

# Zsigmondy-Elemente in endlichen Gruppen vom Lie-Typ

Dissertation

der Mathematischen Fakultät  
der Eberhard-Karls-Universität Tübingen  
zur Erlangung des Grades eines Doktors  
der Naturwissenschaften

vorgelegt von

Thomas Hauptvogel

aus Stuttgart

Mai 2001

Tag der mündlichen Prüfung:

7. August 2001

Dekan:

Prof. Dr. Ch. Lubich

1. Berichterstatter:

Prof. Dr. Ch. Hering

2. Berichterstatter:

Prof. Dr. P. Schmid

*für Christine*



# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>5</b>
<b>Allgemeine Notation</b>	<b>11</b>
<b>1 Grundlagen</b>	<b>13</b>
<b>2 <math>q</math>-primitive Teiler von <math>q^n - 1</math></b>	<b>17</b>
<b>3 Moduln und Formen für die Ausnahmegruppen vom Lie-Typ</b>	<b>21</b>
3.1 Gruppen vom Typ $G_2$ . . . . .	21
3.2 Gruppen vom Typ $E_6, F_4, {}^2E_6$ und ${}^3D_4$ . . . . .	24
3.3 Gruppen vom Typ $E_7$ . . . . .	33
<b>4 Die Sätze von Ch. Hering für lineare Gruppen</b>	<b>39</b>
<b>5 Die Sätze von B. Merkt für klassische Gruppen</b>	<b>41</b>
<b>6 Zentralisatoren, Normalisatoren und Konjugiertenklassen</b>	<b>45</b>
6.1 Grundlagen . . . . .	45
6.2 Singer-Zyklen und Zsigmondy-Elemente . . . . .	50
<b>7 Zsigmondy-Elemente in endlichen Gruppen vom Lie-Typ</b>	<b>79</b>
7.1 Gruppen vom Typ $G_2$ . . . . .	79
7.2 Gruppen vom Typ ${}^3D_4$ . . . . .	87
7.3 Gruppen vom Typ $E_6$ . . . . .	90
7.4 Gruppen vom Typ $F_4$ . . . . .	107
7.5 Gruppen vom Typ ${}^2E_6$ . . . . .	110
7.6 Gruppen vom Typ $E_7$ . . . . .	114
<b>Literatur</b>	<b>123</b>



# Einleitung

Nach Abschluss der Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen wurde die Untersuchung der Untergruppenverbände dieser Gruppen ein zentrales Forschungsgebiet der Gruppentheorie. Die nichtabelschen endlichen einfachen Gruppen lassen sich in drei Klassen einteilen, bestehend aus den alternierenden Gruppen vom Grad  $n \geq 5$ , den endlichen Gruppen vom Lie-Typ und den 26 sporadischen Gruppen. Die Klasse der Gruppen vom Lie-Typ enthält zum einen die klassischen Gruppen und zum anderen die Ausnahmetypen.

Die vorliegende Arbeit behandelt spezielle Untergruppen der Ausnahmetypen und stellt eine Verallgemeinerung von Ergebnissen dar, die zunächst von Ch. Hering für lineare Gruppen gefunden und später von B. Merkt auf die klassischen Gruppen verallgemeinert wurden. In einer Arbeit von Ch. Hering zur Charakterisierung bestimmter zweifach transitiver Permutationsgruppen, im Wesentlichen der Untergruppen von  $\text{P}\Gamma\text{L}_2(q)$ , die  $\text{P}\text{S}\text{L}_2(q)$  enthalten, ([He1]) finden sich Ergebnisse über lineare Gruppen, die ein Element von Primzahlordnung enthalten, das irreduzibel auf dem zugehörigen Modul wirkt. In weiteren Arbeiten ([He2], [He3]) werden diese Ergebnisse dann erweitert zu einer systematischen Untersuchung der Obergruppen solcher Elemente und zum Studium zweifach transitiver Permutationsgruppen mit regulärem Sockel. Ausgangspunkt der Ergebnisse ist die Beobachtung, dass die von solchen irreduziblen Elementen von Primzahlordnung erzeugte Gruppe in auflösbaren linearen Gruppen fast immer normal ist. In den Ausnahmefällen ergeben sich starke Einschränkungen für die Dimension des Moduls und andere Parameter, und die Struktur sämtlicher auflösbarer Ausnahmefälle ist bekannt.

Da nicht alle klassischen Gruppen Elemente besitzen, die irreduzibel auf dem zugehörigen Modul wirken, führte B. Merkt die Begriffe des *Zsigmondy-Elementes* und der *Zsigmondy-Zahl* ein, um die Ergebnisse von Ch. Hering auf klassische Gruppen verallgemeinern zu können. Dabei ist für eine klassische Gruppe  $G$  mit dem zugehörigen natürlichen Modul  $V$  die *Zsigmondy-Zahl* definiert als die Dimension eines Untermoduls maximaler Dimension, auf dem ein Element von  $G$  irreduzibel wirkt. Wirkt  $x \in G$  irreduzibel auf einem solchen Untermodul, so heißt  $x$  *Zsigmondy-Element*. In klassischen Gruppen, die einen Singerzyklus enthalten,

wirken Zsigmondy-Elemente irreduzibel. In [Me] werden dann Struktursätze über Untergruppen von  $G$  bewiesen, die Zsigmondy-Elemente von Primzahlordnung enthalten.

Um entsprechende Ergebnisse für die Ausnahmetypen zu erzielen, muss der Begriff der *Zsigmondy-Zahl* abgeändert werden. In der vorliegenden Arbeit bezeichnet die *Zsigmondy-Zahl*  $\mu(G, V)$  die Dimension eines Untermoduls von  $V$  maximaler Dimension, auf dem ein Element von Primzahlordnung irreduzibel wirkt. Entsprechend ist ein *Zsigmondy-Element* ein Element  $g \in G$ , so dass ein Element in  $\langle g \rangle$  von Primzahlordnung irreduzibel auf einem Untermodul von  $V$  der Dimension  $\mu(G, V)$  wirkt. Zum Vergleich bezeichne  $\nu(G, V)$  den von B. Merkt eingeführten Parameter. In klassischen Gruppen gilt stets  $\mu(G, V) = \nu(G, V)$ , und die Zentralisatoren von je zwei Elementen, die irreduzibel auf einem Untermodul der Dimension  $\mu(G, V)$  wirken, sind konjugiert. Beides gilt nicht mehr für alle Ausnahmetypen. Während sich die Zsigmondy-Zahl aus der Ordnung von  $G$  ablesen lässt, muss zur Bestimmung von  $\nu(G, V)$  die Wirkung der maximalen Tori von  $G$  auf  $V$  untersucht werden. Ist  $G$  eine nicht-getwistete Gruppe vom Lie-Typ, so zeigt sich, dass die Zsigmondy-Zahl stets der Ordnung eines Coxeter-Elements in der zugehörigen Weyl-Gruppe entspricht.

In der vorliegenden Arbeit werden zunächst Struktursätze für Untergruppen der einfach-zusammenhängenden Gruppen vom Typ  $G_2$ ,  ${}^3D_4$ ,  $E_6$ ,  $F_4$ ,  ${}^2E_6$  und  $E_7$  bewiesen, die ein Zsigmondy-Element enthalten. Diese Ergebnisse entsprechen den von Ch. Hering und B. Merkt gefundenen Ergebnissen für die klassischen Gruppen. Insbesondere gilt in allen von Ch. Hering, B. Merkt und in der vorliegenden Arbeit untersuchten Gruppen, also den Untergruppen einer einfach-zusammenhängenden Gruppe  $G$  vom Lie-Typ, die ein Zsigmondy-Element enthalten, dass solche Untergruppen höchstens einen nichtabelschen Kompositionsfaktor besitzen. Bis auf wenige Ausnahmen, die sich genau angeben lassen, sind sie auflösbar oder besitzen einen quasiaeinfachen Normalteiler. Ausgangspunkt ist wie in den Arbeiten von Ch. Hering und B. Merkt die Untersuchung der auflösbaren Untergruppen von  $G$ , die ein Zsigmondy-Element enthalten.

Anders als in [Me] untersuchen wir, ausgehend von den so gefundenen Struktursätzen, mit Hilfe der Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen den genauen Isomorphietyp der Obergruppen von Zsigmondy-Elementen für die Ausnahmetypen. Enthält eine Untergruppe von  $G$  ein Zsigmondy-Element, das nicht die kleinstmögliche Ordnung  $\mu(G, V) + 1$  hat, so geben wir eine vollständige Liste solcher Gruppen an. Für die kleinstmögliche Ordnung bleibt nur eine kleine Zahl möglicher Obergruppen für die Typen  $E_6$ ,  $F_4$ ,  ${}^2E_6$  und  $E_7$  offen. Alle diese offenen Fälle enthalten normale Gruppen vom Lie-Typ in einer Charakteristik, die verschieden ist von der Charakteristik des  $G$  zugrunde liegenden Körpers. Diese genauere Bestimmung der Obergruppen von Zsigmondy-Elementen beruht einer-

seits darauf, dass die zugehörigen Moduln für die Ausnahmetypen eine für den Typ charakteristische, feste Dimension haben, und andererseits auf neuen Argumenten, die wir insbesondere für die Gruppen mit einer Komponente vom Lie-Typ in der Charakteristik des definierenden Körpers entwickeln. Es sei darauf hingewiesen, dass insbesondere sämtliche Untergruppen von  $G$ , die den Zentralisator eines Zsigmondy-Elements, einen maximalen Torus von  $G$ , enthalten, bestimmt werden.

Die Untersuchung der Untergruppenstruktur der endlichen einfachen Gruppen konzentriert sich größtenteils auf die Bestimmung ihrer maximalen Untergruppen. Ein Überblick über den Stand dieses Forschungsprogramms im Jahr 1990 findet sich in [KL], §1. Für die alternierenden Gruppen ist diese Klassifikation vollständig ([LPS]). Sie basiert auf dem Satz von O’Nan-Scott als dem zentralen Struktursatz. Einen entsprechenden Satz hat M. Aschbacher für die endlichen klassischen Gruppen bewiesen. Die maximalen Untergruppen der sporadischen Gruppen mit Ausnahme des Baby-Monsters  $BM$  und des Monsters  $M$  sind vollständig bestimmt. Für die Ausnahmegruppen liegt eine Klassifikation für die Serien  ${}^2B_2(q)$ ,  ${}^2G_2(q)$  (siehe [K11]),  $G_2(q)$  (siehe [As3]),  ${}^3D_4(q)$  (siehe [K12]) und  ${}^2F_4(q)$  vor. M. Aschbacher hat eine fast vollständige Klassifikation der maximalen Untergruppen der Gruppen vom Typ  $E_6$  erzielt. Der Beweis der Ergebnisse verteilt sich über eine Serie von Arbeiten, die zusammen über 300 Seiten füllen. Das Ergebnis findet sich in einer unveröffentlichten Arbeit von 170 Seiten Länge. Dabei bleibt zuletzt eine Reihe möglicher Fälle offen, darunter auch alle Fälle, deren Existenz in der vorliegenden Arbeit nicht geklärt werden konnte.

Weitere Untersuchungen über die Untergruppenstruktur der endlichen Gruppen vom Lie-Typ konzentrieren sich auf Obergruppen maximaler Tori oder Untergruppen, die von Wurzelgruppen erzeugt werden. Von diesen Arbeiten unterscheidet sich die vorliegende Arbeit nicht nur im Hinblick auf die untersuchten Untergruppen, sondern auch auf die verwendeten Methoden. Sie bewegt sich wie [Me] in der Nachfolge der Arbeiten von Ch. Hering. Dies bedeutet insbesondere, dass in weiten Teilen der Beweise Methoden der abstrakten Gruppentheorie verwendet werden.

In letzter Zeit beschäftigte sich eine Arbeit von Guralnik, Penttila, Präger und Saxl ([GPPS]) mit ähnlichen Fragestellungen. Die genannten Autoren klassifizieren alle Untergruppen von  $GL_n(q)$ , deren Ordnung durch einen  $q$ -primitiven Teiler von  $q^e - 1$  für ein  $e$  mit  $n/2 < e \leq n$  teilbar ist. Ihre Ergebnisse umfassen damit auch die Ergebnisse von Ch. Hering und B. Merkt. Die Methoden unterscheiden sich von den von Ch. Hering verwendeten, weil ihre Arbeit den Klassifikationssatz von M. Aschbacher für die maximalen Untergruppen der klassischen Gruppen voraussetzt. Ein entsprechender Satz liegt für die Ausnahmetypen nur ansatzweise vor und kann nicht wie in [GPPS] verwendet werden. Insbesondere

über die Untergruppenstruktur der Gruppen vom Typ  $E_7$  sind bisher nur sehr wenige Ergebnisse bekannt. Für andere Typen müsste man eine Reihe sehr komplexer, zum Teil unveröffentlichter Arbeiten voraussetzen. Dennoch verwenden wir einige Ergebnisse von M. Aschbacher über die Untergruppen der Gruppen vom Typ  $E_6$ . An manchen Stellen werden Ergebnisse von M. Aschbacher, die auf komplizierten und oft über mehrere Arbeiten verteilten Argumentationen beruhen, durch einfachere, für unser Thema ausreichende Argumente ersetzt.

Die ersten beiden Kapitel beinhalten neben elementaren Grundlagen auch Überlegungen zahlentheoretischer Natur. Der Begriff des *q-primitiven Teilers* wird eingeführt und in Zusammenhang zu den irreduziblen Darstellungen gewisser halbeinfacher Elemente gebracht.

Im dritten Kapitel werden die Standardmoduln und die im Folgenden verwendeten Multilinearformen für die untersuchten Gruppen eingeführt. Dabei wird für die Gruppen vom Typ  $E_7$  eine Darstellung nach B. Cooperstein gewählt, die nur in ungerader Charakteristik gilt. Entsprechend gelten die erzielten Ergebnisse über die Gruppen vom Typ  $E_7$  nur in ungerader Charakteristik, obwohl diese Bedingung außer bei der Definition der 4-Linear-Form für  $E_7$  nirgends eingeht. Es ist zu erwarten, dass die erzielten Ergebnisse auch in Charakteristik 2 gelten.

Das vierte Kapitel bietet einen Überblick über die Sätze von Ch. Hering für lineare Gruppen und das fünfte Kapitel über die Sätze von B. Merkt für die endlichen klassischen Gruppen.

Im sechsten Kapitel werden Zentralisatoren, Normalisatoren und Konjugiertenklassen von Zsigmondy-Elementen bestimmt. Dazu wird die gut ausgearbeitete Theorie der Zentralisatoren halbeinfacher Elemente in algebraischen Gruppen verwendet. Sie ersetzt die von B. Merkt verwendeten, elementaren Methoden, weil diese sich nicht auf die Ausnahmetypen verallgemeinern lassen. Auch für die Bestimmung der Zentralisatoren, Normalisatoren und Konjugiertenklassen von Zsigmondy-Elementen in klassischen Gruppen werden neue Beweise gegeben, die wesentlich kürzer sind als die in der Arbeit von B. Merkt geführten und zudem sowohl die Ergebnisse als auch ihre Beziehung zu den zahlentheoretischen Voraussetzungen plausibler machen. Sie werden auch deswegen geführt, weil aus ihnen alle zyklischen Zentralisatoren von halbeinfachen Elementen der klassischen Gruppen bestimmt werden können. Dieses Ergebnis wird benötigt für die genaue Bestimmung der Obergruppen von Zsigmondy-Elementen.

Das siebte Kapitel beinhaltet die Struktursätze für Obergruppen von Zsigmondy-Elementen in endlichen einfach-zusammenhängenden Gruppen vom Lie-Typ  $G_2$ ,  ${}^3D_4$ ,  $F_4$ ,  $E_6$ ,  ${}^2E_6$  und  $E_7$  und die Bestimmung sämtlicher Obergruppen mit Ausnahme der erwähnten ungeklärten Fälle mit Hilfe der Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen. Dabei sei darauf hingewiesen, dass die Struktursätze diejenigen Resultate sind, die sich ohne die Verwendung der Klassifika-

tion der endlichen einfachen Gruppen erzielen lassen. Auch für die nicht behandelten Gruppen vom Typ  $E_8$  und vom Typ  $E_7$  in Charakteristik 2 sollten sich analoge Resultate erzielen lassen. Entsprechende Ergebnisse für die Ree-Gruppen lassen sich aus den Ergebnissen für die behandelten Gruppen ableiten.

Die vorliegende Arbeit bietet einen einheitlichen Zugang zu verwandten Fragestellungen für verschiedene endliche Gruppen vom Lie-Typ, die bisher nicht untersucht worden sind. Mit vollständig neuen Methoden werden Ergebnisse erzielt, die nur für einige Typen bekannt sind und für die meisten dieser Typen nur aus der Kombination sehr umfassender und zum Teil unveröffentlichter Arbeiten abgeleitet werden können. Insbesondere für die Gruppen vom Typ  $E_7$  waren die erzielten Ergebnisse bisher nicht bekannt. Die Möglichkeit, mit Hilfe der verwendeten Techniken Ergebnisse über Untergruppen endlicher Gruppen vom Lie-Typ zu erhalten, erschöpft sich nicht in der Klassifikation der Obergruppen von Zsigmondy-Elementen. Weitere Untersuchungen über Obergruppen halbeinfacher Elemente mit ähnlichen Mitteln bieten sich an.

Herzlich bedanken möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. Ch. Hering für die Themenstellung und Betreuung dieser Dissertation. Mein weiterer Dank für anregende Diskussionen gilt Herrn Prof. Dr. P. Schmid und meinen Kollegen Dr. Udo Riese und Lars Schneider.



# Allgemeine Notation

Stets bezeichnen  $p$  und  $r$  Primzahlen und  $q$  eine Potenz von  $p$ . Körper sind stets kommutativ. Zudem gelten folgende Bezeichnungen:

$\mathbb{F}_q$	endlicher Körper der Ordnung $q = p^a$
$\mathbb{F}^*$	multiplikative Gruppe des Körpers $\mathbb{F}$
$\mathbb{F}^2$	die Menge aller von 0 verschiedenen Quadrate in $\mathbb{F}$
$\mathbb{Z}_n$	die zyklische Gruppe der Ordnung $n$
$\text{Aut}(G)$	die Gruppe der Automorphismen der Gruppe $G$
$\text{Inn}(G)$	die Gruppe der inneren Automorphismen der Gruppe $G$
$Z(G)$	das Zentrum der Gruppe $G$
$\mathfrak{N}_G(H)$	der Normalisator der Untergruppe $H$ in $G$
$\mathfrak{C}_G(H)$	der Zentralisator der Untergruppe $H$ in $G$
$\text{Aut}_G(H)$	die Gruppe der durch $\mathfrak{N}_G(H)$ auf $H$ induzierten Automorphismen

Für einen  $G$ -Modul  $V$  und  $M \leq V$  sind die Bezeichnungen  $\mathfrak{C}_V(G)$ ,  $\mathfrak{C}_G(M)$  und  $\mathfrak{N}_G(M)$  im semidirekten Produkt  $VG$  zu verstehen.

Gilt  $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_s$  für  $G$ -Untermodule  $U_i$  ( $1 \leq i \leq s$ ), so nennen wir  $\mathcal{Z} := \{U_1, \dots, U_s\}$  eine direkte Zerlegung des  $G$ -Moduls  $V$ . Dann bezeichnet  $\mathfrak{C}_G(\mathcal{Z})$  die Menge aller Elemente in  $G$ , die jeden der Unterräume  $U_i$ ,  $1 \leq i \leq s$ , stabilisieren und  $\mathfrak{N}_G(\mathcal{Z})$  die Menge aller Elemente in  $G$ , die  $\mathcal{Z}$  stabilisieren.

Spezielle Bezeichnungen zu linearen algebraischen Gruppen, zu Coxeter-Gruppen, zu den verschiedenen Typen von Gruppen vom Lie-Typ und den zugehörigen Moduln finden sich in den entsprechenden Abschnitten.

*Zsigmondy-Elemente*, die *Zsigmondy-Zahl*  $\mu(G, V)$  und der Parameter  $\nu(G, V)$  werden in Kapitel 6.2 definiert. Bezeichnungen im Zusammenhang mit Teilbarkeit in  $\mathbb{N}$ , Kreisteilungspolynomen und  $q$ -primitiven Teilern von  $q^n - 1$  finden sich am Anfang von Kapitel 2.



# Kapitel 1

## Grundlagen

Wir zitieren zunächst einige Resultate über  $p$ -Gruppen vom symplektischen Typ, die von zentraler Bedeutung für die Untersuchung auflösbarer Untergruppen von endlichen Gruppen vom Lie-Typ sind.

**Definition 1.1** *Ist  $p$  eine Primzahl und  $P$  eine  $p$ -Gruppe, so heißt  $P$  **extraspeziell**, wenn  $Z(P) = P' = \Phi(P) \cong \mathbb{Z}_p$  gilt.  $P$  heißt **vom symplektischen Typ**, wenn jede abelsche, in  $P$  charakteristische Untergruppe von  $P$  zyklisch ist.*

**Proposition 1.1** *Sei  $r$  eine Primzahl und  $R$  eine  $r$ -Gruppe vom symplektischen Typ.*

- (i) *Bis auf Isomorphie gibt es zwei extraspezielle Gruppen der Ordnung  $r^3$ ,  $Q_8$  und  $D_8$  für  $r = 2$ . Für  $r \neq 2$  hat nur eine der beiden Exponent  $r$  und ist isomorph zur  $r$ -Sylowgruppe  $R_0$  von  $GL_3(r)$ .*
- (ii) *Ist  $r \neq 2$  und  $\exp(R) = r$ , so ist  $|R| = r^{1+2m}$  für ein  $m \in \mathbb{Z}$  und  $R$  isomorph zum  $m$ -fachen zentralen Produkt von  $R_0$ .*
- (iii) *Ist  $r = 2$  und  $\exp(R) = 4$ , so ist  $|R| = 2^{1+2m}$  und  $R$  isomorph zum  $m$ -fachen zentralen Produkt von  $D_8$  und wird mit  $2_+^{1+2m}$  bezeichnet, oder es ist  $R$  isomorph zum zentralen Produkt von  $Q_8$  mit  $2_+^{1+2(m-1)}$  und wird mit  $2_-^{1+2m}$  bezeichnet, oder es ist  $|R| = 2^{2+2m}$  und  $R$  isomorph zum zentralen Produkt  $\mathbb{Z}_4 \circ 2_+^{1+2m} \cong \mathbb{Z}_4 \circ 2_-^{1+2m}$ .*

Beweis: ([KL], Prop. 4.6.2).

Die nächste Proposition beschreibt die Theorie der Darstellungen der Gruppen vom symplektischen Typ.

**Proposition 1.2** *Sei  $r$  eine Primzahl,  $R$  eine  $r$ -Gruppe vom symplektischen Typ mit  $\exp(R) = r(r, 2)$  und  $p \neq r$  eine Primzahl.*

- (i)  *$R$  hat genau  $k := |Z(R)| - 1$  nicht äquivalente treue, absolut irreduzible Darstellungen  $\rho_1, \dots, \rho_k$  über einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik  $p$ .*
- (ii) *Die Darstellungen  $\rho_1, \dots, \rho_k$  sind paarweise quasiäquivalent, haben Grad  $r^m$  mit  $m$  wie in Proposition 1.1, und ihr Zerfällungskörper ist  $\mathbb{F}_{p^a}$  mit dem kleinsten  $a$ , für das  $p^a - 1$  durch  $|Z(R)|$  teilbar ist.*
- (iii) *Für  $1 \leq i, j \leq k$ ,  $i \neq j$  ist  $\rho_i(z) \neq \rho_j(z)$  für  $z \in Z(R) \setminus \{1\}$ .*

Beweis: ([KL], Prop. 4.6.3).

**Proposition 1.3** *Sei  $r$  eine Primzahl,  $R$  eine  $r$ -Gruppe vom symplektischen Typ mit  $\exp(R) = r(r, 2)$ ,  $p \neq r$  eine Primzahl,  $\mathbb{F}$  ein Körper mit  $\text{char}(\mathbb{F}) = p$  und  $V$  ein  $\mathbb{F}$ -Vektorraum.*

*Sei  $R$  eine absolut irreduzible Untergruppe von  $GL(V)$ .*

*Dann gilt  $\text{Aut}_{GL(V)}(R) \cong \mathfrak{C}_{\text{Aut}(R)}(Z(R))$ .*

*Für ungerades  $r$  und  $|R| = r^{1+2m}$  ist  $\mathfrak{C}_{\text{Aut}(R)}(Z(R))/\text{Inn}(R) \cong Sp_{2m}(r)$ .*

*Ist  $R \cong 2_+^{1+2m}$ , so ist  $\mathfrak{C}_{\text{Aut}(R)}(Z(R))/\text{Inn}(R) \cong O_{2m}^+(2)$ .*

*Ist  $R \cong 2_-^{1+2m}$ , so ist  $\mathfrak{C}_{\text{Aut}(R)}(Z(R))/\text{Inn}(R) \cong O_{2m}^-(2)$ .*

*Ist  $R \cong \mathbb{Z}_4 \circ 2_+^{1+2m}$ , so ist  $\mathfrak{C}_{\text{Aut}(R)}(Z(R))/\text{Inn}(R) \cong Sp_{2m}(2)$ .*

Beweis: ([KL], Table 4.6.B und [As2], Thm. A(4)).

**Lemma 1.1** *Sei  $U \leq GL_n(\mathbb{F})$  auflösbar, nichtabelsch, und besitze  $U$  einen maximalen abelschen Normalteiler  $A$ , der zyklisch ist.*

*Ist dann  $N \leq \mathfrak{C}_U(A)$  ein endlicher, minimaler nichtabelscher Normalteiler von  $U$ , so ist  $N$  eine  $r$ -Gruppe vom symplektischen Typ mit  $\exp(N) = r(r, 2)$  für eine von der Charakteristik von  $\mathbb{F}$  verschiedene Primzahl  $r$ .*

Beweis: ([Hup3], Hilfssatz I).

**Lemma 1.2** *Sei  $N$  ein abelscher Normalteiler der endlichen Gruppe  $G$ . Die Faktorgruppe  $G/N$  enthalte einen Normalteiler  $Z$  mit  $(|Z|, |N|) = 1$  der via Konjugation fixpunktfrei auf  $N$  operiert. Dann gibt es ein Komplement zu  $N$  in  $G$ , und je zwei solche Komplemente sind konjugiert in  $N$ .*

Beweis: Sei  $H$  das Urbild von  $Z$  in  $G$ . Nach dem Satz von Schur-Zassenhaus existiert ein Komplement  $K$  zu  $N$  in  $H$ . Weil  $Z$  fixpunktfrei auf  $N$  operiert, ist  $\mathfrak{N}_G(K) \cap N = 1$ . Sei  $x \in G$ . Dann ist  $K^x$  ebenfalls ein Komplement zu  $N$  in  $H$  und nach Schur-Zassenhaus konjugiert zu  $K$  in  $N$ , etwa  $K^x = K^n$ . Dann ist  $x = (xn)n^{-1} \in \mathfrak{N}_G(K)N$ . Folglich ist  $\mathfrak{N}_G(K)$  ein Komplement zu  $N$  in  $G$ .

Seien  $K_1, K_2$  Komplemente zu  $N$  in  $G$ . Dann sind  $K_1 \cap H$  und  $K_2 \cap H$  Komplemente zu  $N$  in  $H$  und nach Schur-Zassenhaus konjugiert in  $N$ , etwa  $(K_1 \cap H)^n = K_2 \cap H$ . Dann ist  $K_1^n = (\mathfrak{N}_G(K_1 \cap H))^n = \mathfrak{N}_G((K_1 \cap H)^n) = \mathfrak{N}_G(K_2 \cap H) = K_2$ .



## Kapitel 2

### $q$ -primitive Teiler von $q^n - 1$

Seien stets  $p$  eine Primzahl,  $a, b, n, m \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 2$  und  $q = p^a$  eine Potenz von  $p$ .

Wir schreiben  $(a, b)$  für den größten gemeinsamen Teiler von  $a$  und  $b$  und  $a|b$ , falls  $a$  ein Teiler von  $b$  ist. Ist  $r$  eine Primzahl und gilt  $p^m|b$  und  $p^{m+1} \nmid b$ , so sei  $|b|_p := p^m$  der  $p$ -Anteil von  $b$ .

$\Phi_n(x)$  bezeichne das  $n$ -te Kreisteilungspolynom in  $\mathbb{Q}[x]$  und  $\Phi_n(m)$  seine Auswertung in  $m$ . Es sei

$$\Phi_n^*(m) := \frac{1}{f^\alpha} \Phi_n(m),$$

wobei  $f = (n, \Phi_n(m))$  und  $f^\alpha$  die höchste Potenz von  $f$  sei, die  $\Phi_n(m)$  teilt.

