase identifizieren.

Auf die Einleitung in Kapitel 1 folgend werden die theoretischen Grundlagen in Kapitel 2 eingeführt. Nach einer getrennten Betrachtung der Wechselwirkung eines Atoms mit einer ebenen Welle und dem allgemeinen Verhalten von Lichtfeldern im Ringresonator, wird die Wechselwirkung eines einzelnen Atoms mit der Resonatormode betrachtet. Anschließend wird mit der Einführung der CARL-Gleichungen die kollektive Wechselwirkung, welche unter anderem ein Schwellverhalten mit sich bringt, diskutiert. Das neuartige beobachtete stationäre Verhalten des Systems kann nicht mit dem 3-Moden Modell beschrieben werden. Dies gelingt mit der Einführung des 4-Moden Modells, das die Entleerung des Kondensatzustandes berücksichtigt und die Phasengrenze des Pinning-Übergangs als analytischen Ausdruck liefert.

In Kapitel 3 ist der experimentelle Aufbau beschrieben. Die Schwerpunkte dieses Kapitels liegen auf der in dieser Arbeit aufgebauten Experimentsteuerung und der Charakterisierung des Ringresonators.

In Kapitel 4 wird zu Beginn die Messung der Ein-Photon-Lichtverschiebung U_0 behandelt, auf deren Wert die numerischen Berechnungen der CARL-Dynamik basieren. Anschließend wird der Effekt der Spiegelrückstreuung auf die Dynamik des Systems mit zeitlichen Verläufen und Phasendiagrammen gezeigt. Die Messung des Verlaufs der Phasengrenze, wie sie das 4-Moden Modell vorhersagt, bildet den Abschluss.

2 Theoretische Grundlagen

2.1 Einzelnes Atom im Lichtfeld

2.1.1 Semiklassische Behandlung

Um in diesem Kapitel die unterschiedlichen Aspekte der kollektiven Atom-Resonatormoden Dynamik analysieren zu können, wird zunächst die fundamentale Licht-Atom Wechselwirkung diskutiert. In diesem semiklassischen Ansatz wird ein Atom als Zweiniveau-System beschrieben, welches mit der elektrischen Komponente eines klassischen Lichtfelds koppelt.

Der Hamilton-Operator dieses Kopplungsvorgangs setzt sich zusammen aus

$$H = H_0 + H_1(t), \quad (2.1)$$

wobei die zeitabhängige Wechselwirkung in $H_1(t)$, die durch das Lichtfeld ungestörten Energieeigenwerte von H_0 modifiziert [39]. Die Eigenwertgleichungen der ungestörten Zustände sind

$$H_0 |g\rangle = \hbar\omega_g |g\rangle \quad (2.2)$$

$$H_0 |a\rangle = \hbar\omega_a |a\rangle. \quad (2.3)$$

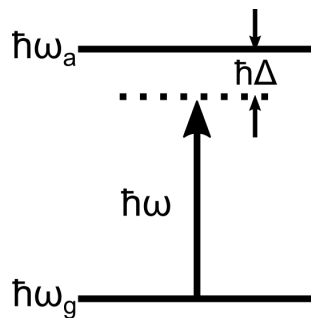


Abbildung 2.1: Energieschema des atomaren Zweiniveausystems.

Die Wirkung des Lichtfelds auf das Atom mischt die ungestörten Zustände miteinander und bewirkt eine lichtgetriebene Dynamik zwischen ihnen. Ist die Wellenlänge des Lichtfelds wesentlich größer als die Abmessungen des erwarteten Aufenthaltsbereichs der atomaren Wellenfunktionen, kann die Amplitude des elektrischen Feldes

über den Aufenthaltsbereich des Atoms als konstant angesehen werden. Für optische Wellenlängen ist diese Bedingung erfüllt und Gleichung (2.1) lässt sich mit dem am Ort des Atoms oszillierenden elektrischen Lichtfeld $\vec{E} = \vec{E}_0(\vec{r}) \cos(\omega_l t)$ in der sogenannten Dipolnäherung

$$H = \begin{pmatrix} \hbar\omega_g & 0 \\ 0 & \hbar\omega_a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} e\vec{r} \cdot \vec{E}_0(\vec{r}) \cos(\vec{r}\vec{k} - \omega_l t) \quad (2.4)$$

schreiben. Hier ist e die Ladung des Elektrons, ω_l die Kreisfrequenz des Lichtfelds und \vec{r} die Position des Elektrons relativ zum Schwerpunkt des Atoms. Der Ansatz der zeitabhängigen Wellenfunktion lautet

$$\Psi(t) = c_g(t) |g\rangle e^{-i\omega_g t} + c_a(t) |a\rangle e^{-i\omega_a t}, \quad (2.5)$$

mit der Normierungsbedingung $|c_g|^2 + |c_a|^2 = 1$. Die zeitliche Dynamik des Zustandes $\Psi(t)$ steckt so in den komplexwertigen Faktoren $c_g(t)$ und $c_a(t)$. Einsetzen von Gleichungen (2.4) und (2.5) in die zeitabhängige Schrödingergleichung

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H\Psi, \quad (2.6)$$

führt auf ein Differentialgleichungssystem für $c_g(t)$ und $c_a(t)$, welches bekannt ist als die optischen Bloch-Gleichungen [39]. Mit diesem lässt sich die Dichtematrix

$$\varrho = |\psi\rangle \langle \psi| \quad (2.7)$$

$$= \begin{pmatrix} |c_g|^2 & c_g c_a^* \\ c_a c_g^* & |c_a|^2 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

$$= \begin{pmatrix} \varrho_{11} & \varrho_{12} \\ \varrho_{21} & \varrho_{22} \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

des Zustandes $|\Psi\rangle$ bestimmen.

Für die Population des Zustandes $|a\rangle$ liefert dieses, unter phänomenologisch motivierter Einführung¹ des Dämpfungsfaktors Γ , die stationäre Lösung

$$|c_a|^2 = \frac{\Omega^2/4}{\Delta_a^2 + \Omega^2/2 + \Gamma^2/4}, \quad (2.10)$$

¹Die semiklassische Herleitung des Dipolmoments enthält keinen Zerfallskanal. Dieser wird in Form der spontanen Zerfallsrate Γ manuell eingefügt. Die Zerfallsrate führt zu dem Zerfall des angeregten Zustandes, zur Dephasierung des Dipolmoments und ermöglicht eine Sättigung des angeregten Zustandes. In der vollen quantenmechanischen Behandlung sind zusätzlich zur mittleren Feldamplitude die Fluktuationen der Lichtfeldmode zu berücksichtigen. Die Vakuumfluktuationen der unbesetzten Lichtmode koppeln an das atomare Dipolmoment und bewirken so den spontanen Zerfall der atomaren Besetzung.

mit der Verstimmung $\Delta_a = \omega_l - \omega_0$ zwischen der atomaren Übergangsfrequenz $\omega_0 = \omega_a - \omega_g$ und der Frequenz des Lichtfelds ω_l . Ebenfalls wird hier die Rabi-Frequenz

$$\Omega = \frac{\langle g | e\vec{r} \cdot \vec{E}_0 | a \rangle}{\hbar} \quad (2.11)$$

$$= \frac{e|E_0|}{\hbar} \langle g | z | a \rangle \quad (2.12)$$

eingeführt. Das Dipol-Übergangsmatrixelement für entlang der Quantisierungsachse in z-Richtung linear polarisiertes Licht wird auch abgekürzt mit $d = -e \langle g | \hat{z} | a \rangle = -ez$. Somit lässt sich das Dipolmoment

$$\chi = d\Omega (\varrho_{12} + \varrho_{21}) \quad (2.13)$$

$$= -ez\Omega [u \cos(\omega_l t) - v \sin(\omega_l t)] \quad (2.14)$$

schreiben, mit

$$u = \frac{4\Delta_a}{4\Delta_a^2 + 2\Omega^2 + \Gamma^2} \quad (2.15)$$

und

$$v = \frac{2\Gamma}{4\Delta_a^2 + 2\Omega^2 + \Gamma^2}. \quad (2.16)$$

Der Dipol der atomaren Ladungsverteilung besitzt in dem externen elektrischen Feld das Potential

$$U(\vec{r}, t) = -\frac{1}{2}\chi E(\vec{r}, t). \quad (2.17)$$

Für eine sich entlang der x -Achse ausbreitende und entlang der z -Achse linear polarisierte Laufwelle ist somit die auf das Atom wirkende Kraft

$$F = -\nabla U(\vec{r}) \quad (2.18)$$

$$= \chi \frac{\partial E(x, t)}{\partial x} \quad (2.19)$$

$$= \chi \frac{\partial}{\partial x} [E_0(x) \cos(kx - \omega_l t)]. \quad (2.20)$$

Mittlung über eine Periode des schnell oszillierenden Lichtfelds liefert² die mittlere, auf ein Atom wirkende Kraft

$$\overline{F}(x) = -\frac{ez}{2}\Omega \left(u \frac{\partial E_0(x)}{\partial x} - v E_0 k \right) \quad (2.21)$$

$$= F_{dip} + F_{sc}. \quad (2.22)$$

Der erste Term in Gleichung (2.21) wird als die Dipolkraft bezeichnet, der zweite Term, proportional zu v , als die Streukraft bzw. Strahlungsdruck [39]. Einsetzen der Definitionen von u , v und Ω liefert

$$F_{sc} = \hbar k \Gamma \frac{\Omega^2/4}{\Delta_a^2 + \Omega^2/2 + \Gamma^2/4}, \quad (2.23)$$

²Unter Verwendung von $\overline{\cos^2} = \overline{\sin^2} = 0.5$ und $\overline{\cos \sin} = 0$.

und

$$F_{dip} = -\hbar \frac{\partial \Omega}{\partial x} \frac{\Delta_a \Omega / 2}{\Delta_a^2 + \Omega^2 / 2 + \Gamma^2 / 4}. \quad (2.24)$$

Durch Vergleich der Gleichungen (2.10) und (2.23) miteinander, ist die Streukraft proportional zur Besetzung des angeregten Zustandes und seiner Zerfallsrate

$$F_{sc} = \hbar k \Gamma \rho_{22}. \quad (2.25)$$

Die Streukraft entsteht somit aus dem spontanen Zerfall des angeregten Zustandes. Sie kann im Photonenbild verstanden werden als die Wirkung des Impulsübertrags $\hbar k$ durch Absorption eines Photons und dem anschließenden spontanen Emissionsprozess. Sie wirkt im Mittel stets in Richtung der Ausbreitungsrichtung des Lichtfelds. Wie [40] zeigt, besitzt die spontane Emission einen kohärenten und einen inkohärenten Anteil. Ihre relative Amplitude hängt ab vom Sättigungsparameter $s = \Omega^2 / (2\Delta_a + \Gamma^2 / 2)$. Für kleine s dominiert die kohärente spontane Emission und für große s die inkohärente. Das bei dem inkohärenten Streuprozess vom Atom abgestrahlte Lichtfeld besitzt keine definierte Phase, und seine mittlere Feldamplitude verschwindet, trotz einer vom Atom in 4π abgestrahlten Leistung von

$$I_{sc} = \hbar \omega_l \Gamma \rho_{22}. \quad (2.26)$$

Die Dipolkraft ist proportional zum Gradient der Lichtfeldamplitude und wechselt ihr Vorzeichen für negative atomare Verstimmung $\Delta_a < 0$. Für ein rot verstimmtes Lichtfeld wirkt die Kraft auf das Atom daher in Richtung größerer Feldamplitude, für blau verstimmtes Licht dagegen in Richtung niedrigerer Feldamplitude. Bei diesem stimulierten Streuprozess emittiert das Atom ein kohärentes Lichtfeld. Dadurch lässt sich beim mit der Dipolkraft verbundenen Streuprozess der atomare Dipol als klassischer, gedämpfter getriebener Harmonischer Oszillator beschreiben, der mit der treibenden Lichtfrequenz oszilliert.

Die relative Abhängigkeit der beiden Kräfte von der atomaren Verstimmung wird ersichtlich aus dem Quotienten

$$\frac{v}{u} = \frac{1}{2} \frac{\Gamma}{\Delta_a}. \quad (2.27)$$

Im Falle von $\Gamma \ll \Delta_a$ dominieren die Dipolkräfte, und der Strahlungsdruck wird vernachlässigbar.

2.1.2 Photonenbild

In der semiklassischen Behandlung ist die Lichtfeldamplitude ein kontinuierlicher Parameter. Im Photonenbild dagegen wird eine Lichtfeldmode mit einzelnen Photonen besetzt. Die Lichtkräfte, welche ein Atom in diesem Bild erfährt, sind das

Resultat der Impulserhaltung der Absorptions- und Emissionsprozesse. Der Strahlungsdruck entsteht durch Absorption und spontane Emission einzelner Photonen, wie Gleichung (2.25) bereits andeutet. Die Dipolkraft kann hier verstanden werden als die aus dem anregenden Feld, durch induzierte Emission kohärent umverteilten Photonenimpulse, die mit dem anregenden Lichtfeld interferieren und so Intensitätsgradienten erzeugen [41].

Die Absorption, sowie die Emission eines Photons ist jeweils mit einem Impulsübertrag auf das Atom von $\hbar k$ verbunden. Wird das Photon in seine Ursprungsrichtung zurück emittiert, so besitzt das Atom wegen der Impulserhaltung nach dem Streuvorgang die kinetische Rückstoßenergie

$$E_r = \frac{(2\hbar k)^2}{2m} \quad (2.28)$$

$$= \hbar\omega_r, \quad (2.29)$$

mit der Rückstoßfrequenz ω_r und m als der Masse des Atoms. Aufgrund der Energieerhaltung fehlt dem umgestreuten Photon die auf das Atom übertragene kinetische Energie, und seine Kreisfrequenz ist daher um ein ω_r rot verschoben.

Die ungerichtete, in alle Raumrichtungen stattfindende, spontane Emission bewirkt im Mittel keine Impulserhöhung des Atoms, sondern eine Erhöhung der mittleren kinetischen Energie [41, 42]. Dies ist gleichzusetzen mit einer Heizrate.

2.2 Optischer Ringresonator

In einem idealen Ringresonator sind beiden Umlaufrichtungen je eine Mode zugeordnet, die entartet und unabhängig voneinander sind. Ein eingekoppeltes Lichtfeld breitet sich wie im freien Raum als Laufwelle aus. Im Gegensatz zu einem Stehwellenresonator wird im idealen Ringresonator keine Phasenreferenz festgelegt. Der ideale Ringresonator vernachlässigt Spiegelrückstreuung, welche vorwärts und rückwärts laufende Moden miteinander koppelt. Die Summe der Streuraten aller einzelner Rückstreuer im Strahlengang ist zusammengefasst in der Rückstreurate U_s , welche die Entartung beider Umlaufrichtungen aufhebt. In Abbildung 2.2 ist die schematische Darstellung eines einseitig gepumpten realen Ringresonators abgebildet.

Das gekoppelte Differentialgleichungssystem (siehe [43]) für die Feldamplituden $a_+(t)$ und $a_-(t)$ der beiden gegenläufigen Moden ist somit

$$\dot{a}_+(t) = (-\kappa + i\Delta_c) a(t)_+ - iU_s a_-(t) + \eta \quad (2.30)$$

$$\dot{a}_-(t) = (-\kappa + i\Delta_c) a(t)_- - iU_s a_+(t), \quad (2.31)$$

mit der Verstimmung zwischen Pumplicht und Resonatorresonanz $\Delta_c = \omega_c - \omega_l$. Über den Felddämpfungsfaktor $r_m = r_1 r_2 r_3$ berechnet sich die Feldzerfallsrate

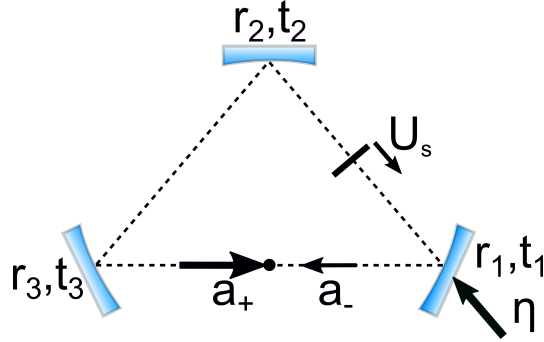


Abbildung 2.2: Schematischer Aufbau eines optischen Ringresonators. Eingezeichnet sind die Pumprate η , die Feldamplituden a_x , die Feldtransmissionen t_x und Feldreflektivitäten r_x der einzelnen Spiegel. Die Summe aller Rückstreuquellen wird zusammengefasst in der Rückstreurrate U_s .

$\kappa = 1/(2T_{res}) = \frac{c}{L}(1 - r_m)$, wobei c die Lichtgeschwindigkeit, T_{res} die Leistungszersfallszeit und L die Umlauflänge des Resonators sind. Ein wichtiger Wert zur Charakterisierung eines Resonators ist die Finesse, die ausgedrückt werden kann durch das Verhältnis aus freiem Spektralbereich $\nu_0 = c/L$ und der vollen Halbwertsbreite des Resonators δ_{FWHM}

$$F = \frac{\nu_0}{\delta_{FWHM}}. \quad (2.32)$$

Für einen Hochfinesse³ Resonator, also kleine Feldverluste mit $r_m \approx 1$, lässt sich die Finesse auch über die Feldzerfallsrate mit $F = c\pi/(L\kappa)$ formulieren. Die allgemeinen Lösungen der Feldamplituden lauten

$$a_+(t) = A_1 e^{(\mathbf{a}+\mathbf{b})t} + A_2 e^{(\mathbf{a}-\mathbf{b})t} + \frac{\mathbf{a}\mathbf{c}}{\mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2} \quad (2.33)$$

$$a_-(t) = A_1 e^{(\mathbf{a}+\mathbf{b})t} - A_2 e^{(\mathbf{a}-\mathbf{b})t} - \frac{\mathbf{b}\mathbf{c}}{\mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2}, \quad (2.34)$$

mit den Substitutionen $\mathbf{a} = i\Delta - \kappa$, $\mathbf{b} = -iU_s$ und $\mathbf{c} = \eta$. Die Konstanten A_1 und A_2 sind durch Startbedingungen festzulegen. Die Zerfallsrate κ bewirkt, dass die zeitabhängigen Terme für große Zeiten t verschwinden, und die Gleichgewichtslösungen sind

$$a_+^{gg} = \frac{\mathbf{a}\mathbf{c}}{\mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2} \quad \text{und} \quad a_-^{gg} = -\frac{\mathbf{b}\mathbf{c}}{\mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2}. \quad (2.35)$$

Ist die Pumprate definiert als

$$\eta = \frac{t_1 a_p}{\tau}, \quad (2.36)$$

³Englisch: „high finesse“ (HF).

also die Feldamplitude des Pumpfelds a_p , die pro Resonatorumlaufzeit $\tau = L/c$ durch t_1 einkoppelt, dann ist unter Vernachlässigung der Spiegelrückstreuung das Verhältnis zwischen der Pumpleistung und der Umlaufleistung im Resonator

$$\frac{|a_+^{gg}|^2}{|a_p|^2} = \left(\frac{\nu_0 t_1}{\kappa^2 + \Delta_c^2} \right)^2. \quad (2.37)$$

2.3 Einzelnes Atom in Resonatormode

Ein einzelnes Atom, platziert im Zentrum der Mode eines Ringresonators, bildet mit dieser ein gekoppeltes System. Die folgende Diskussion folgt im Wesentlichen der Ausführung von [44]. Für kleine Sättigung des angeregten Zustandes, also für große atomare Verstimmung oder kleine Pumpleistung, lässt sich die atomare Oszillation durch die eines Hertzschen Dipols beschreiben.

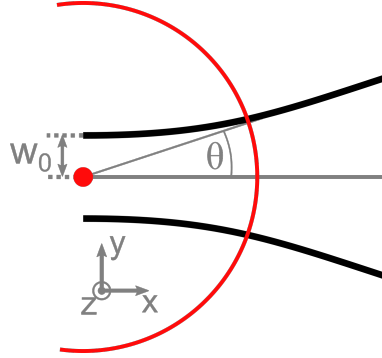


Abbildung 2.3: Ein atomarer Dipol (roter Punkt) im Zentrum einer TEM_{00} -Gaußmode mit Strahlteile w_0 und Öffnungswinkel θ . Ein Teil der aus dieser Ansicht radial emittierten Dipolabstrahlung (rote Linie) koppelt in die Resonatormode (schwarze Linie).

Angenommen, der Dipol befindet sich im Zentrum der TEM_{00} -Gaußmode eines Resonators mit der Feldamplitude a und dem minimalen Strahldurchmesser („beam waist“) w_0 , dann wird vom Dipol das Feld

$$a_M = i\beta a \quad (2.38)$$

$$= \frac{k}{\pi w^2 \varepsilon_0} \alpha a \quad (2.39)$$

zurück in eine Richtung der induzierenden Mode gekoppelt. Hier ist ε_0 die Dielektrizitätskonstante des Vakuums, k die Wellenzahl des anregenden Lichtfelds und α die komplexe Polarisierbarkeit des atomaren Dipols. Die komplexe Polarisierbarkeit (siehe auch [42]) hängt über das komplexe Dipolmoment $p(t) = \alpha E_0 e^{-i\omega t}$ zusammen mit dem oben hergeleiteten Dipolmoment aus Gleichung (2.14) über $\chi = \Re(p)$.

Damit lässt sich der dimensionslose Faktor β in der Drehwellennäherung⁴ („rotating wave approximation“, RWA) von α und für kleine Pumpleistungen⁵ in Abhängigkeit der Koeffizienten u und v als

$$\beta = \frac{3\pi\epsilon_0\Gamma}{k^3} (u + iv) \quad (2.40)$$

ausdrücken. Um zu untersuchen wie das einzelne Atom, unter Vernachlässigung der Spiegelrückstreuung, die Gleichgewichtslösung der Resonatormode modifiziert, wird der Quellterm a_M/τ in die Feldratengleichung (2.33) der Resonatormode eingefügt, und es folgt

$$0 = (-\kappa + i\Delta_c) a + \eta + i\frac{\beta}{\tau} a. \quad (2.41)$$

Im Fall eines ideal impedanzangepassten Resonators, wie der in Abbildung 2.2 dargestellte, entspricht die Leistungstransmission q des Einkoppelspiegels $t_1 = \sqrt{q}$ den Verlusten aller anderen Spiegel, womit sich $r_m = r_1\sqrt{1-q} = 1-q$ schreibt. Des Weiteren gilt für Resonatoren hoher Finesse $\kappa = q/\tau$ und $F = \pi/q = c/(L\delta_{\text{FWHM}})$. Damit ist aus Gleichung (2.41) das Leistungsverhältnis zwischen einkoppelndem Lichtfeld und Resonatormode

$$\left| \frac{a}{a_{\text{in}}} \right|^2 = \frac{(F/\pi)^2}{\left(1 + \frac{\Im(\beta)}{q}\right)^2 + \left(\frac{\Delta_c}{\pi\delta_{\text{FWHM}}} + \frac{\Re(\beta)}{q}\right)^2} \quad (2.42)$$

bestimmbar. Die Resonatorverstimmung ist somit durch ein einzelnes Atom, für große atomare Verstimmung $\Gamma, \Omega \ll \Delta_a$, um

$$\Delta_c^{(\text{max})} = -3 \frac{\nu_0\Gamma}{w_0^2 k^2} \frac{1}{\Delta_a} \quad (2.43)$$

verschoben. Dieser Wert ist in Übereinstimmung mit der Ein-Photon-Lichtverschiebung („single photon shift“)

$$U_0 = \frac{\omega|d|^2}{2\epsilon_0 V} \frac{1}{\Delta_a}, \quad (2.44)$$

dem Vakuumdipolpotential einer laufenden Welle, wobei $V = \frac{\pi}{2} w_0^2 L$ das Modenvolumen der Resonatormode ist [31, 34]. In dieser klassischen Herleitung von U_0 fließt die Resonatormodengeometrie über die Strahltaile („beam waist“) w_0 als rein geometrischer Faktor ein. Je kleiner w_0 , desto größer ist der Strahlöffnungswinkel $\theta = \frac{\lambda}{\pi w_0}$, und desto größer ist der Überlapp zwischen Dipolemissionsfunktion und

⁴ $\Delta_a = \omega - \omega_0 \ll \omega_0$ und damit $\omega_0/\omega \approx 1$.

⁵ $\Omega \ll \Delta_a$

Resonatormode, wodurch mehr vom Dipol emittiertes Feld in den Resonator koppelt [45]. Für große atomare Verstimmung hat das Atom eine rein dispersive Wirkung auf das anregende Lichtfeld. Licht, das vom Atom in Vorwärtsrichtung gestreut wird, ist mit keinem Impulsübertrag verbunden, sondern bewirkt einen Phasenschub. Der Resonator scheint länger oder kürzer, je nach über Δ_a eingestelltem Vorzeichen von U_0 .

2.4 CARL

Der kollektive atomare Rückstoßlaser (CARL) ist ein kollektives Streuphänomen vieler kalter Atome, die durch einen Zweiphotonen Übergang (Ramanstreuung) die Mode eines Laserstrahls mit der Mode eines Ringresonators durch Umstreuung koppeln [13].

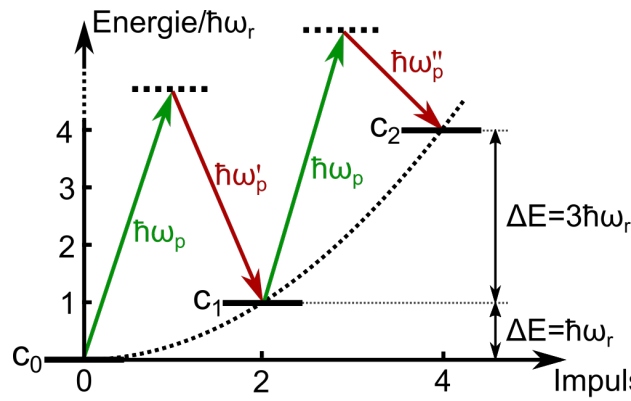


Abbildung 2.4: Thermisches Schema des resonatorunterstützten Zwei-Photonen Raman-Übergangs zwischen Impulszuständen $n = 0, 1, 2$. Das Pumplicht mit Frequenz ω_p streut an einem ruhenden Atom. Aufgrund der Energieerhaltung sind die gestreuten Lichtfelder mit den Frequenzen ω'_p und ω''_p relativ zum Pumplicht rotverschoben.

Es kommt bei Überschreitung einer kritischen Pumpleistung zur Selbstverstärkung der Umstreuung in die Resonatormode. Aufgrund des beim Streuvorgang übertragenen Impulses wird der Schwerpunkt der atomaren Verteilung beschleunigt. Dies äußert sich im Impulsbild durch einen Transfer der Atompopulation zu höheren Impulszuständen.

Unterhalb der kritischen Pumpleistung emittieren die einzelnen Atome unabhängig voneinander. Der Purcell-Faktor beschreibt wie stark sich die Emission eines sich in einem Resonator befindenden Atoms erhöht. Seine Ursache liegt in den durch den Resonator modifizierten Randbedingungen des Vakuums [46]. Für Resonatoren mit großer Strahltaile ist der Purcell-Faktor jedoch vernachlässigbar. In diesem Fall ist eine Positionsänderung der einzelnen Streuzentren für die erhöhte Umstreuung in

die Resonatormode verantwortlich, bei der sich die Atome durch die Wechselwirkung mit einem entstehenden optischen Dipolpotential selbstorganisiert zu einem Bragg-Gitter anordnen. Die Resonatormode ermöglicht hier die langreichweitige Wechselwirkung zwischen allen Atomen und dadurch die Synchronisation ihrer Bewegungen.

Die kollektive Dynamik dieses gekoppelten Systems aus Atomen und Resonatormode kann mit den CARL Gleichungen beschrieben werden, deren Herleitung im Nachfolgenden Abschnitt behandelt wird.

2.5 N Atome in Resonatormode - CARL Gleichungen

Die mathematische Analyse der kollektiven Streudynamik von N -Atomen in einem Ringresonator basiert in dieser Arbeit auf einem rein klassischen Differentialgleichungssystem, den CARL-Gleichungen, welches die zeitliche Dynamik der Resonatorfelder und einer Wolke kalter Atome miteinander verbindet. Die Herleitung dieses Gleichungssystems wurde in vorhergehenden Arbeiten ausführlich diskutiert und wird daher nur grob skizziert [31, 34].

Der Hamiltonoperator des vollständigen Systems setzt sich zusammen aus drei Termen

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{\text{int}} + \hat{H}_{\text{rs}}, \quad (2.45)$$

mit

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2m} \sum_{j=1}^N \hat{p}_j^2 + \hbar \Delta_c \left(\hat{a}_-^\dagger \hat{a}_- + \hat{a}_+^\dagger \hat{a}_+ \right), \quad (2.46)$$

$$\hat{H}_{\text{int}} = \hbar U_0 \sum_{j=1}^N \left(\hat{a}_-^\dagger \hat{a}_+ e^{-2ik\hat{x}_j} + \hat{a}_- \hat{a}_+^\dagger e^{2ik\hat{x}_j} \right), \quad (2.47)$$

und

$$\hat{H}_{\text{rs}} = \hbar U_s \left(\hat{a}_+ \hat{a}_-^\dagger e^{-2ik\hat{x}_s} + \hat{a}_+^\dagger \hat{a}_- e^{2ik\hat{x}_s} \right). \quad (2.48)$$

\hat{H}_0 berechnet die totale kinetische Energie über den Impulsoperator \hat{p}_j aller N Atome mit der Masse m , sowie die Energie der Lichtfelder der zwei gegenläufigen Resonatormoden. Hier sind aus den Auf- und Absteigeoperatoren der vorwärts laufenden Pumpmode \hat{a}_+^\dagger und \hat{a}_+ sowie der rückwärts laufenden Analysemode \hat{a}_-^\dagger und \hat{a}_- jeweils die Photonenbesetzungen bestimmt. Als Energieskala, auf der die Resonatorodynamik stattfindet, ist die Energiedifferenz zwischen der Resonanzfrequenz des Resonators ω_c und Pumplichtfrequenz ω_1 über die Verstimmung mit $\Delta_c = \omega_c - \omega_1$ festgelegt.

Die gegenläufigen Lichtmoden sind durch die Atome in \hat{H}_{int} gekoppelt, indem ein Photon in der jeweiligen Mode vernichtet und in der gegenläufigen Mode erzeugt wird. Der letzte Term berücksichtigt die Spiegelrückstreuung, der die gegenläufigen

Moden koppelt. Bei diesem Streuvorgang bleibt der Photonenimpuls erhalten, und das umgestreute Lichtfeld erfährt keine Rotverschiebung. Die Rückstreuung der drei einzelnen Spiegel ist zusammengefasst in einem effektiven Streuer an der Position \hat{x}_s mit der Streurrate U_s [47].

In der zu untersuchenden Dynamik spielen nur Streuereignisse von Photonen an Atomen entlang der Resonatormode eine Rolle, wodurch der atomare Impuls nur ganze Vielfache des Photonenimpulses annehmen kann. Aus dieser Überlegung heraus ist die atomare Wellenfunktion

$$\Phi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2inkx} \quad (2.49)$$

als Linearkombination aller möglichen Impulszustände n mit den jeweiligen Fourier-Koeffizienten c_n angesetzt. Einsetzen von Φ in die Schrödingergleichung $i\hbar \frac{d}{dt} \Phi = \hat{H} \Phi$ liefert die zeitliche Entwicklung der einzelnen Koeffizienten c_n . Die zeitliche Dynamik der Lichtfelder ist durch die Heisenbergsche Bewegungsgleichung $i\hbar \frac{d}{dt} \hat{a} = [\hat{a}, \hat{H}]$ beschrieben.

Für große Atom- und Photonenzahlen ist der Einfluss der Quantenfluktuationen auf die Dynamik des Systems vernachlässigbar. In diesem Fall können die Operatoren in der sogenannten “mean-field Näherung” durch ihre Erwartungswerte, wie $\hat{a} \rightarrow a$, ersetzt werden. Daraus ergeben sich die CARL-Gleichungen

$$\dot{c}_n = -in^2 \omega_r c_n - iU_0 (c_{n-1} a_+ a_-^* + c_{n+1} a_- a_+^*) \quad (2.50a)$$

$$\dot{a}_+ = i(-\Delta_c - U_0 N) a_+ - iU_0 a_- \sum_n c_n^* c_{n+1} - iU_s a_- + \eta \quad (2.50b)$$

$$\dot{a}_- = i(-\Delta_c - U_0 N) a_- - iU_0 a_+ \sum_n c_n^* c_{n-1} - iU_s a_+, \quad (2.50c)$$

welche das gekoppelte Bewegungsgleichungssystem der Resonatorfelder und der atomaren Impulszustände darstellen.

2.6 3-Moden Modell

Die Dynamik der CARL-Gleichungen lässt sich durch numerische Berechnung für beliebige Parameter untersuchen. Eine volle analytische Lösung zu finden, gestaltet sich aufgrund ihrer Nichtlinearität als schwierig. Um das Schwellverhalten in die dynamische CARL-Phase zu untersuchen, ist eine sinnvolle Näherung in dem 3-Moden Modell zu finden [48]. In ihm werden die CARL-Gleichungen auf drei dynamische Variablen reduziert. Es wird davon ausgegangen, dass sich alle Atome im n -ten Impulszustand befinden und der Zustand seine Besetzung nicht ändert ($\dot{c}_n = 0$), alle Impulszustände bis auf die Benachbarten vernachlässigbar sind und

die Besetzung der Pumpmode ein einstellbarer Parameter ist. Damit vereinfacht sich das Gleichungssystem (2.50) zu

$$\dot{c}_{n+1} = -i(n+1)^2\omega_r c_{n+1} - iU_0 c_n a_+ a_-^* \quad (2.51a)$$

$$\dot{c}_{n-1} = -i(n-1)^2\omega_r c_{n-1} - iU_0 c_n a_+ a_- \quad (2.51b)$$

$$\dot{a}_- = -i\Delta_c a_- - iU_0 c_n a_+ (c_{n-1} + c_{n+1}^*). \quad (2.51c)$$

Durch Definition der Kopplungsstärke

$$K = \frac{U_0 c_n a_+}{\omega_r} \quad (2.52)$$

und der relativen Verstimmung $\tilde{\Delta}_c = \Delta_c/\omega_r$ lässt sich das Gleichungssystem 2.51 umschreiben in die Matrixform

$$i\hbar \begin{pmatrix} \dot{c}_{n-1} \\ \dot{a} \\ \dot{c}_{n+1} \end{pmatrix} = \hbar\omega_r \begin{pmatrix} (n-1)^2 & K & 0 \\ K & \tilde{\Delta}_c & K \\ 0 & K & (n+1)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{n-1} \\ a \\ c_{n+1} \end{pmatrix}. \quad (2.53)$$

Die Feldamplitude der Testmode wird ab hier ohne Index mit a beschrieben. Aufgrund der gemachten Annahmen beschreibt die Schrödingergleichung (2.53) das System, solange die benachbarten Impulszustände im Mittel unbesetzt sind. Wie [34] zeigt ist diese Bedingung erfüllt, solange die Eigenwerte der Matrix in Gleichung (2.53) realwertig bleiben.

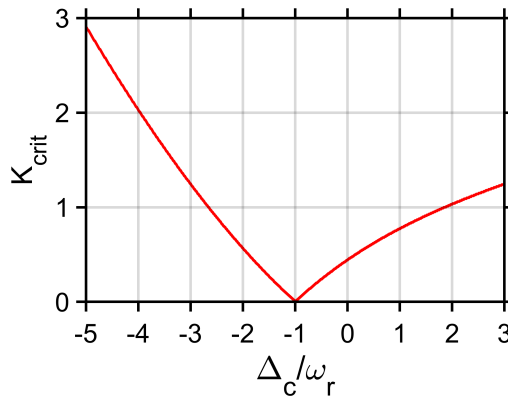


Abbildung 2.5: Verlauf der kritischen Kopplungsstärke in Abhängigkeit der Verstimmung Δ_c/ω_r für $n = 0$.

Wenn K einen kritischen Wert K_{crit} überschreitet, können die Eigenwerte ϵ_x Imaginärteile ungleich null enthalten. K_{crit} stellt also den Wert der kritischen Pumpleistung dar, bei der die im 3-Moden Modell gemachten Näherungen versagen und

die Schwelle zum selbstorganisierten CARL-Prozess überschritten wird. Abbildung 2.5 zeigt den Verlauf von K_{crit} in Abhängigkeit der Verstimmung $\tilde{\Delta}_c$. Die kleinste kritische Pumpleistung ist demnach bei $\tilde{\Delta}_c = -1$ zu erwarten. Des Weiteren ist der asymmetrische Verlauf von K_{crit} zu bemerken. In Abbildung 2.6a und 2.6b sind für eine fixe Verstimmung $\tilde{\Delta}_c$ die Verläufe der Real- und Imaginärteile ihrer Eigenwerte in Abhängigkeit der Kopplungsstärke K dargestellt. Die Asymmetrie der

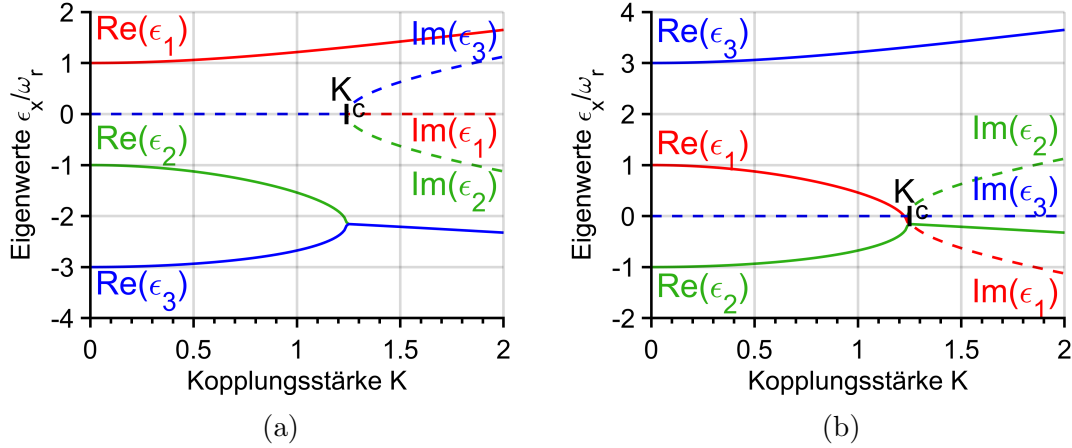


Abbildung 2.6: Verlauf der Real- und Imaginärteile der Eigenwerte ϵ_x der Matrix aus Gleichung 2.53, in (a) für $\tilde{\Delta}_c = -3$ und in (b) für $\tilde{\Delta}_c = 3$, in Abhängigkeit der Kopplungsstärke K und für $n = 0$.

CARL-Schwelle wurde ausführlich in [34] für ein BEC und in [35] für thermische Atome im Ringresoantor beschrieben. Die Realteile der Eigenwerte entsprechen der Frequenz mit der sich die zugehörigen Eigenvektoren entwickeln. Bei $K = 0$ besitzen die Eigenwerte die Energien des ungekoppelten Systems. In diesem Fall entspricht $Re(\epsilon_1)$ der Energie des $n = -1$ Impulszustandes, $Re(\epsilon_2)$ der Energie des $n = 1$ Impulszustandes und $Re(\epsilon_3)$ der Energie des Lichtfelds die durch die Verstimmung $\tilde{\Delta}_c$ gegeben ist. Die Verläufe der Eigenwerte für steigende Kopplungsstärke K spiegeln die Kopplung zwischen zugehörigen Eigenvektoren wider [34]. Für negative Verstimmung (siehe Abbildung 2.6a) koppelt das Lichtfeld mit dem $n = 1$ Zustand, und für positive Verstimmung (siehe Abbildung 2.6b) koppeln die $n = \pm$ Impulszustände miteinander. Da für negative Verstimmung die Energie des Lichtfelds größer wird, sind hier die Realteile von ϵ_2 und ϵ_3 beim Erreichen von K_{crit} größer als die Realteile der koppelnden Eigenwerte für positive Verstimmung. Das 3-Moden Modell sagt hier für negative Verstimmung, an der Schwelle, eine schnellere Entwicklungsgeschwindigkeit des Systems voraus als für positive Verstimmungen. Für große positive Verstimmung verschwinden die Realteile der Eigenwerte von ϵ_2 und ϵ_3 sogar.

Dieser Unterschied des Schwellenverhaltens zwischen negativer und positiver Verstimmung

mung kommt in Kapitel 4 bei der Interpretation der unterschiedlichen Dynamiken zu tragen.

2.7 4-Moden Modell

Um Erkenntnisse über das Verhalten des Systems über das reine Schwellverhalten der CARL-Dynamik hinaus zu gewinnen, ist es nötig die Entleerung des Kondensatzustandes zu berücksichtigen. Somit erhält man aus den CARL-Gleichungen (2.50) das Bewegungsgleichungssystem des 4-Moden Modells

$$\dot{c}_{-1} = -i\omega_1 c_{-1} - i\sigma c_0 a_- \quad (2.54a)$$

$$\dot{c}_0 = -i\sigma (c_{-1} a_-^* + c_1 a_-) \quad (2.54b)$$

$$\dot{c}_1 = -i\omega_1 c_1 - i\sigma c_0 a_-^* \quad (2.54c)$$

$$\dot{a}_- = -i\Delta a_- - i\sigma (b + V), \quad (2.54d)$$

mit den Substitutionen

$$\sigma = U_0 a_+, \quad (2.55)$$

$$\Delta = \Delta_{\text{eff}} - i\kappa, \quad (2.56)$$

$$\Delta_{\text{eff}} = \Delta_c + U_0 N, \quad (2.57)$$

$$V = \frac{U_s a_+}{\sigma} \quad (2.58)$$

und

$$b = c_0^* c_{-1} + c_1^* c_0. \quad (2.59)$$

Hier wird die Verstimmung Δ_c um den Imaginärteil κ erweitert, wodurch die Resonatorverluste in das 4-Moden Modell eingeführt werden. Durch die Zerfallsrate κ der Resonatorfelder koppelt das System an die Umgebung und ermöglicht Gleichgewichtsbesetzungen der Resonatormoden. Δ_{eff} entspricht der effektiven Verstimmung.

2.7.1 Materiezustände

Eine Koeffizientenmatrix für alle 4 Gleichungen, wie in Abschnitt 2.53, ist aufgrund der Nichtlinearität der Lichtfeldgleichung (2.54d) nicht aufstellbar, da nun auch c_0 eine dynamische Variable ist. Um die Dynamik dieses Gleichungssystems zu analysieren, behandeln wir die linearen Materiefeldgleichungen und die nichtlineare

Lichtfeldgleichung zunächst getrennt [25]. Dazu wird zunächst in den drei Materiefeldgleichungen das Feld der Analysemode a als freier Parameter beschrieben. Aus den drei Materiefeldgleichungen lässt sich so die Koeffizientenmatrix

$$M = \begin{pmatrix} \omega_r & \sigma a & 0 \\ \sigma a^* & 0 & \sigma a \\ 0 & \sigma a^* & \omega_r \end{pmatrix} \quad (2.60)$$

bilden, mit dem Materiefeldvektor

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} c_{n-1} \\ c_0 \\ c_{n+1} \end{pmatrix}. \quad (2.61)$$

Die Eigenlösungen $\vec{c}_j = e^{-i\varepsilon_j t} \vec{\psi}_j$, mit $j \in \{1,2,3\}$, erfüllen die Schrödingergleichung

$$i\hbar \dot{\vec{c}}_j = \hbar M \vec{c}_j, \quad (2.62)$$

wobei ψ_j die zugehörigen Eigenzustände und ε_j deren Eigenwerte darstellen. Mit dem Feld der Analysemode in Polarkoordinaten $a = |a|e^{i\alpha}$ ist die Intensität $I = aa^*$. Die gleiche Schreibweise gilt für den Strukturfaktor mit $b = |b|e^{i\beta}$. Ab hier ist α die Phase des Felds der Analysemode und β die Phase des Strukturfaktors. Für Pumplicht, welches rotverstimmt ist zum atomaren Übergang, ist U_0 negativ. Hierdurch erhält auch σ ein negatives Vorzeichen, also $\sigma = -|\sigma|$. Die Eigenzustände von M lauten somit

$$\vec{\psi}_1 = \sqrt{\frac{N}{2 + \frac{\varepsilon_2^2}{I\sigma^2}}} \begin{pmatrix} e^{2i\alpha} \\ \frac{e^{i\alpha}}{|\sigma|\sqrt{I}}\varepsilon_2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.63)$$

$$\vec{\psi}_2 = \sqrt{\frac{N}{2 + \frac{\varepsilon_1^2}{I\sigma^2}}} \begin{pmatrix} e^{2i\alpha} \\ -\frac{e^{i\alpha}}{|\sigma|\sqrt{I}}\varepsilon_1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.64)$$

und

$$\vec{\psi}_3 = \sqrt{\frac{N}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.65)$$

Die zugehörigen Eigenwerte sind

$$\varepsilon_1 = \frac{\omega_r}{2} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{8I\sigma^2}{\omega_r^2}} \right), \quad \varepsilon_2 = \frac{\omega_r}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{8I\sigma^2}{\omega_r^2}} \right) \quad \text{und} \quad \varepsilon_3 = \omega_r. \quad (2.66)$$

Die Besetzungskonfiguration der einzelnen Impulszustände des j -ten Eigenzustandes erhält man durch Projektion auf die Basis der Impulszustände mit

$$|c_{-1}^{(j)}|^2 = \left| \vec{\psi}_j \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right|^2, \quad |c_0^{(j)}|^2 = \left| \vec{\psi}_j \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right|^2 \quad \text{und} \quad |c_1^{(j)}|^2 = \left| \vec{\psi}_j \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|^2. \quad (2.67)$$

Daraus folgt, mit den Definitionen der Sättigungsintensität $I_{\text{sat}} = \omega_r^2/(8\sigma^2)$ und der relativen Intensität $\tilde{I} = I/I_{\text{sat}}$, die Besetzung der Impulszustände

$$\psi_1 : \quad |c_{\pm 1}^{(j)}|^2 = \frac{N}{4} \frac{\tilde{I}}{1 + \tilde{I} + \sqrt{1 + \tilde{I}}}, \quad |c_0^{(j)}|^2 = 1 - \frac{N}{2} \frac{\tilde{I}}{1 + \tilde{I} + \sqrt{1 + \tilde{I}}} \quad (2.68)$$

$$\psi_2 : \quad |c_{\pm 1}^{(j)}|^2 = \frac{N}{4} \frac{\tilde{I}}{1 + \tilde{I} - \sqrt{1 + \tilde{I}}}, \quad |c_0^{(j)}|^2 = 1 - \frac{N}{2} \frac{\tilde{I}}{1 + \tilde{I} - \sqrt{1 + \tilde{I}}} \quad (2.69)$$

$$\psi_3 : \quad |c_{\pm 1}^{(j)}|^2 = \frac{N}{2}, \quad |c_0^{(j)}|^2 = 0. \quad (2.70)$$

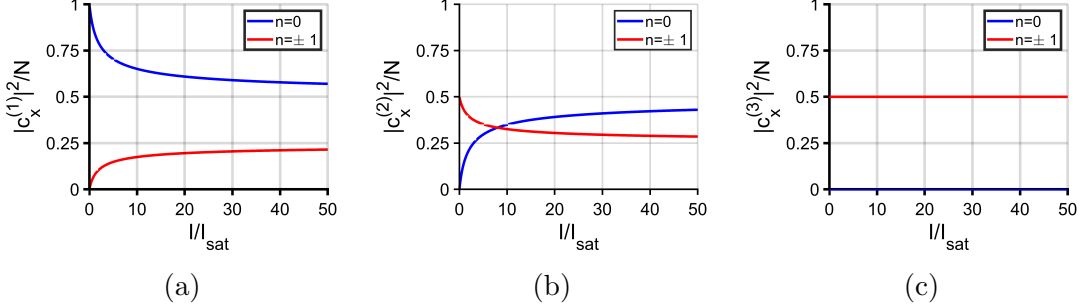


Abbildung 2.7: Besetzung des Kondensatzustandes c_0 (blau) und der $c_{\pm 1}$ Zustände (rot) in Abhängigkeit der relativen Intensität \tilde{I} für die drei Materie-Eigenzustände der Koeffizientenmatrix (2.60). (a) zeigt die Besetzung für ψ_1 , (b) für ψ_2 und (c) für ψ_3 .

Abbildung 2.7 zeigt den Verlauf der Impulszustandesbesetzung für alle 3 Eigenzustände. Der Kondensatzustand c_0 ist blau, die symmetrische Besetzung der benachbarten c_{-1} und c_1 Zustände rot dargestellt.

Für Zustand ψ_1 ist das Kondensat bei $\tilde{I} = 0$ voll besetzt. Im Grenzwert für große Intensitäten gilt $\lim_{\tilde{I} \rightarrow \infty} |c_{\pm 1}^{(1)}|^2 = N/4$ und $\lim_{\tilde{I} \rightarrow \infty} |c_0^{(1)}|^2 = N/2$.

Zustand ψ_2 dagegen ist bei $\tilde{I} = 0$ nicht definiert. Über den Satz von L'Hospital

lässt sich der Grenzwert der Besetzungen für $\tilde{I} = 0$ dennoch zu

$$\begin{aligned}
 \lim_{\tilde{I} \rightarrow 0} |c_{\pm 1}^{(2)}|^2 &= \lim_{\tilde{I} \rightarrow 0} \frac{N}{4} \frac{\tilde{I}}{1 + \tilde{I} - \sqrt{1 + \tilde{I}}} \\
 &= \lim_{\tilde{I} \rightarrow 0} \frac{N}{4} \frac{1}{1 - \frac{1}{2\sqrt{1 + \tilde{I}}}} \\
 &= \frac{N}{2}
 \end{aligned} \tag{2.71}$$

bestimmen. Für große Intensitäten streben die Besetzungen der Impulszustände die gleichen Grenzwerte an wie in ψ_1 .

In Zustand ψ_3 sind die beiden höheren Impulszustände für alle Intensitäten gleich mit $N/2$ besetzt. Es findet keine Kopplung mit dem Lichtfeld statt.

Diese drei Eigenlösungen stellen die Basis dar, in der sich die allgemeine Dynamik des Materiefelds für ein gegebenes Lichtfeld a beschreiben lässt. Geht man allerdings davon aus, dass das System seine Entwicklung immer mit $\tilde{I} = 0$ beginnt und der Kondensatzustand c_0 voll besetzt ist, bleibt als Startzustand nur \vec{c}_1 , da er als Einziger die Besetzungsbedingung erfüllt und \vec{c}_2 nicht definiert ist bei $\tilde{I} = 0$. Für adiabatische Änderungen des Lichtfelds, relativ zu $T = 2\pi/\varepsilon_1$, findet keine Mischung der Eigenlösungen statt und das System verbleibt im Zuge der Dynamik in seinem Startzustand. Aus diesem Grund beschränkt sich die Analyse der Gleichgewichtszustände und ihrer Stabilität ab Abschnitt 2.7.4 nur auf Eigenlösung \vec{c}_1 .

2.7.2 Strukturfaktor

Gleichung (2.54d) beschreibt die Dynamik der Analysemode im 4-Moden Modell. Sie wird zum einen von den Verlusten und der Verstimmung des Resonators bestimmt, zum anderen von der Spiegelrückstreuung V und dem Strukturfaktor b . Der Strukturfaktor $b = c_0^* c_{-1} + c_1^* c_0$ setzt sich zusammen aus den Einträgen der Eigenlösungen $\vec{c}_j = e^{-i\varepsilon_j t} \psi_j$. Über ihn koppelt das Lichtfeld an die Atome. Für die Eigenlösung mit $j = 1$ ist der Strukturfaktor

$$\begin{aligned}
 b_1 &= c_0^{(1)*} c_{-1}^{(1)} + c_1^{(1)*} c_0^{(1)} \\
 &= 2 \frac{I \sigma^2 N}{2I \sigma^2 + \varepsilon_2^2} \frac{e^{i\alpha}}{|\sigma| \sqrt{1 + \tilde{I}}} \varepsilon_2 \\
 &= \sqrt{\frac{\tilde{I}}{2(1 + \tilde{I})}} N e^{i\alpha}.
 \end{aligned} \tag{2.72}$$

Für $j = 2$ ist der Strukturfaktor bis auf das Vorzeichen identisch mit dem der ersten Lösung

$$\begin{aligned} b_2 &= -2 \frac{I\sigma^2 N}{2I\sigma^2 + \varepsilon_1^2 |\sigma| \sqrt{I}} \frac{e^{i\alpha}}{\varepsilon_1} \\ &= - \sqrt{\frac{\tilde{I}}{2(1 + \tilde{I})}} N e^{i\alpha}. \end{aligned} \quad (2.73)$$

Für $j = 3$ verschwindet der Strukturfaktor

$$b_3 = 0. \quad (2.74)$$

Dies deckt sich mit dem Ergebnis der Besetzungen der Impulszustände für ψ_3 im vorhergehenden Abschnitt, dass der dritte Eigenzustand nicht mit der Analysemode wechselwirkt.

2.7.3 Phasenbedingung

Durch den Strukturfaktor b_1 können die Phasen von a und b_1 miteinander in Beziehung gesetzt werden. Die Phase des vom Materiefeld-Strukturfaktor b_1 erzeugten Testmodenfeldes wird hier α_m bezeichnet. Für den Betrag von b_1 gilt

$$|b_1| = \sqrt{\frac{\tilde{I}}{2(1 + \tilde{I})}} N e^{i(\alpha_m - \beta)}. \quad (2.75)$$

Durch die positive Definitheit von $|b_1|$ müssen die Phasen $e^{i(\alpha_m - \beta)} = 1$ erfüllen, es gilt also

$$\alpha_m - \beta = 2\pi n, \quad \text{mit } n \in \mathbb{N}. \quad (2.76)$$

2.7.4 Analysemode mit Gleichgewichtsbedingung

Analog zum Vorgehen für die Materiefeldgleichungen wird in Gleichung (2.54d) für die Analysemode nun der Strukturfaktor b als einstellbarer Parameter betrachtet. Da es von Interesse ist, die Gleichgewichtszustände des Systems zu identifizieren, wird zusätzlich die Bedingung $\dot{a} = 0$ an das Lichtfeld gestellt, wodurch aus

$$\begin{aligned} \dot{a} &= -i\Delta a - i\sigma(b + V) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.77)$$

$$(2.78)$$

die Gleichgewichtslösung für das Lichtfeld

$$a_g = -\frac{\sigma}{\Delta}(b + V) \quad (2.79)$$

folgt. Durch Verwendung der komplexen Größen $a_g = |a_g|e^{i\alpha_g}$ und $\Delta = |\Delta|e^{i\delta}$, mit $\delta = \arctan(-\kappa/\Delta_{\text{eff}})$, lässt sich Gleichung (2.79)

$$\frac{|a_g||\Delta|}{|\sigma|}e^{i(\alpha_g-\delta)} = |b|e^{i\beta} + V \quad (2.80)$$

schreiben.

2.7.5 Umskalierung der Strukturfaktoren

In Gleichung (2.72) wurde der Strukturfaktor für ein beliebiges a aus den Lösungen der Materiefeldgleichungen berechnet. Gleichung (2.80) dagegen stellt über die Gleichgewichtsbedingung an das Lichtfeld einen Zusammenhang zwischen a_g und b her. Um beide Gleichungen in eine kompaktere Form zu bringen, verwenden wir die skalierten Größen

$$A := \frac{|\Delta||a|}{2N|\sigma|} \quad (2.81)$$

$$A_{\text{sat}} := \frac{1}{2\sqrt{8}} \frac{|\Delta|\omega_r}{N|\sigma|} \quad (2.82)$$

$$B := \frac{|b|}{2N} \quad (2.83)$$

$$R := \frac{V}{2N}. \quad (2.84)$$

Damit findet sich für Gleichung (2.80) des Gleichgewichtsfelds, unter Verwendung der Phasenbedingung (2.76), die Form

$$R = A_g e^{i\alpha_g} e^{i\delta} - B e^{i\beta} \quad (2.85)$$

$$\begin{aligned} R^2 &= |A_g e^{i\alpha_g} e^{i\delta} - B e^{i\beta}|^2 \\ &= A_g^2 + B^2 - 2A_g B \cos \delta \end{aligned} \quad (2.86)$$

und der neue Ausdruck für den Gleichgewichts-Strukturfaktor ist

$$B_{\pm} = A_g \cos \delta \pm R \sqrt{\left(\frac{A_g}{R}\right)^2 (\cos^2 \delta - 1) + 1}. \quad (2.87)$$

Damit B_{\pm} nicht komplexwertig wird, muss der Ausdruck unter der Wurzel von Gleichung (2.87) positiv bleiben.

$$A_g^{\text{max}} = R \sqrt{\frac{1}{1 - \cos^2 \delta}} \quad (2.88)$$

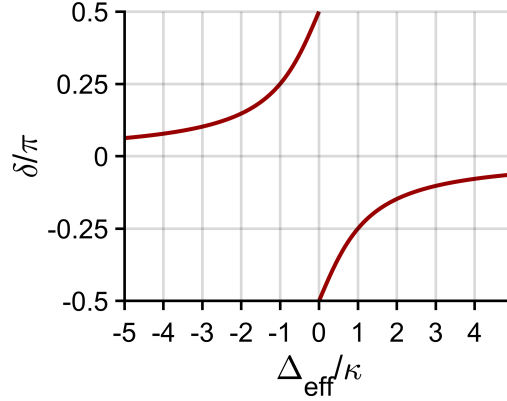


Abbildung 2.8: Verlauf von δ in Abhängigkeit der effektiven Verstimmung Δ_{eff} .

ist das maximale Gleichgewichtsfeld, für welches noch eine reelle Lösung von B_{\pm} existiert. Für gegebenes R wird A_g^{max} nur noch von δ bestimmt. Abbildung 2.8 zeigt den Verlauf von δ in Abhängigkeit der effektiven Verstimmung Δ_{eff} . Für kleine Verstimmungen ist $\delta \approx \pm\pi/2$ und verschwindet für große Verstimmungen, also $\delta \rightarrow 0$.

Im Grenzfall kleiner δ erhalten wir ein großes A_g^{max} :

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} A_g^{\text{max}} = \infty \quad (2.89)$$

In diesem Grenzwert entsprechen die beiden Funktionen B_{\pm} Geraden der Form

$$\delta = 0 : \quad B_{\pm} = A \pm R. \quad (2.90)$$

Für kleine Resonatorverstimmungen erhalten wir für B_{\pm} zwei Kreisfunktionen mit Radius R :

$$\delta \approx \pm\pi/2 : \quad B_{\pm} = \pm\sqrt{R^2 - A^2} \quad (2.91)$$

Abbildung 2.9a zeigt den Verlauf von B_{\pm} für verschiedene Werte von Δ_{eff} .

Mit den oben eingeführten Größen A und A_{sat} lässt sich der aus den Eigenlösungen der Materiefeldgleichungen berechnete Strukturfaktor b_1 aus Gleichung (2.72) in den Materiefeld-Strukturfaktor

$$B_m = \frac{A/A_{\text{sat}}}{\sqrt{8 [1 + (A/A_{\text{sat}})^2]}} \quad (2.92)$$

umformen. Abbildung 2.9b zeigt den Verlauf von B_m für verschiedene A_{sat} .

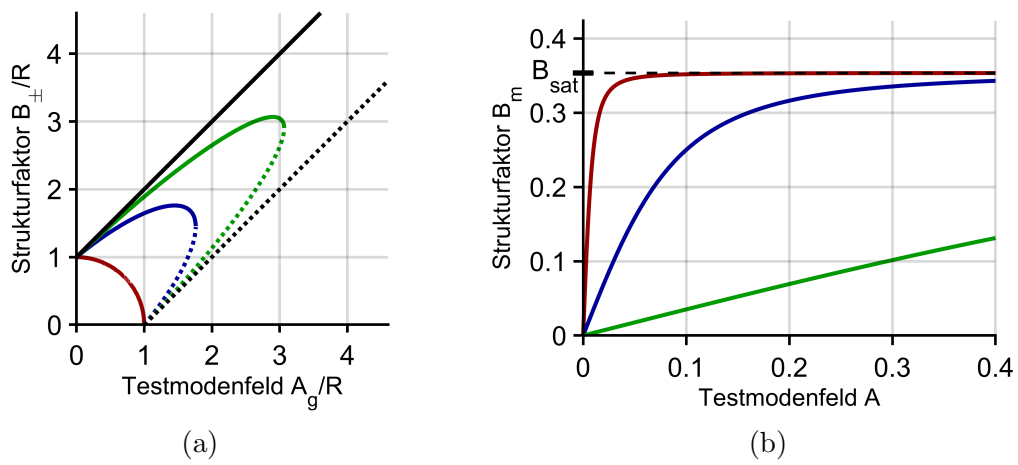


Abbildung 2.9: (a) Verlauf von B_{\pm} für $\Delta_{\text{eff}} = 0$ (rot), $\Delta_{\text{eff}} = 0.5\omega_r$ (blau), $\Delta_{\text{eff}} = 1\omega_r$ (grün) und $\Delta_{\text{eff}} = 20\omega_r$ (schwarz). Die durchgezogene Linie zeigt den Verlauf von B_+ und die gepunktete den Verlauf von B_- . Die Achsen sind auf das jeweilige R skaliert. (b) Verlauf von B_m für $A_{\text{sat}} = 10^{-2}$ (rot), $A_{\text{sat}} = 10^{-1}$ (blau) und $A_{\text{sat}} = 1$ (grün). Für $A_{\text{sat}} \ll A$ geht der Materiefeld-Strukturfaktor B_m gegen den Sättigungswert $B_{\text{sat}} = 1/\sqrt{8}$.

2.7.6 Gleichgewichtskonfigurationen der Amplituden von Strukturfaktor und Testmodenfeld

Werden beide Ausdrücke für den Strukturfaktor, wie in Abbildung 2.10, in einem Diagramm dargestellt, gibt es bis zu drei Schnittpunkte zwischen ihnen. Ein Gleichgewichtszustand muss sowohl Gleichung (2.92) als auch Gleichung (2.87) erfüllen. Die Schnittpunkte stellen also mögliche Gleichgewichtskonfigurationen des Strukturfaktors und des Testmodenfeldes dar. Zur Analyse der Stabilität eines Schnitt-

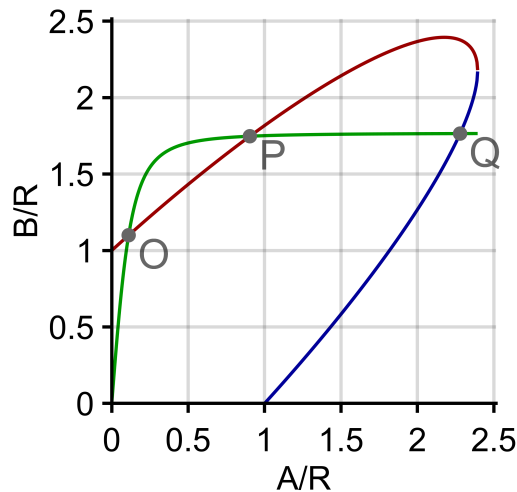


Abbildung 2.10: Schnittpunkte O, P und Q zwischen B_m (grün), B_+ (rot) und B_- (blau).

punktes (A_s, B_s) wird eine ausreichend kleine Umgebung um den Schnittpunkt gewählt, damit sich B_m und B_{\pm} in 1. Ordnung der Taylorentwicklung als

$$B_{\pm}(A) = m_g(A - A_s) + B_s \quad (2.93)$$

und

$$B_m(A) = m(A - A_s) + B_s \quad (2.94)$$

darstellen lassen, mit $m = B'_m(A_s)$ und $m_g = B'_{\pm}(A_s)$. In dieser in Abbildung 2.11 dargestellten Umgebung wird ein zufälliges Testmodenfeld $A^{(j)}$ mit Index j gewählt. Zu Beginn hat das System noch keinen Strukturfaktor ausgebildet. Daher erzeugt $A^{(j)}$ den Strukturfaktor $B^{(j)} = B_m(A^{(j)})$ gemäß des Materiefeld-Strukturfaktors. Dieser wiederum spielt im zweiten Schritt die Rolle von B_{\pm} und erzeugt das Feld $A^{(j+1)}$

$$B^{(j)} = B_{\pm}(A^{(j+1)}) \quad (2.95)$$

$$= m_g(A^{(j+1)} - A_s) + B_s. \quad (2.96)$$

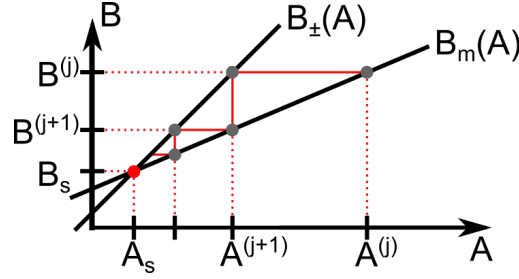


Abbildung 2.11: Iterative Annäherung des Systems an den stabilen Schnittpunkt (A_s, B_s) zwischen $B_{\pm}(A)$ und $B_m(A)$.

Einsetzen des Gleichgewichtsfelds

$$A^{(j+1)} = \frac{B^{(j)} - B_s}{m_g} \quad (2.97)$$

in $B^{(j+1)} = B_m(A^{(j+1)})$ liefert die Iterationsgleichung

$$B^{(j+1)} = \frac{m}{m_g}(B^{(j)} - B_s) + B_s, \quad (2.98)$$

welche $B^{(j+1)}$ mit $B^{(j)}$ in Beziehung setzt. Ist der Schnittpunkt stabil, so müssen die Abstände der Iterationspunkte bei fortlaufender Annäherung an ihn kleiner werden. Aus Gleichung (2.98) leitet sich daraus die Bedingung

$$\left| \frac{B^{(j+1)} - B_s}{B^{(j)} - B_s} \right| = \frac{|m|}{|m_g|} < 1 \quad (2.99)$$

ab. Ein Schnittpunkt zwischen B_{\pm} und B_m ist also stabil, solange der Betrag der Steigung des Gleichgewichts-Strukturfaktors in ihm größer ist als der Betrag der Steigung des Materiefeld-Strukturfaktors, also solange

$$B'_m(A_s) < B'_{\pm}(A_s) \quad (2.100)$$

gilt. Die Schnittpunkte P und Q in Abbildung 2.10 sind somit mögliche Gleichgewichtskonfigurationen von der Amplituden von Testmodenfeld und Strukturfaktor. Schnittpunkt O dagegen nicht.

Nach der Herleitung dieser Bedingung lassen sich beliebige Schnittpunkte auf Stabilität testen. Eine weitere Analyse müsste nun stabile Parameterbereiche von U_s , δ und $|a_+|$ identifizieren, worauf an dieser Stelle verzichtet wird. Statt dessen wenden wir uns der Stabilitätsanalyse der Phasen von Strukturfaktor und Testmodenfeld zu.