(Ist  $f = 1$ , so sei  $\alpha = 1$ . Nach [He2], Thm. 3.3 ist  $\alpha = 1$ , es sei denn, es ist  $f = n = 2$  und  $m \equiv 3 \pmod{4}$ .)

**Definition 2.1** Eine natürliche Zahl  $b > 0$  heißt  **$a$ -primitiver Teiler** von  $a^n - 1$ , falls  $b$  ein Teiler von  $a^n - 1$  ist mit  $(b, a^k - 1) = 1$  für alle  $k$  mit  $1 \leq k < n$  und  $k|n$ .

**Lemma 2.1** Es gilt:

- (i) Ist  $b$  ein  $a$ -primitiver Teiler von  $a^n - 1$ , so ist  $(b, a^i - 1) = 1$  für alle  $i$  mit  $1 \leq i < n$ .
- (ii) Ist  $b$  ein  $a$ -primitiver Teiler von  $a^n - 1$ , so ist  $b \equiv 1 \pmod{n}$ .
- (iii) Ist  $b$  ein  $a$ -primitiver Teiler von  $a^n - 1$ , so ist  $n$  die Ordnung von  $a$  modulo  $b$ .
- (iv) Ist  $b$  ein  $a$ -primitiver Teiler von  $a^n - 1$ , so ist  $b$  genau dann ein Teiler von  $a^m - 1$ , wenn  $n$  ein Teiler von  $m$  ist.
- (v) Ist  $b$  ein  $a^m$ -primitiver Teiler von  $a^{mn} - 1$  und ein  $a$ -primitiver Teiler von  $a^k - 1$ , so ist  $n = k/(k, m)$ .

Beweis: Die Aussagen (i) und (ii) sind Hilfssatz 1 und 2 in [He1], Aussage (iii) ist offensichtlich, und (iv) und (v) sind direkte Folgerungen aus (iii).

**Satz 2.1** (*Zsigmondy*) *Außer in den Fällen  $n = 6$  und  $a = 2$  oder  $n = 2$  und  $a + 1 = 2^i$  für ein  $i \in \mathbb{N}$  besitzt  $a^n - 1$  einen von 1 verschiedenen  $a$ -primitiven Teiler.*

Beweis: Ein Beweis findet sich in [Zs], S. 283, andere Beweise unter anderem in [He1], Satz 3.9 oder in [Fe]. Dort folgt Satz 2.1 aus dem folgenden, allgemeineren Resultat:

**Satz 2.2** *Eine Primzahl  $r$  heißt großer Zsigmondy-Primteiler für  $(a, n)$ , falls  $|\Phi_n^*(a)|_r > n + 1$  gilt.*

*Außer in den folgenden Fällen besitzt  $a^n - 1$  einen großen Zsigmondy-Primteiler:*

- (i)  $n = 2$  und  $a = 2^s 3^t - 1$  für  $s \in \mathbb{N}$  und  $t \in \{0, 1\}$ .
- (ii)  $a = 2$  und  $n = 4, 6, 10, 12$  oder 18.
- (iii)  $a = 3$  und  $n = 4$  oder 6.
- (iv)  $a = 5$  und  $n = 6$ .

Das nächste Lemma enthält einige konkrete Ergebnisse, die wir in späteren Kapiteln benötigen. Der Beweis ergibt sich jeweils durch einfaches Nachrechnen.

**Lemma 2.2** *Es gilt:*

- (i)  $\Phi_3(a) = a^2 + a + 1$  und  $\Phi_3^*(a) = \Phi_3(a)/(a - 1, 3)$ .
- (i)  $\Phi_4(a) = a^2 + 1$  und  $\Phi_4^*(a) = \Phi_4(a)/(a - 1, 2)$ .
- (i)  $\Phi_6(a) = a^2 - a + 1$  und  $\Phi_6^*(a) = \Phi_6(a)/(a + 1, 3)$ .
- (i)  $\Phi_{12}(a) = a^4 - a^2 + 1$  und  $\Phi_{12}^*(a) = \Phi_{12}(a)$ .
- (i)  $\Phi_{18}(a) = a^6 - a^3 + 1$  und  $\Phi_{18}^*(a) = \Phi_{18}(a)/(a + 1, 3)$ .

In der  $p$ -modularen Darstellungstheorie treten die  $q$ -primitiven Teiler von  $q^n - 1$  in Zusammenhang mit zyklischen irreduziblen Untergruppen von  $GL(V)$  auf.

**Satz 2.3** (Hering) *Sei  $r$  eine Primzahl und  $V$  ein  $n$ -dimensionaler Vektorraum über  $\mathbb{F}_q$ . Dann sind äquivalent:*

- (i)  $r \mid \Phi_n^*(q)$ .
- (ii)  $r$  ist ein  $q$ -primitiver Teiler von  $q^n - 1$ .
- (iii)  $GL(V)$  enthält nichttriviale  $r$ -Gruppen, und jede nichttriviale  $r$ -Gruppe in  $GL(V)$  wirkt irreduzibel auf  $V$ .

Beweis: ([He2], Thm. (3.5)).

**Satz 2.4** *Sei  $V$  ein  $n$ -dimensionaler Vektorraum über  $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$  und  $A$  eine abelsche Untergruppe von  $GL(V)$ , die irreduzibel auf  $V$  wirkt.*

*Dann ist  $A$  zyklisch,  $|A|$  ein Teiler von  $q^n - 1$ , und  $|A| \nmid q^k - 1$  für  $1 \leq k < n$ .*

Beweis: Sei  $s := |A|$ . Weil  $A$  irreduzibel auf  $V$  wirkt, ist  $(s, q) = 1$ . Nach dem Schur'schen Lemma ist  $E := \text{End}_{\mathbb{F}A}(V)$  ein Körper. Wegen  $A \subseteq E^*$  ist  $A$  zyklisch.

Sei  $A = \langle a \rangle$ . Dann ist  $K := \mathbb{F}A = \mathbb{F}(a)$  ein Teilkörper von  $E$ . Betrachtet man  $V$  als  $K$ -Modul, so gilt  $U = UK = U(\mathbb{F}A)$  für jeden  $K$ -Unterraum von  $V$ , d.h.  $U = V$  und  $\dim_K(V) = 1$ . Es folgt  $E = \mathbb{F}A \cong \mathbb{F}_{q^n}$ . Weil nun  $E$  der kleinste Erweiterungskörper von  $\mathbb{F}$  ist, dessen multiplikative Gruppe eine zyklische Gruppe der Ordnung  $s$  enthält, folgt die Behauptung.



# Kapitel 3

## Moduln und Formen für die Ausnahmegruppen vom Lie-Typ

### 3.1 Gruppen vom Typ $G_2$

Die Beschreibung der Chevalley-Gruppen vom Typ  $G_2$  als Gruppe einer Trilinearform auf dem zugehörigen Standardmodul der Dimension 7 findet sich in [As3]. Wir stellen im Folgenden die für unser Thema wichtigsten Ergebnisse zusammen.

**Definition 3.1.1** Sei  $f$  eine Trilinearform auf dem Vektorraum  $V$ . Für  $x \in V$  sei dann  $x\Delta$  das Radikal der Bilinearform  $f_x$ . Für einen Unterraum  $U$  von  $V$  sei  $U\Delta := \bigcap_{u \in U} u\Delta$ .

Sei  $\mathbb{F}$  ein Körper und  $V$  ein 7-dimensionaler  $\mathbb{F}$ -Vektorraum mit Basis

$$X = (x_0, x_i, x'_i \mid 1 \leq i \leq 3).$$

Sei  $b$  die symmetrische Bilinearform mit  $b(x_i, x'_i) = b(x'_i, x_i) = 1$  für  $1 \leq i \leq 3$ ,  $b(x_0, x_0) = -2$  und  $b(y, z) = 0$  für alle anderen Paare  $(y, z) \in X \times X$ . Dies wird abgekürzt durch die Schreibweise

$$b = -2x_0^2 + x_1x'_1 + x_2x'_2 + x_3x'_3.$$

Für  $\text{char}(\mathbb{F}) \neq 2$  sei  $Q$  die durch  $b$  bestimmte quadratische Form und für  $\text{char}(\mathbb{F}) = 2$  die eindeutig bestimmte quadratische Form mit zugehöriger Bilinearform  $b$ , für die  $Q(x_0) = 1$  und  $Q(x_i) = Q(x'_i) = 0$  gilt für  $1 \leq i \leq 3$ . Sei  $f$  die alternierende Trilinearform, die definiert ist durch  $f(x_1, x_2, x_3) = f(x'_1, x'_2, x'_3) = f(x_0, x_i, x'_i) = 1$  für  $1 \leq i \leq 3$  und  $f(x, y, z) = 0$  für alle  $x, y, z \in X$ , für die nicht  $\{x, y, z\} =$

$\{x_1, x_2, x_3\}$ ,  $\{x, y, z\} = \{x'_1, x'_2, x'_3\}$  oder  $\{x, y, z\} = \{x_0, x_i, x'_i\}$  für  $i \in \{1, 2, 3\}$  gilt. Dies wird abgekürzt durch die Schreibweise

$$f = x_0x_1x'_1 + x_0x_2x'_2 + x_0x_3x'_3 + x_1x_2x_3 + x'_1x'_2x'_3.$$

Im Folgenden sei stets  $P_i = \langle x_i \rangle$  für  $0 \leq i \leq 3$ ,  $Q_i = \langle x'_i \rangle$  für  $1 \leq i \leq 3$ ,  $V_3 = P_1 + P_2 + P_3$ ,  $V'_3 = Q_1 + Q_2 + Q_3$  und  $V_6 = V_3 + V'_3$ .

Sei  $G(\mathbb{F}) = O(V, Q, f) =$

$$\{g \in \text{GL}(V) \mid Q(x^g) = Q(x), f(x^g, y^g, z^g) = f(x, y, z) \forall x, y, z \in V\}.$$

Bezeichnungen wie  $U^\perp$  oder  $x \perp y$  für Unterräume  $U$  von  $V$  und  $x, y \in V$  beziehen sich stets auf die Bilinearform  $b$ .

**Proposition 3.1.1** *Die Gruppe  $G(\mathbb{F})$  ist eine über  $\mathbb{F}$  definierte Chevalley-Gruppe vom Typ  $G_2$ . Für  $\text{char}(\mathbb{F}) \neq 2$  ist  $V$  ein absolut irreduzibler  $G(\mathbb{F})$ -Modul, für  $\text{char}(\mathbb{F}) = 2$  ist  $x_0$   $G(\mathbb{F})$ -invariant,  $V$  ein unzerlegbarer  $G(\mathbb{F})$ -Modul und  $V / \langle x_0 \rangle$  ein absolut irreduzibler  $G(\mathbb{F})$ -Modul. In beiden Fällen ist  $Z(G(\mathbb{F})) = 1$ .*

Beweis: ([As3], Abschnitt 3).

Sei  $L$  die Untergruppe von  $\text{GL}(V)$ , die wie folgt definiert ist: Die Gruppe  $\text{SL}_3(\mathbb{F})$  wirke kanonisch auf  $V_3$  und auf  $V'_3$  so, dass die durch  $x'_i \longrightarrow x_i^*$  für  $1 \leq i \leq 3$  gegebene lineare Abbildung ein  $\mathbb{F}L$ -Isomorphismus von  $V'_3$  auf den Dualraum von  $V_3$  ist, wobei  $(x_i^* \mid 1 \leq i \leq 3)$  die zu  $(x_i \mid 1 \leq i \leq 3)$  duale Basis bezeichne. Außerdem zentralisiere  $L$  den Punkt  $P_0$ .

**Lemma 3.1.1** *Dann ist  $L$  eine Untergruppe von  $G(\mathbb{F})$ .*

Beweis: ([As3], (2.3)).

Für  $a, b \in \mathbb{F}^*$  sei  $t = t(a, b)$  das eindeutig bestimmte Element in  $L$  mit  $x_1^t = a_1x_1$  und  $x_2^t = a_2x_2$ . Sei  $T_0 = \langle t(a, b) \mid a, b \in \mathbb{F}^* \rangle$ . Falls aus dem Kontext nicht klar ist, über welchem Körper  $T_0$  definiert ist, so schreiben wir auch  $T_0(\mathbb{F})$  statt  $T_0$ .

**Proposition 3.1.2** *Es gilt:*

- (i)  $G(\mathbb{F})$  besitzt ein zerfallendes BN-Paar mit einer Borel-Gruppe, die den maximalen Torus  $T_0 \cong (\mathbb{F}^*)^2$  enthält.

- (ii) Die Weyl-Gruppe  $\mathfrak{N}_{G(\mathbb{F})}(T_0)/T_0$  ist isomorph zur Diedergruppe  $D_{12}$  der Ordnung 12. Sie wirkt kanonisch auf dem Sechseck, das gegeben ist durch die Punktmenge  $\{ \langle x \rangle \mid x \in X \setminus x_0 \}$  und die Kantenmenge  $\{ \langle x_i, x'_j \rangle \mid 1 \leq i, j \leq 3, i \neq j \}$ .

Beweis: ([As3],(3.4)).

**Proposition 3.1.3** Sind  $v, w \in V \setminus \{0\}$ , bzw.  $v, w \in V \setminus P_0$  für  $\text{char}(\mathbb{F}) = 2$ , und existiert ein  $f \in \mathbb{F}$ , so dass  $Q(v) = f^2 Q(w)$  gilt, so existiert ein  $g \in G(\mathbb{F})$  mit  $\langle v \rangle^g = \langle w \rangle$ . Ist insbesondere  $\mathbb{F}$  endlich, so besitzt die Gruppe  $G(\mathbb{F})$  auf den eindimensionalen Unterräumen von  $V$  drei Bahnen. Ist  $\text{char}(\mathbb{F}) \neq 2$  und  $\mathbb{F}$  endlich, so sind diese Bahnen gegeben durch die bezüglich  $Q$  singulären Punkte, die Punkte  $\langle v \rangle$  für die  $Q(v)$  ein Quadrat in  $\mathbb{F}^*$  ist und die, für die  $Q(v)$  kein Quadrat in  $\mathbb{F}$  ist. Ist  $\text{char}(\mathbb{F}) = 2$  und  $\mathbb{F}$  endlich, so bestehen diese Bahnen aus den bezüglich  $Q$  singulären und den nicht singulären Punkten und aus  $P_0$ .

Beweis: ([As3],(2.8)).

**Proposition 3.1.4** Sei  $U \leq V$  eine Hyperebene in  $V$ , auf der  $Q$  eine nichtausgeartete Form induziert, und  $H := \mathfrak{N}_{G(\mathbb{F})}(U)$ .

- (i) Induziert  $Q$  auf  $U$  eine hyperbolische Form, so ist  $U$  in  $G(\mathbb{F})$  konjugiert zu  $V_6$ .  $\mathfrak{N}_{G(\mathbb{F})}(V_6)$  enthält den Normalteiler  $L$  vom Index 2. Sei  $t$  das Element in  $G(\mathbb{F})$ , das für  $1 \leq i \leq 3$  jeweils  $x_i$  und  $x'_i$  vertauscht und  $x_0$  auf  $-x_0$  abbildet. Dann ist  $\langle t \rangle$  ein Komplement zu  $L$  in  $\mathfrak{N}_{G(\mathbb{F})}(V_6)$  und induziert einen Graph-Automorphismus auf  $L$ .  $\mathfrak{N}_{G(\mathbb{F})}(V_6)$  wirkt transitiv auf  $\{V_3, V'_3\}$ . Ist  $\text{char}(\mathbb{F}) \neq 2$ , so ist  $H = \mathfrak{N}_{G(\mathbb{F})}(U^\perp)$  und  $Q(v) \in -\mathbb{F}^2$  für  $U^\perp = \langle v \rangle$ .
- (ii) Induziert  $Q$  auf  $U$  eine nichtausgeartete nichthyperbolische Form, so sei  $K$  eine Erweiterung von  $\mathbb{F}$  vom Grad 2 mit  $\text{Gal}(K|\mathbb{F}) = \langle \sigma \rangle$ , so dass  $U^K = K \otimes U$  bei kanonischer Einbettung von  $G(\mathbb{F})$  in  $G(K)$  hyperbolisch ist. Sei  $U^K = U_1 \oplus U_2$  eine Zerlegung von  $U^K$  in total singuläre Unterräume der Dimension 3 und  $\alpha$  die hermitesche Form mit Körperautomorphismus  $\sigma$ , deren Einschränkung auf  $U$  gleich der von  $b$  induzierten Form ist. Dann ist  $U_1$  bezüglich  $\alpha$  nichtausgeartet.  $H$  enthält den Normalteiler  $M := \mathfrak{N}_{G(\mathbb{F})}(U) \cap \mathfrak{N}_{G(\mathbb{F})}(U_1) = O(U_1, \alpha) \cong SU_3(\mathbb{F})$  und ist eine Erweiterung von  $M$  mit einer Involution, die auf  $M$  einen äußeren Automorphismus induziert und  $v$  auf  $-v$  abbildet mit  $\langle v \rangle = U^\perp$ .
- (iii) Ist  $\mathbb{F}$  endlich, so wirkt  $G(\mathbb{F})$  transitiv auf den bezüglich  $Q$  nichtausgearteten nichthyperbolischen Hyperebenen in  $V$ .

Beweis: Teil (i) wird bewiesen in [As3], (2.10) und (2.11), Teil (ii) und (iii) in [As3], (6.1)-(6.4).

### 3.2 Gruppen vom Typ $E_6$ , $F_4$ , ${}^2E_6$ und ${}^3D_4$

Kapitel 2.2 enthält die Beschreibung der Wirkung einfach-zusammenhängender Gruppen vom Typ  $E_6$  auf dem zugehörigen Standardmodul der Dimension 27 als Gruppe einer 3-Form wie sie von M. Aschbacher in einer Reihe von Artikeln untersucht wurde ([As4], [As5], [As6], [As7]). Größtenteils handelt es sich um eine Zusammenstellung der für unser Thema wichtigsten Ergebnisse von M. Aschbacher.

Außerdem werden Ergebnisse über Gruppen vom Typ  $F_4$  und  ${}^3D_4$  als Stabilisatoren gewisser Unterstrukturen des 27-dimensionalen Moduls und über Gruppen vom Typ  ${}^2E_6$  als Zentralisatoren eines äußeren Automorphismus gegeben.

**Definition 3.2.1** Sei  $\mathbb{F}$  ein Körper und  $V$  ein endlich-dimensionaler  $\mathbb{F}$ -Vektorraum. Eine **3-Form** auf  $V$  ist ein Tripel  $(T, Q, f)$ , so dass gilt:

(F1)  $f$  ist eine Trilinearform auf  $V$ .

(F2)  $Q : V \times V \longrightarrow \mathbb{F}$  ist linear in der ersten Variablen und erfüllt

$$Q(x, ay) = a^2Q(x, y) \text{ und}$$

$$Q(x, y + z) = Q(x, y) + Q(x, z) + f(x, y, z)$$

für alle  $a \in \mathbb{F}$  und  $x, y, z \in V$ .

(F3)  $T : V \longrightarrow \mathbb{F}$  erfüllt

$$T(ax) = a^3T(x) \text{ und}$$

$$T(x + y) = T(x) + T(y) + Q(x, y) + Q(y, x)$$

für alle  $a \in \mathbb{F}$  und  $x, y \in V$ .

Eine 3-Form heißt *regulär*, wenn  $Q(x, x) = 3T(x)$  gilt für alle  $x \in V$ .

Aus den Axiomen (F1)-(F3) folgt, dass  $f$  symmetrisch ist. Die Abbildung  $Q$  liefert ein Familie  $\{Q_x \mid x \in V\}$  quadratischer Formen mit zugehöriger Bilinearform  $f_x$  zu  $Q_x$ , wobei  $Q_x$  und  $f_x$  durch  $Q_x(y) = Q(x, y)$  und  $f_x(y, z) = f(x, y, z)$  für  $x, y, z \in V$  definiert sind. Im Folgenden sei stets  $(T, Q, f)$  eine reguläre 3-Form.

**Definition 3.2.2** Für  $x \in V$  sei  $x\Delta$  das Radikal der Bilinearform  $f_x$ . Für einen Unterraum  $U$  von  $V$  sei  $U\Delta := \bigcap_{u \in U} u\Delta$ .

Für  $U \leq V$  sei  $U\Theta$  definiert als  $U\Theta := \{v \in V \mid Q_v(u) = 0 \text{ für alle } u \in U\}$ .

Ein Unterraum  $U$  von  $V$  heißt **singulär**, wenn  $U\Theta = V$  gilt.

Er heißt **brillant**, wenn die Einschränkungen von  $T$  und  $Q$  auf  $U$  trivial sind.

Ein Punkt  $\langle v \rangle$ , der nicht brilliant ist, heißt **dunkel**.

Sei  $\mathbb{F}$  ein Körper und  $V$  ein 27-dimensionaler  $\mathbb{F}$ -Vektorraum mit Basis

$$X = (x_i, x'_i, x_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq 6, i < j).$$

Für  $i < j$  sei  $x_{ji} := -x_{ij}$ .

Sei  $f$  die symmetrische Trilinearform, die definiert ist durch  $f(x, y, z) = 1$  für alle  $x, y, z \in X$  mit  $\{x, y, z\} = \{x_i, x'_j, x_{ij}\}$  für  $1 \leq i, j \leq 6, i \neq j$  oder  $\{x, y, z\} = \{x_{1d,2d}, x_{3d,4d}, x_{5d,6d}\}$  mit  $d \in A_6$ ,  $f(x, y, z) = -1$  für alle  $x, y, z \in X$  mit  $\{x, y, z\} = \{x_{1d,2d}, x_{3d,4d}, x_{5d,6d}\}$  mit  $d \in S_6 \setminus A_6$  und  $f(x, y, z) = 0$  für  $x, y, z \in X$  sonst.

Sei  $(T, Q, f)$  die eindeutig durch  $f$  und die Vorgabe, dass  $\langle x \rangle$  für alle  $x \in X$  singulär und brillant ist, gegebene 3-Form.

Im Folgenden sei stets  $P_i = \langle x_i \rangle$  und  $Q_i = \langle x'_i \rangle$  für  $1 \leq i \leq 6$ ,  $P_{ij} = \langle x_{ij} \rangle$  für  $1 \leq i, j \leq 6, i \neq j$ ,  $V_6 = \langle x_1, \dots, x_6 \rangle$ ,  $V'_6 = \langle x'_1, \dots, x'_6 \rangle$  und  $V_{15} = \langle x_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq 6, i \neq j \rangle$ .

Sei  $G(\mathbb{F}) = O(V, T, Q, f) = \{g \in \text{GL}(V) \mid T(x^g) = T(x), Q(x^g, y^g) = Q(x, y), f(x^g, y^g, z^g) = f(x, y, z) \forall x, y, z \in V\}$  und  $\Delta(V, T, Q, f) = \{g \in \text{GL}(V) \mid \exists \lambda \in \mathbb{F}^* \text{ mit } T(x^g) = \lambda T(x), Q(x^g, y^g) = \lambda Q(x, y), f(x^g, y^g, z^g) = \lambda f(x, y, z) \forall x, y, z \in V\}$ .

**Proposition 3.2.1** *Die Gruppe  $G(\mathbb{F})$  ist eine über  $\mathbb{F}$  definierte, einfach-zusammenhängende Chevalley-Gruppe vom Typ  $E_6$ .  $V$  ist ein absolut irreduzibler  $G(\mathbb{F})$ -Modul, und  $Z(G(\mathbb{F}))$  besteht aus den Skalarmultiplikationen mit den dritten Einheitswurzeln in  $\mathbb{F}$ .*

Beweis: ([As4], Abschnitt 5).

Sei  $\mathbb{F}$  ein Körper, der einen Automorphismus  $\sigma$  der Ordnung 2 besitzt und  $K$  der Fixkörper von  $\sigma$  in  $\mathbb{F}$ . Die von  $\sigma$  induzierte Abbildung auf  $G(\mathbb{F})$ , wenn  $\sigma$  auf den Matrixeinträgen von  $G(\mathbb{F})$  bezüglich  $B$  wirkt, bezeichnen wir ebenfalls mit  $\sigma$ . Sei  $\xi$  die Abbildung  $G(\mathbb{F}) \rightarrow G(\mathbb{F}) : a \mapsto (a^{-1})^t$  bezüglich  $B$ ,  $\tau := \sigma\xi$  und  $H(K) = \mathfrak{C}_{G(\mathbb{F})}(\tau)$ .

**Proposition 3.2.2** *Die Gruppe  $H(K)$  ist eine über  $K$  definierte, einfach-zusammenhängende Chevalley-Gruppe vom Typ  ${}^2E_6$ . Der  $G(\mathbb{F})$ -Modul  $V$  der Dimension 27 über  $\mathbb{F}$  ist ein absolut irreduzibler  $H(K)$ -Modul, und  $Z(H(K))$  besteht aus den Skalarmultiplikationen mit den dritten Einheitswurzeln in  $\mathbb{F}$ , die nicht in  $K$  liegen.*

Sei  $L$  die Untergruppe von  $GL(V)$ , die wie folgt definiert ist: Die Gruppe  $SL_6(\mathbb{F})$  wirke kanonisch auf  $V_6$  und auf  $V'_6$  so, dass die durch  $x_i \rightarrow x'_i$  für  $1 \leq i \leq 6$  gegebene lineare Abbildung ein  $\mathbb{F}L$ -Isomorphismus ist. Auf  $V_{15}$  wirke  $L$  so, dass die durch  $x_{ij} \rightarrow x_i^* \wedge x_j^*$  gegebene lineare Abbildung ein  $\mathbb{F}L$ -Isomorphismus von  $V_{15}$  auf das äußere quadratische Produkt des Dualraums von  $V_6$  ist, wobei  $(x_i^* | 1 \leq i \leq 6)$  die zu  $(x_i | 1 \leq i \leq 6)$  duale Basis bezeichne.

**Lemma 3.2.1** *Dann ist  $L$  eine Untergruppe von  $G(\mathbb{F})$ .*

Beweis: ([As4], (3.1)).

Für  $a = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \in (\mathbb{F}^*)^5$  und  $t \in \mathbb{F}^*$  seien  $l = l(a)$  das eindeutig bestimmte Element in  $L$  mit  $x_i^l = a_i x_i$  für  $1 \leq i \leq 5$  und  $x_6^l = (a_1 a_2 a_3 a_4 a_5)^{-1} x_6$  und  $h(t)$  das Element in  $G(\mathbb{F})$ , das für  $1 \leq i \leq 5$  die Vektoren  $x'_i$  zentralisiert,  $x_i$  auf  $tx_i$  abbildet und  $x_{i6}$  auf  $t^{-2}x_{i6}$ , außerdem  $x_{ij}$  für  $1 \leq i < j < 6$  auf  $tx_i$ ,  $x_6$  auf  $t^2x_6$  und  $x'_6$  auf  $t^3x'_6$ . Sei  $T_0 = \langle l(a), h(t) \mid a \in (\mathbb{F}^*)^5, t \in \mathbb{F}^* \rangle$ . Dabei sei  $t(a_1, \dots, a_6) := l(a_1, \dots, a_5)h(a_6)$ . Falls aus dem Kontext nicht klar ist, über welchem Körper  $T_0$  definiert ist, so schreiben wir auch  $T_0(\mathbb{F})$  statt  $T_0$ .

Sei  $\mathcal{G} = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$  die Geometrie mit Punktmenge  $\mathcal{P} = \{ \langle x \rangle \mid x \in X \}$  und der Geradenmenge  $\mathcal{L} = \{ \{ \langle x \rangle, \langle y \rangle, \langle z \rangle \} \mid \langle x \rangle, \langle y \rangle, \langle z \rangle \in \mathcal{P}; f(x, y, z) \neq 0 \}$ .

Im Folgenden sei  $P_i = \langle x_i \rangle$ ,  $Q_i = \langle x'_i \rangle$  und  $P_{ij} = \langle x_{ij} \rangle$  für  $1 \leq i, j \leq 6$ ,  $i \neq j$ .

**Proposition 3.2.3** *Es gilt:*

- (i)  $G(\mathbb{F})$  besitzt ein zerfallendes BN-Paar mit einer Borel-Gruppe, die den maximalen Torus  $T_0 \cong (\mathbb{F}^*)^6$  enthält. Die maximalen Tori in  $G(\mathbb{F})$ , die in Borel-Gruppen von  $G(\mathbb{F})$  enthalten sind bezeichnen wir auch als **Cartan-Gruppen** von  $G(\mathbb{F})$ .
- (ii)  $\mathcal{G}$  ist ein verallgemeinertes Viereck der Ordnung (2,4).
- (iii) Die Weyl-Gruppe  $\mathfrak{N}_{G(\mathbb{F})}(T_0)/T_0$  ist isomorph zu  $O_6^-(2)$ . Ihre Wirkung auf  $\mathcal{G}$  ist isomorph zur Wirkung von  $O_6^-(2)$  auf den singulären Punkten und Geraden des zugehörigen 6-dimensionalen Moduls über  $\mathbb{F}_2$ .