2.7.7 Gleichgewichtskonfigurationen der Phasen von Strukturfaktor und Testmodenfeld

Dieser Abschnitt widmet sich den Gleichgewichtskonfigurationen der Phasen von Strukturfaktor und Testmodenfeld. In der Herleitung von B_{\pm} gehen die Phaseninformationen beim Quadrieren von Gleichung (2.85) verloren. Wie im Abschnitt zuvor für die Amplituden lässt sich ein Zusammenhang zwischen der Phase der Testmode α und der Phase des Strukturfaktors β finden, je für den Materiefeld-Strukturfaktor und den Gleichgewichts-Strukturfaktor. Für den Materiefeld-Strukturfaktor folgt durch Gleichung (2.76) der lineare Zusammenhang

$$\alpha_m = \beta + 2\pi n, \quad \text{mit } n \in \mathbb{N}. \quad (2.101)$$

In anderer Darstellung ist die Gleichgewichtsbedingung in Gleichung (2.85) der Form

$$\cos(\beta) + i \sin(\beta) = \frac{A}{B} [\cos(\alpha_g + \delta) + i \sin(\alpha_g + \delta)] - \frac{R}{B}.$$

Separation von Real- und Imaginärteil liefert die zwei Gleichungen

$$\sin(\beta) = \frac{A}{B} \sin(\alpha_g + \delta) \quad (2.102a)$$

$$\cos(\beta) = \frac{A}{B} \cos(\alpha_g + \delta) - \frac{R}{B}. \quad (2.102b)$$

Mit Gleichung (2.102a) lässt sich die Testmodenamplitude $A = B \frac{\sin(\beta)}{\sin(\alpha_g + \delta)}$ in Gleichung (2.102b) eliminieren, und es findet sich der Ausdruck für die Gleichgewichtsphase

$$\alpha_g = \arctan \left(\frac{\sin(\beta)}{\cos(\beta) + \frac{R}{B}} \right) - \delta. \quad (2.103)$$

Gleichgewichtskonfigurationen der Phasen sind, analog zum vorherigen Abschnitt, Schnittpunkte zwischen α_g und α_m . Zusätzlich muss hier auch der Faktor R/B in Gleichung (2.103) berücksichtigt werden.

Für $R/B > 1$, also dominierende Spiegelrückstreuung, gilt $\cos(\beta) + \frac{R}{B} > 0$ für den Nenner im Argument von α_g . Dadurch bleibt α_g für alle β stetig, und es gibt für alle δ Schnittpunkte zwischen α_g und α_m .

Für $R/B \leq 1$ gibt es Werte für β , für die $\cos(\beta) = -\frac{R}{B}$ eintritt. α_g besitzt hier eine Sprungstelle, und es gibt nicht für alle δ Schnittpunkte zwischen α_g und α_m .

Für alle Werte von R/B gilt es, die Steigungen von α_g und α_m in den Schnittpunkten zu analysieren, um ihre Stabilität zu überprüfen. Erfüllt die Steigungen der Phasen $\alpha'_g(\beta)$ und $\alpha'_m(\beta)$ die Bedingung

$$|\alpha'_g(\beta)| < |\alpha'_m(\beta)|, \quad (2.104)$$

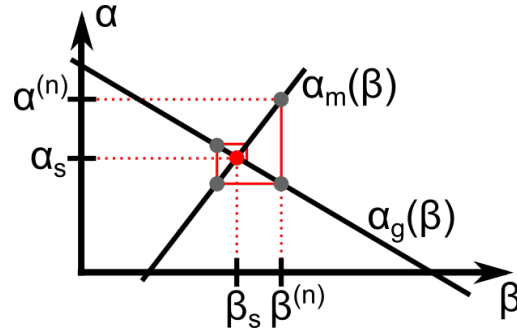


Abbildung 2.12: Iterative Annäherung des Systems an den stabilen Schnittpunkt (α_s, β_s) . Analog zur Stabilitätsanalyse der Amplituden startet die Iteration auf α_m für ein zufälliges $\alpha^{(n)}$ der Testmode. Die Phase der Testmode zu Beginn der Evolution des Systems wird von der Spiegelerückstreuung festgelegt.

so ist der Schnittpunkt (α_s, β_s) eine stabile Phasenkonfiguration. Abbildung 2.12 zeigt die exemplarische iterative Analyse der Phasenstabilität. Die Steigung des Testmodenfelds das vom Materiefeld-Strukturfaktor erzeugt wird ist $\alpha'_m(\beta) = 1$. Die Steigung der Phase des Gleichgewichtfelds muss also

$$|\alpha'_g(\beta)| = \left| \frac{1 + \frac{R}{B} \cos(\beta)}{1 + 2\frac{R}{B} \cos(\beta) + \left(\frac{R}{B}\right)^2} \right| < 1 \quad (2.105)$$

erfüllen. Abbildung 2.13b zeigt die Ableitungen von α_m und α_g . In den Bereichen um $\beta = \pi + 2\pi n$ ist Ungleichung (2.104) nicht erfüllt und dort somit kein stabiler Schnittpunkt möglich.

Der Offset von α_g wird durch δ bestimmt, das über einstellen der Verstimmung Δ_{eff} Werte im Bereich von $\pm\pi/2$ annehmen kann. Abbildung 2.14a zeigt den Verlauf von α_g für $\delta = -\pi/2$ und $R/B = 0,75$. Da in diesem Fall $R/B < 1$ gilt, besitzt α_g eine Sprungstelle, und es gibt keinen Schnittpunkt mit α_m . Für gleiches R/B , aber große Verstimmung $\Delta \gg \kappa$, siehe Abbildung 2.14b, ist $\delta = 0$ und der stabile Schnittpunkt zwischen α_g und α_m existiert.

Aus der Steigungsbedingung der Schnittpunkte lässt sich Ungleichung (2.105) auf die Bedingung

$$-\cos(\beta) < \frac{R}{B} \quad (2.106)$$

reduzieren und ist in Abbildung 2.15 grafisch veranschaulicht. Schnittpunkte sind aufgrund ihrer Steigung nur in den Bereichen von β stabil, in denen $-\cos(\varphi_b)$ unter dem Wert von R/B bleibt.

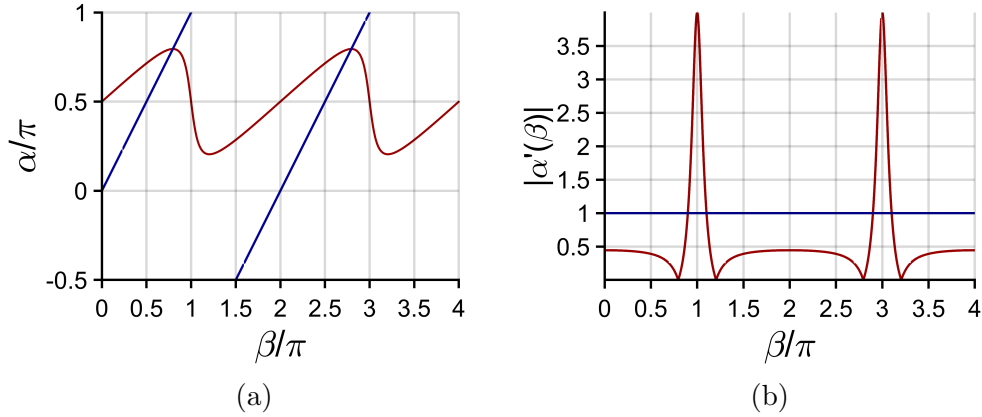


Abbildung 2.13: (a) Exemplarischer Verlauf von α_m (blau) und α_g (rot) für $R/B = 5/4$ und $\delta = -\pi/2$, bzw. $\Delta = 0$. (b) Verlauf der Ableitungen $|\alpha'_m(\beta)|$ (blau) und $|\alpha'_g(\beta)|$ (rot) für gleiche Parameter wie in (a). Instabil ist der Bereich um $\beta = \pi + 2\pi n$ mit $n \in \mathbb{N}$.

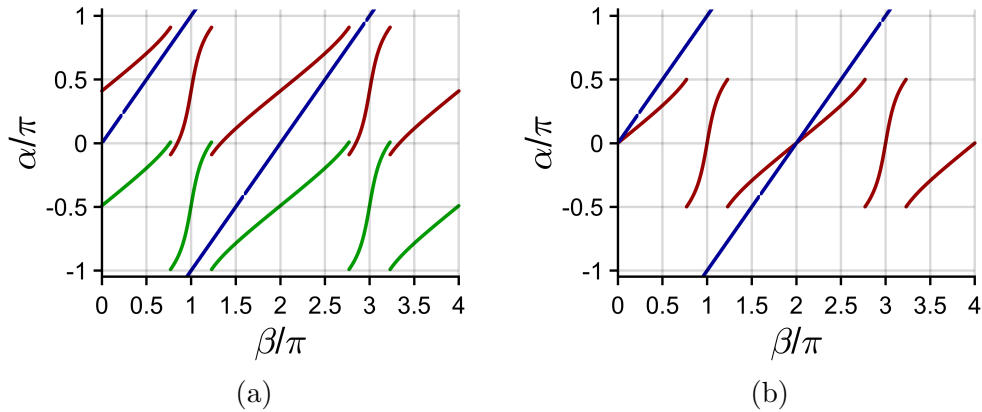


Abbildung 2.14: (a) zeigt α_m (blau), α_g für $R/B = 0.75$ und $\delta \approx -\pi/2$ (rot) bzw. für $\delta \approx \pi/2$ (grün). Aufgrund des nicht vorhandenen Schnittpunktes gibt es keine Gleichgewichtskonfiguration der Phasen. (b) Wird α_g verschoben in Richtung des Nullpunkts, hier mit $\delta \approx 0$ bzw. $|\Delta| \gg \kappa$, existiert ein stabiler Schnittpunkt.

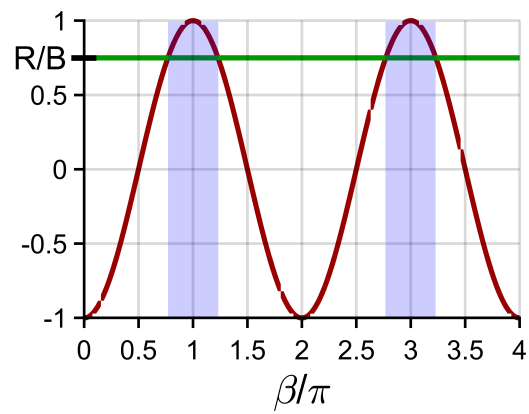


Abbildung 2.15: Schnittpunkte sind stabil, solange $-\cos(\beta)$ (rot) unter dem Wert von R/B (grün) bleibt. Die instabilen Bereiche sind farblich hervorgehoben. Hier ist $R/B = 0.75$ gewählt.

2.7.8 Kritische Verstimmung

Auf Resonanz, also bei $\Delta_{\text{eff}} = 0$ und für $R/B < 1$, gibt es, wie im vorherigen Abschnitt gezeigt, keine Gleichgewichtskonfiguration der Phasen. Für größer werdendes Δ_{eff} verschiebt sich α_g wie gezeigt zu kleineren Werten, bis sich α_m und α_g eventuell schneiden. Es muss also eine kritische Verstimmung Δ_{crit} geben, bei der α_g gerade α_m berührt. Je kleiner R/B , desto gerader ist der Verlauf von α_g und desto größer muss Δ_{eff} gewählt werden, damit ein Schnittpunkt existiert. Diese Situation ist in Abbildung 2.16 dargestellt.

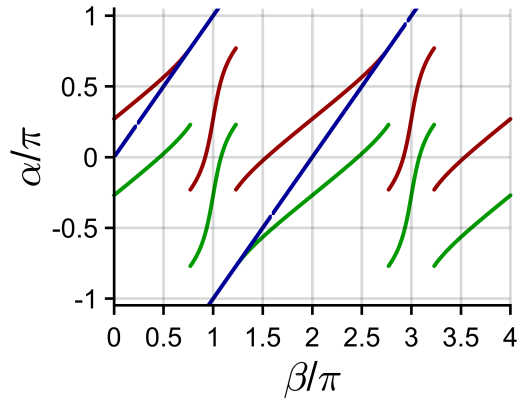


Abbildung 2.16: Verlauf von α_m (blau) und α_g für $R/B = 0.75$. Bei den kritischen Verstimmungen $\Delta_{\text{eff}} = \Delta_{\text{crit}} \approx 0.88\kappa$ (rot) und $\Delta_{\text{crit}} \approx -0.88\kappa$ liegt α_g gerade auf α_m auf.

$\alpha_g(\beta)$ springt bei der kritischen Phase β_{crit} , bei welcher für den Nenner des Arguments von $\alpha_g(\beta)$

$$\cos(\beta_{\text{crit}}) + \frac{R}{B} = 0 \quad (2.107)$$

gilt. Da R/B immer positiv ist, wird diese Bedingung in einer Periode zweimal im negativen Bauch der Kosinusfunktion erfüllt. Für die kritische Phase gilt $\beta_{\text{crit}} = \arccos(-R/B)$. Im Berührungspunkt der beiden Phasenfunktionen gilt

$$\alpha_g(\beta_{\text{crit}}) = \alpha_m(\beta_{\text{crit}}). \quad (2.108)$$

Die Gleichung ausgewertet liefert die Beziehung

$$\left(\frac{R}{B}\right)^2 = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \delta_{\text{crit}}\right)^2 = \sin(-\delta_{\text{crit}})^2. \quad (2.109)$$

Für große Pumpleistungen, sodass $A \gg A_{\text{sat}}$, ist $B = 1/\sqrt{8}$. Des Weiteren findet sich die Umformung $\sin(-\delta_{\text{crit}})^2 = \kappa^2/(\Delta_{\text{crit}}^2 - \kappa^2)$, mit welcher sich Gleichung

(2.109) zu

$$\Delta_{\text{crit}}^2 = \kappa^2 \left(\frac{1}{8R^2} - 1 \right) \quad (2.110)$$

umformen lässt. Durch Resubstitution von $R = U_s/(2NU_0)$ ist damit die kritische Verstimmung, über welche hinaus eine stabile Phasenkonfiguration existiert

$$\Delta_{\text{crit}} = \pm \kappa \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{NU_0}{U_s} \right)^2 - 1}. \quad (2.111)$$

Demnach gibt es in dem Bereich der Verstimmung $-|\Delta_{\text{crit}}| < \Delta_{\text{eff}} < |\Delta_{\text{crit}}|$ keine stabile Phasenkonfiguration.

3 Experimenteller Aufbau

Der erstmalige Einsatz eines die Rückstoßfrequenz auflösenden Ringresonators stellt neue Herausforderungen an den experimentellen Aufbau bezüglich der Frequenzstabilität. Aufgrund dessen wurde im Rahmen dieser Arbeit der gesamte Aufbau in Zusammenarbeit mit meinem Laborkollegen Philip Wolf grundlegend überarbeitet.

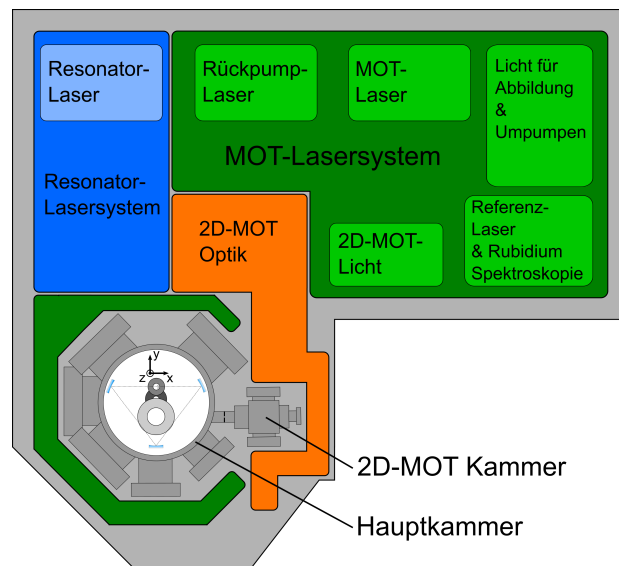


Abbildung 3.1: Schematische Darstellung des Versuchsaufbaus in seinen Teilsystemen. Das im MOT-Lasersystem (grün) bei 780 nm erzeugte Licht für die Abbildung, den Rückpumpvorgang und den Umpumpvorgang wird von polarisationserhaltenden Monomodenfasern (engl. „single-mode fiber“) an die Hauptkammer und an die 2D-MOT Optik (orange) geführt. Das Resonator-Lasersystem (blau) erzeugt Licht bei 795 nm und wird im Freistrah in den Resonator gekoppelt. Die Hauptkammer ist durch eine differenzielle Pumpstrecke von der 2D-MOT Kammer getrennt.

Eine schematische Darstellung der optischen Aufbauten des Versuchsaufbaus ist in Abbildung 3.1 zu sehen. Das Resonator-Lasersystem bei 795 nm (siehe Abschnitt 3.1.3) wurde in den vorhandenen experimentellen Aufbau integriert. Die grundlegende Struktur des MOT-Lasersystems, das in der Dissertation von Dag Schmidt beschrieben wird [34], wurde beibehalten. Erweiterungen werden weiter unten in Abschnitt 3.1.1 besprochen.

Die gesamte Verkabelung der Aufbauten wurde neu verlegt, mit besonderem Fokus auf die Vermeidung von Erdungsschleifen. Einen wesentlichen Beitrag zur Verbesserung der Gesamtstabilität liefert die Verwendung eines 3-Phasen Netzfilters an der zentralen Spannungsversorgung des Aufbaus und von 1-Phasen Netzfiltern an empfindlicher Elektronik. Mehr dazu in der Dissertation von Philip Wolf.

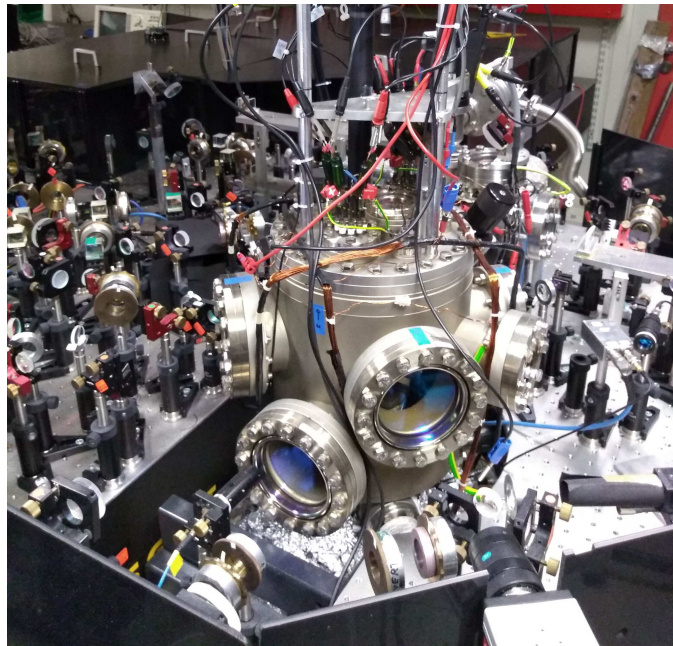


Abbildung 3.2: Blick auf die Hauptkammer. Im Hintergrund unter der schwarzen Abdeckung befindet sich das MOT-Lasersystem.

Der Resonator wird in der in Abbildung 3.2 dargestellten Hauptkammer bei Drücken um $3 \cdot 10^{-11}$ mbar betrieben. Eine aktive Kühlung durch Stickstoff des von Sebastian Slama entworfenen Spulensystems ist nicht notwendig [31]. Ebenso wird auf eine aktive Kühlung durch Stickstoff der an der Unterseite der Hauptkammer angebrachten Titan-Sublimationspumpe verzichtet. Der Druck in der 2D-MOT Kammer ist in der Größenordnung von 10^{-7} mbar und wird von einer Turbopumpe gehalten. Eine Ionengetterpumpe stellt sich als ungeeignet heraus um den Druck der mit Rubidium gesättigten Atmosphäre der 2D-MOT Kammer zu stabilisieren.

Die Ioffefalle, in der die Rubidiumatome in ein BEC überführt werden, wurde von Dag Schmidt entworfen [34]. Der evaporative Kühlvorgang wird in dieser Arbeit durch Einstrahlung einer Radiofrequenzwelle durchgeführt. Details dazu finden sich in der Dissertation von Philip Wolf. Das Innenleben der Hauptkammer ist in Abbildung 3.3 zu sehen.

Komplett neu wurde im Zuge dieser Arbeit ein Mikrocontroller basiertes Element der Experimentsteuerung zur Regelung der Frequenzen des Resonatorlasers und der Resonatorresonanz entwickelt und implementiert, welches hier als die μ C-Lockbox

bezeichnet wird. Ihr Aufbau und die Integration in den Versuchsaufbau sind im folgenden Kapitel ausgeführt.

Insgesamt wird durch die Überarbeitung des vorhandenen Versuchsaufbaus eine bisher an diesem Experiment unerreichte Stabilität erreicht. So wurde es möglich bis zu 10000 experimentelle Zyklen ohne Unterbrechung Messungen durchzuführen. Die experimentelle Apparatur kann über Tage ferngelenkt betrieben werden. Neben der Vielzahl an Verbesserungen der Hardware des Aufbaus, ist auch die sorgfältige softwareseitige Implementierung der neuen Experimentsteuerung für die erfolgreiche Durchführung der Messungen verantwortlich.

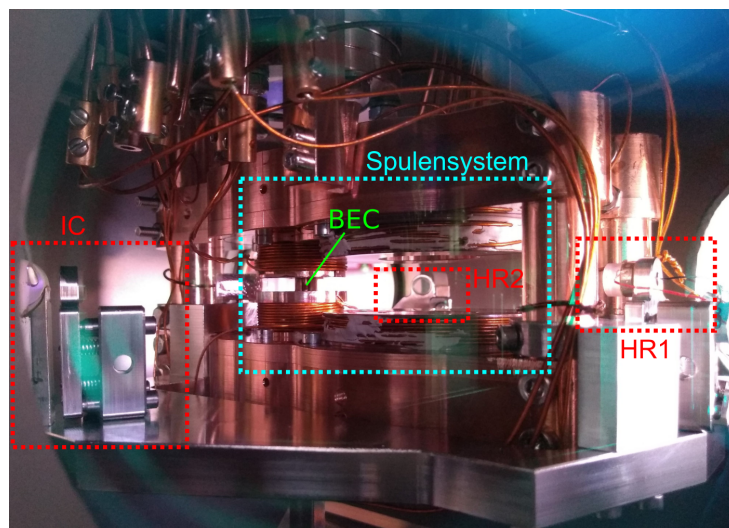


Abbildung 3.3: Blick durch ein Fenster auf das Innenleben der Hauptkammer. Zu erkennen ist die Anordnung der Spulenpaare zum fangen, Transportieren und Kühlen der Rubidiumatome. Der aus Edelstahl gefertigte Resonator hebt sich farblich von den kupfernen Aufbauten des Spulensystems ab. Rechts im Bild befindet sich der auf dem Resonatorpiezo verklebte Resonatorspiegel HR1. Links im Bild ist der Spiegelhalter des Einkoppelspiegels IC zu sehen und in der Mitte des Bildes Hochreflektorspiegel HR2.

3.1 Optischer Aufbau

Der gesamte optische Aufbau lässt sich in zwei unabhängige Bereiche unterteilen. Zum einen in das MOT-System, welches bei einer Wellenlänge von 780 nm operiert und zum anderen in das bei 795 nm arbeitende Resonator-System.

3.1.1 MOT System

Das wasserstoffähnliche Spektrum von Alkaliatomen macht diese zu idealen Kandidaten für die Untersuchung von Atom-Licht Wechselwirkungen. Ihre Valenzschale ist mit nur einem Elektron besetzt, wodurch sie ein einfaches, wasserstoffähnliches optisches Spektrum besitzen. Gleichzeitig bieten sie durch ihre große Ordnungszahl genug Komplexität für interessante physikalische Anwendungen.

Das Rubidium Isotop ^{87}Rb ist eine hierfür häufig verwendete Atomsorte. Sein 5S-

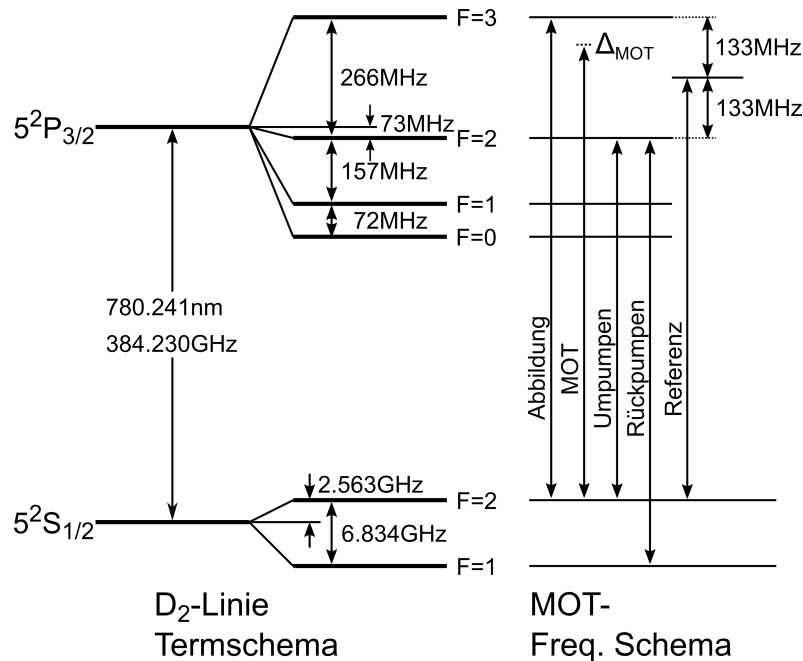


Abbildung 3.4: Termschema der ^{87}Rb D₂-Linie und das Frequenz Schema des MOT-Lasersystems.

Grundzustand kann optisch mit Wellenlängen von 795 nm bzw. 780 nm angeregt werden kann. Bei diesen Wellenlängen stehen günstige Single-Mode Laserdioden zur Verfügung, die auch industriell für CD-Laufwerke und Laserdrucker Verwendung finden. Dieser glückliche Zufall ermöglicht es Forschungsgruppen kostengünstige Eigenbau-Diodenlaser für komplexe Experimente zu entwickeln. Zudem erleichtert der niedrige Schmelzpunkt von 39.31 °C die Erzeugung einer geeigneten Dampfphase [49].

In Abbildung 3.4 ist das Termschema der ^{87}Rb D_2 -Linie abgebildet. Das MOT-Lasersystem besteht aus drei separaten Diodenlasern mit externem Resonator in Cateye Konfiguration. Als Frequenzreferenz dient die Crossover-Linie, die 133 MHz zwischen den $F=2$ und $F=3$ Niveaus des $5^2P_{3/2}$ Zustands liegt. Diese Crossover-Linie erzeugt in einer frequenzmodulierten Sättigungsspektroskopie das deutlichste Fehlersignal, welches dazu dient den sogenannten Referenzlaser auf diesen Übergang zu stabilisieren. Die Frequenzen der beiden Laser zum Anregen des MOT- und des Rückpumpüberganges werden über Schwebungslocks („beatlock“) relativ zur Frequenz des Referenzlasers geregelt. Die Einstellung der Frequenzen des Laserlichts zum Abbilden der Atome und des Laserlichts für den Umpumpvorgang erfolgen ohne aktive Regelung durch akustooptische Modulatoren (AOM's).

Der Aufbau des MOT-Lasersystems ist in der Dissertation von Dag Schmidt beschrieben [34]. In Rahmen dieser Arbeit gibt es zwei größere Änderungen am MOT-Lasersystem. Zum einen wurde der freie Strahlengang des Umpump-Lichts durch eine polarisationserhaltende Monomodenfaser ersetzt. Zum anderen war es möglich, die generelle Stabilität des Experiments durch Ersetzen der vorhandenen Diodenlaser (Rückpump-Laser, MOT-Laser, Referenz-Laser) in Littrow-Konfiguration durch eigenentwickelte Cateye-Diodenlaser drastisch zu erhöhen [50, 51]. Des weiteren wurde der Photodiodenverstärker zur Detektion der Schwebung zwischen MOT-Laser und Referenz-Laser und der Photodiodenverstärker der Rubidium FM-Spektroskopie durch empfindlichere Versionen ersetzt.

3.1.2 Absorptionsabbildung

Durch eine Absorptionsabbildung lässt sich die Dichteverteilung eines atomaren Ensembles darstellen. Dazu wird die Dichteverteilung mit einem kollimierten Laserstrahl beleuchtet. Mit einer Linse wird der Schattenwurf der Atome durch eine 2f-Abbildung auf der Abbildungskamera detektiert.

Zur Bestimmung der ortsabhängigen Dichteverteilung werden hintereinander drei Abbildungen aufgenommen. Die erste Abbildung enthält die Absorptionsabbildung mit der atomaren Verteilung. Die zweite Abbildung ist eine Wiederholung der ersten Aufnahme, nur ohne Atome. Das dritte Bild ist eine Aufnahme ohne Abbildungslicht. Aus den drei miteinander verrechneten Aufnahmen entsteht ein Bild, welches die optische Dichte im Gesichtsfeld der Kamera darstellt. Aus den Werten für die optische Dichte in jedem Pixel des errechneten Bildes lässt sich die Atomzahl in jedem Pixel und dadurch die atomare Verteilung bestimmen.

Ein Flugzeitbild liefert die geschwindigkeitsabhängige atomare Dichteverteilung, indem man die Atome vor ihrer Abbildung eine definierte Zeit (TOF) während eines ballistischen Fluges im Erdschwerefeld expandieren lässt.

Abbildung 3.5 zeigt die Abbildungsanordnung, mit der die Messung der atomaren Dichteverteilung erfolgt. Nach der Wechselwirkung der Atome mit der Resonatormode werden die Fallenpotentiale ausgeschaltet, und die Atome beschleunigen im

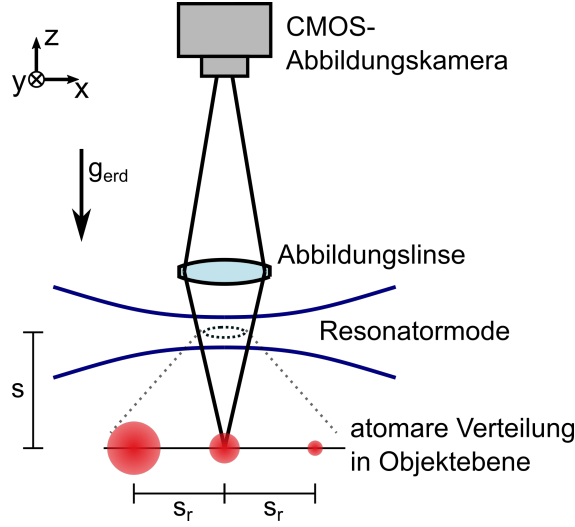


Abbildung 3.5: Abbildungsanordnung zur Bestimmung der Impulszustandsbesetzung. Das kollimierte Abbildungslicht beleuchtet die atomare Verteilung von unten, also in Richtung der z-Achse. Der Schattenwurf der atomaren Verteilung, nach einer Expansionszeit von $\text{TOF} = 35 \text{ ms}$, wird in einer CMOS-Kamera über eine 2f-Abbildung detektiert. Nach der Wechselwirkung mit der Resonatormode fallen die Atome im Schwerfeld der Erde die Strecke s . Im Impulsraum benachbarte Impulszustände separieren aufgrund der Rückstoßgeschwindigkeit v_r die Strecke s_r .

Erdschwerefeld. Für die im Experiment gewählte Expansionszeit von $\text{TOF} = 35 \text{ ms}$ bewegen sie sich

$$s = \frac{1}{2} g_{\text{erd}} (\text{TOF})^2 \quad (3.1)$$

$$= 6 \text{ mm} \quad (3.2)$$

aus dem Zentrum der Resonatormode und werden abgebildet. g_{erd} ist hier die Schwerkbeschleunigung der Erde. Nach der Expansion sind benachbarte Impulszustände in der Objektebene

$$s_r = v_r \cdot \text{TOF} \quad (3.3)$$

$$= 399 \text{ } \mu\text{m} \quad (3.4)$$

separiert, mit einer Rückstoßgeschwindigkeit von $v_r = 11.4 \text{ mm s}^{-1}$ von ^{87}Rb bei einem Impulsübertrag von $2\hbar k$ und $\lambda = 795 \text{ nm}$. Die räumliche Separation der Impulszustände ermöglicht die Auswertung ihrer atomaren Besetzung.

Die 100 ms zwischen den drei Absorptionsabbildungen resultieren aus der limitierten Übertragungsgeschwindigkeit zwischen Steuer-PC und der Abbildungskamera. Durch Vibrationen des Versuchsaufbaus unterscheiden sich durch Hindernisse

im Strahlengang des Abbildungslichts erzeugte, Interferenzmuster in verschiedenen Aufnahmen voneinander. Dadurch erzeugen sie Fluktuationen in den gemessenen Atomzahlen, welche sich mit dem Signal der Atome überlagern. Nachbearbeitung der Atomzahlbilder durch einen Algorithmus zur Entfernung von Beugungsmustern kann diesem Effekt entgegenwirken, siehe [52, 53].

3.1.3 Resonator Lasersystem

Für die Anregung von Zwei-Photonen Ramanübergängen zwischen Impulszuständen wurde der D_1 Übergang von ^{87}Rb gewählt. Dies macht ein zweites Lasersystem bei 795 nm notwendig. Als Laserlichtquelle hierfür dient ein TA pro der Firma Toptica. Der Ringresonator wird mit zwei Resonatormoden betrieben. Die Laserfrequenz ist auf die Resonanzfrequenz einer TEM_{10} Mode stabilisiert, welche als die Lockmode bezeichnet wird. Die Pumpmode ist eine benachbarte TEM_{00} Mode. In Abbildung 3.6 ist der transversale Intensitätsverlauf in y -Richtung beider Moden dargestellt. Das BEC wird im Zentrum beider Moden platziert um die Wechselwirkung mit der Lockmode zu minimieren und mit der Pumpmode zu maximieren.

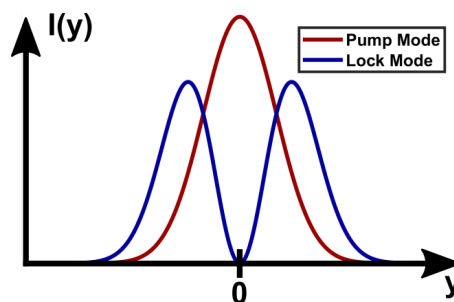


Abbildung 3.6: Qualitativer transversaler Intensitätsverlauf der Lockmode (blau) und Pumpmode (rot). Das BEC wird im Mittelpunkt bei $y=0$ platziert, um die Wechselwirkung mit der Lockmode zu minimieren.