Beweis: Teil (i) wird bewiesen in [As4] in den Beweisen zu (3.4) und (5.4). Teil (ii) läßt sich leicht anhand der Axiome eines verallgemeinerten Vierecks verifizieren.  $\mathcal{G}$  entspricht aber auch genau der Konstruktion in Abschnitt (5.1) in [Th]. Teil (iii) folgt aus der Eindeutigkeit bis auf Isomorphie für verallgemeinerte Vierecke der Ordnung (2,4) ([Th], 5.1.1, Theorem 1).

**Proposition 3.2.4** Die Gruppe  $\mathfrak{X} = \{X(t) | t \in \mathbb{F}\}$  mit  $(x'_j)^{X(t)} = tx_j + x'_j$  für  $1 \leq j \leq 6$  und  $v^{X(t)} = v$  für alle  $v \in X \setminus \{x'_j | 1 \leq j \leq 6\}$  ist eine Wurzelgruppe von  $G(\mathbb{F})$ . Die Wurzelgruppen in  $G(\mathbb{F})$  sind genau die  $G(\mathbb{F})$ -Konjugierten von  $\mathfrak{X}$ .

Beweis: ([As4], (3.8)) und ([As6], Abschnitt 2).

### Definition 3.2.3

- (i) Eine Gerade  $P+Q$  mit singulären Punkten  $P, Q$  heißt **hyperbolisch**, wenn  $P \not\subseteq Q\Delta$  gilt.
- (ii) Eine Ebene  $P+Q+R$  mit singulären Punkten  $P, Q, R$  heißt **speziell**, wenn  $P+Q, P+R$  und  $Q+R$  hyperbolisch sind und für  $\{X, Y, Z\} = \{P, Q, R\}$  stets  $X \not\subseteq (Y+Z)\Theta$  gilt.
- (iii) Eine Ebene  $U$ , deren sämtliche Punkte dunkel sind, heißt **getwistete spezielle Ebene**, falls  $U^K = K \otimes U$  für einen Erweiterungskörper  $K$  von  $\mathbb{F}$  mit  $[K : \mathbb{F}] = 3$  eine spezielle Ebene ist.
- (iv) Eine Zerlegung  $V = A_1 \oplus A_2 \oplus A_3$  heißt **3-Zerlegung von  $V$** , falls  $(A_1, A_2, A_3)$  konjugiert ist zu  $(\langle x_1, x_{16}, x'_6, x'_2, x_6, x_{26}, x_{12}, x'_1, x_2 \rangle, \langle x'_3, x'_4, x'_5, x_{45}, x_{35}, x_{34}, x_3, x_4, x_5 \rangle, \langle x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{23}, x_{24}, x_{25}, x_{36}, x_{46}, x_{56} \rangle)$ .

**Lemma 3.2.2** Ist  $\langle v, w \rangle$  eine hyperbolische Gerade mit singulären Vektoren  $v, w$  und  $\lambda \in \mathbb{F}^*$ , so ist  $(v + \lambda w)\Delta = \langle v - \lambda w, (v\Delta \cap w\Delta) \rangle$ .

Beweis: Singuläre Punkte in  $V$  sind Simplizes des zugehörigen Gebäudes. Aufgrund der Transitivität von Gruppen mit BN-Paar auf Apartments können wir o.B.d.A.  $v, w \in X$  annehmen. Weil  $O_6^-(2)$  auf den Punkten des zugehörigen verallgemeinerten Vierecks Rang 3 hat und  $\langle v, w \rangle$  hyperbolisch ist, können wir o.B.d.A.  $v = x_1$  und  $w = x'_2$  annehmen. Es gilt  $x_1\Delta = \langle V_6, x'_1, x_{ij} | 2 \leq i < j \leq 6 \rangle$ ,  $(x'_2)\Delta = \langle x_2, V'_6, x_{1k}, x_{ij} | 3 \leq k \leq 6, 3 \leq i < j \leq 6 \rangle$  und  $x_1\Delta \cap (x'_2)\Delta = \langle x_2, x'_1, x_{ij} | 3 \leq i < j \leq 6 \rangle$ . Offenbar ist  $(x_1 - \lambda x'_2) \in (x_1 + \lambda x'_2)\Delta$ , denn es gilt  $f(x_1 + \lambda x'_2, x_1 - \lambda x'_2, y) = 0$  für alle  $y \in X$ . Wäre die Behauptung falsch, so gäbe es ein  $x \in \langle X \setminus \{x_1, x_2, x'_1, x_{ij} | 3 \leq i < j \leq 6\} \rangle$  mit  $x \in (x_1 + \lambda x'_2)\Delta$  und  $x \notin x_1\Delta \cap (x'_2)\Delta$ . Ist  $x \notin x_1\Delta$ , so existiert ein  $y \in X$  mit  $f(x_1, x, y) \neq 0$ . Aus  $f(x_1 + \lambda x'_2, x, y) = 0$  folgt  $y \notin (x'_2)\Delta$ . Für  $x \notin (x'_2)\Delta$  argumentiert man analog. Es folgt  $y = x_{12}$ , weil  $\mathcal{G}$  ein verallgemeinertes Viereck ist und  $P_1$  und  $Q_2$  auf einer gemeinsamen Geraden in  $\mathcal{G}$  liegen. Es folgt der Widerspruch  $f(x'_2, x, y) = 0$ .

**Proposition 3.2.5** Sei  $d = x_{14} + x_{25} + x_{36}$ . Der Punkt  $\langle d \rangle$  ist dunkel. Sei  $H(\mathbb{F}) = \mathfrak{C}_{G(\mathbb{F})}(d)$ .

- (i) Die Gruppe  $\Delta(V, T, Q, f)$  wirkt transitiv auf den dunklen Punkten in  $V$ , die Anzahl der Bahnen von  $G(\mathbb{F})$  auf den dunklen Punkten in  $V$  ist  $[\mathbb{F}^* : \mathbb{F}^3]$ .
- (ii) Der Zentralisator  $H(\mathbb{F})$  von  $\langle d \rangle$  ist eine über  $\mathbb{F}$  definierte Chevalley-Gruppe vom Typ  $F_4$ .
- (iii) Für  $\text{char}(\mathbb{F}) \neq 3$  ist  $d\Theta$  ein Komplement zu  $\langle d \rangle$  in  $V$ , für  $\text{char}(\mathbb{F}) = 3$  ist  $d \in d\Theta$ . Stets ist  $d\Theta / (\langle d \rangle \cap d\Theta)$  ein absolut irreduzibler  $H(\mathbb{F})$ -Modul.
- (iv)  $H(\mathbb{F})$  besitzt ein zerfallendes BN-Paar mit einer Borel-Gruppe, die den maximalen Torus  $T_0 \cap H(\mathbb{F})$  enthält.
- (v) Die Weyl-Gruppe  $\mathfrak{N}_{H(\mathbb{F})}(T_0 \cap H(\mathbb{F})) / (T_0 \cap H(\mathbb{F})) \cong \mathfrak{N}_{H(\mathbb{F})}(T_0 \cap H(\mathbb{F}))T_0 / T_0$  vom Typ  $F_4$  ist gerade der Stabilisator der Geraden  $\{\langle x_{14} \rangle, \langle x_{25} \rangle, \langle x_{36} \rangle\}$  in  $\mathfrak{N}_{G(\mathbb{F})}(T_0) / T_0$ .

Beweis: ([As4], Abschnitt 8 und (3.16)).

**Proposition 3.2.6** Sei  $U = \langle x_{14}, x_{25}, x_{36} \rangle$ . Dann ist  $U$  eine spezielle Ebene.

- (i) Auf den speziellen Ebenen in  $V$  wirkt  $G(\mathbb{F})$  transitiv.
- (ii)  $\mathfrak{N}_{G(\mathbb{F})}(U)^\infty \cong \text{Spin}_8^+(\mathbb{F})$ .
- (iii)  $\mathfrak{N}_{G(\mathbb{F})}(U)$  induziert die volle symmetrische Gruppe auf den Punkten  $P_{14}, P_{25}, P_{36}$ . Die Faktorgruppe nach dem Kern dieser Wirkung wirkt treu auf dem Dynkin-Diagramm von  $\mathfrak{N}_{G(\mathbb{F})}(U)^\infty$ .

Beweis: ([As4], (6.9) und (3.15)). Man beachte die Zerlegung  $V = P_{14} \oplus P_{25} \oplus P_{36} \oplus (P_{25}\Delta \cap P_{36}\Delta) \oplus (P_{14}\Delta \cap P_{36}\Delta) \oplus (P_{14}\Delta \cap P_{25}\Delta)$ . Dabei induziert  $X$  für  $\{X, Y, Z\} = \{P_{14}, P_{25}, P_{36}\}$  auf  $Y\Delta \cap Z\Delta$  offenbar die nichtausgeartete quadratische Form  $Q_x$  vom Witt-Index 4 mit zugehöriger Bilinearform  $f_x$  mit  $X = \langle x \rangle$ .

Für  $W \in \{(P_{25}\Delta \cap P_{36}\Delta), (P_{14}\Delta \cap P_{36}\Delta), (P_{14}\Delta \cap P_{25}\Delta)\}$  induziert also  $\mathfrak{N}_{G(\mathbb{F})}(U)^\infty = \mathfrak{C}_{G(\mathbb{F})}(U)^\infty$  eine Untergruppe einer zentralen Erweiterung von  $\Omega_8^+(\mathbb{F})$ , nach den Ergebnissen von Aschbacher eine zentrale Erweiterung von  $\Omega_8^+(\mathbb{F})$ . Außerdem liegt  $\mathfrak{N}_{G(\mathbb{F})}(U)^\infty \cap \mathfrak{C}_{G(\mathbb{F})}(W)$  in  $T_0$ , wie man durch Betrachtung aller Schnitte von Unterräumen der Form  $P\Delta$  mit  $P \in \mathcal{G}$  und  $P \leq W$  sieht und hat die Ordnung 2. Demnach ist  $\mathfrak{N}_{G(\mathbb{F})}(U)^\infty = \mathfrak{C}_{G(\mathbb{F})}(U)^\infty$  eine zentrale Erweiterung von  $\Omega_8^+(\mathbb{F})$  mit einer Gruppe der Ordnung 4.

Die volle symmetrische Gruppe auf  $P_{14}, P_{25}, P_{36}$  wird durch  $\mathfrak{N}_{\mathfrak{N}_{G(\mathbb{F})}(T_0)}(U)$  induziert, weil  $O_6^-(2)$  die volle symmetrische Gruppe auf den Punkten der Geraden in  $\mathcal{G}$  induziert.

Für  $\{W_1, W_2, W_3\} = \{(P_{25}\Delta \cap P_{36}\Delta), (P_{14}\Delta \cap P_{36}\Delta), (P_{14}\Delta \cap P_{25}\Delta)\}$  und jeden bezüglich der auf  $W_1$  induzierten quadratischen Form total singulären Punkt

$X$  ist  $X\Delta \cap W_j$  ( $j = 1, 2$ ) ein bezüglich der auf  $W_j$  induzierten quadratischen Form maximaler total singulärer Raum, wie sich leicht für Punkte aus  $\mathcal{G}$  verifizieren und für beliebige Punkte aus der Transitivität von  $\text{Spin}_8^+(\mathbb{F})$  auf den total singulären Punkten folgern läßt. Es folgt die angegebene Wirkung auf dem Dynkin-Diagramm.

**Proposition 3.2.7** *Sei  $U$  eine getwistete spezielle Ebene. Dann ist  $\mathbb{F}$  nicht algebraisch abgeschlossen. Ist  $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$  ein endlicher Körper, so gilt:*

- (i) *Es existieren getwistete spezielle Ebenen in  $V$ , und  $G(\mathbb{F})$  wirkt transitiv auf ihnen.*
- (ii)  *$\mathfrak{C}_{G(\mathbb{F})}(U)$  ist eine getwistete Gruppe  ${}^3D_4(q)$ .*
- (iii)  *$\mathfrak{C}_{G(\mathbb{F})}(\mathfrak{C}_{G(\mathbb{F})}(U)) \cong \mathbb{Z}_{q^2+q+1}$  und  $\text{Aut}_{G(\mathbb{F})}(U)$  ist eine nichtabelsche Erweiterung von  $\mathbb{Z}_{q^2+q+1}$  mit einer Gruppe der Ordnung 3.*

Beweis: Der Beweis von Teil (ii) folgt größtenteils [As6], (7.3). Sei  $K$  ein Erweiterungskörper von  $\mathbb{F}$  mit  $[K : \mathbb{F}] = 3$ . Nach [As6], (7.1) ist  $\mathbb{F}$  nicht algebraisch abgeschlossen, weil für linear unabhängige  $x, y$  in  $U$  das kubische Polynom  $T(tx + y) = t^3T(x) + t^2Q(y, x) + tQ(x, y) + T(y)$  keine Wurzel in  $\mathbb{F}$  hat.

Sei  $\langle \sigma \rangle = \text{Gal}(K|\mathbb{F})$  und  $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$ . Im semidirekten Produkt  $V^K G(K)$  ist  $VG(\mathbb{F})$  die Menge der Fixpunkte von  $\sigma$ , wobei  $\sigma$  auf  $G(K)$  bezüglich der Basis  $X$  wirkt. Seien  $\langle v_i \rangle, 1 \leq i \leq 3$  die singulären Punkte in  $U^K$ . Würde  $\sigma$  einen dieser Punkte stabilisieren, so induzierte  $\sigma$  auf ihm einen Körperautomorphismus. Dann enthielte aber  $U$  einen singulären Vektor im Widerspruch zur Voraussetzung. Demnach induziert  $\sigma$  nach Proposition 3.2.6, (iii) auf dem Dynkin-Diagramm von  $\mathfrak{N}_{G(K)}(U^K)^\infty$  eine Trialität. Würde  $\sigma$  einen reinen Graph-Automorphismus induzieren, so würde  $\sigma$  auf  $\langle v_1 + v_1^\sigma + v_1^{\sigma^2} \rangle_K$  trivial wirken im Widerspruch zur Voraussetzung, dass  $\sigma$  durch  $\text{Gal}(K|\mathbb{F})$  induziert wird. Weil  $\sigma$  auf  $\mathfrak{N}_{G(K)}(U^K)^\infty$  einen Graph-Körper-Automorphismus induziert, ist die Gruppe der Fixpunkte von  $\sigma$  in  $\mathfrak{N}_{G(K)}(U^K)^\infty$  isomorph zu  ${}^3D_4(q)$ . Nach [KL], Tafel 5.1.B ist die Gruppe der Körperautomorphismen ein Normalteiler vom Index 3 in  $\text{Aut}({}^3D_4(q))$ . Es folgt  $|\text{Aut}_{G(\mathbb{F})}((\mathfrak{C}_{G(\mathbb{F})}(U))^\infty) / \text{Inn}((\mathfrak{C}_{G(\mathbb{F})}(U))^\infty)| \mid 3$ .

Die Ordnung von  $G(\mathbb{F})$  ist durch  $q$ -primitive Teiler von  $q^{12} - 1$  teilbar. Sei  $r$  ein  $q$ -primitiver Primteiler von  $q^{12} - 1$ . Für eine  $r$ -Sylowgruppe  $R$  von  $G(\mathbb{F})$  ist  $\mathfrak{C}_V(R)$  dreidimensional nach Proposition 6.2.10, (iv). Sei  $T = \mathfrak{C}_{G(\mathbb{F})}(R)$ ,  $T_1$  die Untergruppe von  $T$  der Ordnung  $q^4 - q^2 + 1$  und  $T_2$  die Untergruppe von  $T$  der Ordnung  $q^2 + q + 1$ . Sei  $W := \mathfrak{C}_V(T_1)$ . Dann ist  $\mathbb{k} \otimes W$  konjugiert zu  $\langle x_{14}, x_{25}, x_{36} \rangle$ , also eine spezielle Ebene. Auf  $W$  induziert die zu  $T_2$  entsprechend konjugierte Gruppe die Menge aller linearen Abbildungen der Form  $\text{diag}(\alpha, \alpha^q, \alpha^{q^2})$  mit  $\alpha^{q^2+q+1} = 1$  bezüglich einer Basis von  $W^{\mathbb{k}}$ , deren Elemente die drei singulären Punkte von  $W^{\mathbb{k}}$  erzeugen, und die Untergruppe der Ordnung 3 von  $\text{Aut}(T)$  eine

zyklische Permutation der Basisvektoren. Umgekehrt ist  $W\mathfrak{N}_{G(\mathbb{F})}(W)$  die Menge der Fixpunkte von  $\sigma$  in  $W^K\mathfrak{N}_{G(K)}(W^K)$ , wobei  $\sigma$  die drei singulären Punkte von  $W^K$  zyklisch vertauscht und außerdem einen Körperautomorphismus induziert. Da alle brillanten Punkte einer speziellen Ebene auf den Geraden liegen, die von je zwei ihrer singulären Punkte erzeugt werden, ist kein brillanter Punkt in  $W^K$  Fixpunkt von  $\sigma$ . Damit sind alle Punkte in  $W$  dunkel. Weil alle Eigenwerte von  $T_2$  in  $K$  liegen, ist  $W^K$  speziell und  $W$  nach Definition 3.2.3 eine getwistete spezielle Ebene. Nun induziert  $\text{Aut}_{G(\mathbb{F})}(T)$  eine zyklische Gruppe der Ordnung 3 auf den singulären Punkten von  $W^K$ , und für Elemente im Kern dieser Wirkung ergibt die Bedingung, dass sie  $\sigma$  zentralisieren, zusammen mit  $f$  genau die Bedingungen, die, wie eben gesehen, für  $T_2$  gelten. Es folgt der zweite Teil von (iii). Wegen  $\Phi_{12}(q) \mid |{}^3D_4(q)|$  enthält der Zentralisator einer getwisteten speziellen Ebene  $U$  in  $V$  stets eine  $r$ -Sylogruppe  $R$  von  $G(\mathbb{F})$  mit  $\mathfrak{C}_V(R) = U$ . Damit sind alle getwisteten speziellen Ebenen in  $V$  konjugiert nach dem Satz von Sylow, und ein Element der Ordnung 3 in  $\text{Aut}_{G(\mathbb{F})}(T)$  induziert  $\text{Aut}_{G(\mathbb{F})}((\mathfrak{C}_{G(\mathbb{F})}(U))^\infty) / \text{Inn}((\mathfrak{C}_{G(\mathbb{F})}(U))^\infty)$ .

Nun ist  $\mathfrak{C}_{G(\mathbb{F})}(\mathfrak{C}_{G(\mathbb{F})}(U))$  enthalten in  $T := \mathfrak{C}_{G(\mathbb{F})}(R)$ . Weil  $T_1$  in  $(\mathfrak{C}_{G(\mathbb{F})}(U))^\infty$  liegt, ist  $\mathfrak{C}_{G(\mathbb{F})}(\mathfrak{C}_{G(\mathbb{F})}(U))$  enthalten in  $T_2$ . Umgekehrt liegt die Erweiterung von  $T_2$  mit einer Gruppe der Ordnung 3 in  $T$  in  $\mathfrak{N}_{G(\mathbb{F})}(U) \leq \mathfrak{N}_{G(\mathbb{F})}(\mathfrak{C}_{G(\mathbb{F})}(U))$ . Damit folgen der erste Teil von (iii) und dass  $\mathfrak{C}_{G(\mathbb{F})}(U)$  perfekt ist und damit (ii).

**Proposition 3.2.8** *Sei  $V = A_1 \oplus A_2 \oplus A_3$  mit  $(A_1, A_2, A_3) = (\langle x_1, x_{16}, x'_6, x'_2, x_6, x_{26}, x_{12}, x'_1, x_2 \rangle, \langle x'_3, x'_4, x'_5, x_{45}, x_{35}, x_{34}, x_3, x_4, x_5 \rangle, \langle x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{23}, x_{24}, x_{25}, x_{36}, x_{46}, x_{56} \rangle)$  eine 3-Zerlegung von  $V$ ,  $H := \bigcap_{1 \leq i \leq 3} \mathfrak{N}_{G(\mathbb{F})}(A_i)$  und  $\tilde{H} := \mathfrak{N}_{G(\mathbb{F})}(\{A_1, A_2, A_3\})$ .*

- (i) *Für alle  $\sigma, \tau \in \langle (123) \rangle$  enthält  $\mathfrak{C}_H(A_{1\sigma})$  eine Gruppe  $M_i \cong SL_3(\mathbb{F})$ , so dass  $A_{1\tau}$  isomorph ist zum Tensorprodukt-Modul der natürlichen Moduln  $W_{2\tau}$  und  $W_{3\tau}$  für  $M_{2\tau}$  und  $M_{3\tau}$ , wobei die Einschränkung von  $f$  auf  $A_{1\tau}$  das Tensorprodukt der Determinantenformen auf  $W_{2\tau}$  und  $W_{3\tau}$  ist und alle Vektoren der Form  $x \otimes y$  mit  $x \in W_{2\tau}$  und  $y \in W_{3\tau}$  singulär sind. Der  $M_{1\sigma}$ -Modul  $A_{2\sigma}$  ist der duale Modul zu  $A_{3\sigma}$ .*
- (ii)  *$M_0 := M_1 M_2 M_3$  ist isomorph zur Faktorgruppe von  $M_1 \times M_2 \times M_3$  nach einer zentralen Untergruppe der Ordnung  $|Z(M_1)|$ .*
- (iii) *Es gilt  $H = M_0 T_0$  mit  $M_0 \trianglelefteq H$ . Dabei ist  $M_0 \cap T_0$  das Bild von  $(M_1 \cap T_0) \times (M_2 \cap T_0) \times (M_3 \cap T_0)$ , wobei  $(M_i \cap T_0) \cong (\mathbb{F}^*)^2$  für  $1 \leq i \leq 3$  ein maximal zerfallender Torus von  $M_i$  ist. Die Gruppe  $H$  ist enthalten im Tensorprodukt der Gruppen  $GL(W_i)$ ,  $1 \leq i \leq 3$ .*
- (iv)  *$\tilde{H}/H \cong S_3$ .*

Beweis: ([As5], (3.6)).

**Definition 3.2.4** Sei  $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$  ein endlicher Körper und  $k = \mathbb{F}_{q^3}$ . Sei  $\{A_1, A_2, A_3\}$  eine 3-Zerlegung von  $V^k$ , für die  $(\bigcap_{1 \leq i \leq 3} \mathfrak{N}_{G(k)}(A_i)) \cap G(\mathbb{F})$  irreduzibel auf  $V$  wirkt. Dann heißt  $\mathcal{Z} := \{A_1, A_2, A_3\}$  eine **getwistete 3-Zerlegung** von  $V$ . Dabei sei  $\mathfrak{C}_{G(\mathbb{F})}(\mathcal{Z}) := (\bigcap_{1 \leq i \leq 3} \mathfrak{N}_{G(k)}(A_i)) \cap G(\mathbb{F})$  und  $\mathfrak{N}_{G(\mathbb{F})}(\mathcal{Z}) := \mathfrak{N}_{G(k)}(\{A_1, A_2, A_3\}) \cap G(\mathbb{F})$ .

Ist  $K$  der Fixkörper eines Automorphismus von  $\mathbb{F}$  der Ordnung 2, so definieren wir getwistete 3-Zerlegungen von  $V$ ,  $\mathfrak{C}_{H(K)}(\mathcal{Z})$  und  $\mathfrak{N}_{H(K)}(\mathcal{Z})$  für die Gruppe  $H(K)$  vom Typ  ${}^2E_6$  genau wie für  $G(\mathbb{F})$ .

**Proposition 3.2.9** Sei  $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$  ein endlicher Körper und  $k = \mathbb{F}_{q^3}$ . Besitzt  $\mathbb{F}$  einen Automorphismus der Ordnung 2, so bezeichne  $K$  seinen Fixkörper und  $\tilde{k}$  einen Zwischenkörper von  $K$  und  $k$  mit  $[\tilde{k} : K] = 3$ .

- (i) Für  $G(\mathbb{F})$  existieren getwistete 3-Zerlegungen von  $V$  und  $G(\mathbb{F})$  wirkt transitiv auf ihnen. Ist  $\mathcal{Z}$  eine getwistete 3-Zerlegung von  $V$ , so ist  $\mathfrak{C}_{G(\mathbb{F})}(\mathcal{Z}) \cong Z(G) \times \text{PSL}_3(k)$  und  $\mathfrak{N}_{G(\mathbb{F})}(\mathcal{Z})$  eine Erweiterung von  $\mathfrak{C}_{G(\mathbb{F})}(\mathcal{Z})$  mit einem Körperautomorphismus der Ordnung 3.
- (ii) Für  $H(K)$  existieren getwistete 3-Zerlegungen von  $V$  und  $H(K)$  wirkt transitiv auf ihnen. Ist  $\mathcal{Z}$  eine getwistete 3-Zerlegung von  $V$ , so ist  $\mathfrak{C}_{H(K)}(\mathcal{Z}) \cong Z(G) \times \text{PSU}_3(\tilde{k})$  und  $\mathfrak{N}_{H(K)}(\mathcal{Z})$  eine Erweiterung von  $\mathfrak{C}_{H(K)}(\mathcal{Z})$  mit einem Körperautomorphismus der Ordnung 3.

Beweis: Aussage (i) ist Teil von (7.5) in [As6]. Wegen der Analogie des Beweises für (i) in [As6] zum hier gegebenen Beweis von (ii) geben wir Teile von Aschbachers Beweis wieder und ergänzen die bei Aschbacher nicht ausgeführte Begründung für den Isomorphietyp von  $\mathfrak{C}_{G(\mathbb{F})}(\mathcal{Z})$ , der in [As6] fälschlicherweise mit  $\text{PSL}_3(k)$  angegeben wird.

Sei  $\langle \delta \rangle = \text{Gal}(k : \mathbb{F})$ . Es existiert ein Element  $t \in G(\mathbb{F})$ , das transitiv auf  $\mathcal{Z} = \{A_1, A_2, A_3\}$  wirkt. Dabei ist o.B.d.A.  $A_1^t = A_2$ . Sei  $\beta := \delta t$ , wobei  $\delta$  angewandt wird auf die Matrixeinträge von  $G(\mathbb{F})$  bezüglich einer Basis von  $V^k$ , für die alle Elemente von  $\mathcal{Z}$  von Basiselementen erzeugt werden und die Elemente von  $\mathfrak{C}_{G(k)}(\mathcal{Z})$  sich als Tensorprodukt von Matrizen über  $k$  schreiben lassen. Dann ist  $\mathfrak{C}_{G(k)}(\beta) \cong G(\mathbb{F})$ . Nach Proposition 3.2.8 enthält  $\mathfrak{C}_{G(k)}(\mathcal{Z})$  die Gruppe  $M_0 = M_1 M_2 M_3$  mit  $M_i = \mathfrak{C}_{G(k)}(A_i) \cong \text{SL}_3(k)$ , wobei für  $\rho \in \langle (123) \rangle$  jeweils  $A_{3\rho}$  der Tensorproduktmodul für  $M_{1\rho} \otimes M_{2\rho}^*$  ist. Demnach kommutieren die durch  $t$  und  $\delta$  induzierten Wirkungen auf  $M_1 M_2 M_3$ . Nun wirkt  $m_1 m_2 m_3$  auf  $A_3$  als  $m_1 \otimes m_2^{-t}$  und auf  $A_1$  als  $m_2 \otimes m_3^{-t}$ ,  $(m_1 m_2 m_3)^\beta$  auf  $A_3$  als  $m_3^\delta \otimes (m_1^\delta)^{-t}$  und auf  $A_1$  als  $m_1^\delta \otimes (m_2^\delta)^{-t}$ . Die Bedingung  $(m_1 m_2 m_3)^\beta = (m_1 m_2 m_3)$  ist also äquivalent zu  $m_2 = m_1^\delta$  und  $m_3 = m_2^\delta$ . Alle dritten Einheitswurzeln in  $k$  liegen schon in  $\mathbb{F}$ , sind also invariant unter  $\delta$ . Also wirkt  $\{(m, m^\delta, m^{\delta^2}) \mid m \in Z(M)\}$  trivial auf  $V$ . Nach [As5] wird  $\mathfrak{C}_{G(k)}(\mathcal{Z})$  erzeugt von  $M_0$  und  $Z(G(k))$ . Weil  $Z(G) =$

$Z(G(k))$  offenbar jede getwistete 3-Zerlegung zentralisiert, folgt die Behauptung über  $\mathfrak{C}_{G(\mathbb{F})}(\mathcal{Z})$ . Weiter ist  $\mathfrak{N}_{G(\mathbb{F})}(\mathcal{Z}) = (\mathfrak{C}_{G(\mathbb{F})}(\mathcal{Z})) \langle t \rangle$ . Transitivität von  $G(\mathbb{F})$  auf den getwisteten 3-Zerlegungen von  $V$  wird gezeigt in [As6], (7.5).

Sei  $\langle \gamma \rangle = \text{Gal}(k:K)$ . Wie in [As6], (7.5) existiert ein Element  $t \in H(K)$ , das transitiv auf  $\mathcal{Z} = \{A_1, A_2, A_3\}$  wirkt. Dabei ist o.B.d.A.  $A_1^t = A_2$ . Sei  $\beta := \xi\gamma t$ , wobei  $\gamma$  auf die Matrixeinträge der Elemente von  $G(k)$  bezüglich einer Basis wie oben angewendet wird und  $\xi$  die Hintereinanderausführung von Invertieren und Transponieren bezüglich derselben Basis ist. Wie im Beweis zu [As6], (7.5) sieht man, dass  $\mathfrak{C}_{G(k)}(\beta) \cong H(K)$  gilt. Wieder kommutieren die durch  $t$  und  $\gamma$  induzierten Wirkungen auf  $M_1M_2M_3$ . Nun wirkt  $(m_1m_2m_3)^\beta$  auf  $A_3$  als  $m_3^{\xi\gamma} \otimes (m_1^{\xi\gamma})^{-t} = (m_3^\gamma)^{-t} \otimes m_1^\gamma$  und auf  $A_1$  als  $(m_1^\gamma)^{-t} \otimes m_2^\gamma$ . Die Bedingung  $(m_1m_2m_3)^\beta = (m_1m_2m_3)$  ist also äquivalent zu  $m_2 = (m_1^\gamma)^{-t}$ ,  $m_3 = (m_2^\gamma)^{-t} = m_1^{\gamma^2}$  und  $m_1 = (m_3^\gamma)^{-t} = (m_1^{\gamma^3})^{-t}$ , folglich ist  $\mathfrak{C}_{H(K)}(\mathcal{Z})$  isomorph zum Bild von  $\{m \in M_1 \mid m = (m^{\gamma^3})^{-t}\} \cong \text{SU}_3(\tilde{k})$ . Wie oben wirkt das Zentrum dieser Gruppe trivial auf  $V$ , weil alle dritten Einheitswurzeln, die in  $\mathbb{F}$ , aber nicht in  $K$  liegen, unter  $\gamma^3$  invariant bleiben. Wie oben folgt  $\mathfrak{C}_{H(K)}(\mathcal{Z}) \cong Z(G) \times \text{PSU}_3(\tilde{k})$  und  $\mathfrak{N}_{H(K)}(\mathcal{Z}) = (\mathfrak{C}_{H(K)}(\mathcal{Z})) \langle t \rangle$ . Nach [As6], (7.5) enthält der Zentralisator einer getwisteten 3-Zerlegung in  $V$  für  $G(\mathbb{F})$  stets genau einen maximalen Torus von  $G(\mathbb{F})$  der Ordnung  $q^6 + q^3 + 1$ . In  ${}^2E_6(q)$  existiert nach Proposition 6.2.13 genau eine Konjugiertenklasse von maximalen Tori der Ordnung  $q^6 - q^3 + 1$ . Diese sind jeweils enthalten in genau einem maximalen Torus der Ordnung  $q^{12} + q^6 + 1$  von  $E_6(q^2)$ . Damit erhalten wir eine eindeutige Beziehung zwischen den maximalen Tori der Ordnung  $q^6 - q^3 + 1$  und den getwisteten 3-Zerlegungen für  $H(K)$ , so dass die Transitivität von  $H(K)$  auf den getwisteten 3-Zerlegungen aus der Transitivität auf den maximalen Tori, die Zsigmondy-Elemente enthalten, folgt.

### 3.3 Gruppen vom Typ $E_7$

Kapitel 2.3 enthält die für unser Thema benötigten, wichtigsten Ergebnisse über einfach-zusammenhängende Gruppen vom Typ  $E_7$  als Isometrie-Gruppen einer 4-Form auf einem 56-dimensionalen Modul  $V$  nach einer Arbeit von B.N. Cooperstein ([Coo2]). Dabei tritt die einfach-zusammenhängende Gruppe  ${}^2E_6(\mathbb{F})$  als Stabilisator eines Punktes  $x \in V$  von  $E_7(\mathbb{F})$  auf. Wie in [Coo2] ist  $\mathbb{F}$  stets ein Körper mit von 2 verschiedener Charakteristik.

Sei  $\mathbb{F}$  ein Körper mit von 2 verschiedener Charakteristik und  $V$  ein 56-dimensionaler  $\mathbb{F}$ -Vektorraum mit Basis

$$B = (x_{ij}, y_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq 8).$$

In Abschnitt 1 von [Coo2] werden eine symplektische Form  $\zeta$  und eine 4-Form  $F$  auf  $V$  definiert. Die Gram-Matrix von  $\zeta$  wird bestimmt durch  $0 = \zeta(x_{ij}, x_{kl}) = \zeta(y_{ij}, y_{kl})$  und  $\zeta(x_{ij}, y_{kl}) = \delta_{ik}\delta_{jl} \forall i < j, k < l$ . Eine 4-Form  $F : V \rightarrow \mathbb{F}$  ist ein homogenes Polynom vom Grad 4 in den Koeffizienten  $X_{ij}, Y_{ij}$  von  $v = \sum_{i,j} X_{ij}x_{ij} + Y_{ij}y_{ij}$  bezüglich der Basis  $B$ . So interpretiert besitzt  $F$  die folgenden 1036 Monome, aufgeteilt in 13 Klassen:

1.  $4\text{sgn}(\Pi)X_{i_1i_2}X_{i_3i_4}X_{i_5i_6}X_{i_7i_8}$  mit  $i_1 < i_3 < i_5 < i_7, i_k < i_{k+1}$  für  $i = 1, 3, 5, 7$  und  $\Pi \in S_8$  mit  $\Pi(k) = i_k$  für  $1 \leq k \leq 8$ .
2.  $4\text{sgn}(\Pi)Y_{i_1i_2}Y_{i_3i_4}Y_{i_5i_6}Y_{i_7i_8}$  mit  $i_1 < i_3 < i_5 < i_7, i_k < i_{k+1}$  für  $i = 1, 3, 5, 7$  und  $\Pi \in S_8$  mit  $\Pi(k) = i_k$  für  $1 \leq k \leq 8$ .
3.  $-X_{ij}^2Y_{ij}^2$  für  $1 \leq i < j \leq 8$ .
4.  $-2X_{ij}X_{ik}Y_{ij}Y_{ik}$  für  $1 \leq i < j < k \leq 8$ .
5.  $-2X_{ij}X_{jk}Y_{ij}Y_{jk}$  für  $1 \leq i < j < k \leq 8$ .
6.  $-2X_{ij}X_{kj}Y_{ij}Y_{kj}$  für  $1 \leq i < k < j \leq 8$ .
7.  $2X_{ij}X_{kl}Y_{ij}Y_{kl}$  für  $i < j, k < l$  und  $|\{i, j, k, l\}| = 4$ .
8.  $4X_{ij}X_{kl}Y_{il}Y_{jk}$  für  $1 \leq i < j < k < l \leq 8$ .
9.  $-4X_{ij}X_{kl}Y_{ik}Y_{jl}$  für  $1 \leq i < j < k < l \leq 8$ .
10.  $-4X_{ik}X_{jl}Y_{ij}Y_{kl}$  für  $1 \leq i < j < k < l \leq 8$ .
11.  $-4X_{ik}X_{jl}Y_{il}Y_{jk}$  für  $1 \leq i < j < k < l \leq 8$ .
12.  $4X_{il}X_{jk}Y_{ij}Y_{kl}$  für  $1 \leq i < j < k < l \leq 8$ .
13.  $-4X_{il}X_{jk}Y_{ik}Y_{jl}$  für  $1 \leq i < j < k < l \leq 8$ .

Es existieren polynomiale Funktionen  $T, B : V \times V \longrightarrow \mathbb{F}$ , so dass  $T$  linear in der ersten Variablen ist und ein homogenes Polynom vom Grad 3 in der zweiten Variablen und  $B$  symmetrisch ist und ein homogenes Polynom vom Grad 2 in beiden Variablen, so dass für alle  $v_1, v_2 \in V$  und  $t \in \mathbb{F}$  gilt:

$$F(v_1 + tv_2) = F(v_1) + tT(v_2, v_1) + t^2B(v_2, v_1) + t^3T(v_1, v_2) + t^4F(v_2)$$

(vgl. Abschnitt 3 in [Coo2]).

Ein Punkt  $\langle x \rangle$  heißt **singulär**, wenn das Radikal  $R(x)$  der quadratischen Form  $B_x = B(\cdot, x)$  eine Hyperebene von  $V$  ist, die  $x$  enthält, und  $F(x) = 0$  gilt. Ein Unterraum von  $V$  heißt **singulär**, wenn alle in ihm enthaltenen Punkte singulär sind. Ist  $P$  ein singulärer Punkt in  $V$ , so ist  $\Lambda(P) := \langle Q \leq V \mid \dim(Q) = 1, \langle P, Q \rangle \text{ ist singulär} \rangle$ .

Im Folgenden sei stets  $P_{ij} = \langle x_{ij} \rangle$ ,  $Q_{ij} = \langle y_{ij} \rangle$  für  $1 \leq i < j \leq 8$ ,

$X = \langle x_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq 8 \rangle$ ,  $Y = \langle y_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq 8 \rangle$  und

$\Omega = \{P_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq 8\} \cup \{Q_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq 8\}$ .

Weiter sei  $(\Omega, \Gamma)$  der Graph mit Punktmenge  $\Omega$  und der Kantenmenge  $\Gamma$  bestehend aus allen Mengen der Form  $\{P_{ij}, P_{kl}\}$  und  $\{Q_{ij}, Q_{kl}\}$  mit  $|\{i, j, k, l\}| = 3$  und allen Mengen der Form  $\{P_{ij}, Q_{kl}\}$  mit  $|\{i, j, k, l\}| = 4$ .

Für  $P \in \Omega$  sei  $\Gamma(P) = \{Q \in \Omega \mid \{P, Q\} \in \Gamma\}$ .

Sei  $O(V, F) = \{g \in \text{GL}(V) \mid F(v^g) = F(v) \forall v \in V\}$ .

Sei  $PS$  die Untergruppe von  $\text{GL}(V)$ , die wie folgt definiert ist:

Sei  $W$  ein  $\mathbb{F}$ -Vektorraum mit Basis  $(b_1, \dots, b_8)$  und  $W^*$  der zu  $W$  duale Vektorraum mit zu  $(b_1, \dots, b_8)$  dualer Basis  $(b_1^*, \dots, b_8^*)$ . Dann definiert jedes Element  $g \in \text{GL}(W)$  kanonisch Elemente in  $\text{GL}(W^*)$ ,  $\text{GL}(\Lambda^2(W))$  und  $\text{GL}(\Lambda^2(W^*))$ . Identifiziert man  $x_{ij}$  mit dem Element  $b_i \wedge b_j$  in  $\Lambda^2(W)$  und  $y_{ij}$  mit dem Element  $b_i^* \wedge b_j^*$  in  $\Lambda^2(W^*)$ , so erhält man einen Homomorphismus  $\psi : \text{SL}(W) \cong \text{SL}_8(\mathbb{F}) \longrightarrow \text{SL}(V)$ . Offenbar ist  $\text{Ker}(\psi) = \langle -I \rangle$ . Sei  $PS = \text{Im}(\psi)$ .

**Lemma 3.3.1** *Für die so definierte Gruppe  $PS$  gilt  $PS \leq O(V, F) \cap O(V, \zeta)$ .*

Beweis: ([Coo2], Thm. (2.3)).

Weiter wird in [Coo2], Abschnitt 2 ein Element  $g_\sigma \in O(V, F) \cap O(V, \zeta)$  konstruiert, dessen Matrix bezüglich  $B$  monomial mit Einträgen in  $\{1, -1\}$  ist und das auf  $\Omega$  die Permutation  $\sigma = (P_{18}Q_{26})(P_{28}Q_{16})(P_{37}Q_{45})(P_{57}Q_{34})(P_{68}Q_{12})(P_{26}Q_{18})(P_{16}Q_{28})(P_{45}Q_{37})(P_{12}Q_{68})(P_{47}Q_{35})(P_{34}Q_{57})(P_{35}Q_{47})$  induziert.

Sei  $G(\mathbb{F}) = \langle PS, g_\sigma \rangle$ .

**Proposition 3.3.1** *Die Gruppe  $G(\mathbb{F})$  ist eine über  $\mathbb{F}$  definierte, einfach-zusammenhängende Chevalley-Gruppe vom Typ  $E_7$ .  $V$  ist ein absolut irreduzibler  $G(\mathbb{F})$ -Modul, und  $Z(G(\mathbb{F}))$  besteht aus den Skalarmultiplikationen mit 1 und  $-1$ . Für die Involution  $\delta$  mit Eigenraum  $X$  zum Eigenwert 1 und  $Y$  zum Eigenwert  $-1$  gilt  $O(V, F) = G(\mathbb{F}) \langle \delta \rangle$ .*

Beweis: ([Coo2], (4.10) und (4.11)).

Nach [Coo2], (4.11) induziert  $\mathfrak{N}_{G(\mathbb{F})}(\Omega)$  auf  $\Omega \cap X$  die volle Gruppe  $\mathfrak{N}_{O(X,F)}(\Omega)$ . Ist  $t \in \mathfrak{N}_{G(\mathbb{F})}(\Omega)$  und  $x_{ij}^t = a_{ij}x_{ij}$ , so ist  $y_{ij}^t = a_{ij}^{-1}y_{ij}$  für  $1 \leq i < j \leq 8$ . Für  $a \in \mathbb{F}$  sei  $t = t(a) \in \mathfrak{N}_{GL(V)}(\Omega)$  gegeben durch  $x_{1i}^t = x_{1i}$  für  $1 \leq i \leq 7$ ,  $x_{18}^t = a_1^{-3}x_{18}$ ,  $x_{ij}^t = a_1x_{ij}$  für  $2 \leq i < j < 8$  und  $x_{i8}^t = a_1^{-2}x_{i8}$  für  $2 \leq i \leq 7$ . Man rechnet leicht nach, dass  $t(a)$  in  $G(\mathbb{F})$  liegt.

Für  $(a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) \in (\mathbb{F}^*)^6$  sei  $d(a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) = \psi(d)$ , wobei  $d \in SL(W)$  das Element mit Koordinate  $\text{diag}(1, a_2, \dots, a_7, (a_2 \dots a_7)^{-1})$  bezüglich  $(b_1, \dots, b_8)$  in  $SL(W)$  sei mit der oben definierten Gruppe  $SL(W)$ .

Für  $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) \in (\mathbb{F}^*)^7$  sei  $t(a_1, \dots, a_7) = t(a_1)d(a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7)$ .

**Proposition 3.3.2** *Es gilt:*

- (i)  $G(\mathbb{F})$  besitzt ein zerfallendes BN-Paar mit einer Borel-Gruppe, die den maximalen Torus  $T_0 = \bigcap_{P \in \Omega} \mathfrak{N}_{G(\mathbb{F})}(P) \cong (\mathbb{F}^*)^7$  enthält.
- (ii)  $T_0 = \{t(a_1, \dots, a_7) \mid a_1 \dots a_7 \in \mathbb{F}^*\}$ .
- (iii) Die Weyl-Gruppe  $\mathfrak{N}_{G(\mathbb{F})}(T_0)/T_0$  ist isomorph zu  $\mathbb{Z}_2 \times Sp_6(2)$  und induziert auf  $(\Omega, \Gamma)$  die volle Automorphismengruppe  $\text{Aut}(\Omega, \Gamma)$ .

Beweis: Teil (i) wird bewiesen in [Coo2] im Beweis zu (4.10). Teil (iii) ist der Inhalt von [Coo1] und [Coo2], (3.1).

Sei  $t = t(a_1, \dots, a_7)$ . Dann ist  $x_{1i}^t = a_i x_{1i}$  für  $2 \leq i \leq 7$  und  $x_{23}^t = a_1 a_2 x_{23}$ . Damit ist  $\{t(a_1, \dots, a_7) \mid a_1 \dots a_7 \in \mathbb{F}^*\}$  isomorph zum siebenfachen direkten Produkt von  $\mathbb{F}^*$  und damit ein maximal zerfallender Torus von  $G(\mathbb{F})$ .

**Proposition 3.3.3** *Die Gruppe  $R_{78} = \{r_{78}(t) \mid t \in \mathbb{F}\}$ , mit  $x_{i8}^{r_{78}(t)} = tx_{i7} + x_{i8}$  und  $y_{i7}^{r_{78}(t)} = y_{i7} - ty_{i8}$  für  $1 \leq i \leq 6$  und  $x_{ij}^{r_{78}(t)} = x_{ij}$ ,  $y_{ij}^{r_{78}(t)} = y_{ij}$  sonst, ist eine Wurzelgruppe von  $G(\mathbb{F})$ . Die Wurzelgruppen in  $G(\mathbb{F})$  sind genau die  $G(\mathbb{F})$ -Konjugierten von  $R_{78}$ .*

Beweis: Proposition 3.3.3 wird bewiesen im Beweis zu [Coo2], (4.10).

**Proposition 3.3.4** *Sei  $x \in V$  mit  $F(x) \neq 0$  und  $P = \langle x \rangle$ .*

- (i) *Ist  $-F(x)$  ein Quadrat in  $\mathbb{F}$ , dann ist  $\mathfrak{N}_{G(\mathbb{F})}(P)' \cong E_6(\mathbb{F})$ . Ist  $-1$  ein Quadrat in  $\mathbb{F}$ , so ist  $[\mathfrak{N}_{G(\mathbb{F})}(P) : \mathfrak{N}_{G(\mathbb{F})}(P)'] = 4$ , andernfalls ist  $[\mathfrak{N}_{G(\mathbb{F})}(P) : \mathfrak{N}_{G(\mathbb{F})}(P)'] = 2$ .*
- (ii) *Ist  $-F(x)$  kein Quadrat in  $\mathbb{F}$ , dann ist  $\mathfrak{N}_{G(\mathbb{F})}(P)' \cong {}^2E_6(\mathbb{F})$ . Ist  $-1$  ein Quadrat in  $\mathbb{F}$ , so ist  $[\mathfrak{N}_{G(\mathbb{F})}(P) : \mathfrak{N}_{G(\mathbb{F})}(P)'] = 4$ , andernfalls ist  $[\mathfrak{N}_{G(\mathbb{F})}(P) : \mathfrak{N}_{G(\mathbb{F})}(P)'] = 2$ .*
- (iii) *Sei  $U := \mathfrak{C}_V(\mathfrak{N}_{G(\mathbb{F})}(P)')$ . Dann gilt  $U = [V, \mathfrak{N}_{G(\mathbb{F})}(P)']^\perp$  und  $V = U \oplus U^\perp$  mit  $\dim(U) = 2$ . Für jeden von 0 verschiedenen Vektor  $y \in U$  ist  $\mathfrak{N}_{G(\mathbb{F})}(\langle y \rangle)' = \mathfrak{N}_{G(\mathbb{F})}(P)'$ . Außerdem ist  $\mathfrak{C}_{G(\mathbb{F})}(U) = \mathfrak{N}_{G(\mathbb{F})}(P)'$ .*
- (iv) *Ist  $-F(x)$  kein Quadrat in  $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$ , so ist  $\mathfrak{C}_{G(\mathbb{F})}(\mathfrak{C}_{G(\mathbb{F})}(U)) \cong \mathbb{Z}_{q+1}$  und  $\text{Aut}_{G(\mathbb{F})}(U) \cong D_{2(q+1)}$ .*
- (v) *Es existiert stets ein Vektor  $x \in \mathbb{F}$ , so dass  $-F(x) \neq 0$  ein Quadrat in  $\mathbb{F}$  ist. Ist  $\mathbb{F}^* \neq \mathbb{F}^2$ , so existiert ein Vektor  $x \in V$ , so dass  $-F(x) \neq 0$  kein Quadrat in  $\mathbb{F}$  ist. Ist  $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$  endlich, so hat  $G(\mathbb{F})$  auf den Vektoren in  $V$  mit  $F(x) \neq 0$  je  $(q-1, 4)/2$  Bahnen von Vektoren, für die  $-F(x)$  ein Quadrat bzw. kein Quadrat in  $\mathbb{F}$  ist.*

Beweis: Teil (i) ist [Coo2], (5.9) und Teil (ii) ist [Coo2], (5.10). Teil (iii) wird an gleicher Stelle bewiesen im Beweis zu diesen beiden Resultaten. Teil (v) folgt daraus, dass nach [Coo2], (5.4) jeder Vektor  $x \in V$  mit  $F(x) \neq 0$  unter  $G(\mathbb{F})$  konjugiert ist zu genau einem der Vektoren  $\beta x_{12} + x_{34} + x_{56} + x_{78}$  mit  $\beta \in M$ , wobei  $M$  ein System von Restklassenvertretern ist von  $\mathbb{F}^4$  in  $\mathbb{F}^*$ . Dabei ist  $F(\beta x_{12} + x_{34} + x_{56} + x_{78}) = 4\beta$ .

Sei  $K$  eine Erweiterung von  $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$  mit  $[K : \mathbb{F}] = 2$ . Nach den Bahnen von  $G(\mathbb{F})$  auf den dunklen Punkten können wir  $U^K = \langle x_{12}, y_{12} \rangle$  annehmen. Die einzigen singulären Punkte in  $U^K$  sind  $P_{12}$  und  $Q_{12}$ . Bei der Bestimmung des maximalen zerfallenden Torus zu  $G(\mathbb{F})$  hatten wir gesehen, dass  $G(\mathbb{F})$  auf  $U^K$  nur Abbildungen mit Determinante 1 induziert. Damit ist  $\text{Aut}_{G(\mathbb{F})}(U)$  isomorph zu einer Untergruppe von  $D_{2(q+1)}$ . Sei  $r$  ein Teiler von  $\Phi_{18}(q)$  und  $R$  eine nichttriviale  $r$ -Gruppe in  $G(\mathbb{F})$ . Nach Proposition 6.2.14 ist  $W := \mathfrak{C}_V(R)$  zweidimensional und  $W^{\mathbb{k}}$  konjugiert zu  $\langle x_{12}, y_{12} \rangle$ . Sei  $T := \mathfrak{C}_{G(\mathbb{F})}(R)$ ,  $T_1$  die Untergruppe von  $T$  der Ordnung  $q^6 - q^3 + 1$  und  $T_2$  die Untergruppe von  $T$  der Ordnung  $q + 1$ . Alle Eigenwerte von  $T_2$  liegen in  $K$ , deshalb können wir  $W^K = \langle x_{12}, y_{12} \rangle$  annehmen. Weil  $T_2$  treu auf  $W$  wirkt, enthält  $W$  nur dunkle Punkte. Weil  $r$  kein Teiler von  $|E_6(\mathbb{F})|$  ist, ist  $-F(x)$  kein Quadrat in  $\mathbb{F}$  für jeden von 0 verschiedenen Vektor  $x \in W$ . Da  $\mathfrak{N}_{G(\mathbb{F})}(T)$  eine zu  $D_{2(q+1)}$  isomorphe Gruppe auf  $W$  induziert, folgt der zweite Teil von (iv). Außerdem ist  $\mathfrak{C}_{G(\mathbb{F})}(\mathfrak{C}_{G(\mathbb{F})}(W))$  enthalten in  $\mathfrak{C}_{G(\mathbb{F})}(R)$ . Weil  $T_1$  in der perfekten Gruppe  $\mathfrak{C}_{G(\mathbb{F})}(W)$  liegt, ist  $\mathfrak{C}_{G(\mathbb{F})}(\mathfrak{C}_{G(\mathbb{F})}(W)) \leq T_2$ . Nach

Einbettung in  $G(K)$  wirkt  $T_2$ , wie im Beweis zu Proposition 6.2.14 gezeigt, skalar auf den beiden treuen Untermoduln von  $\mathfrak{C}_{G(\mathbb{F})}(W)$  in  $V^K$ , zentralisiert also  $\mathfrak{C}_{G(\mathbb{F})}(W)$ . Damit folgt der erste Teil von (iv).



# Kapitel 4

## Die Sätze von Ch. Hering für lineare Gruppen

Sei stets  $p$  eine Primzahl,  $q = p^a$  eine Potenz von  $p$  und  $V$  ein  $n$ -dimensionaler Vektorraum über  $\mathbb{F}_q$ .

**Satz 4.1** *Sei  $U$  eine auflösbare Untergruppe von  $G = GL(V)$  mit  $(|U|, \Phi_n^*(q)) \neq 1$ . Sei  $r$  eine Primzahl, die  $(|U|, \Phi_n^*(q))$  teilt. In  $U$  gebe es eine  $r$ -Gruppe  $R$ , die nicht normal in  $U$  ist.*

*Dann gilt:*

(i)  $|U|_r = |R| = r = n + 1$ ,  $n = 2^i$  mit  $i = 2^k$  für ein  $k \in \mathbb{N}$ ,  $r = \Phi_{2^i}^*(2)$  und  $p \neq 2$ .

(ii)  $U$  enthält einen Normalteiler  $N$ ,  $N \cong 2_-^{1+2^i}$  oder  $N \cong \mathbb{Z}_4 \circ 2_-^{1+2^i}$ , der absolut irreduzibel auf  $V$  wirkt.

(iii)  $F(U) = N \cdot Z(U)$  und  $N \cap Z(U) = Z(N)$ .

(iv)  $2rn^2 \mid |U| \mid 2rn^2i(q-1)$ .

Beweis: Der erste Teil von (i) ist [He1], Satz 1, (ii) und (iii) sind Teil von [He2], Thm. A. Es gilt  $\Phi_{2^i}^*(2) \mid \Phi_{2^i}(2) \mid 2^i + 1 = n + 1 = r$ . Wäre  $\Phi_{2^i}^*(2) = 1$ , so wäre  $i = 3$  nach dem Satz von Zsigmondy. Dann ist aber  $n + 1 = 2^3 + 1$  keine Primzahl. Es folgt  $\Phi_{2^i}^*(2) = r$ . Nach Lemma 2.1 ist  $r \equiv 1 \pmod{2i}$ , d.h.  $2i$  teilt  $r - 1 = 2^i$ . Also ist  $i$  eine Potenz von 2. Um (iv) zu beweisen, beachte man, dass  $U$  nach (ii) einen Normalteiler der Ordnung  $2n^2$  und  $R$  enthält. Umgekehrt ist  $|U| = [U : RF(U)] \cdot [RF(U) : F(U)] \cdot [F(U)]$ . Wendet man die obigen Ergebnisse auf  $RF(U)N/N$  an, so folgt  $RF(U) \trianglelefteq U$  und  $[U : RF(U)] \mid 2i$ . Mit (iii) und  $Z(U) \leq \mathfrak{C}_G(N) = Z(G)$  folgt (iv).

**Satz 4.2** Sei  $U$  eine nicht-auflösbare Untergruppe von  $GL(V)$  mit  $(|U|, \Phi_n^*(q)) \neq 1$  und  $r$  eine Primzahl, die  $(|U|, \Phi_n^*(q))$  teilt. Sei  $R$  eine  $r$ -Sylowgruppe von  $U$  und  $S$  der normale Abschluss von  $R$  in  $U$ . Sei  $A$  der maximale auflösbare Normalteiler von  $U$  und  $B \trianglelefteq U$  mit  $A \leq B$ , so dass  $B/A$  ein minimaler Normalteiler von  $U/A$  ist.

Dann gilt:

- (i)  $U/B$  ist isomorph zu einem Faktor von  $\Gamma L_1(q^n)$  und  $(|U/B|, \Phi_n^*(q)) = 1$ .
- (ii)  $B/A$  ist eine einfache, nichtabelsche Gruppe mit  $(|U|, \Phi_n^*(q)) = (|B/A|, \Phi_n^*(q))$ .
- (iii)  $A = F(U)$  und  $(|A|, \Phi_n^*(q)) = 1$ .
- (iv)  $B = SA$ .
- (v) Ist  $A = Z(B)$ , so ist  $[A, S] = 1$ ,  $B' = S$  quasieinfach und  $F^*(U) = B$ .
- (vi) Ist  $A \neq Z(B)$ , so ist  $[A, S] \neq 1$  und  $F^*(U) = A$ . Es gilt  $|R| = r = n + 1$ ,  $n = 2^i$  mit  $i = 2^k$  für ein  $k \in \mathbb{N}$ ,  $p \neq 2$  und  $r = \Phi_{2^i}^*(2)$ .