Der Aufbau des Lasersystems zur Anregung der Resonatormoden ist in Abbildung 3.7 dargestellt. Da die Resonanzfrequenzen von Lockmode und Pumpmode 257.5 MHz auseinander liegen, müssen die Frequenzen von Pumplicht und Locklicht um diesen Betrag zueinander durch AOM's verschoben werden.

Der Seitenausgang des TA pro dient als Quelle des Locklichts (blau). Das mit 90 MHz getriebene Lock AOM verschiebt die Frequenz des Locklichts in Double-Pass Konfiguration um 180 MHz. Die 0. Ordnung des zweiten Durchgangs wird in ein Wavemeter zur Bestimmung der Lichtfrequenz eingekoppelt. Das Prisma dient der Abschwächung beider Lichtfelder.

Eine kommerzielle Avalanche Photodiode¹ (APD) detektiert das am Resonator reflektierte Lichtfeld. Aus dem Signal dieser Photodiode (PDH PD) erzeugt ein PDD

¹Lasercomponents A-CUBE-S500-100

3 Experimenteller Aufbau

110² Modul ein PDH-Fehlersignal, welches schließlich von der FALC³ zur Stabilisierung der Locklichtfrequenz auf die Resonanzfrequenz der Lockmode weiterverarbeitet wird [54]. Das von den Atomen rückgestreute Lichtfeld, bzw. die Besetzung der Testmode, detektiert die Rückstreu Photodiode (Rück. PD). Das am Resonator reflektierte Licht wird von der Reflektions-Photodiode (Ref. PD) erfasst. Der Strahlengang des Pumplichts (rot) führt vom Hauptausgang des TA pro durch das zweite, bei 77.5 MHz getriebene Pump AOM.

Die Pump Photodiode (Pump PD) detektiert die im Resonator umlaufende Leis-

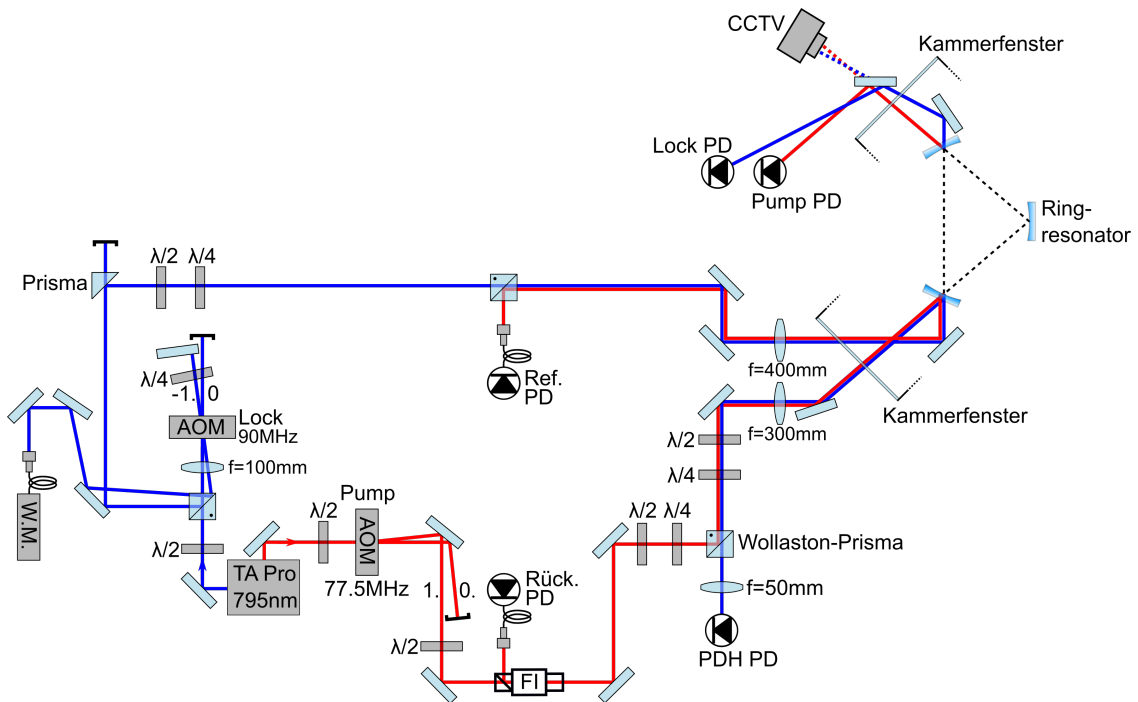


Abbildung 3.7: Aufbau des Strahlengangs zur Anregung der Lockmode (blau) und der Pumpmode (rot).

tung der Pumpmode in Transmission. Ebenso detektiert die Lock Photodiode (Lock PD) die Leistung des im Resonator umlaufenden Locklichts.

Ein Umlenkspiegel außerhalb der Vakuumkammer, mit einer Transmission von einigen Prozent, ermöglicht die Beobachtung des transmittierten Profils der angeregten Resonatormoden. Mit einer CCTV-Kamera lassen sich die räumlichen Intensitätsverteilungen von Lock- und Pumpmode abbilden. Die Abbildungsoptik der Kamera wurde entfernt. Die transmittierten Moden beleuchten den Bildsensor direkt. Dies erweist sich als nützliches Justagewerkzeug bei der Identifizierung ein-

²Pound Drever Hall Module von Toptica, mit einer Modulationsfrequenz des Laserstroms von 12 MHz.

³„Fast Analog Linewidth Control“, FALC 110 von Toptica.

zelter Resonatormoden. In Abbildung 3.8 sind die transmittierten Profile einiger Resonatormoden, wie sie von der CCTV-Kamera gesehen werden, dargestellt.

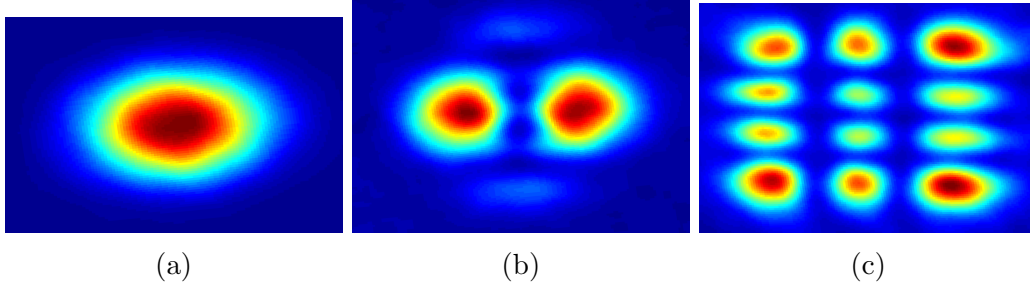


Abbildung 3.8: Von der CCTV-Kamera aufgenommenes Profil der transmittierten Resonatormoden. (a) TEM_{00} Mode. (b) TEM_{10} Mode. Die TEM_{03} Mode ist in dieser Aufnahme leicht angeregt. (c) TEM_{23} Mode.

3.2 Experimentsteuerung

Die Dauer eines experimentellen Zyklus beträgt 44 s. Der Zyklus kann in zwei separate, aber synchronisierte Sequenzen unterteilt werden.

In der einen Sequenz werden die Atome, ausgehend als thermisches Gas, von der 2D-MOT bis in die Resonatormode transportiert und in ein BEC überführt:

1. Start des Zyklus: Die in einer 2D-MOT gefangenen Rubidiumatome werden durch eine differentielle Pumpstrecke von einem Pushbeam in die Hauptkammer gestoßen und in einer MOT („magneto-optical trap“) gefangen und vorgekühlt.
2. Atome werden in den $F = 2$ $m_F = 2$ Grundzustand umgepumpt und anschließend in eine reine Magnetfalle geladen.
3. Danach übernimmt eine Anordnung von Spulenpaaren den Transfer der Atome in eine Ioffefalle.
4. In der Ioffefalle angekommen, werden die noch thermischen Atome durch evaporatives Kühlen in das finale BEC überführt. Während dieses finalen Kühlvorgangs befinden sich die Atome bereits in der allerdings noch dunklen Resonatormode.
5. Durchführung des Pumpvorgangs durch Einschalten des Pumplichts, nach Abschluss der Relockprozedur.

- Alle Fallenpotentiale werden schnell abgeschaltet. Die atomare Verteilung expandiert im freien Fall und wird zur Bestimmung der Impulsverteilung in einer Absorptionsabbildung vermessen.

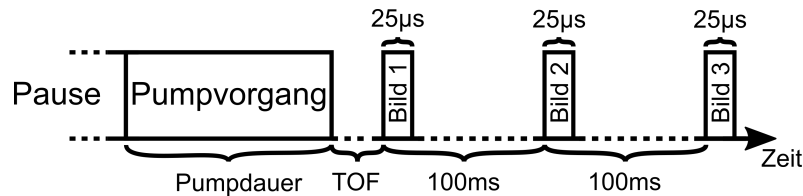


Abbildung 3.9: Chronologischer Ablauf des Pumpvorgangs und der Absorptionsabbildung. Ist die Relockprozedur abgeschlossen, wird ADwin aus dem Pause-Zustand geholt und startet den Pumpvorgang durch Einschalten des Pumplichts für eine bestimmte Zeit. Nach 35 ms TOF werden drei Absorptionsabbildungen der expandierten atomaren Verteilung mit einem zeitlichen Abstand von 100 ms aufgenommen. Die Belichtungsdauer beträgt je 25 µs.

Die zweite, parallel ablaufende, Sequenz besteht aus der automatisierten Kontrolle der Frequenzen von Pumplicht und Resonatormode:

- Start des Zyklus: Messung der Resonanzfrequenz der Pumpmode. Kompensation des Frequenzdrifts.
- Um eine Wechselwirkung mit den Atomen zu verhindern, wird das Locklicht ausgeschaltet, kurz bevor der Transfer der Atome von den MOT-Spulen in die Ioffefalle beginnt. Das Fehlersignal zur Stabilisierung der Frequenz des Locklichts auf die Resonanzfrequenz der Lockmode geht dabei verloren⁴.
- Nachdem der Kühlvorgang der Atome abgeschlossen ist, wird eine Relockprozedur zur Wiederherstellung des Resonatorlocks durchgeführt. Die Dauer der Relockprozedur variiert zwischen einigen Millisekunden und einigen hundert Millisekunden.
- Nach Wiederherstellung des Frequenzlocks wird der Pumpvorgang mit einer definierten Dauer, Pumpleistung und Verstimmung Δ_{eff} durchgeführt. Abbildung 3.9 stellt den chronologischen Ablauf dar.

Der gesamte Zyklus wird von drei Instanzen kontrolliert. Deren jeweilige Aufgabenverteilungen sind in ihrer chronologischen Reihenfolge in Abbildung 3.10 dargestellt. Im Folgenden ist der Ablauf des experimentellen Zyklus aus Sicht dieser

⁴Für solch eine Anordnung, bei der ein Signal (hier die Frequenz des Locklichts) relativ zu einem Referenzwert (hier die Lockmodenresonanz) stabilisiert wird, ist hier der Begriff „Frequenzlock“ (deutsch: „Frequenzverriegelung“ oder „Frequenzeinrastung“) oder umgangssprachlicher nur „Lock“ in Verwendung.

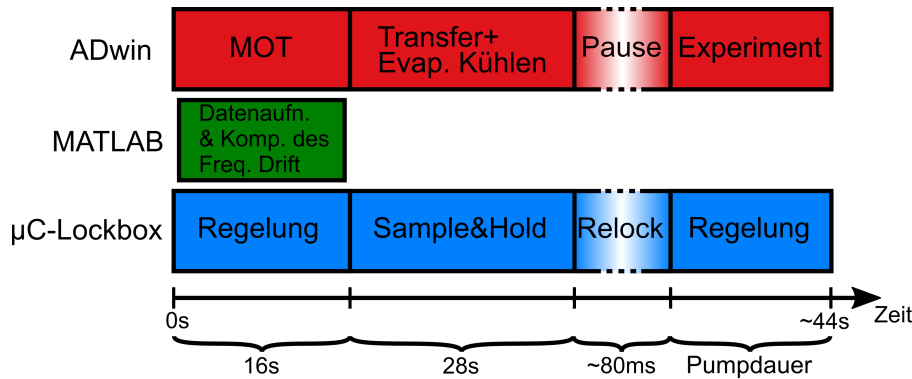


Abbildung 3.10: Chronologischer Ablauf des experimentellen Zyklus, unterteilt in die unterschiedlichen Aufgaben der drei Kontrollinstanzen ADwin (rot), Matlab (grün) und der μ C-Lockbox (blau). Das ADwin gibt den zeitlichen Ablauf vor und synchronisiert Matlab und die μ C-Lockbox mit sich. Nur während der Relockprozedur wartet ADwin auf die Wiederherstellung des Frequenzlocks durch die μ C-Lockbox.

drei Instanzen beschrieben und wie diese jeweils mit den anderen beiden Instanzen verbunden sind.

ADwin

Das ADwin⁵ kontrolliert den Ablauf von MOT-Phase, Transfer, evaporativem Kühlen der Atome, Pumpvorgang und der Abbildung der atomaren Verteilung. Es bestimmt den Ablauf des Zyklus. Die beiden anderen Kontrollinstanzen sind in ihren Abläufen auf das ADwin referenziert. Aufgrund seiner Echtzeitfähigkeit und der verhältnismäßig hohen Zeitauflösung ist es in der Lage, alle zeitkritischen Abläufe zu steuern.

Während der Relockprozedur wird ADwin in einen Pausenzustand versetzt. Während des Pausenzustands werden alle Ausgänge von ADwin konstant auf den Werten gehalten, die zu Beginn der Pause ausgegeben werden. Nur während der Relockprozedur hat ADwin keinen Einfluss auf den Zyklus.

Ist die Relockphase abgeschlossen, führt ADwin den Pumpvorgang durch Ein- und Ausschalten des Pumplichts aus. Anschließend werden alle Fallenpotentiale schnell ausgeschaltet und das BEC beginnt einen ballistischen Flug. Nach einer TOF („time of flight“) der Atome von 35 ms wird die Aufnahme der drei Einzelbilder der Absorptionsabbildung (siehe Abschnitt 3.1.2) zur Bestimmung der atomaren Impulsverteilung von ADwin getriggert. Ein Zyklus ist beendet mit der Aufnahme des

⁵Das verwendete ADwin-System besteht aus einer Ablaufsteuerung mit der sich digitale und analoge Ausgänge, mit einer Zeitauflösung von 4 μ s, über eine programmierbare Grafische Benutzeroberfläche auf einem Windows-PC setzen lassen.

Dunkelbildes.

Matlab

Die Abläufe zwischen ADwin und Matlab sind synchronisiert, indem zu Beginn des Zyklus ADwin einen Digitalausgang setzt, der von einem Arduino Uno Board eingelesen wird. Das Arduino Uno Board ist per USB mit dem Matlab-PC verbunden und dient Matlab so als digitaler Eingangskanal.

Datenaufnahme: Zu Beginn des Zyklus speichert Matlab die von einem Digitaloszilloskop⁶ aufgezeichneten Lichtspuren und die drei Kameraaufnahmen zur Bestimmung der atomaren Verteilung zur Auswertung auf den verwendeten Computer.

Kompensation des Frequenzdrifts: Temperaturdrifts des Spulensystems verursachen, durch thermische Kopplung zwischen dem Spulensystem und der Grundplatte des Resonators, Änderungen der Umlauflänge des Resonators. Damit ändern sich auch die Resonanzfrequenzen der Resonatormoden (siehe Abschnitt 3.6). Um diese Drifts zu kompensieren, lässt Matlab den Funktionsgenerator⁷ zur Steuerung der Pumplichtfrequenz, einen Frequenzsweep von ± 25 kHz um die letzte bekannte Resonanzfrequenz der Pumpmode durchführen. Das Maximum der während des Sweeps in Vorwärtsrichtung transmittierten Resonatorleistung der Pumpmode legt die neue Resonanzfrequenz fest. Für Vorwärts- und Rückwärtsrichtung der Resonatormode werden transmittierte Amplituden, Resonanzfrequenz und Linienbreiten aus dem Fit einer Lorentzkurve an die Verläufe der transmittierten Leistungen des Frequenzsweeps bestimmt.

Nach der Datenaufnahme und der anschließenden Kompensation des Frequenzdrifts stellt Matlab die für den aktuellen Zyklus vorgesehene Verstimmung Δ_{eff} und Pumpstärke η_p für das Pump-AOM ein. Während der Matlabroutine befinden sich die Atome in der MOT und Magnetfalle, wodurch das Licht im Resonator nicht mit den Atomen wechselwirken kann. Erst nachdem die Matlabroutine abgeschlossen ist und die Atome in die Ioffefalle transferiert werden, beginnt die Sample&Hold Phase. In Abbildung 3.11 ist die Verbindung zwischen den Photodioden und Matlab in einem Blockdiagramm dargestellt.

μC -Lockbox

Die Hauptaufgabe der μC -Lockbox (siehe Abschnitt 3.3) ist die Regelung der Frequenz des Resonatorlasers⁸ und die Regelung der Umlauflänge des Resonators.

⁶Keysight DSOX2004A

⁷Teledyne LeCroy WaveStation 3162

⁸Toptica TA pro 795 nm

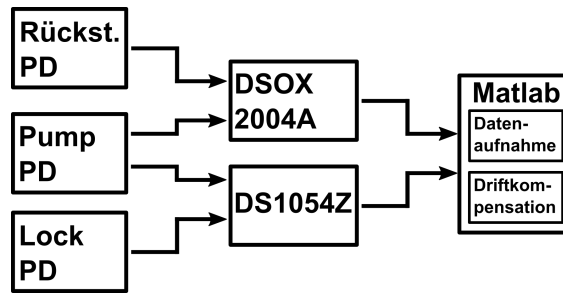


Abbildung 3.11: Blockdiagramm zur Weiterleitung der Lichtspuren an Matlab. Die Verläufe des rückgestreuten und des transmittierten Pumplichts, welche die Dynamik der Wechselwirkung zwischen Atomen und Pumplicht enthalten, werden von dem DSOX2004A gespeichert und zu Beginn jedes Zyklus von Matlab eingelesen. Ein Rigol DS1054Z speichert die Lichtspuren von Lock und Pump Photodioden während des Sweeps zur Kompensation des Frequenzdrifts.

Die μC -Lockbox erhält zum Beginn der Sample&Hold-Phase ein Triggersignal von ADwin. Daraufhin stoppt sie beide Regler und hält ihre letzten Ausgangswerte konstant („Hold“-Modus). Anschließend unterbricht sie die Verbindung zwischen FALC-Ausgang und Modulationseingang des Pumplasers durch Schalten des Halbleiterrelais⁹ per Logiksignal. Damit wird die aktive Stabilisierung der Frequenz des Pumplasers auf die Resonanzfrequenz des Resonators unterbunden¹⁰.

Die auf die Sample&Hold-Phase folgende Relockprozedur (siehe Abschnitt 3.3.1) wird von ADwin eingeleitet, indem das vorher verwendete Triggersignal seinen Pegel wechselt. ADwin geht anschließend in den Pausenzustand und wartet auf die Vollendung der Relockprozedur.

Zu Beginn der Relockprozedur stellt die μC -Lockbox zunächst die Verbindung zwischen FALC-Ausgang und Modulationseingang des Pumplasers wieder her. Anschließend beginnt sie größer werdende Rampen mit dem Resonatorpiezo abzufahren, also die Resonatorresonanzfrequenz durchzustimmen, bis sie mit der Frequenz des Locklichts übereinstimmt, und der FALC-Lock greift. Nach jedem Schritt der Rampe überprüft die μC -Lockbox das analoge Signal der Lock-PD. Bei erfolgreichem Relock überschreitet die Lock-PD einen festgelegten Pegel, da sie das im Resonator umlaufende und transmittierte Locklicht detektiert. Tritt dieses Ereignis ein, reaktiviert die μC -Lockbox beide PI-Regler und signalisiert wiederum ADwin durch ein Triggersignal am Eventeingang das Ende der Relockprozedur.

⁹Mini Circuits ZASWA-2-50DR+

¹⁰Wenn die Resonanzfrequenz des Resonators aufgrund akustischer Anregungen des Resonatoraufbaus um einige Megahertz schwankt, kann so weniger Lock- oder Pumplicht mit den Atomen während ihres Kühlvorgangs wechselwirken. Um jedwedes Licht in der Resonatormode zu unterbinden, müssen die Strahlengänge von Lock- und Pumplicht mit Blenden blockiert werden.

3.3 μ C-Lockbox

Die im Rahmen dieser Arbeit entworfene μ C-Lockbox ist eine zentrale Kontrollinstanz in dem experimentellen Aufbau. Sie stabilisiert die Frequenz des Locklichts auf die Resonanzfrequenz der Lockmode. Gleichzeitig regelt sie die Länge des Resonatorpiezos auf einer großen Zeitskala, um die Resonanzfrequenz der Lockmode im Mittel auf der Frequenz des Locklichts zu halten. Damit wird die Frequenz des TA pro Lichts zur Referenz, was sich für dieses Experiment als ausreichend stabil erwies.

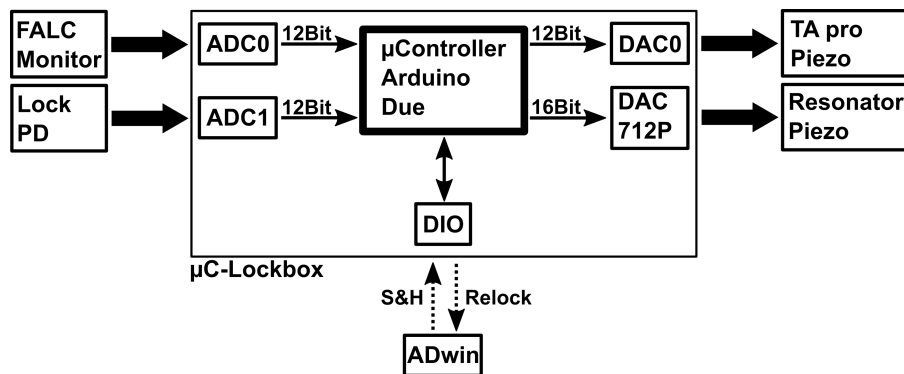


Abbildung 3.13: Blockdiagramm der μ C-Lockbox. Die analogen Inputs (FALC Monitor und Lock PD) werden von den internen 12-Bit Analog zu Digital Umsetzern (ADC1 und ADC2) des Arduino Due Microcontrollers eingelesen. Der Monitorausgang der FALC dient als Signalquelle für PI-Regler 1, welcher durch Regelung des TA pro Piezo, über den internen DAC des Arduino Due, den langsamen Ast (DC-500 Hz) des Frequenzlocks bildet. Der von PI-Regler 1 berechnete und integrierte Stellwert ist wiederum das Eingangsfehlersignal für PI-Regler 2, welcher über einen 16-Bit DAC die Länge des Resonatorpiezos kontrolliert (DC-2 Hz), um den Offset des Stellsignals von PI-Regler 1 auf null zu halten. Je ein digitaler, galvanisch getrennter Ein- und Ausgang dient der Kommunikation mit ADwin zur Synchronisation von Sample&Hold-Phase und Relockprozedur.

Die μ C-Lockbox besteht im Kern aus einer Platine zur Erweiterung der Ein- und Ausgabefähigkeiten eines Arduino Due Boards. Die Wahl fiel auf ein Produkt der Arduino Plattform aufgrund der Zugänglichkeit des Arduino Codes und auf das Due Board im Speziellen, wegen seiner zum Zeitpunkt des Entwurfs¹¹ größten verfügbaren Geschwindigkeit.

Abbildung 3.13 zeigt den internen Aufbau der μ C-Lockbox als Blockdiagramm. Die zwei analogen Eingangssignale werden von den internen 12-Bit Analog zu Digital

¹¹Januar 2016. Eine aktuell (November 2019) verfügbare, wesentlich schnellere Variante wäre das Arduino kompatible Teensy 4.0 Board von PJRC.

Umsetzern („analog to digital converter“, ADC) des verbauten Arduino Due eingelesen.

Das FALC Monitorsignal dient der Erzeugung des Stellsignals für den Piezo des TA pro (siehe auch Abbildung 3.12), zur Regelung der Locklichtfrequenz über einen Frequenzbereich von DC bis 500 Hz. Den externen Zugriff auf den Piezo des Laserkopfes ermöglicht die vom Hersteller angebotene analoge Kontrollschnittstelle¹². Die analoge Ausgabe erfolgt über den internen Digital zu Analog Umsetzer („digital to analog converter“, DAC) des Arduino Due.

Der Offset dieses Stellsignals dient gleichzeitig als Fehlersignal zur langsamen Regelung der Resonatorumlaufänge über einen Frequenzbereich von DC bis 2 Hz. Hierfür wird ein externer 16-Bit DAC verwendet, der über einen Hochspannungsverstärker¹³ den Resonatorpiezo anspricht.

Die Kommunikation der μ C-Lockbox mit ADwin geschieht über zwei galvanisch entkoppelte IO-Ports. Die hierfür verwendeten Optokoppler dienen gleichzeitig als Pegelwandler zwischen der 3.3 V Logik des Arduino Due und der 5 V Logik von ADwin.

Der vollständige Schaltplan der μ C-Lockbox befindet sich in Anhang B.

3.3.1 Relockprozedur

Abbildung 3.14 zeigt die Verläufe von Pumplicht, Locklicht und der Kontrollspannung des Resonatorpiezos einer exemplarischen Relocksequenz. Bis zum Zeitpunkt $t=0$ s ist die μ C-Lockbox in der Sample&Hold-Phase. Durch den deaktivierten Frequenzlock ist zu diesem Zeitpunkt kein Licht im Resonator und alle Pegel sind auf null. Bei $t=0$ s beginnt die μ C-Lockbox die Relocksequenz, durch das Abfahren dreiecksförmiger Rampen mit größer werdender Amplitude der Spannung des Resonatorpiezos. Sobald die Frequenz der Lockmode mit der Frequenz des Locklichts übereinstimmt, greift der Frequenzlock der FALC. Die Lichtleistung in der Lockmode steigt an und wird in Transmission von der Lock Photodiode detektiert. Die kritische Locklichtleistung wird bei $t=98$ ms überschritten und die Relocksequenz gestoppt. ADwin startet den 5 ms dauernden Pumpvorgang. Die Lock Photodiode detektiert zusätzlich zum transmittierten Locklicht auch das transmittierte rückgestreute Locklicht. 150 ms nach Ende der Relockprozedur führt PI-Regler 2 (siehe Abbildung 3.12) den ersten Regelschritt zur Stabilisierung der Resonatorlänge aus, was einer Samplingrate von 6.7 Hz entspricht.

¹²DCB 110 - Analog Control Interface

¹³PiezoDrive PDU150

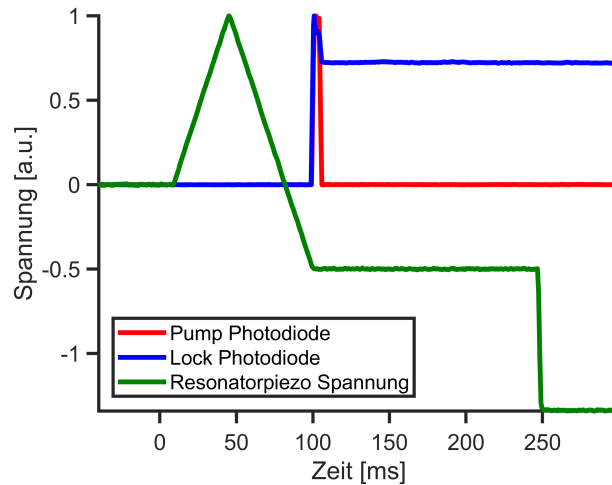


Abbildung 3.14: Zeitliche Verläufe des Stellsignals zur Regelung der Länge des Resonatorpiezos und den Signalen der Pump und Lock Photodioden.

3.4 Ringresonator

Der Ringresonator dieses Experiments wurde designt im Rahmen der Diplomarbeit von Dirk Sodtke [55]. Die erste Inbetriebnahme und Charakterisierung erfolgte in der Diplomarbeit von Christoph Georges [56]. Die erste Charakterisierung mit dem in das Vakuumsystem integrierten Ringresonator beschrieb Dag Schmidt in seiner Dissertation [34].

Ziel des Neuentwurfs war, einen Resonator möglichst kleiner Linienbreite zu erhalten, zumindest kleiner als die Rückstoßfrequenz von $\omega_r/2\pi = 14.51$ kHz des D_1 Übergangs von ^{87}Rb . In einem Ringresonator, der dieses Kriterium erfüllt, lassen sich gezielt Übergänge zwischen zwei benachbarten Impulszuständen anregen.

So war es Christoph Georges möglich, eine Zerfallszeit der Resonatorleistung von $T_{\text{res}} = 41.45$ μs zu realisieren, was einer Linienbreite von $\delta_{\text{FWHM}} = 3.84$ kHz entspricht. Unglücklicherweise kam es beim Einbau des Ringresonators zu Verunreinigungen seiner Spiegel. Durch Ersetzen des Einkoppelspiegels und Reinigung der beiden hochreflektierenden Spiegel mitsamt ihrer Spiegelhalter in einem Ultraschallbad mit Aceton war es noch möglich, Zerfallszeiten von $T_{\text{res}} = 19.33$ μs zu realisieren. Der Aufbau des Ringresonators ist in Abbildung 3.15 dargestellt. Die drei Spiegel werden in speziell angefertigten Spiegelhaltern der Firma LIOPTEC positioniert. Die Befestigung der Resonatorgrundplatte aus Edelstahl erfolgt an bereits im Aufbau vorhandenen Teilen des Spulensystems.

Die Resonatormoden werden durch den Einkoppelspiegel IC angeregt. Der Hochreflektorspiegel HR1 ist mit einem Piezo¹⁴ verklebt, durch welchen die Umlauflänge

¹⁴PI-Ceramic PD080.30

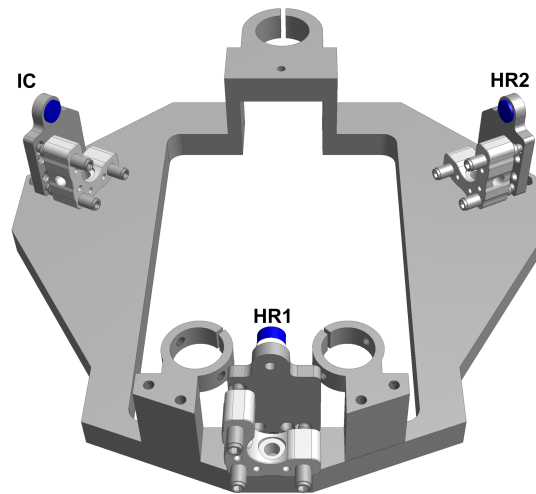


Abbildung 3.15: Aufbau des Resonators aus Grundplatte und Spiegelhaltern mit montierten Spiegeln (blau). Die Einkopplung der Lichtfelder erfolgt durch den Einkoppelspiegel (IC). Hochreflektorspiegel HR1, zwischen den beiden Befestigungsklemmen, ist auf einem Piezo (weiß) befestigt.

des Resonators einstellbar ist. Dadurch blockiert der Piezo den Zugriff auf die durch HR1 transmittierten Lichtfelder. Das ungehindert durch HR2 transmittierte Lock- und Pumplicht wird von Pump PD und Lock PD detektiert, wie in Abbildung 3.16 dargestellt. Die gegenläufige Anregung von Lock- und Pumpmode führt zur separierten Transmission beider Lichtfelder an HR2.

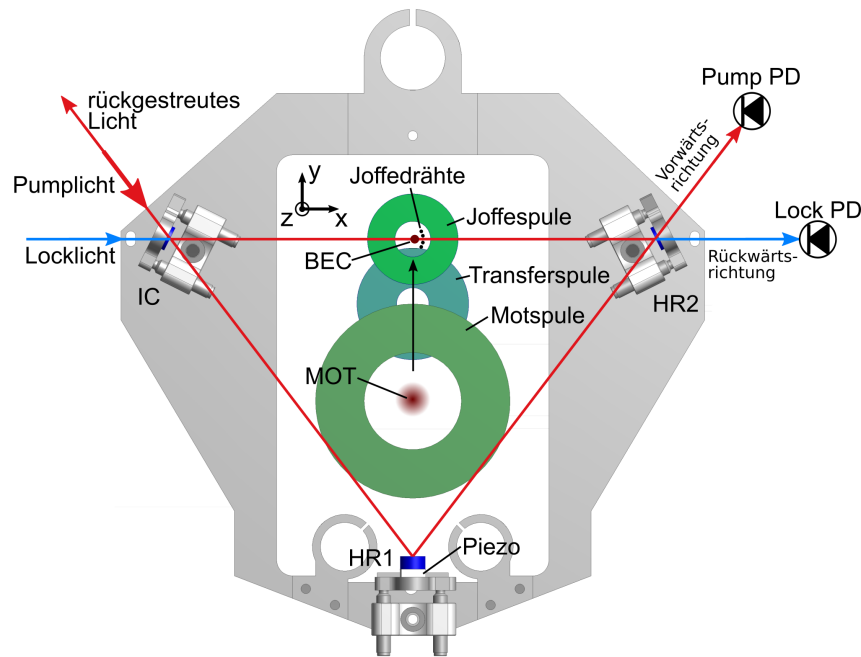


Abbildung 3.16: Strahlengang der Ringresonatormode mit Fallensystem aus MOT-, Transfer- und Ioffespulen sowie den vier Ioffedrähten. Die Atome in der MOT werden in die Ioffefalle transferiert und dort in ein BEC überführt. Pumpmode und Lockmode werden gegenläufig angeregt.