Weiter ist  $A$  das zentrale Produkt einer Gruppe  $T \cong 2_-^{1+2i}$ , die absolut irreduzibel auf  $V$  wirkt, mit der zyklischen Gruppe  $Z(U)$  mit  $Z(U) \cap T = Z(T)$ .

$U$  besitzt eine irreduzible  $\mathbb{F}_2$ -Darstellung  $\varphi$  vom Grad  $2i$  mit  $\text{Ker}(\varphi) = A$ , so dass  $U^\varphi$  eine symplektische oder eine nicht-ausgeartete quadratische Form mit Signatur  $-1$  invariant läßt. Ferner gilt eine der folgenden Aussagen:

- $B/A \cong \Omega^-(\frac{2i}{a}, 2^a)$  für eine 2-Potenz  $a < i$ .
- $B/A \cong Sp(\frac{2i}{a}, 2^a)$  für eine 2-Potenz  $a < i$ ,  $i \geq 4$  und  $4 \mid |Z(U)|$ .
- $B/A \cong A_6$ ,  $i = 2, r = 5, n = 4, 4 \mid |Z(U)|$  und  $U = B$  oder  $U/A \cong S_6$ .
- $B/A \cong PSL(2, 17)$ ,  $i = 4, r = 17, n = 16, 4 \mid |Z(U)|$  und  $U = B$ .

(vii)  $U/B$  ist eine 2-Gruppe,  $|U/B| \mid i$ .

Beweis: Alle Aussagen werden bewiesen in [He1], Satz 3, [He2], Thm. A und Thm. B und [He3], Thm. 4.2 oder folgen aus den genannten Sätzen mit Hilfe kleinerer Zusatzüberlegungen (siehe [Me], Kapitel 5).

# Kapitel 5

## Die Sätze von B. Merkt für klassische Gruppen

In diesem Kapitel fassen wir die wichtigsten Ergebnisse der Dissertation von B. Merkt ([Me]) zusammen, Verallgemeinerungen der Sätze von Ch. Hering auf endliche klassische Gruppen. Ergebnisse über die Struktur der Zentralisatoren und Normalisatoren der betrachteten Elemente finden sich in Kapitel 6.

Sei  $p$  eine Primzahl,  $q = p^a$  eine Potenz von  $p$  und  $\mathbb{F}_q$  ein Körper der Ordnung  $q$ . Ist  $G = U_n(q)$  eine unitäre Gruppe, so betrachten wir den zugehörigen Modul der Dimension  $n$  über  $\mathbb{F}_{q^2}$  als den natürlichen Modul zu  $G$ .

**Satz 5.1** *Sei  $G$  eine endliche klassische Gruppe,  $V$  der natürliche Modul zu  $G$  und  $n \in \mathbb{N}$ . Eine Untergruppe  $X$  von  $G$  mit  $\mathfrak{C}_G(X) = X$ , die irreduzibel auf  $V$  wirkt, heißt **Singerzyklus** in  $G$ .*

*Stets ist  $\mu := \mu(G, V) = \nu(G, V)$ , und es gilt:*

*Ist  $G = Sp_{2n}(q)$ , so besitzt  $G$  Singerzyklen, d.h. es ist  $\mu = 2n$ .*

*Ist  $G = O_{2n}^-(q)$ , so besitzt  $G$  Singerzyklen, d.h. es ist  $\mu = 2n$ .*

*Ist  $G = U_{2n+1}(q)$ , so besitzt  $G$  Singerzyklen, d.h. es ist  $\mu = 2n + 1$ .*

*Ist  $G = O_{2n+1}(q)$ , so ist  $\mu = 2n$ .*

*Ist  $G = U_{2n}(q)$ , so ist  $\mu = 2n - 1$ .*

*Ist  $G = O_{2n+2}^+(q)$ , so ist  $\mu = 2n$ .*

Wir präsentieren im Folgenden Beispiele von Untergruppen von endlichen klassischen Gruppen, die für gewisse Dimensionen Zsigmondy-Elemente enthalten, die eine  $s$ -Gruppe normalisieren, aber nicht zentralisieren, für eine von  $p$  verschiedene Primzahl  $s$ .

**Beispiel 1:** Ist  $q$  ungerade, so enthält die Gruppe  $G = \mathrm{Sp}_{2n}(q)$  eine Untergruppe  $T \cong 2_-^{1+4n}$ .  $T$  wirkt absolut irreduzibel auf  $V$ , und es ist  $\mathfrak{C}_G(T) = \langle -1 \rangle$ . Es ist  $\mathrm{Aut}_G(T)/\mathrm{Inn}(T) \cong O_{4n}^-(2)$ . Je zwei solcher Untergruppen sind konjugiert in  $G$ .

**Beispiel 2:** Ist  $q$  ungerade, so enthält die Gruppe  $G = O_{2n+2}^+(q)$  eine Untergruppe  $T \cong 2_+^{1+4(n+1)}$ .  $T$  wirkt absolut irreduzibel auf  $V$ , und es ist  $\mathfrak{C}_G(T) = \langle -1 \rangle$ . Es ist  $\mathrm{Aut}_G(T)/\mathrm{Inn}(T) \cong O_{4(n+1)}^+(2)$ . Je zwei solcher Untergruppen sind konjugiert in  $G$ .

**Beispiel 3:** Ist  $q$  ungerade, so gibt es für den Modul  $V$  zu  $G = O_{2n+1}$  eine Zerlegung  $\mathcal{Z} = \{W_1, \dots, W_{2n+1}\}$  in eindimensionale Unterräume  $W_i$  mit  $W_i^\perp = \bigoplus_{j \neq i} W_j$ , so dass  $T := \mathfrak{C}_G(\mathcal{Z})$  eine elementarabelsche 2-Gruppe der Ordnung  $2^{2n+1}$  ist, die  $W_i$  paarweise nicht isomorphe  $T$ -Moduln sind und  $\mathfrak{N}_G(\mathcal{Z})$  irreduzibel auf  $V$  wirkt. Je zwei solcher Zerlegungen sind konjugiert unter  $G$ .

**Beispiel 4:** Ist  $q$  ungerade, so gibt es für den Modul  $V$  zu  $G = O_{2n+2}^+$  eine Zerlegung  $\mathcal{Z} = \{W_1, \dots, W_{2n+2}\}$  in eindimensionale Unterräume  $W_i$  mit  $W_i^\perp = \bigoplus_{j \neq i} W_j$ , so dass  $T := \mathfrak{C}_G(\mathcal{Z})$  eine elementarabelsche 2-Gruppe der Ordnung  $2^{2n+2}$  ist, die  $W_i$  paarweise nicht isomorphe  $T$ -Moduln sind und  $\mathfrak{N}_G(\mathcal{Z})$  irreduzibel auf  $V$  wirkt. Je zwei solcher Zerlegungen sind konjugiert unter  $G$ .

**Satz 5.2** Sei  $G$  eine endliche klassische Gruppe, mit  $\mu = \mu(G, V)$  und  $\tilde{q} = q$ , falls  $G$  eine symplektische oder orthogonale Gruppe ist, und  $\tilde{q} = q^2$ , falls  $G$  eine unitäre Gruppe ist.

Sei  $U$  eine auflösbare Untergruppe von  $G$  mit  $(|U|, \Phi_\mu^*(\tilde{q})) \neq 1$ ,  $r$  eine Primzahl, die  $(|U|, \Phi_\mu^*(\tilde{q}))$  teilt und  $R$  eine  $r$ -Gruppe in  $U$ . Ist dann  $R \not\trianglelefteq U$ , so gilt:

$|R| = r = \mu + 1$ ,  $p \neq 2$  und  $U$  gehört zu einem der nachfolgend aufgeführten Fälle, jeweils ist  $R \not\trianglelefteq RF(U) \trianglelefteq U$ , und  $U$  ist enthalten in einem maximalen Beispiel  $H$  des entsprechenden Typs.

*Fall 1:*  $G = \mathrm{Sp}_{2n}(q)$ ,  $\mu = 2^i$  mit  $i = 2^k$  für ein  $k \in \mathbb{N}$ ,  $r = \Phi_{2^i}^*(2)$ . Es ist  $F(U) = T$  mit  $T$  wie in Beispiel 1, und  $|H| = |T| \cdot r \cdot i \cdot c$  mit  $c = 2$  für  $q \equiv \pm 1 \pmod{8}$  und  $c = 1$  sonst.

*Fall 2:*  $G = O_{2n+1}(q)$ ,  $F(U) = T \cap U$  mit  $T$  wie in Beispiel 3. Dabei sind die Elemente  $W_i$  von  $\mathcal{Z}$  paarweise nicht isomorphe  $F(U)$ -Moduln, und  $|H| = (r - 1) \cdot r \cdot 2^r$ .

Fall 3:  $G = O_{2n+2}^+(q)$ ,  $\mu = 2^i - 2$  für ein  $i \in \mathbb{N}$ . Es ist  $F(U) = T$  mit  $T$  wie in Beispiel 2, und  $|H| = |T| \cdot r \cdot 2i \cdot c$  mit  $c = 2$  für  $q \equiv \pm 1 \pmod{8}$  und  $c = 1$  sonst.

Fall 4:  $G = O_{2n+2}^+(q)$ ,  $r+1 = 2^s$  für eine ungerade Primzahl  $s$ , und  $U \leq \mathfrak{N}_G(\mathcal{Z})$  für  $\mathcal{Z}$  wie in Beispiel 4.  $U$  wirkt 2-transitiv auf  $\mathcal{Z}$ . Ist  $N = \mathfrak{C}_G(\mathcal{Z}) \cap U$  und  $M$  das Urbild eines minimalen Normalteilers von  $U/N$  in  $U$ , so ist  $F(U) = M$ . Die Elemente  $W_i$  von  $\mathcal{Z}$  sind paarweise nicht isomorphe  $N$ -Moduln.  $M$  ist eine nichtabelsche 2-Gruppe mit Exponent 4, wirkt irreduzibel auf  $V$ , und  $M/N$  wirkt regulär auf  $\mathcal{Z}$ .  $|H| = r \cdot s \cdot 2^{r+s+1}$ .

Fall 5:  $G = O_{2n+2}^+(q)$ ,  $F(U) = T \cap U$  mit  $T$  wie in Beispiel 4.  $U$  ist enthalten im Stabilisator eines Elementes  $W_j$  von  $\mathcal{Z}$  und wirkt transitiv auf den restlichen Elementen von  $\mathcal{Z}$ . Die Elemente  $W_i$ ,  $i \neq j$  von  $\mathcal{Z} \setminus \{W_j\}$  sind paarweise nicht isomorphe  $F(U)$ -Moduln, und  $|H| = (r-1) \cdot r \cdot 2^{r+1}$ .

**Satz 5.3** Sei  $G$  eine endliche klassische Gruppe, mit  $\mu = \mu(G, V)$  und  $\tilde{q} = q$ , falls  $G$  eine symplektische oder orthogonale Gruppe ist, und  $\tilde{q} = q^2$ , falls  $G$  eine unitäre Gruppe ist.

Sei  $U$  eine nicht-auflösbare Untergruppe von  $G$  mit  $(|U|, \Phi_\mu^*(\tilde{q})) \neq 1$ ,  $r$  eine Primzahl, die  $(|U|, \Phi_\mu^*(\tilde{q}))$  teilt,  $R$  eine  $r$ -Sylowgruppe von  $U$  und  $S$  der normale Abschluss von  $R$  in  $U$ . Sei  $A$  der maximale auflösbare Normalteiler von  $U$  und  $B \trianglelefteq U$  mit  $A \leq B$ , so dass  $B/A$  ein minimaler Normalteiler von  $U/A$  ist.

Dann gilt:

- (i)  $U/B$  ist isomorph zu einem Faktor von  $\mathfrak{N}_G(R)$  mit  $(|U/B|, \Phi_\mu^*(\tilde{q})) = 1$ .
- (ii)  $B/A$  ist eine einfache, nichtabelsche Gruppe mit  $(|U|, \Phi_\mu^*(\tilde{q})) = (|B/A|, \Phi_\mu^*(\tilde{q}))$ .
- (iii)  $A$  ist abelsch,  $(|A|, \Phi_\mu^*(\tilde{q})) = 1$  und  $B = SA$ .
- (iv) Ist  $G \neq O_{2n+2}^+(q)$  für ein  $n \in \mathbb{N}$  und ist  $A = Z(B)$ , so ist  $B' = S$  quasieinfach,  $F(U) = \mathfrak{C}_U(S)$  und  $F^*(U) = SF(U)$ . Besitzt  $G$  Singerzyklen, so ist  $A = F(U)$ .
- (v) Ist  $G = O_{2n+2}^+(q)$  und  $[R, A] = 1$ , so ist  $B'' = S$  quasieinfach und die einzige Komponente von  $U$ .  
Ist  $G = O_{2n+2}^+(q)$  und  $[R, A] \neq 1$ , so ist  $(|U|, \Phi_\mu^*(\tilde{q})) = |R| = r = 2n + 1$  und  $RA$  eine der Ausnahmen aus Satz 5.2.
- (vi) Ist  $G \neq O_{2n+2}^+(q)$  für ein  $n \in \mathbb{N}$  und ist  $A \neq Z(B)$ , so ist  $RA$  eine der Ausnahmen aus Satz 5.2. Es ist  $A = F(U) = F^*(U)$ .  
Ist  $G$  eine symplektische Gruppe, so ist  $B/A \cong \Omega_{2i/a}^-(2^a)$  für eine 2-Potenz  $a < i$ .

*Ist  $G$  eine orthogonale Gruppe in ungerader Dimension, so ist  $B/A \cong A_r$ ,  $B/A \cong M_{11}$  mit  $r = 11$ ,  $B/A \cong M_{23}$  mit  $r = 23$ ,  $B/A \cong PSL_2(11)$  mit  $r = 11$  oder es ist  $B/A \cong PSL_{\bar{n}}(\bar{q})$  mit  $r = \frac{\bar{q}^{\bar{n}}-1}{\bar{q}-1}$ .*

## Kapitel 6

# Zentralisatoren, Normalisatoren und Konjugiertenklassen

### 6.1 Grundlagen

Im Folgenden werden allgemeine Begriffe und Sätze aus der Theorie der linearen algebraischen Gruppen im Umfang etwa der Lehrbücher von Humphreys ([Hum1]) oder Carter ([Ca2], Kapitel 1) vorausgesetzt. Im ersten Abschnitt des Kapitels werden die für die Berechnung der Zentralisatoren, Normalisatoren und Konjugiertenklassen von Zsigmondy-Elementen benötigten Sätze über Zentralisatoren halbeinfacher Elemente in zusammenhängenden, reduktiven algebraischen Gruppen und über die maximalen Tori der endlichen Gruppen vom Lie-Typ größtenteils ohne Beweise zusammengestellt. Es handelt sich dabei um Standardresultate, die im wesentlichen auf Borel, Steinberg und Carter zurückgehen.

Sei stets  $\mathbb{k}$  ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik  $p$  und  $G$  eine über  $\mathbb{k}$  definierte algebraische Gruppe. Dabei bezeichne  $G^0$  die zusammenhängende Komponente von  $G$ , d.h. die irreduzible Komponente der affinen Varietät  $G$ , die  $1_G$  enthält.

Im Zusammenhang mit algebraischen Gruppen  $G, G'$  sei ein Homomorphismus  $G \rightarrow G'$  stets ein Gruppenhomomorphismus, der zugleich Morphismus der zugehörigen Varietäten ist. Ein Isomorphismus sei ein bijektiver Homomorphismus, dessen Umkehrabbildung ebenfalls ein Morphismus ist. Dann ist  $G$  isomorph zu einer abgeschlossenen Untergruppe von  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{k})$  für ein geeignetes  $n \in \mathbb{N}$  (siehe [Hum1], Kap. 8.6). Wir gehen stets davon aus, dass eine Basis von  $\mathbb{k}^n$  fest gewählt ist, betrachten also  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{k})$  als Menge der invertierbaren Elemente von  $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{k})$ .

**Definition 6.1.1** Sei  $F_q$  der Endomorphismus von  $GL_n(\mathbb{k})$ , der durch

$$F_q : (a_{ij}) \longrightarrow (a_{ij}^q)$$

definiert ist.

Ein Homomorphismus  $F : G \longrightarrow G$  heißt **Standard-Frobenius-Abbildung**, wenn es für geeignete  $n, a \in \mathbb{N}$  und  $q = p^a$  einen injektiven Homomorphismus  $i : G \longrightarrow GL_n(\mathbb{k})$  gibt, so dass gilt:

$$i(F(g)) = F_q(i(g)) \quad \text{für alle } g \in G.$$

Ein Homomorphismus  $F : G \longrightarrow G$  heißt **Frobenius-Abbildung**, wenn eine geeignete Potenz von  $F$  eine Standard-Frobenius-Abbildung ist.

Ist  $F : G \longrightarrow G$  eine Frobenius-Abbildung und  $U$  eine  $F$ -invariante Untergruppe von  $G$ , so sei

$$U^F := \{g \in U \mid F(g) = g\}.$$

$G^F$  ist dann eine endliche Untergruppe von  $G$ . Die endlichen Gruppen  $G^F$  für zusammenhängende reductive Gruppen  $G$  sind die endlichen Gruppen vom Lie-Typ (siehe [Ca2], Kap. 1.17). Im Folgenden sei stets  $G$  zusammenhängend.

Im Zusammenhang mit den endlichen Gruppen vom Lie-Typ seien die Sätze von Lang und Steinberg wegen ihrer fundamentalen Bedeutung bei deren Untersuchung zitiert.

**Satz 6.1.1** (Lang) Sei  $G$  eine zusammenhängende abgeschlossene Untergruppe von  $GL_n(\mathbb{k})$  und  $F_q$  wie oben. Dann ist der durch  $L(g) := g^{-1}F(g)$  gegebene Morphismus  $L : G \rightarrow G$  surjektiv.

Beweis: ([Ca2], S.32).

**Satz 6.1.2** (Steinberg) Sei  $G$  zusammenhängend und  $F : G \rightarrow G$  ein surjektiver Homomorphismus mit endlicher Gruppe von Fixpunkten  $G^F$ , so ist die durch  $L(g) := g^{-1}F(g)$  gegebene Abbildung  $L : G \rightarrow G$  surjektiv.

Beweis: ([St], §10).

Die einzigen zusammenhängenden eindimensionalen algebraischen Gruppen über  $\mathbb{k}$  sind die additive Gruppe  $G_a$  und die multiplikative Gruppe  $G_m$  von  $\mathbb{k}$ . Ein Torus in  $G$  ist eine Untergruppe von  $G$ , die isomorph ist zum  $n$ -fachen direkten

Produkt  $G_m \times \cdots \times G_m$  für geeignetes  $n \in \mathbb{N}$ . Eine *Borelgruppe* in  $G$  ist eine maximale zusammenhängende, auflösbare Untergruppe von  $G$ . Jeder maximale Torus von  $G$  liegt in einer Borelgruppe von  $G$ . Je zwei Borelgruppen und je zwei maximale Tori in  $G$  sind konjugiert in  $G$  (siehe [Hum1], Kap. 21.3).

Sei im Folgenden  $G$  zusammenhängend und reduktiv.

**Definition 6.1.2** Die **Borelgruppen von  $G^F$**  sind die Untergruppen  $B^F$  der  $F$ -invarianten Borelgruppen von  $G$ .

Die **maximalen Tori von  $G^F$**  sind die Untergruppen  $T^F$  der  $F$ -invarianten maximalen Tori von  $G$ . Dabei heißen  $T$  und  $T^F$  **maximal zerfallend**, wenn  $T$  in einer  $F$ -invarianten Borelgruppe von  $G$  liegt.

Mit Hilfe der Sätze 6.1.1 und 6.1.2 von Lang-Steinberg zeigt man, dass in  $G$   $F$ -invariante Borelgruppen existieren und dass je zwei Borelgruppen von  $G^F$  und je zwei maximal zerfallende maximale Tori von  $G^F$  in  $G^F$  konjugiert sind. Sei nun  $T_0$  ein  $F$ -invarianter, maximal zerfallender Torus in  $G$ . Dann ist jeder Torus in  $G$  konjugiert zu  $T_0$ , und  $T_0^g$  ist genau dann  $F$ -invariant, wenn  $T_0^g = F(T_0^g) = F(T_0)^{Fg}$  gilt, d.h. wenn  $gF(g)^{-1}$  in  $\mathfrak{N}_G(T_0)$  liegt. Über die kanonische Abbildung  $\Pi : \mathfrak{N}_G(T_0) \rightarrow W := \mathfrak{N}_G(T_0)/T_0$  erhält man eine Abbildung  $\gamma$  von der Menge der  $F$ -invarianten maximalen Tori in  $G$  in die Weyl-Gruppe  $W$  von  $G$ .

Mit  $T_0$  ist auch  $\mathfrak{N}_G(T_0)$   $F$ -invariant. Deshalb induziert  $F$  einen Automorphismus von  $W$ , den wir ebenfalls mit  $F$  bezeichnen. Damit ist die folgende Definition sinnvoll:

**Definition 6.1.3** Zwei Elemente  $w_1, w_2$  in  $W$  heißen **F-konjugiert** in  $W$ , wenn ein  $x$  in  $W$  existiert mit  $w_2 = x^{-1}w_1F(x)$ . Die Konjugiertenklassen bezüglich dieser Äquivalenzrelation heißen **F-Konjugiertenklassen**.

$\mathfrak{C}_{W,F}(w) = \{x \in W \mid x^{-1}wF(x) = w\}$  ist eine Untergruppe von  $W$ , der **F-Zentralisator von  $w$** . Offenbar ist der Index  $[W : \mathfrak{C}_{W,F}(w)]$  gerade die Zahl der Elemente in der  $F$ -Konjugiertenklasse von  $w$ .

**Proposition 6.1.1** Die Abbildung  $\gamma : T_0^g \rightarrow \Pi(gF(g)^{-1})$  induziert eine Bijektion zwischen den  $G^F$ -Konjugiertenklassen  $F$ -invarianter maximaler Tori von  $G$  und den  $F$ -Konjugiertenklassen in  $W$ .

Beweis: [Ca2], Proposition 3.3.3. In den Beweis gehen entscheidend die Sätze 6.1.1 und 6.1.2 von Lang-Steinberg ein. Der Rest des Beweises ist elementar.

**Definition 6.1.4** Ist  $T = T_0^g$  ein  $F$ -invarianter Torus von  $G$  und  $w$  ein Element der  $F$ -Konjugiertenklasse von  $\gamma(T)$ , so heißt  $T$  ein **aus  $T_0$  durch twisten mit  $w$  erhaltener Torus** oder kurz ein **mit  $w$  getwisteter Torus**.

Bemerkung: Die Kurzform der Definition ist sinnvoll, weil die durch  $T$  bestimmte  $F$ -Konjugiertenklasse nicht von der Wahl von  $T_0$  abhängt. Ist nämlich  $T_1$  ein anderer maximal zerfallender Torus, so sind  $T_0$  und  $T_1$  in  $G^F$  konjugiert. Sei etwa  $T_0 = T_1^x$  mit  $x$  in  $G^F$ . Konjugation mit  $x$  induziert einen damit verträglichen kanonischen Isomorphismus von  $\mathfrak{N}_G(T_1)$  auf  $\mathfrak{N}_G(T_0)$ . Es ist  $T = T_0^g = T_1^{xg}$ , und bezüglich  $T_1$  ist  $T$  getwistet mit  $F(xg)(xg)^{-1} = xF(g)g^{-1}x^{-1}$ , dem entsprechenden Element der Weyl-Gruppe  $\mathfrak{N}_G(T_1)/T_1$ . Dabei gehen durch Konjugation mit  $x$  die  $F$ -Konjugiertenklassen von  $\mathfrak{N}_G(T_1)/T_1$  auf  $F$ -Konjugiertenklassen von  $\mathfrak{N}_G(T_0)/T_0$  über, denn für  $g_1, g_2 \in \mathfrak{N}_G(T_1)$  gilt:  $(g_2^{-1}g_1F(g_2))^x = (g_2^{-1})^x g_1^x F(g_2)^{F(x)} = (g_2^x)^{-1} g_1^x F(g_2^x)$ .

**Proposition 6.1.2**  $(T_0^g)^F$  ist in  $G$  konjugiert zu  $\{t_0 \in T_0 \mid F(t_0) = t_0^{g^{F(g)^{-1}}}\}$ .

Beweis:  $F(t_0^g) = t_0^g \iff F(t_0)^{F(g)} = t_0^g \iff F(t_0) = t_0^{g^{F(g)^{-1}}}$ .  
Also folgt das Ergebnis durch Konjugation mit  $g^{-1}$ .

**Proposition 6.1.3** Sei  $T$  ein aus  $T_0$  durch twisten mit  $w$  erhaltener Torus und  $N := \mathfrak{N}_G(T)$ . Dann gilt  $N^F/T^F \cong \mathfrak{C}_{W,F}(w)$ .

Beweis: ([Ca2], Proposition 3.3.6).

**Definition 6.1.5** Sei der maximale Torus  $T$  enthalten in einer Borelgruppe  $B$  von  $G$  mit gegenüberliegender Borelgruppe  $B^-$  (d.h.  $B \cap B^- = T$ ). Die **Wurzelgruppen**  $X_\alpha$  zu  $T$  (bzgl.  $B$ ) sind die minimalen Untergruppen der unipotenten Radikale von  $B$  und  $B^-$ , die von  $T$  normalisiert werden. Sie sind isomorph zu  $G_a$ , und die Konjugationswirkung von  $T$  auf ihnen definiert Abbildungen aus  $\text{Hom}(T, G_m)$ , die **Wurzeln** von  $T$ . Die Menge der Wurzeln von  $T$  heiße  $\Phi$ .

Bemerkung: Eine ausführlichere Darstellung zu den Wurzelgruppen und den eben verwendeten Begriffen findet sich in [Ca2], Kapitel 1.9.

**Definition 6.1.6** Sei weiter  $G$  zusammenhängend und reduktiv und  $T$  ein  $F$ -invarianter maximaler Torus von  $G$ . Dann heißt  $T^F$  **nichtausgeartet**, wenn die folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt sind:

- (i)  $T$  ist der einzige maximale Torus von  $G$ , der  $T^F$  enthält.
- (ii)  $T = \mathfrak{C}_G(T^F)^0$ .
- (iii) Keine Wurzel von  $G$  relativ zu  $T$  erfüllt  $\alpha(t) = 1$  für alle  $t \in T^F$ .

Bemerkung: Zur Äquivalenz der Bedingungen siehe [Ca2], Proposition 3.6.1.

**Proposition 6.1.4** *Seien  $T_1, T_2$   $F$ -invariante maximale Tori in  $G$  und  $T_1^F, T_2^F$  nichtausgeartet. Dann sind  $T_1, T_2$   $G^F$ -konjugierte maximale Tori in  $G$  genau dann, wenn  $T_1^F, T_2^F$  konjugierte Untergruppen von  $G^F$  sind.*

Beweis: ([Ca2], Proposition 3.6.2).

**Proposition 6.1.5** *Sei  $T$  ein  $F$ -invarianter maximaler Torus von  $G$  und  $N := \mathfrak{N}_G(T)$ . Ist  $T^F$  nichtausgeartet, so gilt  $N^F = \mathfrak{N}_{G^F}(T^F)$ .*

Beweis: ([Ca2], Proposition 3.6.4).

Die folgenden Sätze sind die zentralen Resultate zu den Zentralisatoren halbeinfacher Elemente. Dabei sind die Voraussetzungen von Satz 6.1.4 in allen im folgenden untersuchten Gruppen gegeben.

**Satz 6.1.3** *Sei  $G$  zusammenhängend und reduktiv,  $s \in G$  halbeinfach und  $T$  ein maximaler Torus von  $G$ , der  $s$  enthält. Dann gilt:*

- (i)  $\mathfrak{C}_G(s)^0 = \langle T, X_\alpha \mid \alpha(s) = 1 \rangle$ .
- (ii)  $\mathfrak{C}_G(s) = \langle T, X_\alpha, n \mid \alpha(s) = 1, n \in \mathfrak{N}_G(T), s^n = s \rangle$ .

Beweis: ([Ca2], Satz 3.5.3).

**Satz 6.1.4** *Sei  $G$  zusammenhängend und reduktiv und  $G'$  einfach-zusammenhängend. Dann ist  $\mathfrak{C}_G(s)$  zusammenhängend.*

Beweis: ([Ca2], Satz 3.5.6).

## 6.2 Singer-Zyklen und Zsigmondy-Elemente

Sei stets  $G$  eine endlich Gruppe vom Lie-Typ, einfach-zusammenhängend für die Ausnahmetypen, sonst eine lineare oder klassische Gruppe über  $\mathbb{F}_q$ , und  $V$  der zugehörige Standardmodul.

**Definition 6.2.1**  $X$  ist ein **Singer-Zyklus** in  $G$ , falls  $X$  eine zyklische Untergruppe von  $G$  ist, die irreduzibel auf  $V$  wirkt und für die  $\mathfrak{C}_G(X) = X$  gilt.

**Definition 6.2.2** Die **Zsigmondy-Zahl**  $\mu(G, V)$  ist definiert als die Dimension eines Untermoduls von  $V$  maximaler Dimension, auf dem ein Element von  $G$  von Primzahlordnung irreduzibel wirkt. Enthält  $\langle g \rangle$  für  $g \in G$  ein Element von Primzahlordnung, das irreduzibel auf einem Untermodul der Dimension  $\mu(G, V)$  wirkt, so heißt  $g$  ein **Zsigmondy-Element**. Der Parameter  $\nu(G, V)$  ist definiert als die Dimension eines Untermoduls von  $V$  maximaler Dimension, auf dem ein Element von  $G$  irreduzibel wirkt.

Im Folgenden wird sich herausstellen, dass die Zsigmondy-Zahl für alle nicht-getwisteten Gruppen mit der Coxeter-Zahl der zugehörigen Weyl-Gruppe zusammenfällt. Von diesem Zusammenhang wird aber kein weiterer Gebrauch gemacht. Deshalb wird auf eine genauere Einführung von Coxeter-Elementen in Weyl-Gruppen verzichtet, wie auch auf die Einführung der benötigten Begriffe aus der Theorie der Coxeter-Gruppen.

**Definition 6.2.3** Sei  $W$  eine irreduzible Coxeter-Gruppe. Ein Element  $w \in W$  heißt **Coxeter-Element**, falls ein Coxeter-System  $(s_1, \dots, s_n)$  in  $W$  existiert mit  $w = s_1 \cdots s_n$ .

**Proposition 6.2.1** Die Gruppe  $W$  besitzt nur eine Konjugiertenklasse von Coxeter-Elementen. Die Ordnung eines Coxeter-Elements heißt die **Coxeter-Zahl** von  $W$ .

Beweis: ([Hum3], S. 74f).

**Lemma 6.2.1** Sei  $A$  eine abelsche Untergruppe von  $G = GL(V) = GL_n(q)$  mit der Eigenschaft, dass  $V$  die direkte Summe von  $s \geq 1$  isomorphen irreduziblen  $\mathbb{F}_q[A]$ -Moduln ist. Dann ist die in  $\text{End}_{\mathbb{F}_q}(V)$  von  $A$  erzeugte  $\mathbb{F}_q$ -Algebra  $L$  ein Körper der Ordnung  $q^{n/s}$ , und das Paar  $\bar{V} = (L, V)$  ist mit der Produktbildung  $lv := vl$  für  $l \in L$  und  $v \in V$  ein Vektorraum der Dimension  $s$ . Außerdem gilt dabei:

- (a)  $A$  ist zyklisch und wirkt semiregulär auf  $V \setminus \{0\}$ , und  $|A| \mid q^{n/s} - 1$ ,
- (b)  $\mathfrak{C}_G(A) = GL(\bar{V})$ ,

(c)  $\mathfrak{N}_G(A) \leq \Gamma L(\bar{V})$ , und  $\text{Aut}_G(A)$  ist eine zyklische Gruppe der Ordnung  $n/s$ .

Beweis: ([He1], Hilfssatz 5).

**Proposition 6.2.2** *Sei  $X$  eine zyklische Untergruppe von  $G = GL(V) = GL_n(q)$ , die irreduzibel auf  $V$  wirkt. Dann gilt:*

- (a)  $\mathfrak{C}_G(X)$  ist ein Singerzyklus und zyklisch der Ordnung  $q^n - 1$  und wirkt regulär auf  $V \setminus \{0\}$ .
- (b)  $\text{Aut}_G(X)$  ist eine zyklische Gruppe der Ordnung  $n$ .
- (c)  $\mathfrak{C}_G(X)$  ist ein mit einem Zykel der Länge  $n$ , einem Coxeter-Element der zugehörigen Weyl-Gruppe  $S_n$ , getwisteter maximaler Torus.
- (d) Je zwei Singer-Zyklen in  $G$  sind konjugiert in  $G$ .

Beweis und Bemerkung: Der Beweis von Lemma 6.2.1 beruht im wesentlichen auf dem Schur'schen Lemma, vgl. [He1], Hilfssatz 5. Die Aussagen (a) und (b) von Proposition 6.2.2 lassen sich elementar aus 6.2.1 ableiten. Proposition 6.2.2 läßt sich aber auch aus Lemma 6.2.2 ableiten. (Die Bezeichnungen von Lemma 6.2.2 werden beibehalten.) Ist nämlich  $X = \langle x \rangle$ , so liegt  $x$  in einem maximalen Torus  $T$  von  $G$ , der nach Lemma 6.2.2 mit einem Zyklus der Länge  $n$  getwistet ist. Die Zyklen der Länge  $n$  bilden eine Konjugiertenklasse in  $S_n$ , diese ist die Konjugiertenklasse der Coxeter-Elemente, da mit  $((12), (23), \dots, ((n-1)n))$  ein Coxeter-System von  $S_n$  gegeben ist. Ist  $T = \langle t' \rangle$ , so hat  $t'$  über  $\mathbb{k}$  lauter verschiedene Eigenwerte. Nach Bedingung (iii) in Definition 6.1.6 ist  $T$  nichtausgeartet. Die mit Coxeter-Elementen getwisteten maximalen Tori in  $G$  bilden nach Proposition 6.1.1 und Proposition 6.1.4 eine Konjugiertenklasse in  $G$ .

Für  $t \in T$  sei  $b_i^{t^g} = \varphi_i(t)b_i$  für alle  $i$ . Wäre  $\mathfrak{C}_G(X) \neq T$ , so existierten nach Satz 6.1.3 und 6.1.4  $i \neq j$  mit  $\varphi_i(x^g) = \varphi_j(x^g)$ . Sei o.B.d.A.  $i = 1$ ,  $j$  minimal gewählt und  $j = 1^{\text{II}^s}$ . Dann gilt  $s|n$ , das Minimalpolynom  $m_x(t)$  hat Grad  $s$ , und für das charakteristische Polynom  $c_x(t)$  gilt  $c_x(t) = (m_x(t))^{n/s}$ . Die rationale Normalform von  $x$  über  $V$  zeigt, dass  $V$  in die direkte Summe isomorpher,  $x$ -invarianter Untermoduln der Dimension  $s$  zerfällt, im Widerspruch zur Voraussetzung, dass  $X$  irreduzibel wirkt. Schließlich ist  $X$  eine charakteristische Untergruppe der zyklischen Gruppe  $\mathfrak{C}_G(X)$ . Deshalb gilt  $\text{Aut}_G(X) = \mathfrak{N}_G(X)/\mathfrak{C}_G(X) = \mathfrak{N}_G(\mathfrak{C}_G(X))/\mathfrak{C}_G(X) \cong \mathfrak{C}_{S_n}((12 \cdots n)) = \langle (12 \cdots n) \rangle \cong \mathbb{Z}_n$  nach Proposition 6.1.5 und Proposition 6.1.3.

**Lemma 6.2.2** *Für jeden maximalen Torus  $T$  in  $G = GL(V) = GL_n(q)$  existiert eine direkte Zerlegung von  $V$  in irreduzible  $T$ -Moduln  $U_1, \dots, U_k$  mit  $\dim U_i = n_i$  und  $n_i \geq n_j$  für  $i \geq j$ . Dabei gilt:*

- (a)  $T$  wirkt regulär auf  $U_i \setminus \{0\}$  und induziert auf  $U_i$  eine zyklische Gruppe der Ordnung  $q^{n_i} - 1$ .
- (b) Es gilt  $T \cong \mathbb{Z}_{q^{n_1-1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{q^{n_k-1}}$ .
- (c) Die Zuordnung  $T \longrightarrow (n_1, \dots, n_k)$  definiert eine Bijektion zwischen den Konjugiertenklassen maximaler Tori in  $G$  und den Partitionen von  $n$ .

Beweis: Sei  $\mathbb{k}$  ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik  $p$  und  $G(\mathbb{k}) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{k})$ . Der zugehörige Modul habe die Standardbasis  $B = (b_1, \dots, b_n)$  mit  $P_i = \langle b_i \rangle$  für alle  $i$ . Betrachte  $G$  als die Gruppe  $G(\mathbb{k})^F$  mit  $F = F_q$  bezüglich der Basis  $B$ . Dann bilden die Diagonalmatrizen in  $G(\mathbb{k})$  einen maximal zerfallenden Torus  $T_0$ . Da  $F$  komponentenweise wirkt, induziert  $F$  eine triviale Wirkung auf der zugehörigen Weyl-Gruppe. Die Zuordnung nach Proposition 6.1.1 induziert eine Bijektion zwischen den Konjugiertenklassen von  $W \cong S_n$  und den  $G$ -Konjugiertenklassen maximaler Tori.

Sei  $g \in G(\mathbb{k})$  mit  $gF(g)^{-1} \in \mathfrak{N}_{G(\mathbb{k})}(T_0)$  und  $T := ((T_0^g)^F)^{g^{-1}}$ , dabei induziere  $gF(g)^{-1}$  die Permutation  $\Pi$  auf  $\{P_1, \dots, P_n\}$ . Sei  $(P_{i_1} \cdots P_{i_s})$  ein Zykel von  $\Pi$ . Nach Proposition 6.1.2 ergeben sich für  $g = \mathrm{diag}(a_1, \dots, a_n) \in T$  die Bedingungen  $a_{i_{m+1}} = (a_{i_m})^q$  für  $1 \leq m \leq s-1$  und  $a_{i_1} = a_{i_s}^q$ . Es folgt  $a_{i_1}^{q^s-1} = 1$ . Dabei sind die Eigenwerte von  $g$  auf Basisvektoren in verschiedenen Zykeln von  $\Pi$  voneinander unabhängig. Sei  $T_i := \mathfrak{C}_T(Wi)$  mit  $W_i := \langle b_j \mid j \notin \{i_1, \dots, i_s\} \rangle$ . Dann ist  $T \cong T_1 \times \cdots \times T_s$  und  $T_i \cong \mathbb{Z}_{q^{n_i-1}}$ , weil  $\mathbb{k}$  eine primitive  $(q^{n_i}-1)$ -te Einheitswurzel enthält. Sei  $U_i := [V, T_i]$ . Nach Maschke folgt  $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_s$  und  $\dim U_i \geq n_i$ , weil  $T_i^g$  treu auf  $U_i$  wirkt. Wegen  $n = n_1 + \cdots + n_s$  folgt  $\dim U_i = n_i$  und (a). Behauptung (c) folgt wie oben, weil  $F$  trivial auf  $W$  wirkt und zwei Elemente in  $S_n$  genau dann konjugiert sind, wenn sie dieselben Zykellängen aufweisen.

**Proposition 6.2.3** *Für ungerades  $n$  besitzt  $G = U_n(q)$  mit dem zugehörigen Standard-Modul  $V$  der Dimension  $n$  über  $\mathbb{F}_{q^2}$  Singer-Zyklen. Sei  $X$  eine abelsche Untergruppe von  $G$ , die irreduzibel auf  $V$  wirkt. Dann gilt:*

- (a)  $\mathfrak{C}_G(X)$  ist ein Singerzyklus und zyklisch der Ordnung  $q^n + 1$ .
- (b)  $\mathrm{Aut}_G(X)$  ist eine zyklische Gruppe der Ordnung  $n$ .
- (c)  $\mathfrak{C}_G(X)$  ist ein maximaler Torus.
- (d) Je zwei Singer-Zyklen in  $G$  sind konjugiert in  $G$ .

Beweis: Setze  $m = (n-1)/2$ . Sei  $G(\mathbb{k}) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{k})$  und  $F \in \mathrm{End}(G(\mathbb{k}))$  gegeben durch  $F(A) := (F_q(A))^{-t}$ . Dann ist  $G(\mathbb{k})^F \cong G$  (siehe z.B. [Ca2], S.32). Nach [KL], Proposition 2.3.2 besitzt  $V$  eine unitäre Basis  $B = (e_1, f_1, \dots, e_m, f_m, x)$ , d.h. es ist  $\beta(e_i, f_i) = \beta(x, x) = 1$  für  $1 \leq i \leq m$  und  $\beta(b, c) = 0$  für alle anderen Paare  $(b, c)$  mit  $b \neq c$  aus  $B \times B$ . Setze  $P_i := \langle e_i \rangle$ ,  $Q_i := \langle f_i \rangle$  und  $R := \langle x \rangle$ .

Wir betrachten  $V$  als Teilmenge des Moduls für  $G(\mathbb{k})$ ; damit ist  $B$  auch eine Basis dieses Moduls. Der Stabilisator der maximalen Fahne  $(U_1, \dots, U_m, U_m^\perp, \dots, U_1^\perp)$  mit  $U_i = \langle e_1, \dots, e_i \rangle$  des zugehörigen Gebäudes ist eine  $F$ -invariante Borelgruppe in  $G(\mathbb{k})$ , weil ihr Stabilisator in  $G^F$  eine Borelgruppe in  $G^F$  ist. Sie enthält den maximal zerfallenden Torus  $T_0 = G(\mathbb{k})_{\{\langle b \rangle \mid b \in B\}}$  (siehe z.B. [Ta], S. 130). Wir bezeichnen mit  $\text{diag}(a_1, \dots, a_n)$  die Darstellung von Elementen von  $T_0$  relativ zur Basis  $B$ . Da  $T_0$   $F$ -invariant ist, induziert  $F$  eine Permutation der Einträge von  $a_1, \dots, a_n$  der Elemente in  $T_0$ . In  $T_0^F$  existieren für jedes  $i$  Elemente, deren Zentralisator in  $V^{\mathbb{k}}$  gerade  $\langle v \rangle \mid v \in B \setminus \{e_i, f_i\}$  ist und solche, deren Zentralisator  $\langle v \rangle \mid v \in B \setminus \{x\}$  ist, aber keine, deren Zentralisator  $\langle v \rangle \mid v \in B \setminus \{e_i\}$  ist. Also induziert  $F$  die Permutation  $\sigma := (P_1 Q_1) \cdots (P_m Q_m)$ . Weiter existiert ein  $C \in G(\mathbb{k})$ , so dass  $C^{-1} T_0 C$  die Menge der Diagonalmatrizen in  $G(\mathbb{k})$  ist. Für alle  $X \in T_0$  folgt  $F(X) = C(F_q(C^{-1} X C)^{-t}) C^{-1} = C F_q(C^{-t}) F_q(X^{-t}) F_q(C^t) C^{-1} = (F_q(C^t) C^{-1})^{-1} F_q(X^{-t}) (F_q(C^t) C^{-1})$ . Sind also  $a_1, \dots, a_n$  die Eigenwerte von  $t \in T_0$ , so sind  $a_1^{-q}, \dots, a_n^{-q}$  die Eigenwerte von  $F(t)$ .

Es folgt  $F(\text{diag}(a_1, \dots, a_n)) = \text{diag}(a_1^{-q}, a_1^{-q}, \dots, a_{n-1}^{-q}, a_{n-2}^{-q}, a_n^{-q})$ .

Sei  $n \in \mathfrak{N}_{G(\mathbb{k})}(T_0)$  und induziere in  $\mathfrak{N}_{G(\mathbb{k})}(T_0)/T_0$  die Permutation  $\tau$ . Für  $t \in T_0$  gilt dann  $t^{F(n)} = F(F^{-1}(t)^n) = F((F_q^{-1}(t^\sigma)^{-1})^n) = F(F_q^{-1}(t^{\sigma\tau})^{-1}) = F_q(F_q^{-1}(t^{\sigma\tau\sigma})^{-1})^{-1} = t^{\sigma\tau\sigma}$ . Also induziert  $F$  auf der Weyl-Gruppe  $\mathfrak{N}_{G(\mathbb{k})}(T_0)/T_0$  Konjugation mit der Involution  $\sigma$ .

Sei  $w^{-1}$  in der Weyl-Gruppe von  $G(\mathbb{k})$  gegeben durch die Permutation  $(P_1 P_2 \cdots P_m R)$ . Nach Proposition 6.1.1 existiert ein  $g \in G(\mathbb{k})$  mit  $\gamma(g F(g)^{-1}) = w^{-1}$ , und  $(T_0^g)^F$  ist konjugiert zu  $\{t = \text{diag}(a_1, \dots, a_n) \in T_0 \mid F(t) = t^{w^{-1}}\} = \{t = \text{diag}(a_1, \dots, a_n) \in T_0 \mid F_q(t^{-1})^{\sigma w} = t\}$ . Mit  $\sigma w = (P_1 Q_1 P_2 Q_2 \cdots P_m Q_m R)$  ergeben sich genau die Bedingungen  $a_{i+1} = a_i^{-q}$  für  $1 \leq i \leq n-1$  und  $a_n^{-q} = a_1^{-q^n} = a_1$ . Also ist  $(T_0^g)^F$  eine zyklische Gruppe der Ordnung  $q^n + 1$ , die irreduzibel auf  $V$  wirkt, weil aufgrund der obigen Bedingungen kein nichttriviales Element in  $(T_0^g)^F$  den Eigenwert 1 hat. Demnach wirkt  $(T_0^g)^F$  treu auf jedem seiner Untermoduln in  $V$ , aber aus  $q^n + 1 \mid (q^2)^k - 1$  folgt  $k \geq n$ .

Da in  $\mathbb{k}$  primitive  $(q^n + 1)$ -te Einheitswurzeln existieren, gibt es ein  $t \in (T_0^g)^F$ , das über  $\mathbb{k}$  lauter verschiedene Eigenwerte besitzt. Nach Bedingung (iii) in Definition 6.1.6 ist  $(T_0^g)^F$  nichtausgeartet, also ein Singer-Zyklus in  $G$ .

Ist  $t \in (T_0^g)^F$  und  $\mathfrak{C}_{G(\mathbb{k})}(\langle t \rangle) \neq T_0^g$ , so hat  $t^{g^{-1}}$  über  $\mathbb{k}$  die Eigenwerte  $a, a^{-q}, a^{q^2}, \dots, a^{-q^{n-2}}$  und  $a^{q^{n-1}}$  für ein  $a \in \mathbb{k}$  mit  $a^{q^{n+1}} = 1$ , wobei nicht alle Eigenwerte verschieden sind. Wie im Beweis von Proposition 6.2.2 hat das Minimalpolynom von  $t$  den Grad  $s$  für einen echten Teiler  $s$  von  $n$ . Ist also  $\langle x \rangle = X \leq T_0^g$ , so gilt  $\mathfrak{C}_{G(\mathbb{k})}(\langle x \rangle) = T_0^g$  und  $\mathfrak{C}_G(X) = (T_0^g)^F$ , weil  $X$  irreduzibel auf  $V$  wirkt.

Sei  $T_0^h$  ein weiterer maximaler Torus, so dass  $(T_0^h)^F$  irreduzibel auf  $V$  wirkt. Ist dann  $\gamma(h F(h)^{-1}) = \bar{w}$ , so ist  $(T_0^h)^F$  konjugiert zu  $\{t = \text{diag}(a_1, \dots, a_n) \in T_0 \mid (t^{-q})^{\sigma \bar{w}} = t\}$  und enthalten im maximalen To-

rus von  $G(\mathbb{k})^{(F^2)} \cong \mathrm{GL}_n(q^2)$ , der mit  $(\sigma\bar{w})^2$  getwistet ist. Mit Lemma 6.2.2 folgt, dass  $(\sigma\bar{w})^2$  und damit auch  $\sigma\bar{w}$  ein Zykel der Länge  $n$  ist. Dann sind  $\sigma\bar{w}$  und  $\sigma w$  in der Weyl-Gruppe  $S_n$  von  $G(\mathbb{k})$  konjugiert, etwa  $\sigma\bar{w} = (\sigma w)^h$ . Es folgt  $\bar{w} = \sigma h^{-1} \sigma w h = h^{-\sigma} w \sigma h^\sigma = h^{-\sigma} w F(g^\sigma)$ , d.h.  $\bar{w}$  und  $w$  sind  $F$ -konjugiert in der Weyl-Gruppe  $S_n$ . Nach Proposition 6.1.1 sind  $T_0^h$  und  $T_0^g$  und nach Proposition 6.1.4 auch  $(T_0^h)^F$  und  $(T_0^g)^F$  konjugiert in  $G^F$ .

Es bleibt nur noch (b) zu beweisen. Wie im Fall linearer Gruppen gilt mit Proposition 6.1.3 und Proposition 6.1.5  $\mathrm{Aut}_G(X) = \mathfrak{N}_G(X)/\mathfrak{C}_G(X) = \mathfrak{N}_G(\mathfrak{C}_G(X))/\mathfrak{C}_G(X) \cong \mathfrak{C}_{W,F}(w)$ . Für  $\tau \in S_n$  gilt aber  $w = \tau w F(\tau) = \tau w \sigma \tau \sigma$  genau dann, wenn  $(w\sigma)^\tau = w\sigma$  gilt. Es folgt  $\mathfrak{C}_{W,F}(w) = \mathfrak{C}_W(w\sigma) \cong \mathbb{Z}_n$ , weil  $w\sigma$  ein Zykel der Länge  $n$  ist.

**Proposition 6.2.4** *Für gerades  $n > 2$  besitzt  $G = U_n(q)$  keine auf dem zugehörigen Modul  $V$  der Dimension  $n$  über  $\mathbb{F}_{q^2}$  irreduziblen Elemente. Es gilt  $\nu(G, V) = n - 1$ .*

*Sei  $x$  ein Zsigmondy-Element in  $G$  und  $X = \langle x \rangle$ , dann gilt:*

- (a)  $\mathfrak{C}_G(X)$  ist ein maximaler Torus und isomorph zu  $\mathbb{Z}_{q^n-1+1} \times \mathbb{Z}_{q+1}$ .
- (b)  $\mathrm{Aut}_G(X)$  ist eine zyklische Gruppe der Ordnung  $n - 1$ .
- (c) Je zwei Zentralisatoren von Zsigmondy-Elementen in  $G$  sind konjugiert in  $G$ .

Beweis: Sei  $G(\mathbb{k}) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{k})$  und  $F \in \mathrm{End}(G(\mathbb{k}))$  gegeben durch  $F(A) := (F_q(A))^{-t}$ . Wie im Beweis für unitäre Gruppen in ungerader Dimension ist dann  $G(\mathbb{k})^F \cong G$ . Wie dort besitzt  $V$  eine unitäre Basis  $B = (e_1, f_1, \dots, e_{n/2}, f_{n/2})$ , d.h. es ist  $\beta(e_i, f_i) = 1$  für  $1 \leq i \leq n/2$  und  $\beta(b, c) = 0$  für alle anderen Paare  $(b, c)$  mit  $b \neq c$  aus  $B \times B$ . Mit den Bezeichnungen und dem gleichen Beweis wie in ungerader Dimension ist  $T_0$  ein maximal zerfallender Torus in  $G(\mathbb{k})$ , und für  $\mathrm{diag}(a_1, \dots, a_n) \in T_0$  gilt  $F(\mathrm{diag}(a_1, \dots, a_n)) = \mathrm{diag}(a_2^{-q}, a_1^{-q}, \dots, a_n^{-q}, a_{n-1}^{-q})$ .

Angenommen es existiert ein Torus  $(T_0^g)^F$  mit  $\gamma(gF(g)^{-1}) = w^{-1}$ , der irreduzibel auf  $V$  wirkt. Dann ist  $\sigma w$  ein Zykel der Länge  $n$ , weil  $(T_0^g)^F$  sonst eine Untergruppe  $U$  hätte, bestehend aus allen Elementen, die entlang eines Zyklus den Eintrag 1 haben, und dann  $[V, U]$  ein nicht-trivialer  $(T_0^g)^F$ -invarianter Unterraum von  $V$  wäre. Dann ist  $(T_0^g)^F$  konjugiert zu  $\{t = \mathrm{diag}(a_1, \dots, a_n) \in T_0 \mid F_q(t^{-1})^{\sigma w} = t\}$ . Bezüglich einer geeigneten Anordnung der Basisvektoren ist die Bedingung  $F_q(t^{-1})^{\sigma w} = t$  äquivalent zur Bedingung  $a_{i+1} = a_i^{-q}$  für  $1 \leq i \leq n-1$  und  $a_n^{-q} = a_1^{q^n} = a_1$ . Nach Lemma 6.2.2 ist  $(T_0^g)^F$  dann aber enthalten in einem maximalen Torus  $T_1$  von  $\mathrm{GL}(V) = \mathrm{GL}_n(q^2)$ , der mit  $(\sigma w)^2$  getwistet ist, und für den  $V$  in zwei irreduzible  $T_1$ -Untermodule gleicher Dimension zerfällt, im Widerspruch zur Irreduzibilität von  $T_0$ . Also ist  $\mu \leq n - 1$ .

Wählt man  $w$  in der Weyl-Gruppe  $S_n$  von  $G(\mathbb{k})$  so, dass  $\sigma w$  ein Zykel der Länge  $n - 1$  ist, dann ergeben sich wie eben die Bedingungen  $a_{i+1} = a_i^{-q}$  für

$1 \leq i \leq n-2$ ,  $a_{n-1}^{-q} = a_1^{-q^{n-1}} = a_1$  und  $a_n^{-q} = a_n$ . Ist  $\gamma(gF(g)^{-1}) = \sigma w$ , so wirkt  $(T_0^g)^F$  nach Lemma 6.2.2 irreduzibel auf einer Hyperebene von  $V$ , und es gilt  $(T_0^g)^F \cong \mathbb{Z}_{q^{n-1}+1} \times \mathbb{Z}_{q+1}$ .

Sei umgekehrt  $(T_0^h)^F$  ein maximaler Torus, der irreduzibel auf einer Hyperebene von  $V$  wirkt. Dann ist  $\sigma\gamma(hF(h)^{-1})^{-1}$  ein Zykel der Länge  $n-1$ . Wie im Fall ungerader Dimension folgt aus der Konjugiertheit aller Zykel der Länge  $n-1$  in  $S_n$  die  $F$ -Konjugiertheit von  $w$  und  $\gamma(hF(h)^{-1})$  und damit die  $G^F$ -Konjugiertheit von  $(T_0^g)^F$  und  $(T_0^h)^F$ .

Ebenfalls wie in ungerader Dimension gilt  $\mathfrak{C}_G(X) = (T_0^g)^F$  für  $X \leq T_0^g$ , weil aufgrund der Irreduzibilität von  $X$  auf der  $(T_0^g)^F$ -invarianten Hyperebene für  $x = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$  die Werte  $a_1, \dots, a_{n-1}$  paarweise verschieden sind und aus  $a_i = a_n$  wegen  $a_n^{-q} = a_n$  schon  $a_i = a_{i+1}$  folgt. Weiter ist  $X$  in  $\mathfrak{C}_G(X)$  wegen  $n > 2$  charakteristisch und damit  $\text{Aut}_G(X) \cong \mathfrak{C}_{W,F}(w) = \mathfrak{C}_W(w\sigma) \cong \mathbb{Z}_{n-1}$ .

**Proposition 6.2.5** *Für ungerades  $n > 2$  und  $G = O_n(q)$  ( $\text{char}(\mathbb{F}_q) \neq 2$ ) gilt  $\nu(G, V) = n-1$  auf dem Standardmodul  $V$  von  $G$ .*

*Sei  $x$  ein Zsigmondy-Element in  $G$  und  $X = \langle x \rangle$ , dann gilt:*

- (a)  $\mathfrak{C}_{G'}(X)$  ist ein maximaler, mit einem Coxeter-Element in der zugehörigen Weyl-Gruppe vom Typ  $B_{(n-1)/2}$  gewisteter Torus und isomorph zu  $\mathbb{Z}_{q^{(n-1)/2}+1}$ , und  $\mathfrak{C}_G(X)$  ist isomorph zu  $\mathbb{Z}_{q^{(n-1)/2}+1} \times \mathbb{Z}_2$ .
- (b)  $\text{Aut}_G(X)$  ist eine zyklische Gruppe der Ordnung  $n-1$ .
- (c) Je zwei Zentralisatoren von Zsigmondy-Elementen in  $G$  sind konjugiert in  $G$ .