3.4.1 Zusammenfassung der Resonatoreigenschaften

In diesem Unterabschnitt sind die Eigenschaften des Resonators auf einen Blick zusammengefasst. Tabelle 3.1 listet die geometrischen Resonatoreigenschaften auf. Einige Ergebnisse der nächsten Abschnitte sind in Tabelle 3.2 vorweggenommen.

3.5 Resonatorverluste

Bei schrägem Einfallswinkel eines Lichtfelds auf einer reflektierenden Oberfläche, unterscheiden sich nach Fresnel die Reflexionskoeffizienten unterschiedlicher linearer Polarisationen. Dieser Umstand hat für einen Ringresonator unterschiedliche Umlaufverluste für s- oder p-polarisierte Lichtfelder zur Folge, aufgrund den von null verschiedenen Einfallswinkeln der Lichtfelder auf den Spiegeloberflächen. Da für s-polarisiertes Licht höhere Reflexionskoeffizienten erreicht werden als für p-polarisiertes Licht, hat eine mit s-polarisiertem Licht angeregte Mode eine kleinere Feldzerfallsrate κ als eine mit p-polarisiertem Licht angeregte.

In den folgenden Messungen der Linienbreiten δ_{FWHM} und der Zerfallszeiten T_{res} ist

Umlauflänge	L	0.4 m
Spiegelradius	R	0.2 m
Transmission HRx p-pol.	$T_x^{(p)}$	10ppm
Transmission HRx s-pol.	$T_x^{(s)}$	1ppm
Transmission IC p-pol.	$T_1^{(p)}$	100ppm
Transmission IC s-pol.	$T_1^{(s)}$	10ppm
Strahltaillen	$\omega_{0,y}/\omega_{0,z}$	178 μm /166 μm
Freier Spektralbereich	ν_0	750 MHz

Tabelle 3.1: Geometrische Resonatoreigenschaften.

		HF	LF
Feldzerfallsrate	κ	30.7 kHz	121.6 kHz
Linienbreite	δ_{FWHM}	9.9 kHz	38.7 kHz
Zerfallszeit	T_{res}	16.1 μs	4.2 μs

Tabelle 3.2: Verlustbedingte Eigenschaften der Resonatormoden.

der Resonatorlaser auf die Lowfinesse¹⁵ (LF) TEM₁₀ Mode stabilisiert. Zur Anregung der HF TEM₀₀ Mode wurde die Frequenz des dafür verwendeten Pumplichts mit dem Pump AOM 77.5 MHz, zur Anregung der LF TEM₂₀ Mode -84 MHz, relativ zur Frequenz des Resonatorlasers verschoben.

3.5.1 Highfinesse Linienbreite

Aus den Gleichgewichtslösungen der Resonatorfelder aus Gleichung (2.35) lässt sich die in Vorwärtsrichtung transmittierte Leistung

$$P_+(\Delta_{\text{eff}}) = \hbar\omega\nu_0 |a_+^{(gg)}|^2 \quad (3.5)$$

$$= \hbar\omega\nu_0 \frac{\eta^2 (\Delta_{\text{eff}}^2 + \kappa^2)^2}{(\Delta_{\text{eff}}^2 + \kappa^2)^2 + U_s^4 + 2U_s^2 (\Delta_{\text{eff}}^2 - \kappa^2)} \quad (3.6)$$

bestimmen. Unter Vernachlässigung der Spiegelrückstreuung mit $U_s = 0$ folgt aus Gleichung (3.6) die in Vorwärtsrichtung transmittierte Lorentzkurve

$$P_+(\Delta_{\text{eff}}) = \frac{T_0}{\left(\frac{\Delta_{\text{eff}}}{\kappa}\right)^2 + 1} \quad (3.7)$$

¹⁵Die Lowfinesse Moden des hier verwendeten Resonators besitzen im Vergleich zu anderen Resonatoren kleine Verluste, sind als eigentlich von hoher Finesse. Sie werden aber zur Abgrenzung von den mit s-polarisiertem Licht angeregten Moden dieses Resonators, welche von noch höherer Finesse sind, als Lowfinesse Moden bezeichnet.

des Ringresonators, mit $T_0 = \hbar\omega\nu_0\eta^2T_2^{(s)}$ und der Transmission des HR2 Resonatorspiegels $T_2^{(s)}$ in s-Polarisation. Daraus folgt aus $P_+(\Delta_{\text{FWHM}})/T_0 = 1/2$ und $\Delta_{\text{FWHM}} = 2\pi\delta_{\text{FWHM}}$ der Zusammenhang

$$\delta_{\text{FWHM}} = \frac{\kappa}{\pi} \quad (3.8)$$

zwischen der Linienbreite und der Feldzerfallsrate.

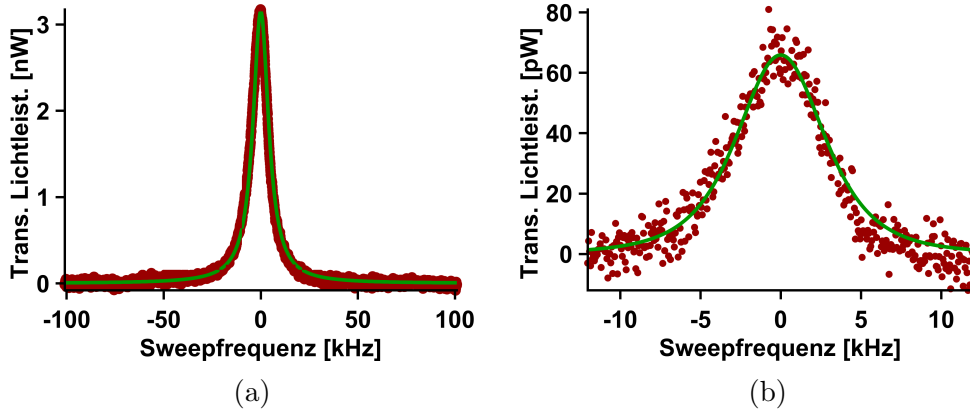


Abbildung 3.17: (a) Linienbreitenmessung der HF TEM_{00} Mode mit der Linienbreite $\delta_{\text{FWHM}} = 9.9 \text{ kHz}$ und der Zerfallsrate $\kappa_{\text{HF}} = 30.7 \text{ kHz}$. Mit einer Sweepzeit von 20 ms ist die gezeigte Lorentzkurve das Mittel aus 32 Einzelmessungen. (b) Bestimmung der Rückstreureate U_s aus der Amplitude des rückwärts laufenden Resonatorfeldes der TEM_{00} Mode.

Die Bestimmung der Linienbreite erfolgt durch die Aufnahme des Verlaufs der transmittierten Lichtleistung während eines Frequenzsweeps der Pumplichtfrequenz um die Resonanzfrequenz der jeweiligen Mode.

Abbildung 3.17 (a) zeigt den Verlauf der transmittierten Lichtleistung der HF TEM_{00} Mode während des Frequenzsweeps. Der Fit von Gleichung (3.7) liefert die HF Feldzerfallsrate $\kappa_{\text{HF}} = 30.7 \text{ kHz}$ und $T_0 = 3.15 \text{ nW}$. Dies entspricht einer Leistungslinienbreite von $\delta_{\text{FWHM}} = 9.9 \text{ kHz}$.

3.5.2 Rückstreureate

Die aus Gleichung (2.35) bestimmte, in Rückwärtsrichtung transmittierte Leistung lautet

$$P_-(\Delta_{\text{eff}}) = \hbar\omega\nu_0T_2^{(s)}|a_-^{(gg)}|^2 \quad (3.9)$$

$$= T_0 \frac{U_s^2}{(\Delta_{\text{eff}}^2 + \kappa^2)^2 + U_s^4 + 2U_s^2(\Delta_{\text{eff}}^2 - \kappa^2)}. \quad (3.10)$$

κ_{HF} und T_0 wurden bereits durch den Fit von $P_+(\Delta_{\text{eff}})$ bestimmt. Die Rückstreureate U_s befüllt die rückwärts laufende Mode. Die während des Sweeps der TEM₀₀ Mode rückgestreute Lichtleistung dient so der Bestimmung von U_s . Der Fit von Gleichung (3.10) an die während des Sweeps gemessene, in Rückwärtsrichtung transmittierte Leistung ist in Abbildung 3.17 (b) dargestellt. Als einziger freier Parameter lässt sich die Rückstreureate der Spiegel zu $U_s = 0.17\kappa$ bestimmen. Dieser Wert für U_s gilt nur für diese exemplarische Messung. Gewöhnlich schwankt U_s zwischen 0.1κ und 0.18κ , je Umlauflänge des Resonators [36].

Experimentell lässt sich die Rückstreureate U_s einfacher aus Gleichung (2.31) berechnen. Auf Resonanz mit $\Delta_{\text{eff}} = 0$ ist

$$U_s^2 = \kappa^2 \frac{|a_-|^2}{|a_+|^2} \quad (3.11)$$

$$= \kappa^2 \frac{P_-(0)}{P_+(0)} \quad (3.12)$$

proportional zum Verhältnis der Leistungen in beiden Umlaufrichtungen.

3.5.3 Lowfinesse Linienbreite

Analog zur Messung der HF Linienbreite wird die LF Linienbreite durch einen Sweep der Frequenz des Pumplichts in p-Polarisation über die Resonanzfrequenz der LF TEM₂₀ Mode bestimmt. Der in Abbildung 3.18 dargestellte Fit an die transmittierte Leistung liefert die Feldzerfallsrate $\kappa_{LF} = 121.6$ kHz, was einer Leistungslinienbreite von $\delta_{\text{FWHM}} = 38.7$ kHz entspricht.

3.5.4 Zerfallszeit

Für die Ring-Down Messung zur Bestimmung der Zerfallszeit T_{res} wird die Pumplichtfrequenz auf die Resonanzfrequenz der jeweiligen Mode gestellt. Nach einer ausreichenden Einschwingzeit des Lichtfelds der Mode wird das Pumplicht schnell ausgeschaltet. Die von der Mode transmittierte Leistung zeigt einen exponentiellen Zerfall, an welchen die Fitfunktion

$$P(t) = p_0 e^{-t/T_{\text{res}}} \quad (3.13)$$

angepasst wird. T_{res} ist die $1/e$ -Zerfallszeit der jeweiligen Resonatormode. Aus den in Abbildung 3.19 dargestellten Zerfallskurven berechnet sich die Zerfallszeit der mit s-polarisiertem Licht angeregten HF TEM₀₀ Mode mit $T_{\text{res}}^{(HF)} = 16.1$ μs , und der mit p-polarisiertem Licht angeregten LF TEM₂₀ Mode mit $T_{\text{res}}^{(LF)} = 4.2$ μs .

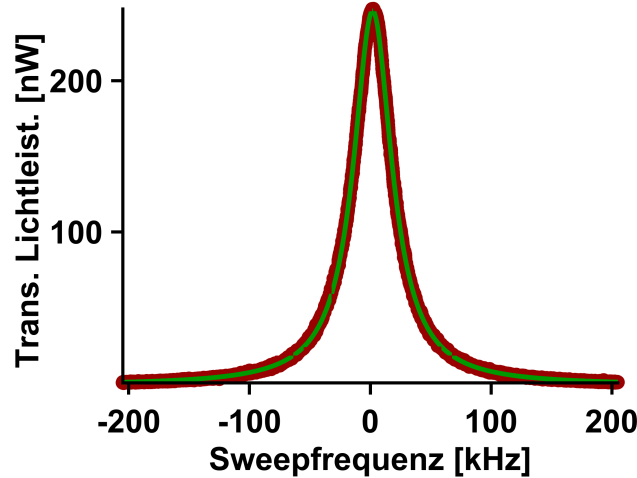


Abbildung 3.18: Linienbreitenmessung der LF TEM₂₀ Mode mit der Linienbreite $\delta_{\text{FWHM}} = 38.7 \text{ kHz}$ und der Zerfallsrate $\kappa_{\text{LF}} = 121.6 \text{ kHz}$. Mit einer Sweepzeit von 20 ms ist die gezeigte Lorentzkurve das Mittel aus 16 Einzelmessungen.

3.6 Frequenzdrift der Resonatormoden

Die experimentelle Notwendigkeit, die relativen Frequenzdrifts zwischen den Resonatormoden zu kompensieren, folgt aus den unterschiedlichen Steigungen der Modenfrequenzen unter Änderung der Umlauflänge. Die Resonanzfrequenz einer Mode berechnet sich aus den Abständen zwischen den 3 Resonatorspiegeln und den konfokalen Parametern der jeweiligen Gaußstrahlen zwischen den Spiegeln [55, 56, 45]. Die absolute Frequenz einer Resonatormode ist

$$f_{\text{qmn}} = \nu_0 \left(\frac{\theta_{\text{mn}} + \varphi_\pi}{2\pi} - q \right), \quad (3.14)$$

mit der longitudinalen Ordnungszahl q und den transversalen Ordnungszahlen¹⁶ m und n . Die Gouy-Phase $\theta_{\text{mn}} = \theta_{12} + \theta_{23} + \theta_{31}$ der jeweiligen Mode ist die Summe aus den Gouy-Phasen der drei Arme des Ringresonators. Die Gouy-Phase des langen Arms θ_{12} wird zwischen dem Einkoppelspiegel IC und dem Hochreflektor HR2 akkumuliert, und θ_{23} zwischen HR2 und HR1. Aus Symmetriegründen gilt $\theta_{31} = \theta_{23}$ für

¹⁶Ordnungszahlen, die in der Basis der Hermite Polynome der Resonatorebene zugeordnet werden. In diesem Fall sind das alle Ordnungszahlen m , welche die Anzahl der Intensitätsminima der Mode in der y -Richtung festlegen. Der z -Richtung sind die Ordnungszahlen n zugeordnet. Als rechtshändiges Koordinatensystem dient hier das bereits oben eingeführte. Die longitudinale Ausbreitungsrichtung der Resonatormode entspricht der x -Achse in der Laborebene. Die y -Achse entspricht der transversalen Strahlrichtung in der Laborebene. Die z -Achse steht senkrecht auf der Laborebene, transversal zur Ausbreitungsrichtung des Resonatorstrahls und entspricht „oben“ und „unten“.

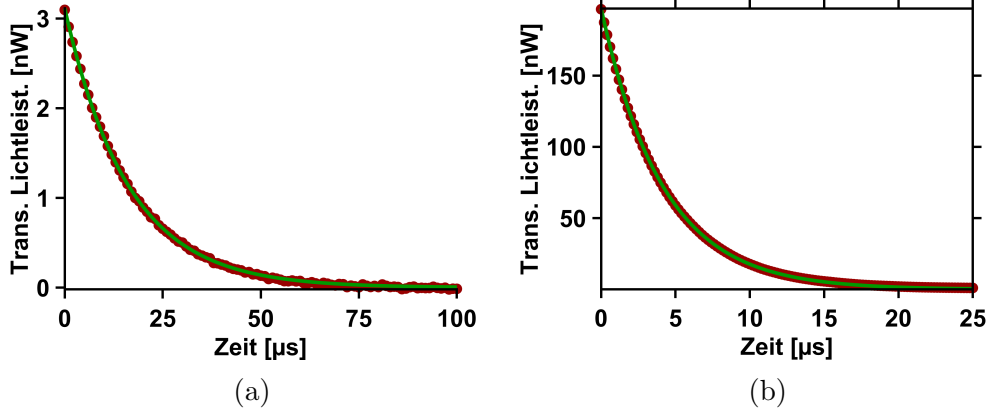


Abbildung 3.19: (a) Ring-Down zur Messung der Zerfallszeit der Highfinesse TEM₀₀ Mode mit $T_{\text{res}}^{(HF)} = 16.1 \mu\text{s}$. (b) Ring-Down zur Messung der Zerfallszeit der LF TEM₂₀ Mode mit $T_{\text{res}}^{(HF)} = 4.2 \mu\text{s}$.

die Gouy-Phase zwischen HR1 und IC. Moden mit ungeraden m-Ordnungszahlen erhalten, aufgrund der ungeraden Anzahl an Vorzeichenwechseln der Feldamplitude bei Reflexion, durch $\varphi_{\pi} = -\frac{\pi}{2} [(-1)^m - 1]$ einen zusätzlichen Phasenfaktor π . Die Gouy-Phasen der einzelnen Arme

$$\theta_{12} = (1 + 2m) \arctan\left(\frac{d_{12}}{2z_{0y12}}\right) + (1 + 2n) \arctan\left(\frac{d_{12}}{2z_{0z12}}\right) \quad (3.15)$$

und

$$\begin{aligned} \theta_{23} = & \frac{1}{2}(1 + 2m) \arctan\left(\frac{d_{\text{asym},y}}{z_{0y23}}\right) \\ & + \frac{1}{2}(1 + 2n) \arctan\left(\frac{d_{\text{asym},z}}{z_{0z23}}\right) \\ & + \frac{1}{2}(1 + 2m) \arctan\left(\frac{d_{23} - d_{\text{asym},y}}{z_{0y23}}\right) \\ & + \frac{1}{2}(1 + 2n) \arctan\left(\frac{d_{23} - d_{\text{asym},z}}{z_{0z23}}\right) \end{aligned} \quad (3.16)$$

hängen jeweils von ihren konfokalen Parametern z_{0y12} , z_{0z12} , z_{0z23} und z_{0y23} in y- und z- Richtung ab, sowie von den Abständen d_{12} und d_{23} der Spiegel voneinander und den Abständen der Spiegel zu den jeweiligen Taillen $d_{\text{asym},y}$ und $d_{\text{asym},z}$. Der Astigmatismus des Ringresonators hat in den kurzen Seitenarmen unterschiedliche Lagen der Taille der y- und z-Richtungen zur Folge. Diesem Umstand wird mit $d_{\text{asym},y}$ und $d_{\text{asym},z}$ Rechnung getragen.

Die theoretische Vorhersage der Modenfrequenzen in Gleichung 3.14 und das gemessene Modenspektrum werden über einen freien Spektralbereich in Abbildung

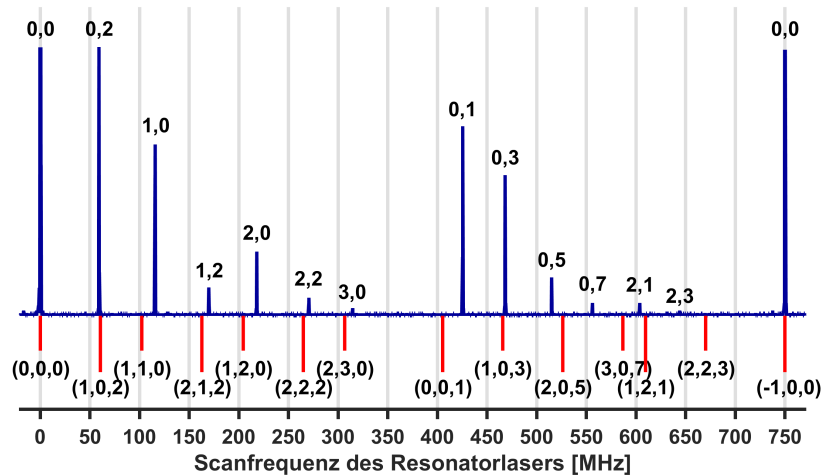


Abbildung 3.20: Schema des gemessenen Modenspektrums (blau) im Vergleich mit der theoretischen Vorhersage (rot) über einen Spektralbereich. Die in Transmission gemessenen Moden sind mit den transversalen Ordnungszahlen m,n gekennzeichnet. Zusätzlich enthält die Kennzeichnung der theoretischen Vorhersage auch die longitudinale Ordnungszahl der Form (q,m,n) . Zur Veranschaulichung sind nur die relativen q -Werte dargestellt.

3.20 verglichen. Für die Detektion der blau dargestellten Transmission der Resonatormoden wird der Resonator mit p -polarisiertem Licht angeregt. Die Frequenz des ungelockten Resonatorlasers scannt dabei über einen freien Spektralbereich. Durch eine leichte Dejustage der Pumplichteinkopplung werden mehrere transversale Moden angeregt. Die Abweichung der rot eingezeichneten theoretischen Vorhersage der Resonanzfrequenzen zu den gemessenen Resonanzen ist nicht größer als 30 MHz. Die gute Übereinstimmung ermöglicht die Planung des experimentellen Aufbaus anhand der Vorhersagen von Gleichung 3.14, ohne die Notwendigkeit einer vorhergehenden experimentellen Analyse.

Die Gouy-Phasen in Gleichung (3.15) und (3.16), und damit die Modenfrequenzen, sind proportional zu den transversalen Ordnungszahlen. Je größer ihre Werte, desto stärker ist die Auswirkung von Änderungen der Umlauflänge auf die Modenfrequenzen. Eine Änderung der Reflexionswinkel oder der Armlängen hat eine Änderung der Argumente der arctan-Funktionen zu Folge. Damit haben die Frequenzen unterschiedlicher Moden verschiedene Steigungen, unter Änderungen der Umlauflänge des Resonators.

In Abbildung 3.21 ist der Verlauf der Modenfrequenzen relativ zur $(1,1,0)$ -Lockmode dargestellt, in Abhängigkeit der Abweichung der Umlauflänge des Resonators von $L=0.4$ m. Änderungen der relativen Modenfrequenzen liegen in der Größenordnung

MHz/mm = kHz/ μm . Temperaturdrifts der Resonatorgrundplatte aus Edelstahl¹⁷ im Bereich von einigen 0.1 K haben bereits Umlauffängenänderungen von μm zur Folge. Diese Umstände machen eine aktive Drittkompensation, wie sie von Matlab durchgeführt wird, notwendig.

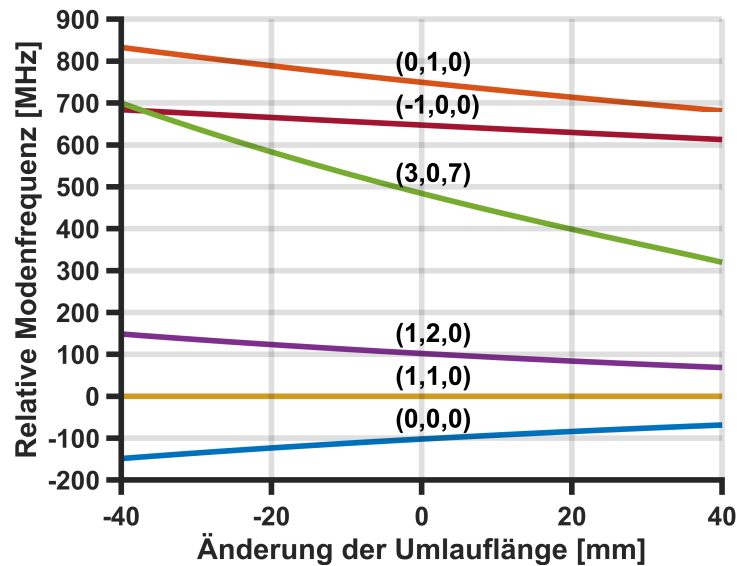


Abbildung 3.21: Verlauf der mit (q,m,n) gekennzeichneten Modenfrequenzen, bei Abweichung der Umlaufflänge des Resonators von $L=0.4\text{ m}$. Die Frequenzverläufe sind dargestellt relativ zur $(1,1,0)$ -Lockmode.

Abschließend zeigt Abbildung 3.22 das Frequenzschema der im Experiment verwendeten Resonatormoden. Die Frequenz des Resonatorlasers ist 180 MHz relativ zur Frequenz der Lockmode fixiert. Die oben besprochenen relativen Frequenzdrifts zwischen den Moden werden mit dem Pump AOM kompensiert, welches im Bereich von 77.5 MHz arbeitet.

¹⁷Bei einem Wärmeausdehnungskoeffizienten von Edelstahl mit $\alpha_{\text{stahl}} = 16 \mu\text{m}/(\text{m} \cdot \text{K})$.

4 Messungen

4.1 Messung der Ein-Photon-Lichtverschiebung U_0

Wie bereits in Abschnitt 2.3 erwähnt ist die Wirkung eines Atoms in einer Resonatormode, für große atomare Verstimmungen, rein dispersiv. Ein einzelnes Atom verschiebt die Resonanzfrequenz der Resonatormode um U_0 . Gleichung (2.50b) ist zu entnehmen, dass sich die dispersive Wirkung mit der Anzahl N der Atome multipliziert. Damit lässt sich eine durch die Atome eingeführte effektive Verstimmung $\Delta_{\text{eff}} = \Delta_c + \Delta_{\text{disp}}$ definieren, mit $\Delta_{\text{disp}} = U_0 N$.

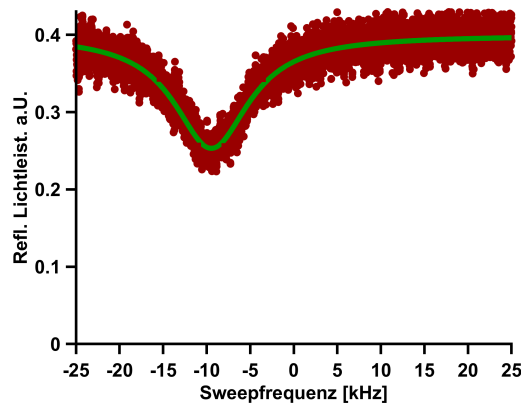


Abbildung 4.1: Bestimmung von Δ_{disp} durch einen Sweep der Pumplichtfrequenz über die Resonanzfrequenz der Pumpmode. Das am Resonator reflektierte Licht wird mit der Ref. PD (siehe Abbildung 3.7) detektiert. Aus dem Fit einer Lorentzkurve (grün) an den gemessenen Verlauf (rot) des reflektierten Lichts wird Δ_{disp} bestimmt, hier für $\Delta_a/2\pi = 51$ GHz.

Um U_0 zu bestimmen, werden also N Atome in der Pumpmode platziert und die durch die Atome verschobene Resonanzfrequenz der Resonatormode, und damit der Wert Δ_{disp} gemessen. Dazu wird ein Frequenzsweep um die Resonanzfrequenz der Pumpmode durchgeführt. Die Leistung des Pumplichts wird dabei möglichst klein gewählt, um zu jeder Zeit deutlich unter der kritischen Kopplungsstärke (CARL-Schwelle) zu bleiben. Abbildung 4.1 zeigt den Verlauf der am Resonator reflektierten Leistung, während eines Sweeps der Frequenz des Pumplichts um die Resonanzfrequenz der Pumpmode. An den gemessenen Verlauf der reflektierten Lichtleistung

(rot) wird eine Lorentzkurve (grün) gefitet. Die Frequenz, bei welcher die Lorentzkurve ihr Minimum hat, markiert die Verstimmung Δ_{disp} des Resonators durch die Atome. Pro experimenteller Zyklus wird ein Sweep, für eine Atomzahl durchgeführt. Abbildung 4.2 zeigt den linearen Verlauf von Δ_{disp} für verschiedene Atomzahlen und atomare Verstimmungen mit $\Delta_a > 0$. An die Messpunkte von Δ_{disp} , für eine atomare Verstimmung, wird eine Gerade gefitet. Die Steigung als Fitparameter entspricht dem zu bestimmenden Wert von U_0 der jeweiligen atomaren Verstimmung. Tabelle 4.1 präsentiert die Ergebnisse der Geradenfits aus Abbildung 4.2.

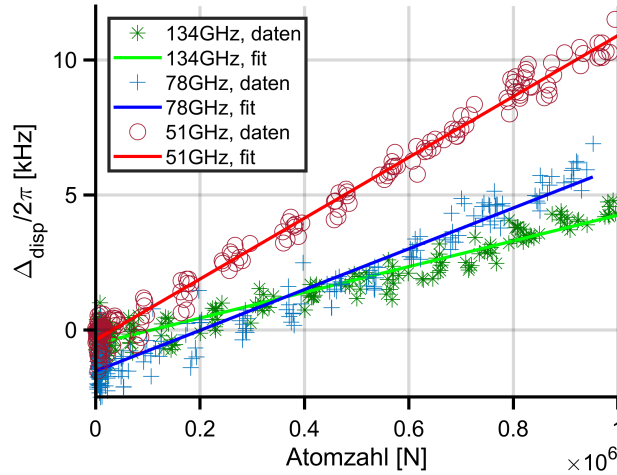


Abbildung 4.2: Verläufe von Δ_{disp} mit zugehörigem Fit für verschiedene atomare Verstimmungen $\Delta_a > 0$.

$\Delta_a/2\pi$	$U_0/2\pi$
134 GHz	4.8 mHz
78 GHz	7.6 mHz
51 GHz	11.3 mHz

Tabelle 4.1: Ergebnisse für U_0 aus Geradenfits an Daten mit $\Delta_a > 0$.

Die Verläufe von Δ_{disp} für rotverstimmtes Pumplicht, also $\Delta_a < 0$, mit den zugehörigen Geradenfits sind in Abbildung 4.3 und die Ergebnisse der Geradenfits in Tabelle 4.2 dargestellt.

Die Werte einiger Geraden in Abbildung 4.1 und Abbildung 4.2 liegen für $N = 0$ nicht im Ursprung. Dieser Offset von Δ_{disp} kann durch eine Verschiebung der Messwerte erklärt werden. Die Resonanzfrequenz der Pumpmode wird hier zu Beginn des Zyklus bestimmt. In den mehr als 40 s bis zum Sweep der Pumplichtfrequenz kann der Resonator thermisch bedingte Längenänderungen erfahren. Diese haben

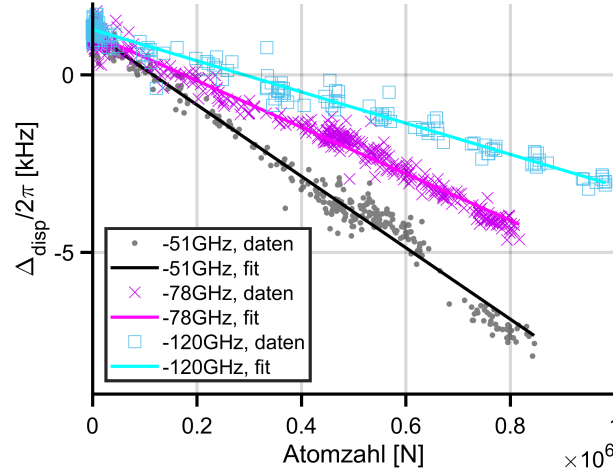


Abbildung 4.3: Verläufe von Δ_{disp} mit zugehörigem Fit für verschiedene atomare Verstimmungen $\Delta_a < 0$.

$\Delta_a/2\pi$	$U_0/2\pi$
-51 GHz	-10.1 mHz
-78 GHz	-6.6 mHz
-120 GHz	-4.4 mHz

Tabelle 4.2: Ergebnisse für U_0 aus Geradenfits an Daten mit $\Delta_a < 0$.

einen zyklischen Anteil, dessen Ursache in den durch den experimentellen Zyklus eingeführten Wärmeeinträgen, wie der Betrieb der MOT-, Transfer- oder Magnetfallenspulen, liegt. Im thermischen Gleichgewicht der Anlage sollte der Frequenzversatz durch die zyklischen Anteile einen konstanten Beitrag erhalten. Einen, auf der Zeitskala von einigen Stunden, linearen Beitrag liefert beispielsweise eine Temperaturänderung des Labors. Die so verursachte Verschiebung der Pumpmodenresonanzfrequenz hat keine Auswirkungen auf die Steigung U_0 von Δ_{disp} , solange alle Messpunkte von der gleichen Umlaufänderungsrate betroffen sind.

Durch die relativ kleine Linienbreite von $\delta_{FWHM}^{(HF)} = 9.9$ kHz werden diese Drifteffekte sichtbar, die in der gleichen Größenordnung liegen wie die Linienbreite selbst.

Aus den gemessenen Werten von U_0 lässt sich aus dem Zusammenhang

$$U_0 = \frac{g^2}{\Delta_a} \quad (4.1)$$

die Kopplungsstärke¹ g bestimmen [44, 28]. Aus allen sechs Messungen von U_0

¹Auch Vakuum Rabifrequenz genannt.

ergibt sich eine mittlere Kopplungsstärke

$$g = 2\pi(23.6 \text{ kHz} \pm 1.1 \text{ kHz}). \quad (4.2)$$

Der Fehler entspricht einer Standardabweichung. Umgekehrt könnte sich dieses Verfahren auch eignen um die Atomzahl in der Resonatormode zu bestimmen.

4.2 Zeitliche Entwicklung

4.2.1 Ohne Spiegelrückstreuung

Die in Abschnitt 2.4 beschriebene Streudynamik eines über der kritischen Kopplung einseitig gepumpten BEC's, das sich im Zentrum der Pumpmode befindet, lässt sich durch numerische Lösung der CARL-Gleichungen (2.50) abschätzen. Der Pumpvorgang wird in diesem Abschnitt zuerst mit experimentellen Parametern simuliert und anschließend mit gemessenen Verläufen des rückgestreuten Lichtfelds verglichen.

Der Pumpvorgang wird simuliert für verschiedene Verstimmungen Δ_{eff} im Bereich von $\Delta_{\text{eff}}/\omega_{\text{R}} = -5$ bis $\Delta_{\text{eff}}/\omega_{\text{R}} = 5$. Die Pumpleistung wird langsam innerhalb von $30 \mu\text{s}$ eingeschaltet, um ein Überschwingen des Lichtfelds der Pumpmode bei Verstimmungen $\Delta_{\text{eff}} \neq 0$, während des Einschwingvorgangs, zu unterdrücken. Die Parameter für welche die CARL-Gleichungen simuliert werden sind in Tabelle 4.3 dargestellt. Hier ist t_{pump} die Pumpdauer. Durch Festlegen der Gleichgewichtsbesetzung² mit $|a_+^{(\text{gg})}|^2$ berechnet sich die festzulegende Pumprate

$$\eta = \sqrt{(|a_+^{(\text{gg})}|^2(\Delta_{\text{eff}}^2 + \kappa^2))} \quad (4.3)$$

aus Gleichung (2.35), der Gleichgewichtslösung für das Pumpfeld des leeren Resonators ohne Spiegelrückstreuung ($\mathbf{b} = 0$). Um die Summen in Gleichung (2.50) und den Rechenaufwand endlich zu halten, berücksichtigen die Simulationen nur die $n = -5$ bis $n = 5$ Impulszustände.

Die Startbedingungen werden möglichst nah am Experiment gewählt. Zum Startzeitpunkt ist der ruhende Impulszustand mit $n = 0$ voll besetzt, die Pumpmode leer und die Testmode mit einem Photon besetzt. Die Abbildungen 4.4 bis 4.6 zeigen die zeitlichen Verläufe der Besetzungen der Impulszustände und der Testmode. Die ersten $50 \mu\text{s}$ verweilt die Besetzung für alle Verstimmungen im ruhenden Impulszustand. Der Zeitpunkt an dem die CARL-Dynamik startet ist durch den Transfer der Besetzung des ruhenden Impulszustand in höhere Impulszustände markiert. Die Schwelle in diese dynamische Phase ist in Abbildung 4.4 (a) gut zu erkennen. Für

² a_{\pm} entspricht der Feldstärke der Pump- oder Testmode, die $|a_{\pm}|^2$ Photonen erzeugen. a_{\pm} ist die auf ein Photon normierte Feldstärke. Darum ist die in Pump- oder Testmode umlaufende Leistung $P_{\pm} = \hbar\omega\nu_0|a_{\pm}|^2$.

$$\begin{aligned}
 \Delta_a &= -50 \text{ GHz} \\
 \kappa &= 30.7 \text{ kHz} \\
 U_s &= 0 \\
 N &= 3.5 \cdot 10^5 \\
 |a_+|^2 &= 2 \cdot 10^7 \\
 t_{\text{pump}} &= 1 \text{ ms}
 \end{aligned}$$

Tabelle 4.3: Verwendete Parameter zur Simulation der CARL-Gleichungen (2.50). Die Ergebnisse sind in Abbildung 4.4 bis 4.6 dargestellt, ohne Berücksichtigung der Spiegelrückstreuung.

betragsmäßig kleinere Verstimmungen wird die Schwelle früher überschritten. In Richtung negativer Verstimmung steigt der Zeitpunkt der Schwellüberschreitung stärker an, als in Richtung positiver Verstimmung. Nach der Pumpzeit ist die Schwelle für große negative Verstimmung, für die eingestellte Pumpstärke, noch nicht überschritten. Das verzögerte Überschreiten der Schwelle bei $\Delta_{\text{eff}} = 0$ folgt

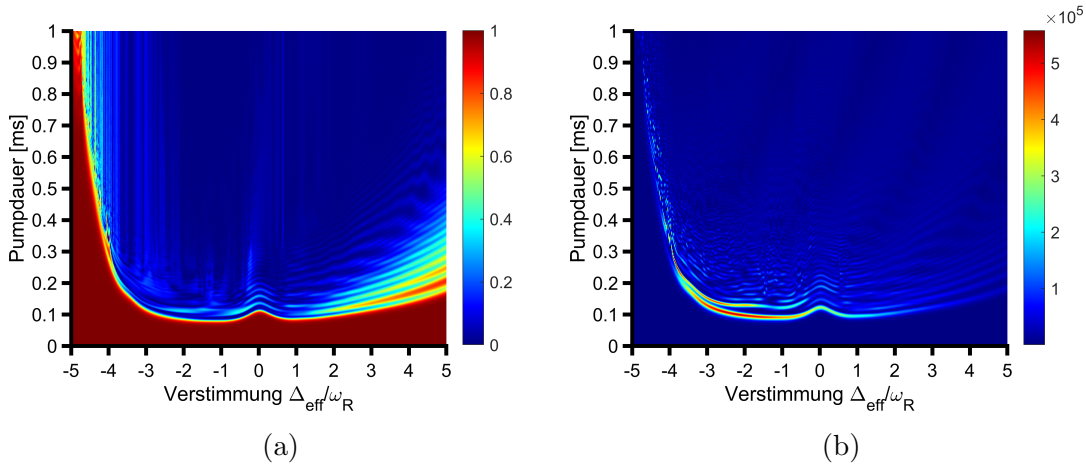


Abbildung 4.4: Zeitliche Verläufe der relativen Besetzungen $|c_0|^2/N$ des (a) ruhenden Impulszustands und (b) der Testmode $|a_-|^2$, in Abhängigkeit der Verstimmungen Δ_{eff} .

aus dem langsamen Einschalten der Pumprate, welches für Verstimmungen $\Delta_{\text{eff}} \neq 0$ ein Überschwingen unterdrückt, auf Resonanz aber die Aufbauzeit der Gleichgewichtsbesetzung verzögert.

In Abbildung 4.4 ist zu erkennen, wie sich die Besetzung der Testmode an der Schwelle pulsartig erhöht. Für negative Verstimmung ist die Pulshöhe am größten und nimmt zu positiveren Verstimmungen hin ab. In den Abbildungen 4.5b, 4.6a und 4.6b ist an der Schwelle zu erkennen, dass für negative Verstimmungen die Besetzung schnell in höhere Impulszustände wechselt. Durch diese höhere Umstreurate

wird die Testmode für negative Verstimmung an der Schwelle stärker besetzt. Für positive Verstimmungen geschieht der Transfer zu höheren Impulzuständen langsamer und die Testmode ist schwächer besetzt.

Dieses Verhalten bestätigt die Aussage des 3-Moden Modells in Abschnitt 2.6 an der Schwelle, dass sich das System für negative Verstimmungen aufgrund seines Kopplungsverhaltens schneller entwickelt als für positive Verstimmung.

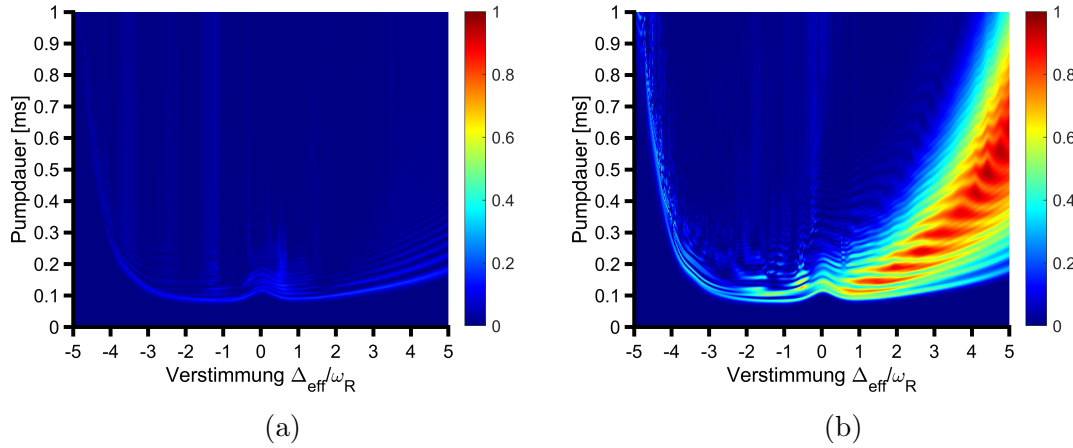


Abbildung 4.5: Simulation der zeitlichen Entwicklung der relativen Besetzungen $|c_{-1}|^2/N$ in (a) und $|c_1|^2/N$ in (b), in Abhängigkeit von Δ_{eff} .

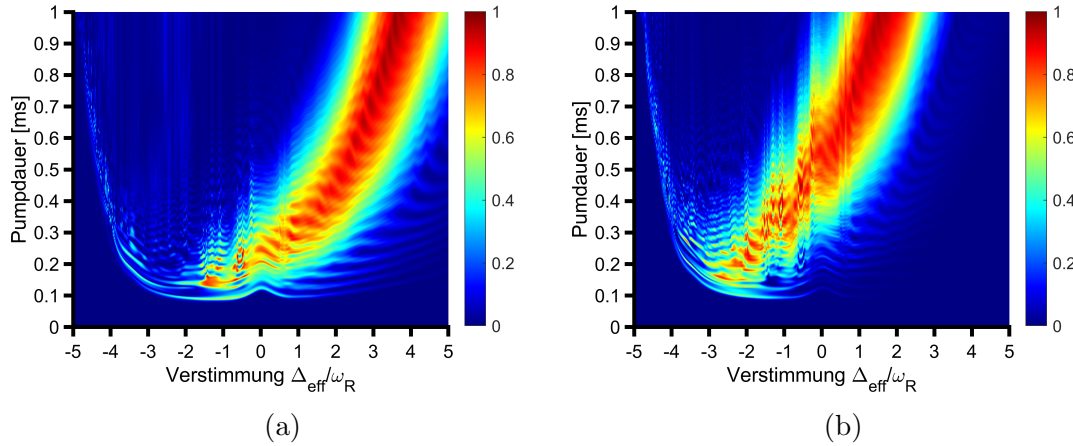


Abbildung 4.6: Simulation der zeitlichen Entwicklung der relativen Besetzungen $|c_2|^2/N$ in (a) und $|c_3|^2/N$ in (b), in Abhängigkeit von Δ_{eff} .

Aus der Energieerhaltung des 2-Photonen-Streuvorgangs eines Photons an einem Atom, bei dem ein Impuls von $2\hbar k$ übertragen wird, folgt für seine Verstimmung

nach dem Streuvorgang

$$\tilde{\Delta}'_{\text{eff}} = \tilde{\Delta}_{\text{eff}} + 2n + 1. \quad (4.4)$$

Dabei ist $\tilde{\Delta}_{\text{eff}} = \Delta_{\text{eff}}/\omega_r$ die relative Verstimmung des Pumpphotons vor dem Streuvorgang und n der Index des Impulszustands vor dem Streuvorgang. Gleichung (4.4) legt fest um welche Frequenz ein Photon bei einem Streuvorgang rotverschoben wird. Ein Pumpphoton mit der Verstimmung $\tilde{\Delta}_{\text{eff}} = -1$, das an einem ruhenden Atom ($n = 0$) streut, ist in Resonanz $\tilde{\Delta}'_{\text{eff}} = 0$ mit der Testmode. Für ein ruhendes BEC wird bei dieser Verstimmung des Pumplichts darum am wenigsten Pumpleistung benötigt um die Schwelle in die CARL-Dynamik zu überschreiten, da das rückgestreute Photon in der Testmode auf Resonanz seine größte resonante Überhöhung erfährt. Das aus der Interferenz zwischen Pumpmode und Testmode entstehende Dipolpotential kann so seine größte Amplitude erreichen und der selbstverstärkende Prozess der CARL-Dynamik ist dann am effektivsten.

Aus Gleichung (4.4) folgt auch ein qualitativer Unterschied der Streuprozesse zwischen negativer und positiver Verstimmung. Ausgehend von einem ruhenden BEC, werden an ihm gestreute Photonen für $\tilde{\Delta}_{\text{eff}} > -1$ weiter verstimmt von der Testmodenresonanz. Dagegen werden gestreute Photonen für $\tilde{\Delta}_{\text{eff}} < -1$ resonanter mit der Testmode. Dies erklärt die unterschiedlichen Ablaufgeschwindigkeiten zwischen negativer und positiver Verstimmung. Für negative Verstimmungen wird der wiederholte Streuvorgang, also das Streuen des Pumplichts an Atomen mit steigenden Impulszuständen, bis zu einem bestimmten Impulszustand immer effektiver. Für positive Verstimmungen verliert der wiederholte Streuvorgang immer weiter an Effektivität.

Das asymmetrische Überschreiten der Schwelle, ist in Übereinstimmung mit der Beobachtung des asymmetrischen Stabilitätsdiagramms bezüglich der Verstimmung von Dag Schmidt [34] und Hannah Tomczyk [35]. Obwohl der Streuprozess für negative Verstimmungen zuerst an Effektivität gewinnt sobald er startet, steigt hier die kritische Pumpleistung proportional zu $|\tilde{\Delta}_{\text{eff}}|^3$, gegenüber positiver Verstimmung wo die kritische Pumpleistung mit $\tilde{\Delta}_{\text{eff}}$ skaliert. Nach [34] reduziert sich im 3-Moden-Modell bei kritischer Kopplung die Anzahl der Eigenzustände von drei auf zwei. Dabei entarten auch die Eigenwerte der koppelnden Eigenzustände. Für $\tilde{\Delta}_{\text{eff}} < -1$ besitzen die zu entartenden Eigenwerte eine zusätzliche Abhängigkeit von der Verstimmung, im Vergleich zu den koppelnden Eigenzuständen für $\tilde{\Delta}_{\text{eff}} > -1$, wodurch bis zur Entartung eine stärkere Kopplungsrate aufgebracht werden muss.

4.2.2 Messung der Entwicklung mit Spiegelrückstreuung

Eine Messung der zeitlichen Entwicklung der Impulszustände ist mit hohem Zeitaufwand verbunden, da jeder Zeitschritt einen eigenen Zyklus benötigen würde um die Besetzungen aus den Flugzeitbildern auswerten zu können. Durch Drifts der Atomzahlen über längere Zeiträume wären die einzelnen Messungen auch schwerer miteinander zu vergleichen. Wesentlich weniger Zeit wird benötigt, beschränkt man sich auf die Entwicklung der Besetzung der Testmode. So benötigt die Aufnahme des Verlaufs für jede Verstimmung nur einen Zyklus.

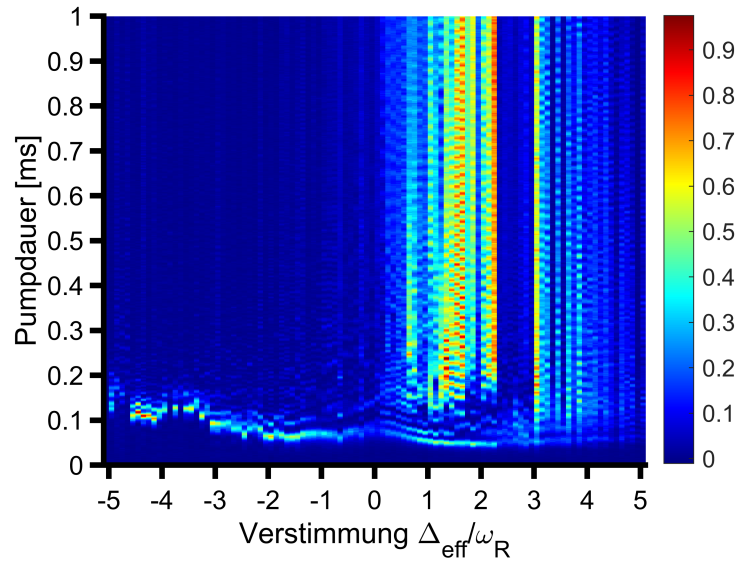


Abbildung 4.7: Gemessene zeitliche Entwicklung der Besetzungen der Testmode $|a_-|^2$, in Abhängigkeit der Verstimmungen Δ_{eff} . Die Pumpmode ist für alle Verstimmungen mit $|a_+|^2 = 2.7 \cdot 10^7$ besetzt. Der stabile Bereich beginnt bei $\Delta_{\text{eff}}/\omega_r > 3$.

In Abbildung 4.7 ist die gemessene zeitliche Entwicklung von $|a_-|^2$, für Verstimmungen von $\Delta_{\text{eff}}/\omega_r = -5$ bis $\Delta_{\text{eff}}/\omega_r = 5$, mit einer Auflösung der Verstimmung von $0.1\omega_r$ dargestellt. Die Einheit der Farbskala ist in Volt. Dargestellt ist das unbearbeitete Photodiodensignal der Rück. PD. Die mittlere Atomzahl der dargestellten Messung beträgt $N = 3 \cdot 10^5$, und die Spiegelrückstreuung $U_s = 0.16\kappa$. Aus der gemessenen transmittierten Leistung der Pumpmode berechnet sich die mittlere Besetzung der Pumpmode von $|a_+|^2 = 2.7 \cdot 10^7$.

Auffällig sind die unterschiedlich starken Besetzungen der Testmode zwischen negativer und positiver Verstimmung. Für negative Verstimmung ist zu Beginn des Pumpvorgangs eine pulsartige Besetzung der Testmode zu erkennen, welche die Umverteilung der Atome in höhere Impulszustände markiert.

Für positive Verstimmung gibt es zwei Bereiche erhöhter Intensität. Der Bereich

zwischen $\Delta_{\text{eff}}/\omega_r = 0$ und $\Delta_{\text{eff}}/\omega_r = 2.4$ ist geprägt von stark schwankender Besetzung der Testmode. Ein anderes Verhalten ist für $\Delta_{\text{eff}}/\omega_r > 3$ zu beobachten. Hier stellt sich, bis auf leichte Oszillationen, nach einer Einschwingzeit eine stationäre Besetzung der Testmode ein, die deutlich über dem Wert der rein durch Spiegelrückstreuung erzeugten Besetzung liegt. Dies liegt daran, dass sich die Atome in dem von der Spiegelrückstreuung erzeugten Dipolpotential anordnen. Dabei bilden sie einen in 2.7.2 beschriebenen stationären Strukturfaktor aus. Die Atome streuen so ebenfalls Pumplicht in die Testmode um und verstärken das durch die Spiegelrückstreuung erzeugte Dipolpotential, in welchem sie gehalten werden. Dadurch werden die Atome sozusagen an das durch die Spiegelrückstreuung definierte Dipolpotential *gepinnt*³. Dieser stabilisierende Mechanismus funktioniert nur für

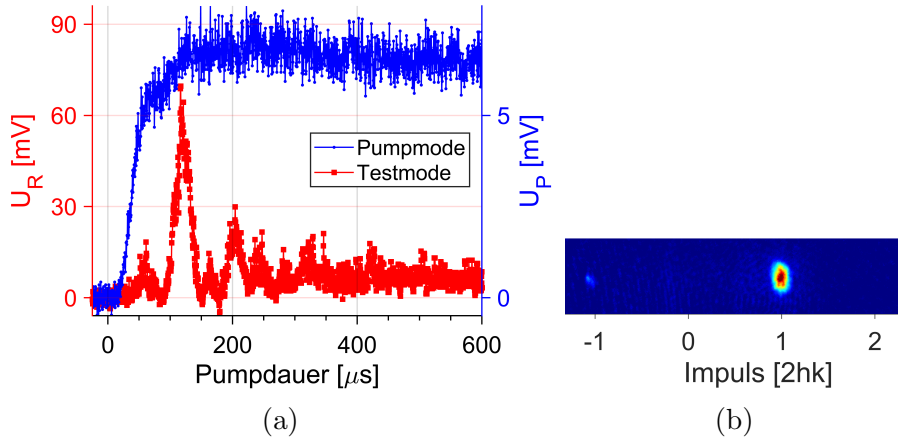


Abbildung 4.8: Exemplarische Messungen der CARL-Dynamik bei $\Delta_{\text{eff}}/\omega_r = -1.05$. (a) Photodiodensignal des transmittierten Pumplichts (blau) und des rückgestreuten Testmodenlichts (rot). (b) Flugzeitbild der atomaren Verteilung nach $TOF = 35$ ms. Die CARL-Dynamik transferiert die atomare Besetzung von dem $n = 0$ in den $n = 1$ Impulszustand.

positive Verstimmungen. Für negative Verstimmungen ist keine stationäre Besetzung der Testmode oder der Impulszustände zu beobachten. Dies kann zum einen erklärt werden durch den qualitativen Unterschied der Streuprozesse für unterschiedliche Verstimmungen, wie in Abschnitt 4.2.1 beschrieben. Da der Streuprozess in höhere Impulszustände für positive Verstimmungen nicht effizienter wird, koppeln die Atome nicht mit dem bewegten Dipolpotential, sondern mit dem stationären Dipolpotential das durch die Spiegelrückstreuung erzeugt wird. Eine wei-

³Im Kontext der Selbstorganisation von komplexen Systemen, wird mit dem *Pinnen* die Auswirkung einer externen Beeinflussung von selbstorganisierender Dynamik beschrieben, beispielsweise durch die Fixierung von Spiralwellen an ein Hindernis [57] oder der Kontrolle von Netzwerkstrukturen durch die Steuerung ausgewählter Knoten [58, 59].

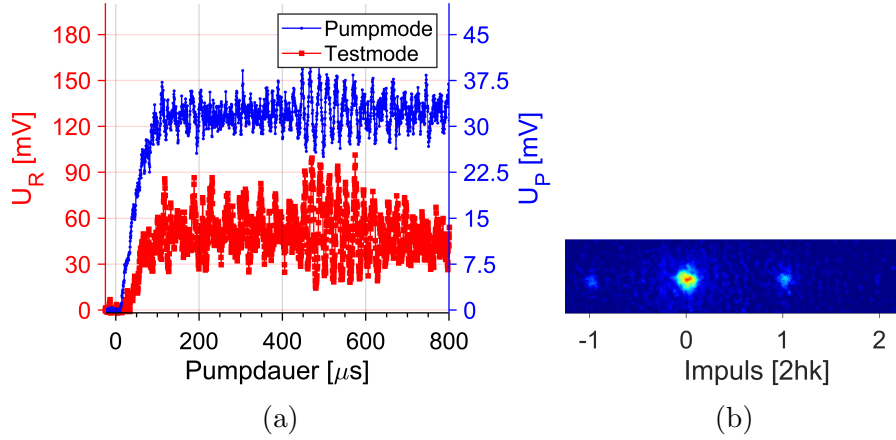


Abbildung 4.9: Exemplarische Messungen der Resonatordynamik im stationären Bereich bei $\Delta_{\text{eff}}/\omega_r = 3.3$. (a) Photodiodensignal des transmittierten Pumplichts (blau) und des Testmodenlichts (rot). (b) Flugzeitbild der atomaren Verteilung nach $TOF = 35$ ms zeigt die typische symmetrische Verteilung der Impulszustände im stationären Bereich.

tere Erklärung wird durch das 3-Moden Modell aus Abschnitt 2.6 gegeben. Für positive Verstimmung sind die Eigenenergien der koppelnden Eigenvektoren sehr klein und verschwinden im Grenzwert großer Verstimmung. Die Stehwelle der Spiegelrückstreuung kann bei positiver Verstimmung injizierend auf das System wirken, da die Energie des Systems nahezu der einer Stehwelle entspricht. Für negative Verstimmung ist die Energiedifferenz zwischen den koppelnden Eigenvektoren und der Stehwelle der Spiegelrückstreuung zu groß und die Injektion greift nicht.

Exemplarische Verläufe der Lichtfelder und der zugehörigen Flugzeitbilder der atomaren Besetzung nach dem Pumpvorgang sind in Abbildung 4.8 und 4.9 dargestellt. Die typische CARL-Dynamik in Abbildung 4.8 ist an dem puls förmigen Verlauf des Testmodenfelds und der damit verbundenen Besetzung eines höheren Impulszustands erkennbar. Dem gegenüber steht die in Abbildung 4.9 dargestellte Messung, die mit einer Verstimmung von $\Delta_{\text{eff}}/\omega_r = 3.3$ im stationären Bereich durchgeführt wird. Hier bildet sich mit dem Pumplicht ein stationärer Strukturfaktor aus, der Pumplicht in die Testmode umstreut. Die symmetrische Besetzung der Impulszustände deutet auf die Realisierung des ψ_1 Materie-Eigenzustands aus Abschnitt 2.7.1 hin.

Ungeklärt ist das Auftreten der schnellen Oszillationen in den Verläufen von Pump- und Testmodenlicht ab einer Pumpdauer von 400 μs. Die Tatsache, dass beide detektierenden Photodioden die Transmission der Lichtfelder durch unterschiedliche Resonatorspiegel beobachten, deutet auf eine in der Resonatordynamik begründete Ursache.

4.3 Stabilitätsdiagramm mit Spiegelrückstreuung

Das Stabilitätsverhalten des Systems lässt sich über einen breiteren Parameterbereich analysieren, indem nach einer festen Pumpzeit für verschiedene Pumpleistungen die Besetzung einzelner Impulszustände in Abhängigkeit der Verstimmung Δ_{eff} aufgetragen wird. In den entstehenden Stabilitätsdiagrammen lassen sich stabile und instabile Bereiche identifizieren.

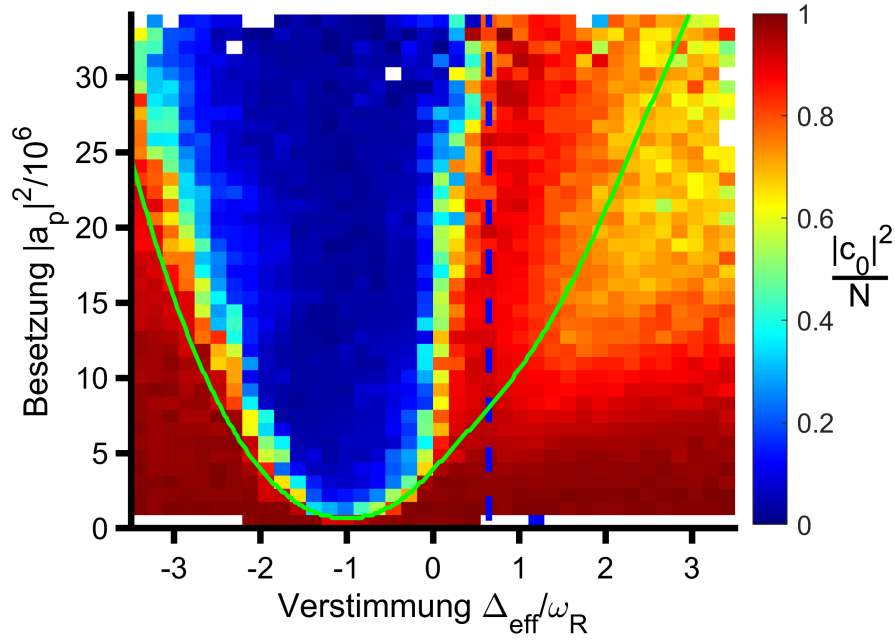


Abbildung 4.10: Gemessenes Stabilitätsdiagramm. Relative Besetzung $|c_0|^2/N$ nach einer Pumpdauer von 1.5 ms, in Abhängigkeit der Besetzung der Pumpmode $|a_+|^2$ und der Verstimmung Δ_{eff} . Die gestrichelte blaue Linie markiert die aus Gleichung (2.110) berechnete kritische Verstimmung. Die grüne durchgezogene Linie stellt die numerisch bestimmte Stabilitätsgrenze ohne Spiegelrückstreuung dar.

Für diese Messung wird ein BEC in der Pumpmode platziert und das Pumplicht innerhalb von 30 μs eingeschaltet. Die Pumpdauer beträgt hier für alle Einzelmessungen 1.5 ms. In Abbildung 4.13 ist das gemessene Stabilitätsdiagramm des $n = 0$ Impulszustands dargestellt. Das Diagramm setzt sich aus 19378 Einzelmessungen zusammen. Jeder dargestellte Datenpunkt besteht im Mittel aus 13 ± 9.6 Einzelmessungen. Die mittlere Atomzahl beträgt $N = 2 \cdot 10^5 \pm 8 \cdot 10^4$. Aus der atomaren Verstimmung $\Delta_a = -60$ GHz des Pumplichts folgt, mit $g = 23.6$ kHz aus Abschnitt 4.1, die Ein-Photon-Lichtverschiebung $U_0 = -9.3$ mHz. Die gestrichelte blaue Linie markiert die kritische Verstimmung Δ_{crit} aus Gleichung (2.110). Aus der in jeder Einzelmessung bestimmten Rückstreurrate U_s und Atomzahl N folgt $R = 0.24 \pm 0.14$,

woraus sich eine kritische Verstimmung $\Delta_{\text{crit}}/\omega_r = 0.65$ ergibt. Sie markiert die Verstimmung, über welcher die Spiegelrückstreuung die CARL-Dynamik *festpinnt*.

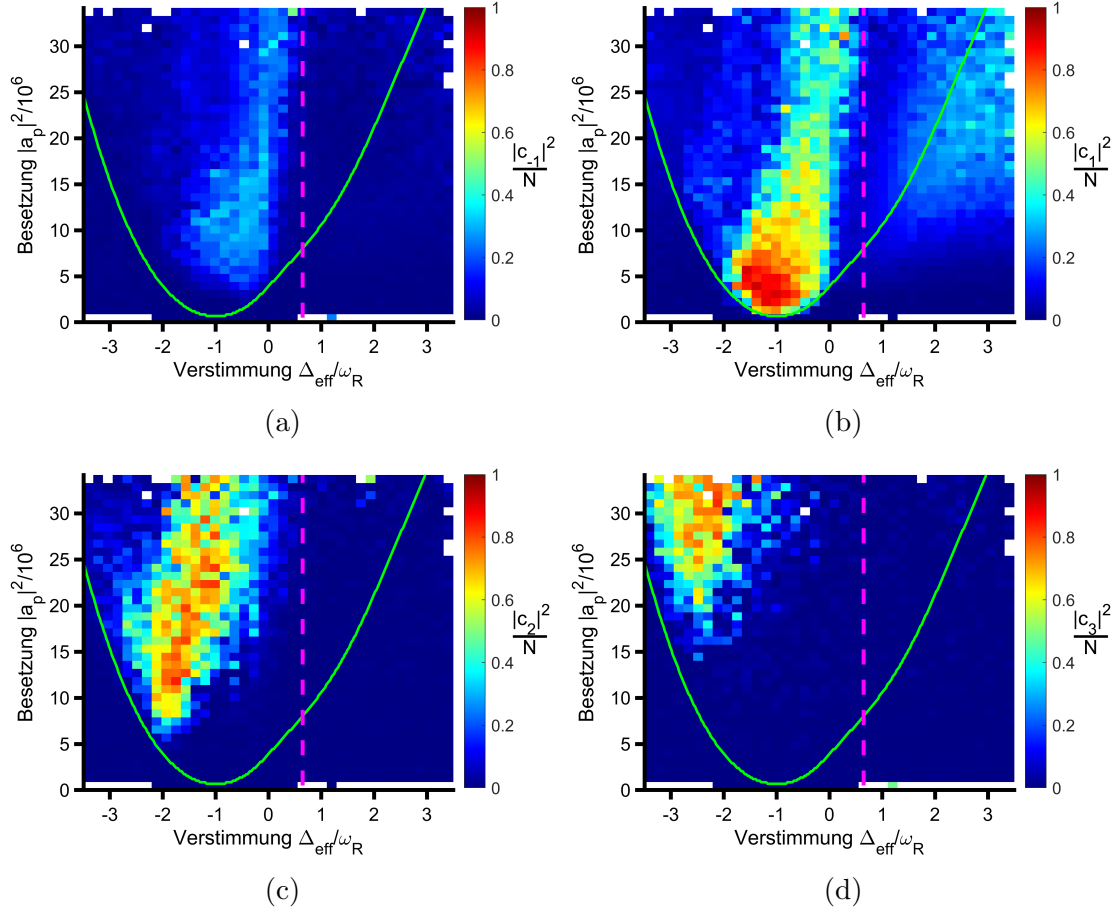


Abbildung 4.11: Gemessene Stabilitätsdiagramme nach einer Pumpdauer von 1.5 ms. Relative Besetzungen (a) $|c_{-1}|^2/N$, (b) $|c_1|^2/N$, (c) $|c_2|^2/N$ und (d) $|c_3|^2/N$. Die gestrichelte Linie in magenta markiert die aus Gleichung (2.110) berechnete kritische Verstimmung. Die grüne durchgezogene Linie stellt die numerisch bestimmte Stabilitätsgrenze ohne Spiegelrückstreuung dar.

Die durchgezogene grüne Linie ist die numerisch ermittelte Stabilitätsgrenze der CARL-Gleichungen unter Vernachlässigung der Spiegelrückstreuung. Die Simulation wird mit den experimentellen Parametern durchgeführt. Die numerisch berechnete kritische Pumpleistung muss mit einem Faktor 2.4 multipliziert werden, um die beste Übereinstimmung mit dem Experiment zu liefern.

Die Stabilitätsdiagramme für den $n = -1$ bis $n = 3$ Impulszustand sind in Abbildung 4.11 dargestellt. Hier ist die gestrichelte Linie der kritischen Verstimmung für einen besseren Kontrast magenta gefärbt. In allen Stabilitätsdiagrammen

ist deutlich zu erkennen, wie für negative Verstimmungen, über der kritischen Pumpleistung, die atomare Verteilung in höhere Impulszustände umstreut. Die Übereinstimmung zwischen grüner Theoriekurve und der Messung ist in diesem Bereich sehr gut. Auf der Seite positiver Verstimmung ist zu erkennen, dass sich bereits unter der aus der grünen Theoriekurve zu erwartenden kritischen Pumpleistung eine stationäre Besetzung der Impulszustände herausbildet. Dies geschieht für Verstimmungen, die rechts von der blau/magenta gefärbten gestrichelten Linie liegen, welche die kritische Verstimmung markiert.

Im stationären Bereich ist eine symmetrische Besetzung der Impulszustände zu erwarten. Dennoch ist hier, vergleicht man Abbildung 4.11a und 4.11b miteinander, der Schwerpunkt klar in Richtung $n = 1$ verschoben. Dies lässt sich zum einen erklären, durch die Überlagerung des $n = 1$ Impulszustands mit inkohärent gestreuten Atomen, die nicht an der Resonatorodynamik beteiligt sind. Zum anderen steigt die Besetzung der um den $n = 0$ liegenden Impulszustände mit stärkerer Pumpleistung an und erreicht⁴ in Sättigung höchstens $1/4$. Diese Sättigungsleistung ist möglicherweise noch nicht erreicht, da sich rechts oben in Abbildung 4.11a eine erhöhte Besetzung des $n = -1$ Impulszustands andeutet.

4.4 Pinning-Übergang

Die Phasengrenze Δ_{crit} aus Gleichung (2.110), zwischen dem instabilen Bereich der CARL-Dynamik und dem stationären Bereich in dem die atomare Verteilung durch die Spiegelrückstreuung festgepinnt ist, wird hier auch als *Pinning-Übergang* zwischen den beiden Phasen bezeichnet.