Beweis: Setze  $m = (n-1)/2$ . Sei  $B = (e_1, f_1, \dots, e_m, f_m, x)$  eine Basis von  $V^{\mathbb{k}}$  und die quadratische Form  $Q$  mit zugehöriger Bilinearform  $f$  auf  $V^{\mathbb{k}}$  gegeben durch  $Q(e_i) = Q(f_i) = 0$ ,  $Q(x) = 1$ ,  $f(e_i, f_i) = 1$  für alle  $1 \leq i \leq m$  und  $f(b, c) = 0$  für alle anderen Paare  $(b, c)$  mit  $b \neq c$  aus  $B \times B$ . Sei  $G(\mathbb{k}) = \text{O}(V, Q)$  und  $F = F_q$  bezüglich  $B$ . Betrachte  $G$  als die Gruppe  $G(\mathbb{k})^F$  mit  $V = \langle e_1, f_1, \dots, e_m, f_m, x \rangle_{\mathbb{F}_q}$  (siehe z.B. [KL], Proposition 2.5.3). Weil  $G(\mathbb{k})$  nicht zusammenhängend ist, betrachten wir die Gruppe  $G(\mathbb{k})' = \text{SO}(V, Q)$  mit  $(G(\mathbb{k})')^F = G'$ .

Der Stabilisator der maximalen Fahne  $(U_1, \dots, U_m, U_m^\perp, \dots, U_1^\perp)$  mit  $U_i = \langle e_1, \dots, e_i \rangle$  des zugehörigen Gebäudes ist eine  $F$ -invariante Borelgruppe in  $G(\mathbb{k})'$ , die den maximal zerfallenden Torus  $T_0 = G(\mathbb{k})'_{\{\langle b \rangle \mid b \in B\}}$  enthält. Sei  $P_i = \langle e_i \rangle$ ,  $Q_i = \langle f_i \rangle$  für  $1 \leq i \leq m$  und  $R = \langle x \rangle$ . Die zugehörige Weyl-Gruppe  $W$  vom Typ  $B_m$  wirkt als Permutationsgruppe auf  $\{\langle b \rangle \mid b \in B\}$  und ist genau die Untergruppe von  $S_{\{\langle b \rangle \mid b \in B\}}$ , die  $R$  und die Menge aller Paare  $\{P_i, Q_i\}$  invariant lässt. Man sieht leicht, dass  $W$  erzeugt wird von den Elementen  $(P_i P_{i+1})(Q_i Q_{i+1})$  für  $1 \leq i \leq m-1$  und  $(P_m Q_m)$ , die ein Coxeter-System für  $W$  bilden.  $W$  ist isomorph zu  $\mathbb{Z}_2 \wr S_m$  (Vergleiche hierzu z.B. [Ta], Kap.11, S.168ff: Orthogonal BN-pairs).

Offenbar induziert  $F$  auf  $W$  die Identität. Damit sind alle maximalen Tori in  $G'$  enthalten in den mit demselben Element in  $W$ , betrachtet als Element der Weyl-Gruppe von  $\mathrm{GL}(V)$ , getwisteten Tori von  $(\mathrm{GL}(V))^F \cong \mathrm{GL}_n(q)$ . Also besitzt  $G'$  keine Elemente, die irreduzibel auf  $V$  wirken, weil  $R$  unter  $W$  invariant ist. Würde  $y \in G$  irreduzibel auf  $V$  wirken, so läge  $y^2$  wegen  $[G : G'] = 2$  in  $G'$  und hätte wegen der Invarianz von  $R$  unter  $W$  einen Eigenwert  $\lambda \in \{-1, 1\}$ . Aus der Invarianz des Eigenraumes zum Eigenwert  $\lambda$  unter  $y$  folgt  $y^2 \in \{-I, I\}$ . Das Minimalpolynom von  $y$  teilt also  $t^2 + 1$  oder  $t^2 - 1$  im Widerspruch zur Irreduzibilität von  $y$  auf einem Vektorraum der Dimension  $n > 3$ . Es folgt  $\mu(G, V) < n - 1$ .

Sei  $w = (P_{m-1}P_m)(Q_{m-1}Q_m)(P_{m-2}P_{m-1})(Q_{m-2}Q_{m-1}) \cdots (Q_1Q_2)(P_mQ_m) = (P_1P_2 \cdots P_{m-1}Q_mQ_1Q_2 \cdots Q_{m-1}P_m)$ , dann ist  $w$  ein Coxeter-Element. Sei  $g \in G(\mathbb{k})$  mit  $\gamma(gF(g)^{-1}) = w$ . Nach Proposition 6.1.2 ist  $(T_0^g)^F$  konjugiert zu  $\{t \in T_0 \mid F(t) = t^w\}$ . Äquivalent dazu sind mit  $e_i^t = a_i e_i$ ,  $f_i^t = a_{m+i} f_i$  für  $1 \leq i \leq m-1$ ,  $e_m^t = a_{2m} e_m$ ,  $f_m^t = a_m f_m$  und  $x^t = a_n x$  die Bedingungen  $a_{i+1} = a_i^q$  für  $1 \leq i \leq n-2$ ,  $a_{i+m} = a_1^{q^{i+m-1}} = a_i^{-1}$  für  $1 \leq i \leq m$ ,  $a_1^{q^{n-1}} = a_1$  und  $a_n = 1$ . Für  $a_1$  ergibt sich die notwendige Bedingung  $1 = a_1 a_{m+1} = a_1^{q^{m+1}}$ . Demnach erfüllt  $t \in T_0$  genau dann die Bedingung  $F(t) = t^w$ , wenn die Ordnung von  $a_1$  ein Teiler von  $q^m + 1$  ist und  $a_i = a_1^{q^{(i-1)}}$  gilt für  $1 \leq i \leq n-1$ . Weil  $\mathbb{k}$  algebraisch abgeschlossen ist, ist  $(T_0^g)^F$  isomorph zu  $\mathbb{Z}_{q^m+1}$ .

Wie in Proposition 6.2.2 zeigt man, dass  $(T_0^g)^F$  nichtausgeartet ist und für  $X \leq (T_0^g)^F$  gilt:  $\mathfrak{C}_{G(\mathbb{k})'}(X) = T_0^g$  und  $\mathfrak{C}_{G'}(X) = (T_0^g)^F$ . Aus  $[\mathfrak{C}_G(X) : \mathfrak{C}_{G'}(X)] \leq 2$  und  $(-I) \in \mathfrak{C}_G(X) \setminus \mathfrak{C}_{G'}(X)$  folgt  $\mathfrak{C}_G(X) = \langle (T_0^g)^F, -I \rangle \cong \mathbb{Z}_{q^m+1} \times \mathbb{Z}_2$ .

Sei umgekehrt  $(T_0^h)^F$  ein maximaler Torus in  $G'$ , dessen Zentralisator in  $G$  irreduzibel auf einer Hyperebene von  $V$  wirkt. Dann ist  $(T_0^h)^F$  abelsch,  $[\mathfrak{C}_G((T_0^h)^F) : (T_0^h)^F] \leq 2$  und  $(-I) \in \mathfrak{C}_G((T_0^h)^F) \setminus (T_0^h)^F$ . Also wirkt auch  $(T_0^h)^F$  irreduzibel auf der Hyperebene und  $\tau := \gamma(hF(h)^{-1})$  ist ein Zykel der Länge  $n-1$  in  $W$ . Sei  $Q_1 = P_1^k$ . Dann ist  $\{P_1, Q_1\} = \{P_1^{\tau^k}, Q_1^{\tau^k}\} = \{Q_1, P_1^{\tau^{2k}}\}$ . Es folgt  $k = m$  und  $\tau(P_1Q_1) = (P_1P_1^\tau \cdots P_1^{\tau^{m-1}})(Q_1Q_1^\tau \cdots Q_1^{\tau^{m-1}})$ . Offenbar bildet dann  $((P_1P_1^\tau)(Q_1Q_1^\tau), (P_1^\tau P_1^{\tau^2})(Q_1^\tau Q_1^{\tau^2}), \dots, (P_1^{\tau^{m-2}} P_1^{\tau^{m-1}})(Q_1^{\tau^{m-2}} Q_1^{\tau^{m-1}}), (P_1Q_1))$  ein Coxeter-System in  $W$ . Damit sind  $w$  und  $\tau$  konjugiert in  $W$ . Nach Proposition 6.1.1 sind  $T_0^g$  und  $T_0^h$  und nach Proposition 6.1.4 auch  $(T_0^g)^F$  und  $(T_0^h)^F$  und ebenso  $\mathfrak{C}_G((T_0^g)^F)$  und  $\mathfrak{C}_G((T_0^h)^F)$  konjugiert in  $G'$ .

Schließlich ist  $X$  in  $\mathfrak{C}_G(X)$  charakteristisch, und damit gilt nach Proposition 6.1.3 und Proposition 6.1.5  $\mathrm{Aut}_G(X) = \mathfrak{N}_G(X)/\mathfrak{C}_G(X) = \mathfrak{N}_G(\mathfrak{C}_G(X))/\mathfrak{C}_G(X) = \mathfrak{N}_G(\mathfrak{C}_{G'}(X))/\mathfrak{C}_G(X) = (\mathfrak{N}_G(\mathfrak{C}_{G'}(X)) / \langle -I \rangle) / (\mathfrak{C}_G(X) / \langle -I \rangle) \cong \mathfrak{N}_{G'}(\mathfrak{C}_{G'}(X))/\mathfrak{C}_{G'}(X) \cong \mathfrak{C}_{W,F}(w) = \mathfrak{C}_W(w) = \langle w \rangle \cong \mathbb{Z}_{n-1}$ .

**Proposition 6.2.6** *Die Gruppe  $G = \mathrm{Sp}_n(q)$  ( $n$  gerade) besitzt Singer-Zyklen. Sei  $X$  eine zyklische Untergruppe von  $G$ , die irreduzibel auf dem zugehörigen Modul  $V$  wirkt. Dann gilt:*

- (a)  $\mathfrak{C}_G(X)$  ist ein Singer-Zyklus und zyklisch der Ordnung  $q^{n/2} + 1$ .
- (b)  $\text{Aut}_G(X)$  ist eine zyklische Gruppe der Ordnung  $n$ .
- (c)  $\mathfrak{C}_G(X)$  ist ein maximaler, mit einem Coxeter-Element in der zugehörigen Weyl-Gruppe vom Typ  $C_{n/2}$ , einem Zyklus der Länge  $n$ , getwisteter Torus.
- (d) Je zwei Singer-Zyklen in  $G$  sind konjugiert in  $G$ .

Beweis: Der Beweis ist fast genau gleich wie der für orthogonale Gruppen in ungerader Dimension in Proposition 6.2.5.

Setze  $m = n/2$ . Sei  $B = (e_1, f_1, \dots, e_m, f_m)$  eine Basis von  $V^{\mathbb{k}}$  und die alternierende Form  $f$  auf  $V^{\mathbb{k}}$  gegeben durch  $f(e_i, f_i) = 1$  für alle  $1 \leq i \leq m$  und  $f(b, c) = 0$  für alle anderen Paare  $(b, c)$  mit  $b \neq c$  aus  $B \times B$ . Sei  $G(\mathbb{k}) = O(V, f)$  und  $F = F_q$  bezüglich  $B$ . Betrachte  $G$  als die Gruppe  $G(\mathbb{k})^F$  mit  $V = \langle e_1, f_1, \dots, e_m, f_m, x \rangle_{\mathbb{F}_q}$  (siehe z.B. [KL], Proposition 2.4.1).

Mit allen Bezeichnungen wie in Proposition 6.2.5 ist der Stabilisator der maximalen Fahne  $(U_1, \dots, U_m = U_m^\perp, \dots, U_1^\perp)$  des zugehörigen Gebäudes eine  $F$ -invariante Borelgruppe in  $G(\mathbb{k})$ , die den maximal zerfallenden Torus  $T_0 = G(\mathbb{k})_{\{\langle b \rangle \mid b \in B\}}$  enthält. Wie dort wirkt die zugehörige Weyl-Gruppe  $W$  vom Typ  $C_m = B_m$  als Permutationsgruppe auf  $\{\langle b \rangle \mid b \in B\}$  und ist genau die Untergruppe von  $S_{\{\langle b \rangle \mid b \in B\}}$ , die die Menge aller Paare  $\{P_i, Q_i\}$  invariant läßt. Sie wird erzeugt von den Elementen  $(P_i P_{i+1})(Q_i Q_{i+1})$  für  $1 \leq i \leq m-1$  und  $(P_m Q_m)$ , die ein Coxeter-System für  $W$  bilden.  $W$  ist isomorph zu  $\mathbb{Z}_2 \wr S_m$  (Vergleiche hierzu z.B. [Ta], Kap.8, S.75ff: Symplectic BN-pairs).

Wie in Proposition 6.2.5 induziert  $F$  auf  $W$  die Identität. Seien  $w \in W$  und  $a_i$  für  $1 \leq i \leq n$  wie dort definiert, dann ist  $w$  ein Coxeter-Element. Sei  $g \in G(\mathbb{k})$  mit  $\gamma(gF(g)^{-1}) = w$ . Wieder ist  $(T_0^g)^F$  konjugiert zu  $\{t \in T_0 \mid F(t) = t^w\}$ . Äquivalent dazu sind die Bedingungen  $a_{i+1} = a_i^q$  für  $1 \leq i \leq n-1$ ,  $a_1^{q^m-1} = a_1$  und  $a_{i+m} = a_1^{q^{i+m-1}} = a_{i+m}^{-1}$  für  $1 \leq i \leq m$ . Für  $a_1$  ergibt sich die notwendige Bedingung  $1 = a_1 a_{m+1} = a_1^{q^{m+1}}$ . Demnach erfüllt  $t \in T_0$  genau dann die Bedingung  $F(t) = t^w$ , wenn die Ordnung von  $a_1$  ein Teiler von  $q^m + 1$  ist und  $a_i = a_1^{q^{(i-1)}}$  gilt für  $1 \leq i \leq n$ . Weil  $\mathbb{k}$  algebraisch abgeschlossen ist, ist  $(T_0^g)^F$  isomorph zu  $\mathbb{Z}_{q^m+1}$ .

Wie in Proposition 6.2.2 zeigt man, dass  $(T_0^g)^F$  nichtausgeartet ist und für  $X \leq (T_0^g)^F$  gilt:  $\mathfrak{C}_{G(\mathbb{k})}(X) = T_0^g$  und  $\mathfrak{C}_G(X) = (T_0^g)^F$ .

Sei umgekehrt  $(T_0^h)^F$  ein maximaler Torus, der irreduzibel auf  $V$  wirkt. Dann ist  $\tau := \gamma(hF(h)^{-1})$  ein Zykel der Länge  $n$  in  $W$ . Wie in Proposition 6.2.5 sieht man, dass  $\tau$  ein Coxeter-Element in  $W$  ist. Nach Proposition 6.1.1 sind  $T_0^g$  und  $T_0^h$  und nach Proposition 6.1.4 auch  $(T_0^g)^F$  und  $(T_0^h)^F$  konjugiert in  $G^F$ . Schließlich ist  $X$  in  $\mathfrak{C}_G(X)$  charakteristisch, und damit gilt nach Proposition 6.1.3 und Proposition 6.1.5  $\text{Aut}_G(X) = \mathfrak{N}_G(X)/\mathfrak{C}_G(X) = \mathfrak{N}_G(\mathfrak{C}_G(X))/\mathfrak{C}_G(X) = \mathfrak{C}_{W,F}(w) = \mathfrak{C}_W(w) = \langle w \rangle \cong \mathbb{Z}_n$ .

**Proposition 6.2.7** Für gerades  $n > 4$  und  $G = O_n^+(q)$  gilt  $\nu(G, V) = n - 2$  für den Standardmodul  $V$  von  $G$ .

Sei  $x$  ein Zsigmondy-Element in  $G$ ,  $X = \langle x \rangle$  und  $V = W_1 \oplus W_2$  die Zerlegung von  $V$  in den  $X$ -invarianten Unterraum  $W_1$  der Codimension 2 in  $V$  und sein orthogonales Komplement  $W_2 = W_1^\perp$ .

Dann ist  $\text{Stab}_G(W_1)|_{W_1} \cong O_{n-2}^-(q)$  und  $\text{Stab}_G(W_1)|_{W_2} \cong O_2^-(q) \cong D_{2(q+1)}$ .

- (a)  $\mathfrak{C}_{G'}(X)$  ist ein maximaler, mit einem Coxeter-Element in der zugehörigen Weyl-Gruppe vom Typ  $D_{n/2}$  getwisteter Torus und isomorph zu  $\mathbb{Z}_{q^{(n-2)/2+1}} \times \mathbb{Z}_{q+1}$ , und  $\mathfrak{C}_G(X)$  ist isomorph zu  $\mathbb{Z}_{q^{(n-2)/2+1}} \times \mathfrak{C}_{O(W_2)}(X|_{W_2})$ .
- (b) Wirkt  $X$  trivial auf  $W_2$ , so ist  $\text{Aut}_G(X)$  eine zyklische Gruppe der Ordnung  $n - 2$ .
- (c) Je zwei Zentralisatoren von Zsigmondy-Elementen in  $G$ , die trivial auf  $W_2$  wirken, sind konjugiert in  $G$ .

Beweis: Setze  $m = n/2$ . Sei  $B = (e_1, f_1, \dots, e_m, f_m)$  eine Basis von  $V^{\mathbb{k}}$  und die quadratische Form  $Q$  mit zugehöriger Bilinearform  $f$  auf  $V^{\mathbb{k}}$  gegeben durch  $Q(e_i) = Q(f_i) = 0$ ,  $f(e_i, f_i) = 1$  für alle  $1 \leq i \leq m$  und  $f(b, c) = 0$  für alle anderen Paare  $(b, c)$  mit  $b \neq c$  aus  $B \times B$ . Sei  $G(\mathbb{k}) = O(V, Q)$  und  $F = F_q$  bezüglich  $B$ . Betrachte  $G$  als die Gruppe  $G(\mathbb{k})^F$  mit  $V = \langle e_1, f_1, \dots, e_m, f_m \rangle_{\mathbb{F}_q}$  (siehe z.B. [KL], Proposition 2.5.3). Weil  $G(\mathbb{k})$  nicht zusammenhängend ist, betrachten wir die Gruppe  $G(\mathbb{k})' = \text{SO}(V, Q)$  mit  $(G(\mathbb{k})')^F = G'$ .

Der Stabilisator der maximalen Fahne  $(U_1, \dots, U_m = U_m^\perp, \dots, U_1^\perp)$  mit  $U_i = \langle e_1, \dots, e_i \rangle$  des zugehörigen Gebäudes ist eine  $F$ -invariante Borelgruppe in  $G(\mathbb{k})'$ , die den maximal zerfallenden Torus  $T_0 = G(\mathbb{k})_{\{\langle b \rangle \mid b \in B\}}$  enthält. Sei  $P_i = \langle e_i \rangle$ ,  $Q_i = \langle f_i \rangle$  für  $1 \leq i \leq m$ . Die zugehörige Weyl-Gruppe  $W$  vom Typ  $D_m$  wirkt als Permutationsgruppe auf  $\{\langle b \rangle \mid b \in B\}$  und läßt die Menge aller Paare  $\{P_i, Q_i\}$  invariant ist also eine Untergruppe der zu  $\mathbb{Z}_2 \wr S_m$  isomorphen Untergruppe  $\bar{W}$ , die erzeugt wird von den Elementen  $(P_i P_{i+1})(Q_i Q_{i+1})$  für  $1 \leq i \leq m - 1$  und  $(P_m Q_m)$ , die ein Coxeter-System für  $W$  bilden. (Vergleiche hierzu z.B. [Ta], Kap.11, S.168ff: Orthogonal BN-pairs). Jedes Element in  $\mathfrak{N}_{G(\mathbb{k})}(T_0)$ , das die Permutation  $(P_m Q_m)$  induziert, hat Determinante  $-1$ . Andererseits enthält  $G(\mathbb{k})'$  zu jeder geraden Permutation  $\sigma$  in  $\bar{W}$  die Permutationsmatrizen, die  $\sigma$  induzieren. Es folgt  $W = \bar{W}^+$ , die Untergruppe der geraden Permutationen in  $\bar{W}$ . Ein Coxeter-System für  $W$  ist gegeben durch die Permutationen  $((P_1 P_2)(Q_1 Q_2), \dots, (P_{m-1} P_m)(Q_{m-1} Q_m), (P_{m-1} Q_m)(Q_{m-1} P_m))$ , wie man leicht nachprüft, indem man die Ordnungen der Produkte von je zwei Elementen berechnet.

Offenbar induziert  $F$  auf  $W$  die Identität. Damit sind alle maximalen Tori in  $G'$  enthalten in den mit demselben Element in  $W$ , betrachtet als Element der

Weyl-Gruppe von  $GL(V)$ , getwisteten Tori von  $(GL(V))^F \cong GL_n(q)$ . Also besitzt  $G'$  keine Elemente, die irreduzibel auf  $V$  wirken, weil jeder Zykel der geraden Länge  $n$  eine ungerade Permutation ist, und keine Elemente, die irreduzibel auf einer Hyperebene von  $V$  wirken, weil  $W$  die Menge der Paare  $\{\{P_i, Q_i\} \mid 1 \leq i \leq m\}$  invariant lässt und demnach kein Element enthält, das genau einen Fixpunkt hat.

Würde  $y \in G$  irreduzibel auf einer Hyperebene  $H$  von  $V$  wirken, so wäre  $H$  nicht ausgeartet und wegen  $\dim V > 2$  nicht singulär im Widerspruch dazu, dass orthogonale Gruppen in ungerader Dimension keine Singer-Zyklen enthalten. Würde  $y \in G$  irreduzibel auf  $V$  wirken, so würde  $y$  die irreduziblen Untermoduln von  $y^2$  permutieren. Also zerfiel  $V$  in die direkte Summe der irreduziblen  $\langle y^2 \rangle$ -Untermoduln  $U_1$  und  $U_2$ . Seien zunächst  $U_1$  und  $U_2$  total singulär. Dann vertauscht  $y$  die Unterräume  $U_1$  und  $U_2$  als die einzigen total singulären  $\langle y^2 \rangle$ -Untermoduln von  $V$ . Sei  $(y^2)^g \in T_0$  wie in Lemma 6.1.2. Dann kann  $g$  wegen der Wirkung von  $W$  auf  $T_0$  so gewählt werden, dass in der Darstellung bezüglich einer Basis aus Eigenvektoren von  $T_0$  gilt:  $(y^2)^g = \text{diag}(a, a^q, \dots, a^{q^{m-1}}, a^{-1}, a^{-q}, \dots, a^{-q^{m+1}})$ . Dabei fällt  $a$  wegen der Irreduzibilität auf  $U_1$  und  $U_2$  nur mit einem Wert  $a^{-q^k}$  für  $1 \leq k \leq m$  zusammen. Wegen  $P_1^y = Q_k$  und  $P_1^{y^2} = P_1$  folgt  $a = a^{(-q^k)^2} = a^{q^{2k}}$  und damit  $k = m/2$ . Insbesondere ist  $m$  gerade. Ist  $j$  die durch  $e_i^j = f_{i+m}$  und  $f_i^j = e_{i+m}$  für  $1 \leq i < m/2$  gegebene Involution, so gilt  $\det(y) = \det(yj) = 1$  im Widerspruch zur Wahl von  $y$ , weil  $yj$  irreduzibel auf  $U_1$  und  $U_2$  wirkt, die Wirkung solcher Elemente auf  $U_2$  aber stets die zu ihrer Wirkung auf  $U_1$  duale ist. Seien also  $U_1$  und  $U_2$  nichtausgeartet. Nach Induktion induziert  $Q$  auf  $U_1$  und  $U_2$  keine quadratische Form von maximalem Witt-Index. Nach Proposition 6.2.8 ist die Ordnung von  $y^2$  ein Teiler von  $q^m + 1$  und die Ordnung von  $y$  ein Teiler von  $2(q^m + 1)$ . Andererseits ist  $y$  enthalten in einem Singer-Zyklus von  $GL(V)$  der Ordnung  $q^n - 1$ . Nach der Annahme ist  $G \neq G'$ , also  $\text{char}(\mathbb{F}) \neq 2$ . Dann ist  $q-1$  ein Teiler von  $(q^n-1)/(2(q^m+1)) = q^{m-1}/2$  und wieder  $\det(y) = 1$  im Widerspruch zur Wahl von  $y$ . Es folgt  $\mu(G, V) \leq n-2$ .

Sei  $w^{-1} = (P_1P_2)(Q_1Q_2) \cdots (P_{m-2}P_{m-1})(Q_{m-2}Q_{m-1})(P_{m-1}P_m)(Q_{m-1}Q_m)(P_{m-1}Q_m)(Q_{m-1}P_m)$ , dann ist  $w = (P_1P_2 \cdots P_{m-1}Q_1Q_2 \cdots Q_{m-1})(P_mQ_m)$  ein Coxeter-Element in  $W$ . Sei  $g \in G(\mathbb{k})$  mit  $\gamma(gF(g)^{-1}) = w$ . Nach Proposition 6.1.2 ist  $(T_0^g)^F$  konjugiert zu  $\{t \in T_0 \mid F(t) = t^w\}$ . Äquivalent dazu sind mit  $e_i^t = a_i e_i$ ,  $f_i^t = a_{m+i-1} f_i$  für  $1 \leq i \leq m-1$  und  $e_m^t = a_{n-1} e_m$ ,  $f_m^t = a_n f_m$  die Bedingungen  $a_{i+1} = a_i^q$  für  $1 \leq i \leq n-3$ ,  $a_{i+m-1} = a_1^{q^{i+m-2}} = a_i^{-1}$  für  $1 \leq i < m$ ,  $a_1^{q^{n-2}} = a_1$ ,  $a_n = a_{n-1}^q$  und  $a_{n-1} a_n = 1$ . Für  $a_1$  und  $a_{n-1}$  ergeben sich die notwendigen Bedingungen  $1 = a_1 a_m = a_1^{q^{m-1}+1}$  und  $1 = a_{n-1}^{q+1}$ . Demnach erfüllt  $t \in T_0$  genau dann die Bedingung  $F(t) = t^w$ , wenn die Ordnung von  $a_1$  ein Teiler von  $q^{m-1} + 1$  ist, die Ordnung von  $a_{n-1}$  ein Teiler von  $q+1$  und  $a_i = a_1^{q^{(i-1)}}$  gilt für

$1 \leq i \leq n-2$  sowie  $a_n = a_{n-1}^q$ . Weil  $\mathbb{k}$  algebraisch abgeschlossen ist, ist  $(T_0^g)^F$  isomorph zu  $\mathbb{Z}_{q^{m-1}+1} \times \mathbb{Z}_{q+1}$ .

Da  $(T_0^g)^F$  irreduzibel auf  $W_1$  wirkt, induziert  $Q$  auf  $W_1$  eine orthogonale Form vom Witt-Defekt 1. Ebenso induziert  $Q$  auf  $W_2$  eine definite orthogonale Form, weil  $O_2^+(q) \cong D_{2(q-1)}$  keine zyklische Untergruppe der Ordnung  $q+1$  enthält.

Wie in Proposition 6.2.2 zeigt man, dass  $(T_0^g)^F$  nichtausgeartet ist und für  $X \leq (T_0^g)^F$  mit einer auf  $W_1$  irreduziblen Gruppe  $X$  gilt:  $\mathfrak{C}_{G(\mathbb{k})'}(X)|_{W_1} = (T_0^g)|_{W_1}$  und  $\mathfrak{C}_{G'}(X)|_{W_1} = (T_0^g)^F|_{W_1}$ . Die kanonische Einbettung von  $O_2^-(q)$  in  $O_2^+(q^2)$  zeigt, dass  $O_2^-(q) \cap \text{SO}_2^-(q) \cong \mathbb{Z}_{q+1}$  gilt. Wirkt  $X$  trivial auf  $W_2$ , so ist  $\mathfrak{C}_G(X) \cong \mathbb{Z}_{q^{m-1}+1} \times D_{2(q+1)}$ . Es folgt  $2 \geq [\mathfrak{C}_G(X) : \mathfrak{C}_{G'}(X)]$  mit Gleichheit genau dann, wenn  $X$  von einem Element zentralisiert wird, dessen Einschränkung auf  $W_2$  nicht Determinante 1 hat und damit  $\mathfrak{C}_G(X) \cong \mathbb{Z}_{q^{(n-2)/2+1}} \times \mathfrak{C}_{O(W_2)}(X|_{W_2})$ .

Sei umgekehrt  $(T_0^h)^F$  ein maximaler Torus in  $G'$ , dessen Zentralisator in  $G$  irreduzibel auf einem Unterraum  $U$  der Kodimension 2 in  $V$  wirkt. Nach dem Witt'schen Lemma sind  $U$  und  $W_1$  konjugiert in  $G$ , etwa  $((T_0^h)^F)^x = (T_0^g)^F$ . Nach Proposition 6.2.8 sind  $((T_0^h)^F)^x|_{W_1}$  und  $(T_0^g)^F|_{W_1}$  konjugiert in  $O(W_1)$  und damit nach dem Witt'schen Lemma auch in  $G$ . Damit folgen (a) und (c).