Um den Verlauf von

$$\Delta_{\text{crit}} = \kappa \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{U_0 N}{U_s} \right)^2 - 1} \quad (4.5)$$

experimentell zu bestätigen, gilt es den Quotienten aus $U_0 N$ und U_s zu verändern. Dies lässt sich am einfachsten durch eine Änderung der Atomzahl N erreichen. Für eine definierte Atomzahl wird Δ_{crit} aus dem Verlauf der Besetzung der Testmode bestimmt. Dazu wird ein BEC in der Pumpmode platziert und mit einer Pumpleistung von $|a_+|^2 = 2 \cdot 10^7$, bei einer Verstimmung von $\Delta_{\text{eff}}/\omega_r = 3$ von einer Seite beleuchtet. Nach einer Pumpdauer von 0.5 ms wird die Verstimmung innerhalb von 1 ms kontinuierlich auf $\Delta_{\text{eff}}/\omega_r = 0$ gesweept. Dabei bleibt die Pumpleistung, also die Besetzung der Pumpmode, konstant. Dies wird erreicht durch eine aktive Stabilisierung der transmittierten Pumpleistung. Hierfür dient ein Mikrocontroller basierter PI-Regler, ähnlich der in Abschnitt 3.2 beschriebenen μC -Lockbox, der

⁴Im oben eingeführten 4-Moden Modell das nur die $n = -1$ bis $n = 1$ Impulszustände berücksichtigt.

das Photodiodensignal der transmittierten Pumpleistung auf einen konstanten Pegel stabilisiert. Die Leistung in der Pumpmode wird von dem Mikrocontroller durch Ansteuerung eines spannungsgesteuerten Hochfrequenz-Abschwächers⁵ (VVA) geregelt, der die Leistung des Pump AOM's steuert.

Innerhalb der ersten 0.5 ms hat das System Zeit in den stationären Gleichgewichtszustand zu relaxieren. Während des Sweeps bleibt das System im stationären Zustand, bis die kritische Verstimmung Δ_{crit} erreicht wird. Die Atome verlassen ihre stationäre Anordnung und beschleunigen. Da dabei der konstante Strukturfaktor verschwindet, bricht am *Pinübergang* die stabile Leistung in der Testmode ein und geht über in das pulsartige Verhalten, das typisch für die CARL-Dynamik ist. Abbildung 4.12 zeigt den Verlauf der Leistung in der Testmode während eines Sweeps der Verstimmung. Die schwarze Kurve zeigt den gemessenen Verlauf der transmittierten Leistung der Testmode, für eine Atomzahl von $N = 3 \cdot 10^5$. Die in dem dargestellten Verlauf gemessene kritische Verstimmung (grün gestreifte Linie) von $\Delta_{\text{crit}}/\omega_r = 0.9$ wird bestimmt aus dem Abknickpunkt der Leistung. Der Vergleich der Einzelmessung mit einer numerischen Simulation des experimentellen Ablaufs (rote Kurve) zeigt eine gute Übereinstimmung zwischen Modell und Experiment.

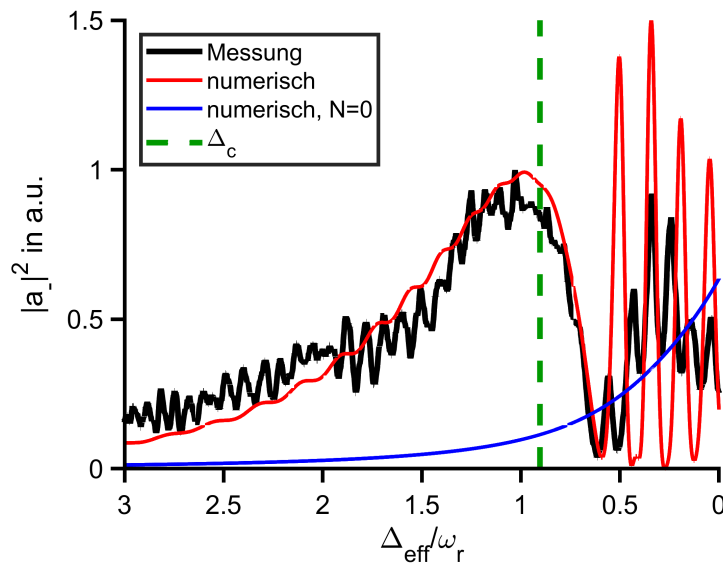


Abbildung 4.12: Leistung in der Testmode während des Sweeps der Verstimmung von $\Delta_{\text{eff}}/\omega_r = 3$ nach $\Delta_{\text{eff}}/\omega_r = 0$. Dabei wird der Verlauf der Messung (schwarz) verglichen mit einer numerischen Kurve (rot) welche den experimentellen Ablauf simuliert. Die zweite numerische Kurve (blau) stellt den Verlauf der Testmodenleistung ohne Atome dar. Die aus den Verläufen bestimmte kritische Verstimmung (grün gestrichelt) liegt bei $\Delta_{\text{crit}}/\omega_r = 0.9$.

⁵Analog Devices HMC346

Die blaue Kurve in Abbildung 4.12 zeigt den Verlauf der Testmodenleistung für $N = 0$. Bei gleicher Verstimmung ist die Testmode im gepinnten, stationären Bereich deutlich stärker besetzt als sie von U_s gefüllt werden könnte. Hierfür ist der stationäre Strukturfaktor der atomaren Verteilung verantwortlich. Im instabilen Bereich der CARL-Dynamik, rechts von der gestrichelten grünen Linie, ist das System nicht im Gleichgewicht und es ist die oszillierende Interferenz der Felder in der Testmode zu erkennen.

An dieser Stelle wird deutlich, dass die atomare Verteilung im stationären Bereich nicht allein von dem stationären Dipolpotential der Spiegelrückstreuung festgepinnt wird, sondern auch von ihrem selbst erzeugten. Die atomare Verteilung wirkt hier als Verstärker der Spiegelrückstreuung. Es handelt sich im stationären Bereich also nicht um ein selbstorganisiertes System, wie im Sinne der Einleitung, wenn die Rückstreuung der Spiegel an dieser Stelle als eine von extern wirkende Kraft betrachtet wird, welche die Ordnung des Systems vorgibt.

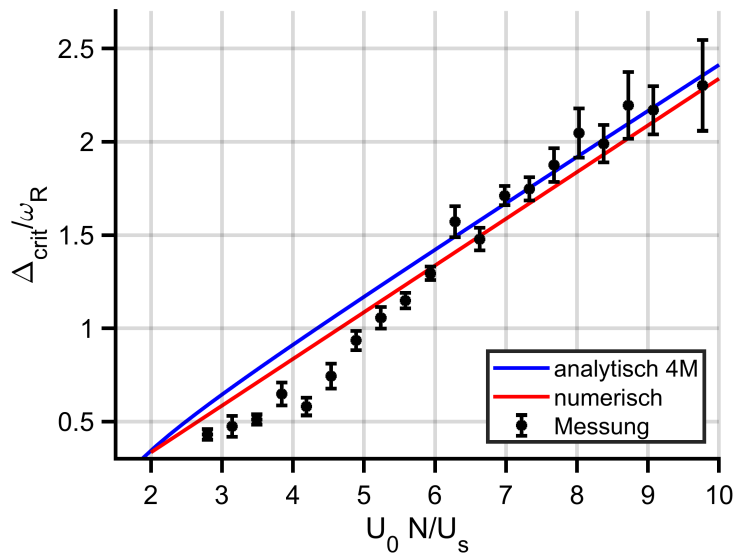


Abbildung 4.13: Verlauf von Δ_{crit} , der analytischen Gleichung (4.5) des 4-Moden Modells (blau), der numerischen Simulation mit den experimentellen Parametern (rot) und dem gemessenen Verlauf (schwarz). Die Fehlerbalken zeigen die Standardabweichung vom Mittelwert.

Das Ergebnis aller 372 Einzelmessungen mit variierender Atomzahl liefert den Verlauf von Δ_{crit} in Abbildung 4.13. Der von Gleichung (4.5) vorhergesagte Verlauf ist in guter Übereinstimmung mit der Messung. Die Abweichung der Messungen von den Theoriekurven kann durch einen systematischen Fehler in der Leistungsstabilisierung der Pumpmode erklärt werden. Da während des Sweeps zum einen durch konstruktive Interferenz die Leistung in der Pumpmode steigt, zum anderen

die Steuerspannung des VVA's stark nichtlinear mit der Abschwächung skaliert, neigt der die Pumpleistung stabilisierende PI-Regler zur Oszillation. Dem kann entgegen gewirkt werden, indem für die unterschiedlichen Sweeppositionen eigene P/I-Faktoren definiert werden. Trotzdem bleiben Intensitätsschwankungen im Bereich von $\pm 20\%$ unvermeidbar.

Um die Verläufe von Δ_{crit} der Messung und den Theoriekurven in Übereinstimmung zu bringen, muss eine Kopplungsstärke

$$g = 1.08 \cdot 2\pi \cdot 23.6 \text{ kHz} \quad (4.6)$$

$$= 2\pi \cdot 25.5 \text{ kHz} \quad (4.7)$$

gewählt werden und liegt damit leicht über dem in Gleichung (4.2) bestimmten Wert.

5 Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde die Unterdrückung der dynamischen Instabilität eines Bose-Einstein Kondensats in einem Ringresonator durch die Anwesenheit einer stehenden Welle untersucht. Der Stehwellenanteil im Ringresonator wird in diesem Fall durch die Rückstreuung der Resonatorspiegel erzeugt. Es wurde ein bisher unbekannter stationärer Phasenbereich identifiziert, in dem die Entstehung einer dynamischen Instabilität unterdrückt wird. Ein analytisches Modell basierend auf den CARL-Gleichungen liefert die Vorhersage für die kritische Verstimmung, über der die stehende Welle die dynamischen Kräfte dominiert. Es wurde eine gute Übereinstimmung zwischen den theoretischen Vorhersagen und den experimentellen Daten erzielt. Die kritische Verstimmung markiert damit die Phasengrenze zwischen der gepinnten, stationären Phase und der dynamischen Instabilität. Die zentralen physikalischen Erkenntnisse dieser Arbeit sind bei Physical Review Letters veröffentlicht [38].

Neu an dem Pinning-Phasenübergang ist seine Verstimmungsabhängigkeit. In diesem und ähnlichen Systemen werden bekannte Phasenübergänge bisher durch Überschreitung einer kritischen Pumpleistung erreicht. Ein Alleinstellungsmerkmal von Ringresonatoren ist ihre kontinuierliche Translationssymmetrie. Die Spiegelrückstreuung, verursacht von unvermeidbaren Imperfektionen auf den Spiegeloberflächen, koppelt gegenläufige Resonatormoden und bricht die kontinuierliche Translationssymmetrie des Ringresonators. Die Pinning-Phasengrenze ist somit von besonderer Bedeutung für Experimente, welche sich die Translationssymmetrie von Ringresonatoren zunutze machen. Denn die vorliegende Arbeit demonstriert, dass diese oder ähnliche Experimente mit longitudinalem Pumpschema unter der kritischen Verstimmung durchgeführt werden müssen, da ansonsten selbstorganisierende Prozesse von der Spiegelrückstreuung unterdrückt werden.

So existieren Vorschläge zur Erzeugung supersolider Zustände, bei der eine selbstorganisierte stationäre Dichtemodulation der atomaren Verteilung eine spontane Brechung der Translationssymmetrie eines Ringresonators bewirkt [21, 26]. In einer aktuellen Arbeit war es uns möglich, mit dem in den vorhergehenden Kapiteln beschriebenen Aufbau, supersolides Verhalten nachzuweisen [25]. Der Einfluss der Spiegelrückstreuung wird in dieser zitierten Arbeit zum einen minimiert durch die Wahl möglichst großer Atomzahlen. Dies schiebt die Pinning-Phasengrenze zu größeren positiven Verstimmungen. Zum anderen wird das Experiment bei einer möglichst niedrigen positiven Verstimmung durchgeführt. Zusätzlich schwächt die Verwendung einer Resonatormode niedrigerer Finesse den symmetriebrechenden

Stehwellenanteil gegenüber der atomaren Dynamik.

Ein weiterführendes Thema welches mit diesem Aufbau behandelt werden könnte, wäre die Untersuchung der Effekte des Resonatorkühlens zur Stabilisierung von Quantengasen [60]. Die Möglichkeiten des Kühlens von atomaren Gasen durch Ringresonatoren ist experimentell noch nicht weiter erforscht.

In einem aktuellen Experiment eines Systems, ähnlich dem in dieser Arbeit diskutierten, wird in den Selbstorganisationsprozess durch aktive Regelung der Rückkopplung eingegriffen [61, 62]. Technisch einfach umzusetzen, ermöglicht dies die Erzeugung und Erkundung unbekannter Phasenzustände.

A Veröffentlichung

PHYSICAL REVIEW LETTERS **121**, 223601 (2018)

Pinning Transition of Bose-Einstein Condensates in Optical Ring Resonators

S. C. Schuster,[†] P. Wolf, D. Schmidt, S. Slama, and C. Zimmermann

Physikalisches Institut, Eberhard-Karls-Universität Tübingen, Auf der Morgenstelle 14, D-72076 Tübingen, Germany

(Received 6 March 2018; published 27 November 2018)

We experimentally investigate the dynamic instability of Bose-Einstein condensates in an optical ring resonator that is asymmetrically pumped in both directions. We find that, beyond a critical resonator-pump detuning, the system becomes stable regardless of the pump strength. Phase diagrams and quenching curves are presented and described by numerical simulations. We discuss a physical explanation based on a geometric interpretation of the underlying nonlinear equations of motion.

DOI: 10.1103/PhysRevLett.121.223601

For several years, atomic quantum gases in optical resonators have been successfully used to study basic many-body physics with long-range interaction. Quantum phase transitions, supersolid phases, and the realization of synthetic gauge fields are some of the current topics of this field [1–6]. While, so far, most experiments have been performed with standing wave resonators, the specific properties of ring resonators are now coming to the fore again [7,8]. In contrast to standing wave resonators, in an ideal ring resonator, the position of the nodes and antinodes of an optical standing wave is not determined by end mirrors. However, in the presence of atoms and with sufficiently strong pumping power, this continuous symmetry can be broken spontaneously. The associated instability was already predicted in 1998 and interpreted as an analogy to the free-electron laser [9]. The effect was also observed experimentally more than a decade ago [10,11], but, only recently, was it possible to record a complete stability diagram [12,13]. These latest experiments also confirmed a model that interprets the instability as a generalization of the Dicke phase transition [1,14,15]. Experiments with ring resonators pumped simultaneously in both directions have not yet been conducted. This Letter makes a first contribution in this direction.

In a longitudinally pumped ring cavity, as shown in Fig. 1, the prominent effect is an exponential instability that is observed above a critical pump power: If some light is present in the probe mode, the interference pattern between the pump and the probe light generates a periodic optical potential, which structures the initially flat atomic density distribution. The resulting density grating efficiently diffracts pump light into the probe mode. This, in turn, deepens the optical lattice, and also, as a consequence, the atomic density grating increases its contrast and so on. During the process, momentum is constantly transferred from the pump mode to the probe mode and the atoms accelerate into the direction of the pump light (to the right in Fig. 1). Parallel to the atomic motion, the Doppler effect shifts the frequency of the diffracted probe light to lower

frequencies. In this work, we extend the scenario and inject some light into the probe mode that has the same frequency as the pump light. Together with the pump light, it forms a stationary optical lattice that might force the atoms to rest and suppresses the instability. Surprisingly, we find that there is a critical detuning of the cavity relative to the pump light. Above this detuning, the system is always stable. Below the critical detuning, the system is still unstable for large enough pump power. In this Letter, we experimentally investigate this yet unknown “pinning transition” and compare our observations with numerical simulations of the nonlinear equations of motion. Furthermore, we present a geometric interpretation of the equations, which reveals the underlying physical mechanism.

The experimental setup in Fig. 1 is similar as described in [12]; however, now, we use a much larger resonator with a round trip length of 39 cm, a beam waist at the position of the condensate of $w_0 = 170 \mu\text{m}$ and a mode volume of $V = 18.2 \text{ mm}^3$. For s -polarized light, the decay rate for the electric field amplitude in the resonator amounts to

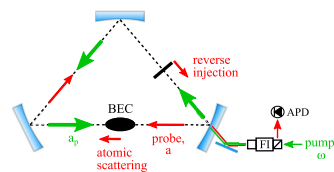


FIG. 1. Experimental setup of a BEC placed in a high finesse TEM_{00} mode of a ring resonator. Light from the pump mode (green, s pol.) is scattered into the probe mode (red) by the atoms and by coherent scattering at the mirror (here, represented by an effective reflecting element labeled “reverse injection”). The power in the probe mode is monitored by recording the probe light that leaves the cavity through the input coupling mirror. It is separated from the pump light with a Faraday isolator and detected with an avalanche photodiode (APD).

$\kappa = 2\pi \times 5$ kHz which is about three times smaller than the recoil shift $\omega_r = 2\hbar k^2/m = 2\pi \times 14.5$ kHz due to momentum absorption of an initially nonmoving atom that scatters a photon from a pump beam into the probe beam. Here, k and m are the wave vector of the pump light and the mass of the atom. For p -polarized light, we observe a three times larger decay rate. The s -polarized forward propagating TEM₀₀ (Transverse Electromagnetic Mode) mode (“pump mode”) is longitudinally pumped from one side with up to 6 mW from an amplified diode laser system at a frequency ω detuned by $\Delta_a = \omega - \omega_0 = -60$ GHz relative to the atomic transition frequency ω_0 (*D1* Line: $5s_{1/2}$, $F = 2$ to $5p_{1/2}$, $F = 2$). Part of the laser output is used to electronically stabilize the laser to the reverse propagating p -polarized TEM₁₀ mode [16] with a precision of about $2\pi \times 200$ Hz. Frequency and amplitude of the pump light is controlled by an acousto-optical modulator. The pump frequency ω can be tuned relative to the resonance frequency ω_c of the TEM₀₀ mode over a range of $\Delta_c = \omega_c - \omega = \pm 10\omega_r$. The power in the TEM₀₀ pump mode and in the counterpropagating TEM₀₀ mode (probe mode) is monitored by recording the light leaking out of the resonator mirrors with sensitive avalanche diodes.

The pinning potential required to suppress the instability beyond the critical detuning is very small such that we don’t have to inject the probe mode externally, but rather exploit coherent scattering of pump light into the probe mode due to inhomogeneities in the mirror coatings. The scattered light from the three mirrors interferes according to their relative positions and to the wavelength of the light [17]. The total mirror scattering can be varied up to a factor of 3 by controlling the position of one of the mirrors with a piezoelement. In the experiment, the total mirror scattering rate $\kappa_s = \kappa\sqrt{\epsilon}$ is determined for each cycle by recording the resonant power ratio ϵ of the pump and the probe mode right before the atoms are loaded into the cavity. The magnetically trapped Bose-Einstein condensate (BEC) of ^{87}Rb atoms is placed at the intensity minimum in the center of the TEM₁₀ mode where the atoms are least affected by the locking light. During preparation of the condensate, the laser beams are switched off and held at one fixed frequency for about 20 s. Once the condensate is in place, the locking is reactivated within 300 ms and the pump light is then ramped up to a final value within 50 μs , slow enough to avoid ringing of the high finesse resonator. After a holding time of 1.5 ms, the atoms are released from the trap and the population of the momentum states are derived from absorption images after 35 ms of ballistic expansion. Data are taken from 20 000 experimental cycles for various cavity pump detunings Δ_c and photon numbers $|a_p|^2$ in the pump mode. The data are post selected according to the value of the ratio $R := \kappa_s/(2U_0N)$ for the specific cycle. The denominator contains the total number of atoms N and the single photon light shift $U_0 = g_{\text{eff}}^2/\Delta_a$ with the coupling constant $g_{\text{eff}} = (\omega d^2/6\hbar\epsilon_0 V) = 2\pi \times 19$ kHz,

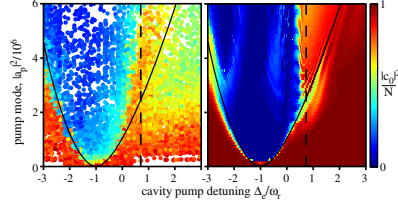


FIG. 2. Phase diagram. Population of the zero momentum state after 1.5 ms of interaction with the light in the resonator for various photon numbers in the pump mode and cavity pump detuning. For negative detuning, the experimental observations (left subplot) are well described by the phase boundary derived from a numerical simulation that does not include the pinning potential (solid line). The simulation shown in the right subplot includes the pinning potential. The dashed line indicates the critical detuning within the limit of strong pumping according to Eq. (5).

the dipole moment of the atomic transition d , and the permittivity of free space ϵ_0 . The ratio R turns out to be the relevant parameter to specify the strength of the pinning potential (see theory part below). Figure 2 shows the observed population $|c_0|^2$ of the zero momentum state in the case of large mirror scattering ($R = 0.15$), a mean atom number in the BEC of $N = 1.8 \times 10^5$ and a atomic density of 5.7×10^{12} cm^{-3} . The detuning $\Delta_e = \Delta_c + U_0N$ plotted along the horizontal axis is corrected for the index of refraction due to the atoms. The blue area, where the system is unstable and almost all atoms are excited into higher momentum states, is clearly separated from the stable regime where at least half of the population $|c_0|^2$ persists. For $\Delta_e = -\omega_r$, the critical pump photon number for entering the unstable regime is smallest since light scattered from the initial condensate is recoil shifted by one ω_r . For $\Delta_e < -\omega_r$, the phase boundary between the stable and the unstable regime follows the prediction of a numerical simulation which ignores the pinning potential (solid line in the left and right subplots). Evidently, the pinning potential has only little effect in this regime. This is because at threshold, the system jumps from a homogeneous superfluid state directly into a state where the atoms form a density grating that moves with a finite start velocity [12]. In the reference frame of the moving atoms, the pinning potential averages out and has no effect. On the contrary, for positive detuning, the atoms form a stationary density grating which can be seeded efficiently by the pinning potential. In fact, the observed phase boundary steeply increases in this regime and asymptotically approaches a vertical line positioned at a critical detuning of $\Delta_0 \approx 0.7\omega_r$ (dashed line in the left and right subplots). A numerical simulation, which includes pinning, reproduces this behavior (right subplot).

The theoretical analysis of the experiment describes the light in the pump mode and the probe mode by the field operators $\hat{A}_p = \hat{a}_p e^{ikz}$ and $\hat{A} = \hat{a} e^{-ikz}$. The atomic matter field $\hat{\psi} = \sum_n \hat{c}_n e^{2imkz}$ is expanded into momentum eigenstates, separated by $2\hbar k$, which is the momentum transferred to the atoms by scattering a single photon from the pump mode into the probe mode. The atoms and the light interact via the optical dipole potential $H_{\text{int}} = \hbar U_0 \int \hat{\psi}^\dagger \hat{\psi} (\hat{A}_p + \hat{A}) (\hat{A}_p^\dagger + \hat{A}^\dagger) dV$. Mirror scattering couples the pump mode with the probe mode and forms the pinning potential, $H_p = -\hbar \kappa_s (\hat{A}_p \hat{A} + \hat{A}_p^\dagger \hat{A}^\dagger)$. The equations of motion are derived from the Hamiltonian $H = H_0 + H_{\text{int}} + H_p$ with $H_0 = \int [\psi^\dagger (-\hbar^2 \nabla^2 / (2m)) \psi + \hbar \Delta_c (A^\dagger A + A_p^\dagger A_p)] dV$. Since the chemical potential of the condensate is much smaller than the recoil energy, the small contributions due to atom-atom interaction are neglected. In mean field approximation, operators are replaced by their expectation values a_p , a , and c_n . Since the power of the pump mode is electronically stabilized, we set a_p to be constant. Because only the relative phase between a and a_p is physically relevant, we also set $a_p = |a_p|$. For the equations of motion, one then gets [9]

$$\dot{c}_n = -in^2 \omega_r c_n - i\sigma (c_{n-1} a^* + c_{n+1} a), \quad (1a)$$

$$\dot{a} = -(\kappa + i\Delta_c) a - i\sigma \sum_n c_n^* c_{n-1} - i\kappa_s |a_p|, \quad (1b)$$

with the coupling constant $\sigma := U_0 |a_p|$ and the total number of atoms $N = \sum_n c_n^* c_n$. The finite cavity line width is taken into account by adding the decay term $-\kappa a$. The simulations in Fig. 2 are based on Eqs. (1a) and (1b) with the sum ranging from $n = -5$ to $n = 5$, since higher momentum states have not been observed for the chosen experimental parameters.

To gain further physical insight, we interpret Eqs. (1a) and (1b) in the vicinity of the threshold. Higher momentum states with $|n| > 1$ can then be neglected yielding

$$\dot{c}_{-1} = -i\omega_r c_{-1} - i\sigma a c_0, \quad (2a)$$

$$\dot{c}_0 = -i\sigma (a c_1 + a^* c_{-1}), \quad (2b)$$

$$\dot{c}_1 = -i\omega_r c_1 - i\sigma a^* c_0, \quad (2c)$$

$$\dot{a} = -i\Delta a - i\sigma b - i\kappa_s |a_p|. \quad (2d)$$

Here, we introduce the complex detuning $\Delta = |\Delta| e^{i\delta} := \Delta_c - i\kappa$ and the complex structure factor $b = |b| e^{i\varphi_b} := c_1^* c_0 + c_0^* c_{-1}$. Without mirror scattering, the population of the zero momentum component $|c_0|^2$ remains undepleted until the system becomes unstable. Thus, in previous work, c_0 was approximated as constant near threshold. The equations then become linear and can be solved analytically

[18,19]. If mirror scattering is included, the resulting optical lattice potential depletes the zero momentum component even below threshold. Thus, c_0 has to be kept variable and the equations resume their nonlinear character. Treating Eqs. (2a)–(2d) by linearization around the steady state solutions ($\dot{a} = \dot{c}_{0,\pm 1} = 0$) is not successful since a constant structure factor may exist, even if the coefficients $c_{\pm 1,0}$ are time dependent. The stability diagram can still be derived with the following strategy. In a first step, we solve the first three equations with $a = |a| e^{i\varphi_a}$ being regarded as a time independent parameter. The resulting linear eigenproblem can then be solved straightforwardly. It has three eigenstates, with one of them being a dark state that does not couple to the light field. The modulus of the structure factor for the two other states can be calculated to be

$$B = \frac{1}{\sqrt{8}} \frac{A/A_s}{\sqrt{1 + |A|^2/A_s^2}}. \quad (3)$$

Here, we introduce the normalized strength of the structure factor $B := |b|/(2N)$, the normalized amplitude of the light mode $A := |a| |\Delta| / (2N\sigma)$ and the saturation parameter $A_s := |\Delta| \omega_r / (2\sqrt{8}N\sigma^2)$. For both states, the structure factor is time independent and saturates at a maximum $B_m := 1/\sqrt{8}$ as A_s approaches zero for strong pumping. The two states differ in the limit of vanishing a , where the population $|c_0|^2$ approaches either zero or N . Thus, we ignore the first case since, in the experiment, all atoms are initially in the condensate. The calculation shows that, for the second case, the phases of the structure factor and the light field are equal, $\varphi_b = \varphi_a$. In a second step, we determine how, vice versa, a given structure factor leads to a stable light field. Setting $\dot{a} = 0$ in Eq. (2d) yields

$$A^2 + B^2 + 2AB \cos \delta = R^2. \quad (4)$$

In Fig. 3, Eqs. (3) and (4) are plotted. Equation (4) forms an ellipse tilted by 45° . Its long axis varies between $2R$ (circle) for $\Delta_c = 0$ and infinity for $\Delta_c \gg \kappa$. Equilibrium states exist at the intersection points of both curves. The stability of equilibrium points are determined by reading, from the diagram, how a given field A_i results in a structure factor B (vertical arrows) and how the so determined B generates a new light field A_{i+1} (horizontal arrows). By repeating this sequence, the resulting series A_i converges for stable equilibrium and diverges, otherwise. For small detuning (left subplot) and weak pumping (saturation curve 1) one finds a single point of stable equilibrium (indicated by “s”). For stronger pumping, the point moves to smaller A and eventually becomes unstable (saturation curve 2, “u”). Without condensate depletion [neglecting the second term in the square root of Eq. (3)] the system becomes unstable for $A_s = 1/\sqrt{8}$ which reproduces the threshold behavior found in previous models [12,18,19]. For large detuning, the stable point remains stable even for

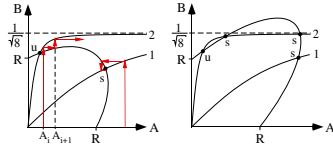


FIG. 3. Relation between the amplitudes of probe mode A and of structure factor B for weak and strong pumping (saturation curves 1 and 2) as well as small and large cavity pump detuning (left and right subplot). The stability of the equilibrium points at the intersection of the saturation curves with the ellipse (dots) can be determined geometrically (red arrows).

large pumping. This is true for arbitrary pump strength only if the maximum of the ellipse $R/\sin(\delta)$, exceeds the maximum value of the structure factor B_m (dashed line). This condition determines the critical detuning $\sin(\delta_0) = R/\sqrt{8}$. After replacing the above definitions, the critical detuning, defining the vertical phase boundary in the limit of strong pumping, reads

$$\frac{\Delta_0}{\kappa} = \sqrt{\frac{1}{8} \left(\frac{2U_0 N}{\kappa_s} \right)^2 - 1}. \quad (5)$$

It depends on the strength of the pinning potential κ_s , via the ratio $1/R = 2U_0 N/\kappa_s$. Compared to this analytical expression, numerical analysis shows a shift of the threshold to smaller detunings for lower pumping strengths. We tested this relation by recording the phase boundary for various mirror scattering κ_s and atom number N . The phase

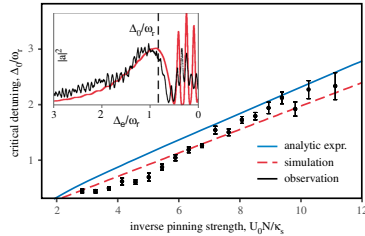


FIG. 4. Shift of the phase boundary Δ_0 with the inverse strength of the pinning potential. The observations (black dots), the simulations (red dashed line), and the analytic expression of Eq. (5) are in reasonable agreement. The inset shows the observed power in the probe mode during the quench (black line). We identify the phase boundary Δ_0 (dashed vertical line) as the position of the quick drop that follows the continuous increase while Δ_e approaches Δ_0 from above. The rapid oscillations for $\Delta_e < \Delta_0$ are typical for the unstable regime. The red line shows the result of a numerical simulation.

boundary is detected by sweeping the detuning Δ_e from large to small values within 1 ms, while the photon number in the pump mode is electronically stabilized to a constant value of $|a_p|^2 = 4 \times 10^6$ (inset in Fig. 4). While sweeping, the power in the probe mode increases until, eventually, the threshold is reached. We identify the critical detuning Δ_0 at the edge, where the power in the probe mode drops quickly, and the system becomes unstable. By repeating the experiment for various values of NU_0/κ_s , we obtain the curve in the main graph of Fig. 4. The observations (black dots), the simulation (red dashed line), and the analytic expression [Eq. (5), blue line] are in reasonable agreement. In the absence of a pinning potential, previous theoretical models [18] predict strict threshold behavior only for lossless cavities. If losses are included, the threshold smears out and the system becomes unstable even for infinitesimally low pump power. Our observations, however, support a physical picture (Fig. 3) that also predicts strict threshold behavior for lossy cavities even in the limit of vanishing injection ($R \rightarrow 0$).

In summary, we have investigated an atomic Bose Einstein condensate in an optical ring resonator with additional pinning potential. A stable phase was identified above a critical cavity pump detuning. The phase boundary is defined by the competition of the pinning potential and the optical potential generated by the atoms. The observations are quantitatively described by simulating the nonlinear equations of motion, including depletion of the condensate. A geometric interpretation is introduced to determine equilibrium and stability of the system and an analytic expression for the phase boundary is derived in the limit of strong pumping. By seeding the probe mode, the transition from a ring geometry to a standing wave geometry can be explored as in recent work with a condensate replaced by a nanomembrane [20]. More work is required to understand the role of the two additional points of equilibrium which appear above the critical detuning. Also unclear is the classification of the phase transition, quantum fluctuations near threshold, and possible metastability [21].

We acknowledge helpful discussion with Andreas Hemmerich, Martin Schmidt, and Peter Domokos. This work has been supported by the Deutsche Forschungsgemeinschaft (ZI 419/8-1) and by ColOpt - EU H2020 ITN 721465.

*Corresponding author.
simon.schuster@uni-tuebingen.de

- [1] J. Klinder, H. Keßler, M. Wolke, L. Mathey, and A. Hemmerich, *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* **112**, 3290 (2015); J. Klinder, H. Keßler, M. R. Bakhtiari, M. Thorwart, and A. Hemmerich, *Phys. Rev. Lett.* **115**, 230403 (2015); M. Wolke, J. Klinner, H. Keßler, and A. Hemmerich, *Science* **337**, 75 (2012).

- [2] R. Landig, L. Hruby, N. Dogra, M. Landini, R. Mottl, T. Donner, and T. Esslinger, *Nature (London)* **532**, 476 (2016).
- [3] J. Léonard, A. Morales, P. Zupancic, T. Donner, and T. Esslinger, *Science* **358**, 1415 (2017); J. Léonard, A. Morales, P. Zupancic, T. Esslinger, and T. Donner, *Nature (London)* **543**, 87 (2017).
- [4] K. E. Ballantine, B. L. Lev, and J. Keeling, *Phys. Rev. Lett.* **118**, 045302 (2017); V. D. Vaidya, Y. Guo, R. M. Kroeze, K. E. Ballantine, A. J. Kollár, J. Keeling, and B. L. Lev, *Phys. Rev. X* **8**, 011002 (2018).
- [5] J. Kohler, J. A. Gerber, E. Dowd, and D. M. Stamper-Kurn, *Phys. Rev. Lett.* **120**, 013601 (2018).
- [6] F. Mivehvar, S. Ostermann, F. Piazza, and H. Ritsch, *Phys. Rev. Lett.* **120**, 123601 (2018).
- [7] B. Megyeri, G. Harvie, A. Lampis, and J. Goldwin, *Phys. Rev. Lett.* **121**, 163603 (2018).
- [8] D. S. Naik, G. Kuyumjyan, D. Pandey, P. Bouyer, and A. Bertoldi, *Quantum Sci. Technol.* **3**, 045009 (2018).
- [9] N. Piovella, M. Gatelli, and R. Bonifacio, *Opt. Commun.* **194**, 167 (2001).
- [10] D. Kruse, C. von Cube, C. Zimmermann, and P. W. Courteille, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 183601 (2003).
- [11] S. Slama, S. Bux, G. Krenz, C. Zimmermann, and P. W. Courteille, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 053603 (2007).
- [12] D. Schmidt, H. Tomczyk, S. Slama, and C. Zimmermann, *Phys. Rev. Lett.* **112**, 115302 (2014).
- [13] H. Tomczyk, D. Schmidt, C. Georges, S. Slama, and C. Zimmermann, *Phys. Rev. A* **91**, 063837 (2015).
- [14] C. Emary and T. Brandes, *Phys. Rev. E* **67**, 066203 (2003).
- [15] K. Baumann, C. Guerlin, F. Brennecke, and T. Esslinger, *Nature (London)* **464**, 1301 (2010); K. Baumann, R. Mottl, F. Brennecke, and T. Esslinger, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 140402 (2011); R. Mottl, F. Brennecke, K. Baumann, R. Landig, T. Donner, and T. Esslinger, *Science* **336**, 1570 (2012).
- [16] S. Bux, G. Krenz, S. Slama, C. Zimmermann, and P. W. Courteille, *Appl. Phys. B* **89**, 181 (2007).
- [17] G. Krenz, S. Bux, S. Slama, C. Zimmermann, and P. W. Courteille, *Appl. Phys. B* **87**, 643 (2007).
- [18] M. G. Moore, O. Zobay, and P. Meystre, *Phys. Rev. A* **60**, 1491 (1999).
- [19] F. Dimer, B. Estienne, A. S. Parkins, and H. J. Carmichael, *Phys. Rev. A* **75**, 013804 (2007).
- [20] A. Yilmaz, S. Schuster, P. Wolf, D. Schmidt, M. Eisele, C. Zimmermann, and S. Slama, *New J. Phys.* **19**, 013038 (2017).
- [21] L. Hruby, N. Dogra, M. Landini, T. Donner, and T. Esslinger, *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* **115**, 3279 (2018).

B Schaltpläne der μ C-Lockbox

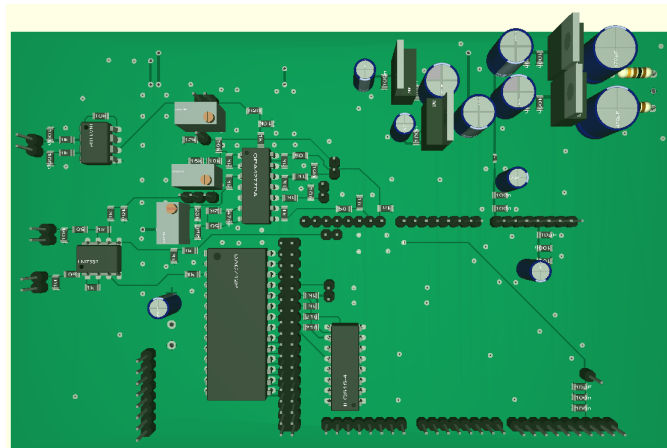


Abbildung B.1: Darstellung der Oberseite der bestückten Erweiterungsplatine für das Arduino Due, welches auf die Stiftleisten gesteckt werden kann.

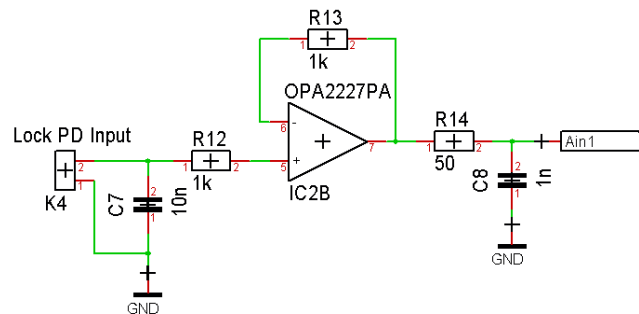


Abbildung B.2: Eingangsverstärker und Puffer für das Signal des Photodiodenverstärkers, welcher die transmittierte Leistung des Locklichts misst.

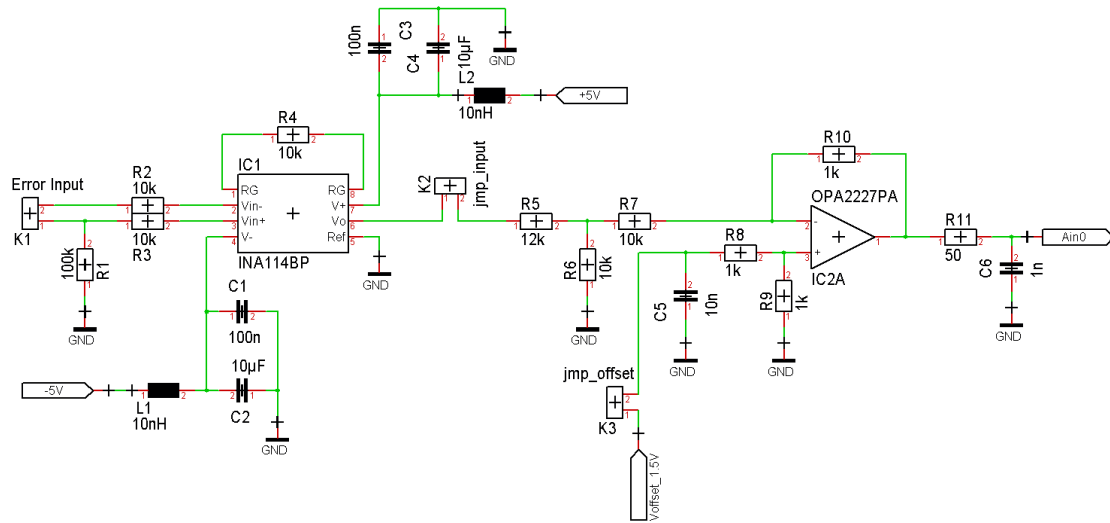


Abbildung B.3: Eingangsverstärker des FALC Monitorsignals, welches an Error Input anliegt. Als Vorverstärker dient ein INA114BP Instrumentenverstärker mit einer Verstärkung von 6V/V. Der darauf folgende Spannungsteiler und invertierende Verstärker dienen der Pegelanpassung am ADC Eingang des Arduino Due, an welchem nicht mehr als 3.3 V anliegen dürfen. Aufgrund der unipolaren ADC Eingänge wird das bipolare Eingangssignal um 1.5 V angehoben.

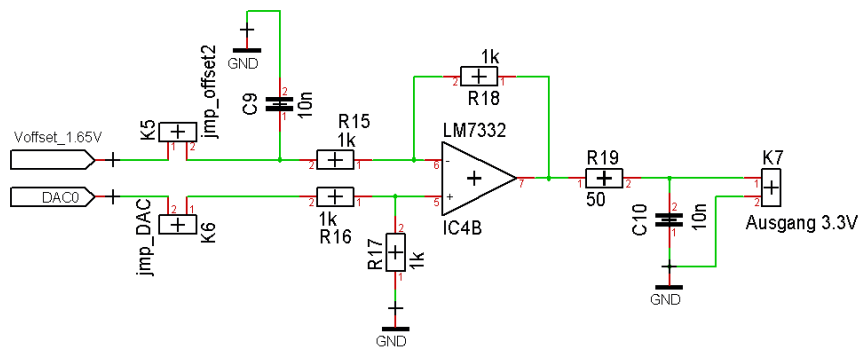


Abbildung B.4: Schaltplan des Treibers des Laserpiezos. Da der interne DAC des Arduino Due die unipolare Ausgangsspannung im Bereich von 0 V bis 3.3 V ausgibt, kann sie durch Subtraktion eines Offsets von 1.65 V einen Spannungsbereich von ± 1.65 V abdecken.

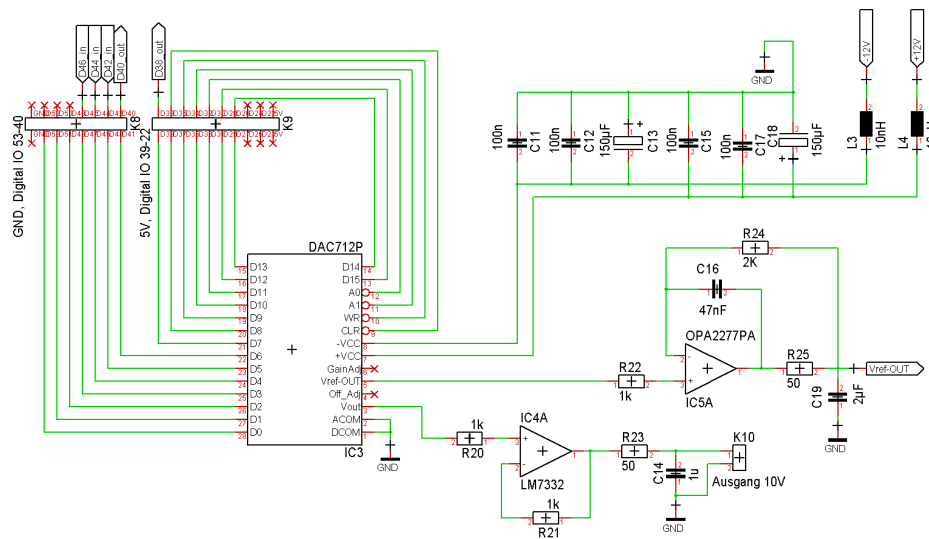


Abbildung B.5: Schaltplan des externen 16-Bit DAC's zur Regelung der Länge des Resonatorpiezos. Die im Schaltplan als K8 und K9 bezeichneten Stiftleisten sind Teil der digitalen Ein- und Ausgänge (Pin 22 bis Pin 53) des Arduino Due. Mit diesen wird der DAC712 über eine parallele Schnittstelle betrieben. Ein LM7332 dient als Treiber für den bipolaren Ausgang des DAC. Alle Referenzspannungen auf der hier designten Platine werden aus der 10 V-Referenzspannung des DAC712 erzeugt. Vor ihrer Weiterverarbeitung wird sie von IC5A gepuffert und gefiltert.

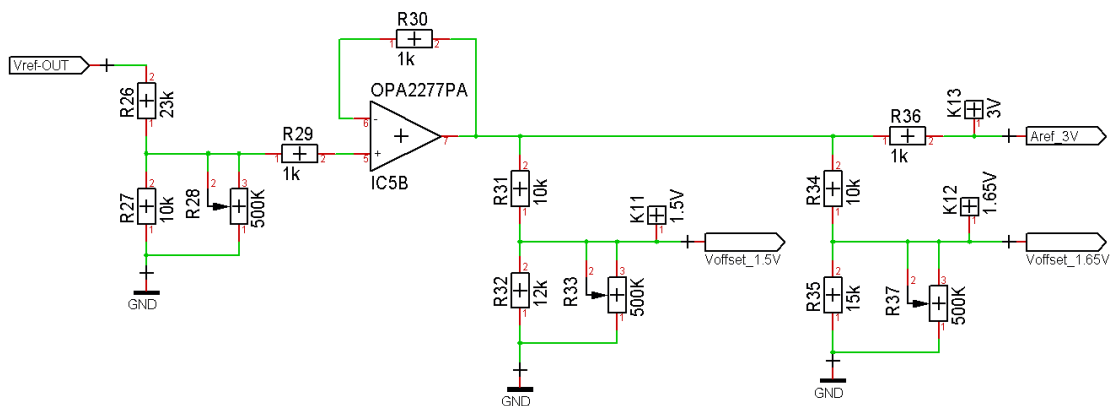


Abbildung B.6: Schaltplan zur Erzeugung der Offsetspannungen und der externen Referenzspannung von 3 V für den internen ADC des Arduino Due. Die Offsetspannung von 1.5 V ist daher für den ADC zum einlesen des FALC Monitorsignals. Der interne DAC des Arduino Due lässt sich nur auf die Versorgungsspannung mit 3.3 V referenzieren, weswegen die 1.65 V als Offsetspannung für die Ausgabe des internen DAC's dienen.

B Schaltpläne der μ C-Lockbox

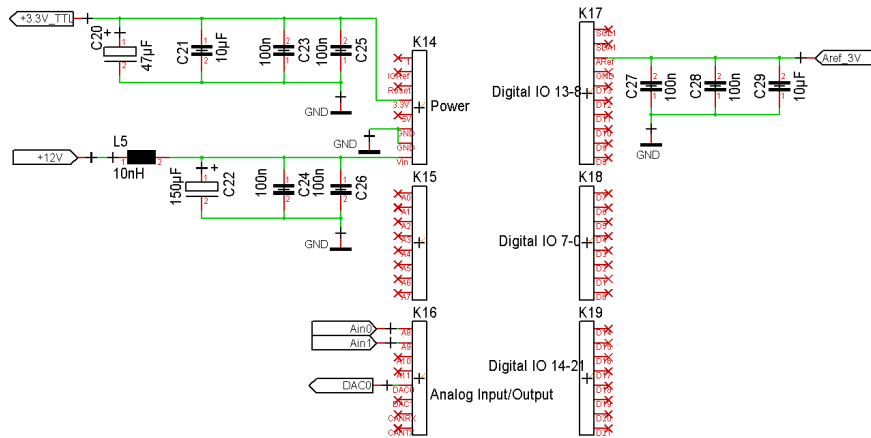


Abbildung B.7: Schaltplan für Versorgungs- und Referenzspannungen des Arduino Due.

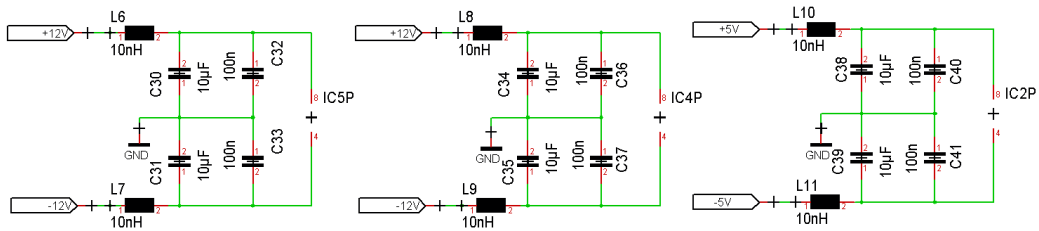


Abbildung B.8: Schaltplan der Versorgungsleitungen der verbauten Operationsverstärker.

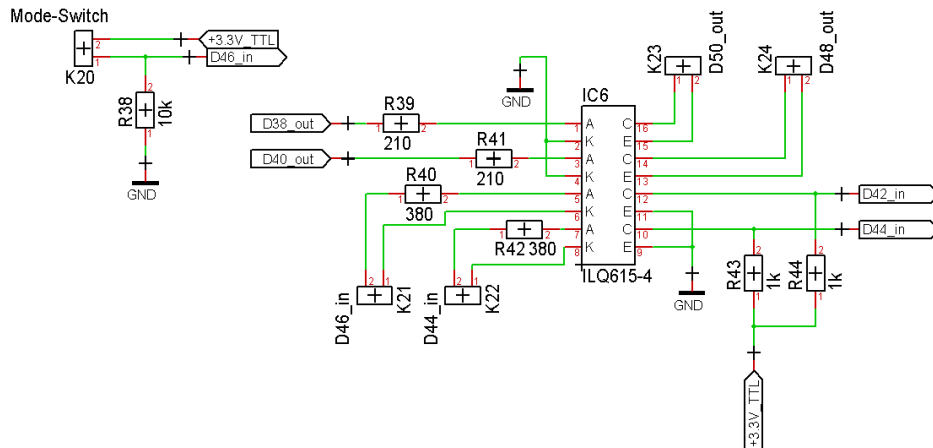


Abbildung B.9: Schaltplan des Optokopplers und des Schalters zum aktivieren der Regeltätigkeit der μ C-Lockbox.

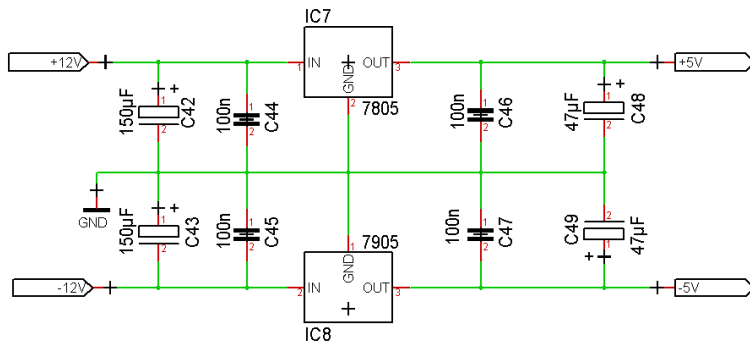


Abbildung B.10: Schaltplan zur Erzeugung der $\pm 5\text{ V}$ Bordspannungen.

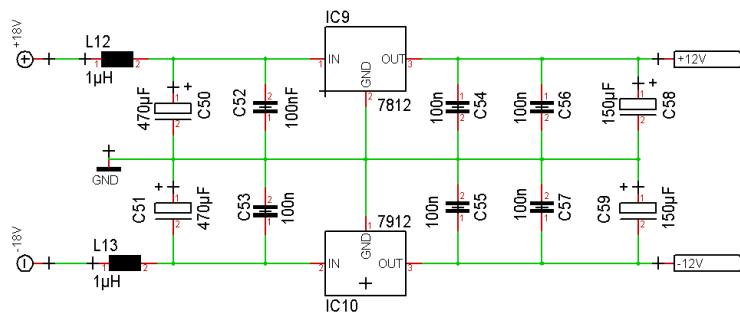


Abbildung B.11: Schaltplan zur Erzeugung der $\pm 12\text{ V}$ Boardspannungen aus der externen Versorgungsspannung.

Literatur

- ¹H. Haken, *Information and Self-Organization* (Springer, 2010).
- ²A. et al., “Order out of Randomness: Self-Organization Processes in Astrophysics”, *Space Science Reviews* **214**, 55 (2018).
- ³H.-H. Stølum, “River Meandering as a Self-Organization Process”, *Science* **271**, 1710–1713 (1996).
- ⁴W. Landry und B. Werner, “Computer simulations of self-organized wind ripple patterns”, *Physica D: Nonlinear Phenomena* **77**, 238–260 (1994).
- ⁵G. Kocurek und R. C. Ewing, “Aeolian dune field self-organization – implications for the formation of simple versus complex dune-field patterns”, *Geomorphology* **72**, 94–105 (2005).
- ⁶M. Treiber, A. Hennecke und D. Helbing, “Congested traffic states in empirical observations and microscopic simulations”, *Phys. Rev. E* **62**, 1805–1824 (2000).
- ⁷K. B. Davis, M. O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn und W. Ketterle, “Bose-Einstein Condensation in a Gas of Sodium Atoms”, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3969–3973 (1995).
- ⁸S. Inouye, A. P. Chikkatur, D. M. Stamper-Kurn, J. Stenger, D. E. Pritchard und W. Ketterle, “Superradiant Rayleigh Scattering from a Bose-Einstein Condensate”, *Science* **285**, 571–574 (1999).
- ⁹R. Bonifacio, L. De Salvo, L. M. Narducci und E. J. D’Angelo, “Exponential gain and self-bunching in a collective atomic recoil laser”, *Phys. Rev. A* **50**, 1716–1724 (1994).
- ¹⁰L. Fallani, C. Fort, N. Piovella, M. Cola, F. S. Cataliotti, M. Inguscio und R. Bonifacio, “Collective atomic recoil in a moving Bose-Einstein condensate: From superradiance to Bragg scattering”, *Phys. Rev. A* **71**, 033612 (2005).
- ¹¹J. M. J. Madey, “Stimulated Emission of Bremsstrahlung in a Periodic Magnetic Field”, *Journal of Applied Physics* **42**, 1906–1913 (1971).
- ¹²M. G. Moore, O. Zobay und P. Meystre, “Quantum optics of a Bose-Einstein condensate coupled to a quantized light field”, *Phys. Rev. A* **60**, 1491–1506 (1999).
- ¹³M. M. Cola, “Collective Atomic Recoil in Ultracold Atoms: Advances and Applications”, Diss. (Università degli Studi di Milano, 2003).

- ¹⁴P. Schauß, M. Cheneau, M. Endres, T. Fukuhara, C. Gross, S. Kuhr und I. Bloch, “Observation of spatially ordered structures in a two-dimensional Rydberg gas”, *Nature* **491**, 87–91 (2012).
- ¹⁵P. Courteille, R. S. Freeland, D. J. Heinzen, F. A. van Abeelen und B. J. Verhaar, “Observation of a Feshbach Resonance in Cold Atom Scattering”, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 69–72 (1998).
- ¹⁶I. Bloch, J. Dalibard und W. Zwerger, “Many-body physics with ultracold gases”, *Rev. Mod. Phys.* **80**, 885–964 (2008).
- ¹⁷L. Chomaz, D. Petter, P. Ilzhöfer, G. Natale, A. Trautmann, C. Politi, G. Durastante, R. M. W. van Bijnen, A. Patscheider, M. Sohmen, M. J. Mark und F. Ferlaino, “Long-Lived and Transient Supersolid Behaviors in Dipolar Quantum Gases”, *Phys. Rev. X* **9**, 021012 (2019).
- ¹⁸K. Baumann, R. Mottl, F. Brennecke und T. Esslinger, “Exploring Symmetry Breaking at the Dicke Quantum Phase Transition”, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 140402 (2011).
- ¹⁹J. Klinder, H. Keßler, M. Wolke, L. Mathey und A. Hemmerich, “Dynamical phase transition in the open Dicke model”, *Proceedings of the National Academy of Sciences* **112**, 3290–3295 (2015).
- ²⁰J. Léonard, A. Morales, P. Zupancic, T. Esslinger und T. Donner, “Supersolid formation in a quantum gas breaking a continuous translational symmetry”, *Nature* **543**, 87–90 (2017).
- ²¹K. Gietka, F. Mivehvar und H. Ritsch, “Supersolid-Based Gravimeter in a Ring Cavity”, *Phys. Rev. Lett.* **122**, 190801 (2019).
- ²²K. C. Cox, D. H. Meyer, N. A. Schine, F. K. Fatemi und P. D. Kunz, “Increased atom-cavity coupling and stability using a parabolic ring cavity”, *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics* **51**, 195002 (2018).
- ²³D. S. Naik, G. Kuyumjyan, D. Pandey, P. Bouyer und A. Bertoldi, “Bose–Einstein condensate array in a malleable optical trap formed in a traveling wave cavity”, *Quantum Science and Technology* **3**, 045009 (2018).
- ²⁴P. Wolf, S. C. Schuster, D. Schmidt, S. Slama und C. Zimmermann, “Observation of Subradiant Atomic Momentum States with Bose-Einstein Condensates in a Recoil Resolving Optical Ring Resonator”, *Phys. Rev. Lett.* **121**, 173602 (2018).
- ²⁵S. C. Schuster, P. Wolf, S. Ostermann, S. Slama und C. Zimmermann, “Supersolid properties of a Bose-Einstein condensate in a ring resonator”, *arXiv* (2019).
- ²⁶F. Mivehvar, S. Ostermann, F. Piazza und H. Ritsch, “Driven-Dissipative Supersolid in a Ring Cavity”, *Phys. Rev. Lett.* **120**, 123601 (2018).

-
- ²⁷D. Kruse, C. von Cube, C. Zimmermann und P. W. Courteille, “Observation of Lasing Mediated by Collective Atomic Recoil”, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 183601 (2003).
- ²⁸D. Kruse, “Selbstorganisation und Laseremission in kalten atomaren Ensembles”, Diss. (Eberhard Karls Universität Tübingen, 2005).
- ²⁹S. Slama, S. Bux, G. Krenz, C. Zimmermann und P. W. Courteille, “Superradiant Rayleigh Scattering and Collective Atomic Recoil Lasing in a Ring Cavity”, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 053603 (2007).
- ³⁰S. Slama, G. Krenz, S. Bux, C. Zimmermann und P. W. Courteille, “Cavity-enhanced superradiant Rayleigh scattering with ultracold and Bose-Einstein condensed atoms”, *Phys. Rev. A* **75**, 063620 (2007).
- ³¹S. Slama, “Ultrakalte Atome in einem optischen Ringresonator: vom kollektiven atomaren Rückstoss-Laser zu superradianter Rayleigh-Streuung.”, Diss. (Eberhard Karls Universität Tübingen, 2007).
- ³²D. Schmidt, H. Tomczyk, S. Slama und C. Zimmermann, “Dynamical Instability of a Bose-Einstein Condensate in an Optical Ring Resonator”, *Phys. Rev. Lett.* **112**, 115302 (2014).
- ³³H. Tomczyk, D. Schmidt, C. Georges, S. Slama und C. Zimmermann, “Stability diagram of the collective atomic recoil laser with thermal atoms”, *Phys. Rev. A* **91**, 063837 (2015).
- ³⁴D. Schmidt, “Dynamische Instabilität eines Bose-Einstein Kondensats in einem optischen Ringresonator”, Diss. (Eberhard Karls Universität Tübingen, 2016).
- ³⁵H. Tomczyk, “Schwellverhalten des kollektiven atomaren Rückstoß-Lasers an der Grenze zum entarteten Regime”, Diss. (Eberhard Karls Universität Tübingen, 2015).
- ³⁶G. Krenz, S. Bux, S. Slama, C. Zimmermann und P. Courteille, “Controlling mode locking in optical ring cavities”, *Applied Physics B* **87**, 643–647 (2007).
- ³⁷A. Yilmaz, S. Schuster, P. Wolf, D. Schmidt, M. Eisele, C. Zimmermann und S. Slama, “Optomechanical damping of a nanomembrane inside an optical ring cavity”, *New Journal of Physics* **19**, 013038 (2017).
- ³⁸S. C. Schuster, P. Wolf, D. Schmidt, S. Slama und C. Zimmermann, “Pinning Transition of Bose-Einstein Condensates in Optical Ring Resonators”, *Phys. Rev. Lett.* **121**, 223601 (2018).
- ³⁹C. Foot, *Atomphysik* (Oldenbourg Wissenschaftsverlag, 2011).
- ⁴⁰C. Cohen-Tannoudji, G. Grynberg und J. Dupont-Roc, *Atom-Photon Interactions: Basic Processes and Applications* (Wiley, New York, 1992).

- ⁴¹J. P. Gordon und A. Ashkin, “Motion of atoms in a radiation trap”, *Phys. Rev. A* **21**, 1606–1617 (1980).
- ⁴²R. Grimm, M. Weidemüller und Y. B. Ovchinnikov, “Optical Dipole Traps for Neutral Atoms”, Bd. 42, hrsg. von B. Bederson und H. Walther, *Advances In Atomic, Molecular, and Optical Physics* (Academic Press, 2000), S. 95–170.
- ⁴³M. Gangl und H. Ritsch, “Cold atoms in a high-Q ring cavity”, *Phys. Rev. A* **61**, 043405 (2000).
- ⁴⁴H. Tanji-Suzuki, I. D. Leroux, M. H. Schleier-Smith, M. Cetina, A. T. Grier, J. Simon und V. Vuletić, *Chapter 4 - Interaction between Atomic Ensembles and Optical Resonators: Classical Description*, Bd. 60, *Advances In Atomic, Molecular, and Optical Physics* (2011), S. 201–237.
- ⁴⁵H. Kogelnik und T. Li, “Laser Beams and Resonators”, *Appl. Opt.* **5**, 1550–1567 (1966).
- ⁴⁶D. Kleppner, “Inhibited Spontaneous Emission”, *Phys. Rev. Lett.* **47**, 233–236 (1981).
- ⁴⁷G. Krenz, S. Bux, S. Slama, C. Zimmermann und P. Courteille, “Controlling mode locking in optical ring cavities”, *Applied Physics B* **87**, 643–647 (2007).
- ⁴⁸M. G. Moore, O. Zobay und P. Meystre, “Quantum optics of a Bose-Einstein condensate coupled to a quantized light field”, *Phys. Rev. A* **60**, 1491–1506 (1999).
- ⁴⁹D. Steck, *Rubidium 87 D Line Data* (2003).
- ⁵⁰M. Gilowski, C. Schubert, M. Zaiser, W. Herr, T. Wübbena, T. Wendrich, T. Müller, E. Rasel und W. Ertmer, “Narrow bandwidth interference filter-stabilized diode laser systems for the manipulation of neutral atoms”, *Optics Communications* **280**, 443–447 (2007).
- ⁵¹S. Bennetts, G. D. McDonald, K. S. Hardman, J. E. Debs, C. C. N. Kuhn, J. D. Close und N. P. Robins, “External cavity diode lasers with 5kHz linewidth and 200nm tuning range at 1.55 μ m and methods for linewidth measurement”, *Opt. Express* **22**, 10642–10654 (2014).
- ⁵²C. F. Ockeloen, “Probing fluctuations in a lattice of mesoscopic atomic ensembles”, Masterarbeit (Van der Waals-Zeeman Institute, University of Amsterdam, 2010).
- ⁵³C. F. Ockeloen, A. F. Tauschinsky, R. J. C. Spreeuw und S. Whitlock, “Detection of small atom numbers through image processing”, *Phys. Rev. A* **82**, 061606 (2010).
- ⁵⁴E. D. Black, “An introduction to Pound–Drever–Hall laser frequency stabilization”, *American Journal of Physics* **69**, 79–87 (2001).

-
- ⁵⁵D. Sodtke, “Reduktion der Linienbreite von optischen Resonatoren”, Diplomarbeit (Eberhard Karls Universität Tübingen, 2012).
- ⁵⁶W. C. Georges, “Aufbau und Stabilisierung eines Hoch Finesse Resonators mit sehr schmaler Linienbreite”, Diplomarbeit (Eberhard Karls Universität Tübingen, 2015).
- ⁵⁷B. Ponboonjaroenchai, J. Luengviriyaya, M. Sutthiopad, P. Wungmool, N. Kumchaiseemak, S. C. Müller und C. Luengviriyaya, “Self-organization of multiarmed spiral waves in excitable media”, *Phys. Rev. E* **100**, 042203 (2019).
- ⁵⁸R. O. Grigoriev, M. C. Cross und H. G. Schuster, “Pinning Control of Spatiotemporal Chaos”, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 2795–2798 (1997).
- ⁵⁹F. Sorrentino, M. di Bernardo, F. Garofalo und G. Chen, “Controllability of complex networks via pinning”, *Phys. Rev. E* **75**, 046103 (2007).
- ⁶⁰R. M. Sandner, W. Niedenzu und H. Ritsch, “Subrecoil cavity cooling towards degeneracy: A numerical study”, *EPL (Europhysics Letters)* **104**, 43001 (2013).
- ⁶¹K. Kroeger, N. Dogra, R. Rosa-Medina, M. Paluch, F. Ferri, T. Donner und T. Esslinger, “Continuous feedback on a quantum gas coupled to an optical cavity”, *New Journal of Physics* (2020).
- ⁶²D. A. Ivanov, T. Y. Ivanova, S. F. Caballero-Benitez und I. B. Mekhov, “Feedback-Induced Quantum Phase Transitions Using Weak Measurements”, *Phys. Rev. Lett.* **124**, 010603 (2020).

Danksagung

Ich möchte mich bei meinem ehemaligen Physiklehrer Erich Matt bedanken, der es versteht für sein Fach zu begeistern und so die Weichen legte die mich nach Tübingen führten. Besonderer Dank gilt Claus Zimmermann für die Möglichkeit ein Teil dieses Projekts sein zu können, für die Freiheit Ideen auszuprobieren und die mitreißende Begeisterung für die Physik. Ebenso danke ich Sebastian Slama für die Unterstützung mit Rat und Tat auf die immer zu zählen war.

Ich bedanke mich bei meinem Laborkollegen Philip Wolf für die lebhaften Diskussionen welche die Laborarbeit bereicherten und die großartige Zusammenarbeit. Mit ihm wurde die „BEC-machine“ erst möglich und ich habe viel von ihm gelernt. Ich bedanke mich bei allen Angehörigen der Arbeitsgruppen von Claus Zimmermann, Jozsef Fortágh, Sebastian Slama und Alexander Stibor für die Hilfsbereitschaft und Kameradschaft.

Mein Dank gilt den Mitarbeitern der Werkstätten für Elektronik und Feinmechanik die uns mit ihrem Können zur Seite standen, sowie der Verwaltung des Physikalischen Instituts.

Des weiteren bedanke ich mich bei Wally und Angi fürs Korrekturlesen und bei meiner Familie für die Unterstützung während meines Studiums. Vielen Dank Angi, du hast über die Jahre das Gleichgewicht gewahrt.

Publikationsliste

1. S. C. Schuster, P. Wolf, S. Ostermann, S. Slama, C. Zimmermann.
Supersolid Properties of a Bose-Einstein Condensate in a Ring Resonator;
Phys. Rev. Lett. 124, 143602 (2020).
2. S. C. Schuster, P. Wolf, D. Schmidt, S. Slama, C. Zimmermann.
Pinning Transition of Bose-Einstein Condensates in Optical Ring Resonators;
Phys. Rev. Lett. 121, 223601 (2018).
3. P. Wolf, S. C. Schuster, D. Schmidt, S. Slama, C. Zimmermann.
Observation of Subradiant Atomic Momentum States with Bose-Einstein Condensates in a Recoil Resolving Optical Ring Resonator;
Phys. Rev. Lett. 121, 173602 (2018).
4. A. Yilmaz, S. Schuster, P. Wolf, D. Schmidt, M. Eisele, C. Zimmermann, S. Slama.
Optomechanical damping of a nanomembrane inside an optical ring cavity;
New J. Phys. 19 013038 (2017).