Wirkt  $X$  trivial auf  $W_2$ , so ist  $X \leq G'$  in  $\mathfrak{C}_{G'}(X)$  charakteristisch, und damit gilt nach Proposition 6.1.3 und Proposition 6.1.5  $\text{Aut}_{G'}(X) = \mathfrak{N}_{G'}(X)/\mathfrak{C}_{G'}(X) = \mathfrak{N}_{G'}(\mathfrak{C}_{G'}(X))/\mathfrak{C}_{G'}(X) \cong \mathfrak{C}_{W,F}(w) = \mathfrak{C}_W(w)$ . Die Permutation  $w$  hat einen Zykel der Länge  $n-2 > 2$  und einen Zykel der Länge 2 und Ordnung  $n-2$ , weil  $n$  gerade ist. Ihr Zentralisator in  $S_n$  wird erzeugt von ihren beiden Zykeln und ist isomorph zu  $\mathbb{Z}_{n-2} \times \mathbb{Z}_2$ , enthält aber Permutationen mit ungeradem Signum. Also gilt  $\mathfrak{C}_W(w) = \langle w \rangle$ .

**Proposition 6.2.8** *Für gerades  $n > 2$  besitzt die Gruppe  $G = O_n^-(q)$  Singer-Zyklen. Sei  $X$  eine abelsche Untergruppe von  $G$ , die irreduzibel auf dem zugehörigen Modul  $V$  wirkt. Dann gilt:*

- (a)  $\mathfrak{C}_G(X)$  ist ein Singer-Zyklus und zyklisch der Ordnung  $q^{n/2} + 1$ .
- (b)  $\text{Aut}_G(X)$  ist eine zyklische Gruppe der Ordnung  $n$ .
- (c) Je zwei Singer-Zyklen in  $G$  sind konjugiert in  $G$ .

Beweis: Nach Proposition 6.2.5 besitzt der Standardmodul  $W$  für  $H = O_{n+1}(q)$  eine Zerlegung  $W = W_1 \oplus W_2$  mit  $W_2 = w_1^\perp$  und  $\dim(W_1) = 1$  sowie  $\dim(W_2) = n$ , so dass  $H$  eine Untergruppe besitzt, die irreduzibel auf  $W_2$  wirkt. Nach Proposition 6.2.7 ist  $W_2$  nicht hyperbolisch. Nach dem Witt'schen Lemma induziert  $H$  auf  $W_2$  die volle Gruppe  $O_n^-(q)$ . Weil  $H$  das Element enthält, das trivial auf  $W_2$  operiert und  $W_1$  als Eigenraum zum Eigenwert  $-1$  hat, induziert auch  $\mathfrak{N}_{H'}(W_2)$  mit  $H' \cong \text{SO}_{n+1}(q)$  die volle Gruppe  $O_n^-(q)$  auf  $W_2$  und wirkt treu auf  $W_2$ . Wir

identifizieren  $G$  mit  $\mathfrak{N}_{H'}(W_2)$  und die Wirkung von  $G$  auf  $V$  mit der Wirkung von  $\mathfrak{N}_{H'}(W_2)$  auf  $W_2$ .

Ist  $X$  abelsch und irreduzibel auf  $W_2$ , so ist  $X$  nach dem Schur'schen Lemma zyklisch, und es gilt  $\mathfrak{C}_G(X) \cong \mathfrak{C}_{H'}(X) \cong \mathbb{Z}_{q^{n/2+1}}$  nach Proposition 6.2.5. Wie im Beweis von Proposition 6.2.5 folgt  $\text{Aut}_G(X) \cong \mathfrak{N}_{H'}(X)/\mathfrak{C}_{H'}(X) \cong \mathbb{Z}_n$ . Je zwei Singer-Zyklen in  $G$  entsprechen Zentralisatoren von Zsigmondy-Elemente in  $H'$ , die irreduzibel auf  $W_2$  wirken und nach dem Beweis von Proposition 6.2.5 konjugiert sind in  $H'$ . Weil das konjugierende Element  $W_2$  invariant lässt, folgt Aussage (c).

**Proposition 6.2.9** *Für die Chevalley-Gruppe  $G = G_2(q)$  vom Typ  $G_2$  über  $\mathbb{F}_q$  gilt  $\nu(G, V) = 6$  auf dem Standardmodul  $V$  der Dimension 7 (bzw. 6 in gerader Charakteristik) von  $G$ .*

*Ist  $x$  ein Zsigmondy-Element in  $G$  und  $X = \langle x \rangle$ , dann gilt:*

- (i)  $\mathfrak{C}_G(X)$  ist ein maximaler, mit einem Coxeter-Element in der zugehörigen Weyl-Gruppe  $D_{12}$  getwisteter Torus und isomorph zu  $\mathbb{Z}_{q^2-q+1}$ .
- (ii)  $\text{Aut}_G(X)$  ist eine zyklische Gruppe der Ordnung 6.
- (iii) Je zwei Zentralisatoren von Zsigmondy-Elementen in  $G$  sind konjugiert in  $G$ .

Beweis: Die Notation aus Kapitel 3.1 wird fortgesetzt. Ist  $F = F_q$  bezüglich der Basis  $X$  von  $V$ , so können wir  $G$  mit  $G(\mathbb{k})^F$  identifizieren. Dabei ist  $V = \langle X \rangle_{\mathbb{F}_q}$  und  $V^{\mathbb{k}} = \langle X \rangle_{\mathbb{k}}$ . Nach Proposition 3.1.2 ist  $T_0(\mathbb{k})$  ein maximaler Torus, und die Weyl-Gruppe  $\mathfrak{N}_{G(\mathbb{k})}(T_0(\mathbb{k}))$  wirkt wie dort beschrieben auf  $T_0(\mathbb{k})$ .  $F$  induziert auf  $W$  die Identität. Damit sind alle maximalen Tori in  $G$  enthalten in den mit demselben Element aus  $W$ , betrachtet als Element der Weyl-Gruppe von  $\text{GL}(V^{\mathbb{k}})$ , getwisteten Tori von  $\text{GL}(V)$ . Aus der Invarianz von  $x_0$  unter  $W$  folgt  $\mu \leq 6$ .

Coxeter-Elemente in Diedergruppen sind gerade die Erzeugenden des zyklischen Normalteilers vom Index 2, in  $W$  also genau die Elemente der Ordnung 6. Sei  $w = (P_1Q_3P_2Q_1P_3Q_2)$  ein Coxeter-Element in  $W$ . Sei  $g \in G(\mathbb{k})$  mit  $\gamma(gF(g)^{-1}) = w$ . Nach Proposition 6.1.2 ist  $(T_0^g)^F$  konjugiert zu  $\{t \in T_0 \mid F(t) = t^w\}$ .  $T_0$  besteht aus allen Elementen, die bezüglich  $X$  die Form  $\text{diag}(1, a, b, (ab)^{-1}, a^{-1}, b^{-1}, ab)$  mit  $a, b \in \mathbb{k}$  haben. Die Bedingung  $F(t) = t^w$  ist nun äquivalent zu den Bedingungen  $b = a^{-q}$  und  $a = (ab)^q = a^{-q^2+q}$ . Demnach erfüllt  $t \in T_0$  genau dann die Bedingung  $F(t) = t^w$ , wenn die Ordnung von  $a$  ein Teiler von  $q^2 - q + 1$  ist und  $b = a^{-q}$  gilt. Weil  $\mathbb{k}$  algebraisch abgeschlossen ist, ist  $(T_0^g)^F$  isomorph zu  $\mathbb{Z}_{q^2-q+1}$ .

Wie in Proposition 6.2.2 zeigt man, dass  $(T_0^g)^F$  nichtausgeartet ist und für  $X \leq (T_0^g)^F$  gilt:  $\mathfrak{C}_{G(\mathbb{k})}(X) = T_0^g$  und  $\mathfrak{C}_G(X) = (T_0^g)^F$ .

Sei  $T_0^h$  ein maximaler Torus in  $G$ , der irreduzibel auf einer Hyperebene von  $V$  wirkt. Dann ist  $\tau := \gamma(hF(h)^{-1})$  ein Zykel der Länge 6 in  $W$  und damit in  $W$  konjugiert zu  $w$ . Nach Proposition 6.1.1 sind  $T_0^g$  und  $T_0^h$  und nach Proposition 6.1.4 auch  $(T_0^g)^F$  und  $(T_0^h)^F$  konjugiert in  $G$ .

Schließlich ist  $X$  charakteristisch in  $\mathfrak{C}_G(X)$ , und damit gilt nach Proposition 6.1.3 und Proposition 6.1.5  $\text{Aut}_G(X) = \mathfrak{N}_G(X)/\mathfrak{C}_G(X) = \mathfrak{N}_G(\mathfrak{C}_G(X))/\mathfrak{C}_G(X) \cong \mathfrak{C}_{W,F}(w) = \mathfrak{C}_W(w) = \langle w \rangle \cong \mathbb{Z}_6$ .

Ist  $G$  eine lineare oder klassische Gruppe oder eine Gruppe vom Typ  $G_2$ , so gilt stets  $\mu(G, V) = \nu(G, V)$ , außer es ist  $G \in \{\text{GL}_2(2^i), \text{Sp}_2(2^i), \text{GL}_6(2), \text{U}_3(2), \text{O}_7(2), \text{O}_6^-(2), \text{O}_8^+(2), \text{G}_2(2) ; i \in \mathbb{N}\}$ . Dies läßt sich leicht verifizieren mit Hilfe von Satz 2.1, da sich  $\mu(G, V)$  direkt aus der Ordnung von  $G$  ablesen läßt. Darüberhinaus entnimmt man den bereits bewiesenen Ergebnissen in Kapitel 6, dass jede zyklische Untergruppe von  $G$ , die irreduzibel auf einem Untermodul von  $V$  der Dimension  $\mu(G, V)$  wirkt, auch ein Zsigmondy-Element enthält. Beides gilt nicht mehr in allen im Folgenden betrachteten Gruppen. Deshalb muss anders als in [Me] zwischen den Parametern  $\mu(G, V)$  und  $\nu(G, V)$  unterschieden werden.

**Lemma 6.2.3** *Sei  $W \cong \text{O}_6^-(2)$  die Weyl-Gruppe von  $E_6(\mathbb{F})$  betrachtet als Permutationsgruppe auf der Punktmenge  $\mathcal{P}$  von  $\mathcal{G}$ .*

- (i)  *$W$  besitzt genau zwei Konjugiertenklassen von Elementen der Ordnung 12, nämlich die Klasse der Coxeter-Elemente und die Klasse der zu  $w_1 := (P_{25}P_{46}P_{35}Q_5)(P_1P_{36}Q_4Q_3P_{45}P_{34}P_{23}P_{26}P_{56}Q_2Q_6P_{24})(P_{13}P_{12}P_3P_2)(P_{16}P_{15}P_{14}P_6P_5P_4)$  konjugierten Elemente. Ein Coxeter-Element ist gegeben durch  $w_0 := (P_{36}P_{25}P_{14})(P_4P_3P_2P_1P_{45}P_{34}Q_1Q_6Q_5Q_4P_{12}P_{16})(P_{56}P_6P_{46}P_{35}P_{24}Q_2P_{23}Q_3P_{13}P_{26}P_{15}P_5)$ .*
- (ii) *Es gilt  $\mathfrak{C}_W(w_0) = \langle w_0 \rangle$  und  $\mathfrak{C}_W(w_1) = \langle w_1 \rangle$ .*

Beweis: Die Notation von Kapitel 3.2 wird fortgesetzt. Für  $1 \leq i < j \leq 6$  sei die Permutation  $r_{ij}$  gegeben durch  $r_{ij} := (P_iP_j)(Q_iQ_j) \prod_{1 \leq k \leq 6, i \neq k \neq j} (P_{ik}P_{jk})$ . Dann ist offenbar stets  $r_{ij} \in W$ , weil  $r_{ij}$  die Geradenmenge  $\mathcal{L}$  von  $\mathcal{G}$  invariant läßt.

Für  $X \in \mathcal{P} \cup \mathcal{L}$  sei  $\Delta_i(X) := \{Y \in \mathcal{P} \cup \mathcal{L} \mid d(X, Y) = i\}$ .  $W$  ist eine Gruppe mit BN-Paar, und  $\mathcal{G}$  ist das zugehörige Gebäude. Sind  $P, Q \in \mathcal{P}$  und  $Q \in \Delta_4(P)$ , so verstehen wir unter der Projektion von  $Q$  auf  $P$  die 5 Punkte  $\Delta_2(Q) \cap \Delta_2(P)$ .

Wir zeigen zunächst: Für  $P \in \mathcal{P}$  wirkt der Stabilisator  $W_P$  treu auf  $\Delta_2(P)$  und induziert dort die Menge aller geraden Permutationen, die  $\Delta_1(P)$  invariant lassen. Weil nämlich  $W$  eine Gruppe mit BN-Paar ist, wirkt  $W_P$  transitiv auf  $\Delta_1(P)$ . Die Permutation  $r_{35}$  induziert auf  $\Delta_1(P_{14})$  eine Transposition, so dass  $W_P$  die volle Gruppe  $S_5$  auf  $\Delta_1(P)$  induziert. Weil nun  $r_{14}$  auf  $\Delta_2(P_{14})$  die Permutation  $(P_1Q_4)(P_4Q_1)$  induziert, induziert  $W_P$  auf  $\Delta_2(P)$  mindestens alle geraden

Permutationen. Umgekehrt gibt es  $2^5$  Mengen von Punkten in  $\Delta_2(P)$ , die aus jeder Geraden in  $\Delta_1(P)$  genau einen Punkt enthalten, aber nur  $2^4$  Punkte in  $\Delta_4(P)$ . Damit ist genau die Hälfte dieser Mengen Projektion eines Punktes in  $\Delta_4(P)$  auf  $P$ . Da die Menge dieser Projektionen invariant unter  $W_P$  ist, folgt die Aussage über die Struktur von  $W_P$  und die treue Wirkung auf  $\Delta_2(P)$ .

Sei  $g \in W$  ein Element der Ordnung 12 mit Fixpunkt, o.B.d.A.  $Q_1^g = Q_1$ . Weil  $g$  treu auf  $\Delta_2(Q_1)$  wirkt und dort eine gerade Permutation induziert, induziert  $g$  dort einen 6-Zykel und einen 4-Zykel. Aufgrund der Struktur von  $W_{Q_1}$  können wir o.B.d.A. annehmen, dass  $g$  dort die Permutation  $(P_{13}P_{12}P_3P_2)(P_{16}P_{15}P_{14}P_6P_5P_4)$  induziert. Die Bilder aller Punkte in  $\Delta_4(P)$  ergeben sich aus den Bildern ihrer Projektionen auf  $Q_1$ . Es folgt  $g = w_1$ .

Sei nun  $g \in W$  ein fixpunktfreies Element der Ordnung 12. Dann hat  $g^3$  einen Fixpunkt in  $\mathcal{P}$ , weil  $|\mathcal{P}|$  ungerade ist. Die Menge der Fixpunkte von  $g^3$  wird von  $g$  permutiert, ist also ein Vielfaches von 3. Sei o.B.d.A.  $P_{14}$  ein Fixpunkt von  $g^3$ . Würde  $g^3$  auf  $\Delta_2(P_{14})$  einen 4-Zykel und drei 2-Zykel induzieren, und damit 3 Geraden in  $\Delta_1(P_{14})$  stabilisieren, so hätte die Bahn jeder Projektion eines Punktes in  $\Delta_4(P_{14})$  auf  $P_{14}$  die Länge 4. Es folgte der Widerspruch, dass  $g^3$  auf  $\Delta_4(P_{14})$  nur Zykel der Länge 4 induzierte und also nur einen Fixpunkt hätte. Damit stabilisiert  $g^3$  eine Gerade punktweise, etwa  $\{P_{14}, P_{25}, P_{36}\}$ . Weil  $g^3$  auf  $\Delta_2(P_{14})$  eine gerade Permutation induziert, induziert  $g^3$  dort zwei Zykel der Länge 4 und auf  $\Delta_1(P_{14})$  eine Involution, weil sonst die Punkte eines Zyklus zusammen mit einem Fixpunkt von  $g^3$  eine Projektion eines Punktes in  $\Delta_6(P_{14})$  bildeten, der damit ein weiterer Fixpunkt von  $g^3$  wäre, aber aus Symmetriegründen induziert  $g^3$  auf  $\Delta_2(P_{25})$  und  $\Delta_2(P_{36})$  ebenfalls zwei 4-Zykel. Wir können also o.B.d.A. annehmen, dass  $g^3$  auf  $\Delta_2(P_{14})$  die Permutation  $(P_4P_1Q_1Q_4)(P_{56}P_{35}P_{23}P_{26})$  induziert. Es folgt  $g^3 = w_0^3 = (P_4P_1Q_1P_4)(P_{56}P_{35}P_{23}P_{26})(P_3P_{45}Q_6P_{12})(P_6P_{24}Q_3P_{15})(P_2P_{34}Q_5P_{16})(P_{46}Q_2P_{13}P_5)$ .

Wäre  $P_4^g = Q_3$ , so wäre  $Q_3^g$  mit  $Q_3$  und mit  $Q_3^{g^3}$  kollinear, also  $Q_3^g \in \{P_{34}, P_5\}$ , damit aber in jedem Fall nicht kollinear mit  $Q_3^{g^2} = P_4^{g^3} = P_1$ , ein Widerspruch. Analog ist  $P_4^g \neq Q_6$  mit  $Q_6^g \in \{P_2, P_{46}\}$ . Wäre  $P_4^g = P_{15}$ , so wäre  $P_{15}^g$  mit  $P_{15}^{g^3}$  kollinear aber nicht mit  $P_{15}$ , also  $P_{15}^g \in \{P_{16}, Q_2\}$ , damit aber in jedem Fall kollinear mit  $P_{15}^{g^2} = P_4^{g^3} = P_1$ , ein Widerspruch. Analog ist  $P_4^g \neq P_{12}$  mit  $P_{12}^g \in \{Q_5, P_{13}\}$ . Also gilt  $P_4^g \in \{P_3, P_6, P_{24}, P_{45}\}$ . Sei  $x \in W_{P_{14}}$  und induziere  $(Q_1P_4)(Q_4P_1)$  auf  $\Delta_2(P_{14})$  und  $y \in W_{P_{14}}$  und induziere  $(P_4P_{23})(P_1P_{26})(Q_1P_{56})(Q_4P_{35})$  auf  $\Delta_2(P_{14})$ . Dann gilt  $P_4^{w_0} = P_3$ ,  $P_4^{xw_0x} = Q_1^{w_0x} = Q_6^x = P_6$ ,  $P_4^{yw_0y} = P_{23}^{w_0y} = Q_3^y = P_{45}$  und  $P_4^{xyw_0yx} = P_{56}^{w_0yx} = P_6^{yx} = P_{12}^x = P_{24}$ . Bis auf Konjugiertheit ist also  $P_4^g = P_3$ . Wieder weil  $g$  und  $(w_0)^3$  kommutieren, ist  $P_3$  kollinear mit  $P_3^{g^4}$  aber nicht mit  $P_3^g$ , also  $P_3^g \in \{P_2, P_{46}\}$ . Außerdem ist  $P_3$  nicht kollinear mit  $P_3^{g^2} = P_1$  und damit auch  $P_4$  nicht kollinear mit  $P_4^{g^2} = P_3^g$  und damit  $P_3^g = P_2$ . Nun stimmt  $g$  mit

$w_0$  auf  $P_1^{\langle w_0 \rangle}$  und  $P_{14}^{\langle w_0 \rangle}$  überein. Außerdem ist  $Q_2^g$  kollinear mit  $P_1^g = P_{45}$  und  $P_{12}^g = P_{16}$  und damit  $Q_2^g = P_{23} = Q_2^{w_0}$  und  $g = w_0$ .

Der Zentralisator von  $w_1$  in  $W$  stabilisiert  $Q_1$  und  $P_1^{\langle w_1 \rangle}$ . Wäre  $x \in \mathfrak{C}_W(w_1) \setminus \langle w_1 \rangle$ , so könnte man  $P_1^x = P_1$  annehmen. Mit  $Q_6 = P_1^{w_2^1}$  und  $P_{26} = P_1^{w_5^1}$  bleibt auch  $P_2$ , mit  $P_{24} = P_1^{w_1}$  und  $Q_4 = P_1^{w_{10}^1}$  bleibt auch  $P_4$  und mit  $P_4$  und  $P_{45} = P_1^{w_8^1}$  bleibt auch  $Q_5$  unter  $x$  invariant. Es folgt der Widerspruch  $x = 1$ .

Stabilisiert ein Element  $x$  in  $\mathfrak{C}_W(w_0)$  die beiden Zyklen von  $w_0$  der Länge 12, so können wir  $P_1^x = P_1$  annehmen. Mit  $P_1$  und  $Q_5 = P_1^{w_5^1}$  ist auch  $P_{15}$   $x$ -invariant. Es folgt  $x = 1$ . Wäre  $\mathfrak{C}_W(w_0) \neq \langle w_0 \rangle$ , so wäre  $\mathfrak{C}_W(w_0) = \langle w_0, \tau \rangle$  mit einer Involution  $\tau$ , die o.B.d.A.  $P_1$  und  $Q_2$  vertauscht. Es folgt der Widerspruch, dass  $P_{12}$  unter  $\tau$  invariant bleibt.

Es bleibt nur noch zu zeigen, dass  $w_0$  ein Coxeter-Element in  $W$  ist. Sei  $r_i := r_{ii+1}$  für  $1 \leq i \leq 5$  und  $r_6 := (Q_1 P_{23})(Q_2 P_{13})(Q_3 P_{12})(P_4 P_{56})(P_5 P_{46})(P_6 P_{45})$ . Auch  $r_6$  liegt in  $W$ : Auf  $\mathcal{G}$  lässt  $r_6$  die Geraden  $P_i Q_j P_{ij}$  invariant für  $i \leq 3 < j$ , bildet sie ab auf die Gerade  $P_i P_{ik} Q_k$  mit  $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$  für  $i, j \leq 3$ , auf  $P_{jk} Q_j P_k$  mit  $\{i, j, k\} = \{4, 5, 6\}$  für  $4 \leq i, j$  und auf  $P_{kl} P_{st} P_{ij}$  mit  $\{i, k, l\} = \{1, 2, 3\}$  und  $\{j, s, t\} = \{4, 5, 6\}$  für  $j \leq 3 < i$ . Außerdem stabilisiert  $r_6$  die Geraden der Form  $P_{ij} P_{kl} P_{st}$ , wenn keines der Paare  $\{i, j\}$ ,  $\{k, l\}$  oder  $\{s, t\}$  in  $\{1, 2, 3\}$  enthalten ist. Sonst seien o.B.d.A.  $i, j \leq 3$ ,  $k, l \geq 4$  und  $s \leq t$ . Dann bildet  $r_6$  die Gerade  $P_{ij} P_{kl} P_{st}$  ab auf die Gerade  $Q_s P_t P_{st}$ . Nun bildet  $\{r_i \mid 1 \leq i \leq 6\}$  ein Coxeter-System in  $W$  vom Typ  $E_6$ , denn offensichtlich sind alle diese Permutationen Involutionen, ist für  $1 \leq i, j \leq 5$   $[r_i, r_j] = 1$  außer, wenn  $|i - j| = 1$  gilt, und dann gilt  $o(r_i r_j) = 3$ . Weiter kommutiert  $r_6$  mit  $r_1 r_2, r_4$  und  $r_5$ , und es gilt  $r_3 r_6 = (P_3 P_{56} P_4)(P_5 P_{46} P_{36})(P_6 P_{45} P_{35})(Q_1 P_{23} P_{24})(Q_2 P_{13} P_{14})(Q_3 Q_4 P_{12})$ , ein Element der Ordnung 3.

**Lemma 6.2.4** *Sei  $G$  eine endliche, einfach-zusammenhängende Chevalley-Gruppe vom Typ  $E_6$  definiert über  $\mathbb{F}_q$  und  $T$  ein mit  $w_1$  aus Lemma 6.2.3 getwisteter Torus in  $G$ . Dann ist  $T \cong \mathbb{Z}_{(q-1)(q^2+1)(q^3+1)}$ . Insbesondere ist die Ordnung von  $T$  durch keinen  $q$ -primitiven Teiler von  $q^{12} - 1$  teilbar.  $T$  ist ein nichtausgearteter Torus, und es gilt  $\mathfrak{C}_G(T) = T$  und  $\text{Aut}_G(T) \cong \mathbb{Z}_{12}$ .*

Beweis: Die Notation aus Kapitel 3.2 wird fortgesetzt. Ist  $F = F_q$  bezüglich der Basis  $X$  von  $V$ , so können wir  $G$  mit  $G(\mathbb{k})^F$  identifizieren. Dabei ist  $V = \langle X \rangle_{\mathbb{F}_q}$  und  $V^{\mathbb{k}} = \langle X \rangle_{\mathbb{k}}$ . Nach Proposition 3.2.3 ist die dort beschriebene Gruppe  $T_0(\mathbb{k})$  ein maximaler Torus, und die Weyl-Gruppe  $\mathfrak{N}_{G(\mathbb{k})}(T_0(\mathbb{k}))$  wirkt wie dort beschrieben auf  $T_0(\mathbb{k})$ . Sei  $g \in G(\mathbb{k})$  mit  $\gamma(gF(g)^{-1}) = w_1$ . Nach Proposition 6.1.2 ist  $(T_0^g)^F$  konjugiert zu  $\{t \in T_0 \mid F(t) = t^{w_1}\}$ . Mit  $F(t) = t^{w_1}$  folgt für  $t = t(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$  aus  $Q_4^{w_1} = Q_3$  die Bedingung  $a_4 a_6 = (a_3 a_6)^q$ , aus

$P_{45}^{w_1} = P_{34}$  die Bedingung  $(a_4 a_5 a_6)^{-1} = (a_3 a_4 a_6)^{-q}$  und aus  $P_3^{w_1} = P_2$  die Bedingung  $a_3 = a_2^q$ . Es folgt  $a_4 = a_2^{q^2} a_6^{q-1}$  und  $a_5 = a_2^{q^3} a_6^{q^2-q}$ . Aus  $P_{12}^{w_1} = P_3$  ergibt sich  $(a_1 a_2 a_6)^{-1} = a_3^q$  und weil  $Q_1$  ein Fixpunkt von  $w_1$  ist  $(a_1 a_6)^{q-1} = 1$ . Mit den obigen Bedingungen folgt  $a_1 = a_2^{-q^2-1} a_6^{-1}$  und  $a_2^{(q-1)(q^2+1)} = 1$ . Aus  $P_6^{w_1} = P_5$  folgt die Bedingung  $a_5^q = (a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6^3)^{-1}$  und damit  $1 = a_2^{q^4+q^3+q} a_6^{q^3+1}$ . Nun folgt  $(a_2 a_6)^{q^3+1} = a_2^{-q^4-q+1}$ . Weil  $(q^4 + q - 1, (q - 1)(q^2 + 1)) = 1$  gilt, bleiben die Bedingungen  $(a_2 a_6)^{(q-1)(q^2+1)(q^3+1)} = 1$ ,  $a_2 = (a_2 a_6)^{(q^3+1)k}$  mit einem  $k$  mit  $(-q^4 - q + 1)k \equiv 1 \pmod{(q - 1)(q^2 + 1)}$  und  $a_6 = (a_2 a_6) a_2^{-1}$ . Man überprüft leicht, dass mit diesen Bedingungen schon  $F(t) = t^{w_1}$  folgt. Demnach erfüllt  $t = t(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) \in T_0$  genau dann die Bedingung  $F(t) = t^w$ , wenn die Ordnung von  $(a_2 a_6)$  ein Teiler von  $(q - 1)(q^2 + 1)(q^3 + 1)$  ist und  $a_i$  für  $1 \leq i \leq 6$  aus den obigen Bedingungen bestimmt wird. Weil  $\mathbb{k}$  algebraisch abgeschlossen ist, ist  $(T_0^g)^F$  isomorph zu  $\mathbb{Z}_{(q-1)(q^2+1)(q^3+1)}$ .

Seien  $U_1, U_2, U_3, U_4$  und  $U_5$  die irreduziblen Untermoduln von  $(T_0^g)^F$  in  $V$  der Dimension 1, 4, 4, 6 und 12 und  $(T_0^g)^F = \langle t \rangle$ . Dann hat  $t$  auf  $U_i^{\mathbb{k}}$  lauter verschiedene Eigenwerte. Darüberhinaus ist die Ordnung aller Eigenwerte von  $t$  in Untermoduln verschiedener Dimension verschieden. Es folgt, dass  $\mathfrak{C}_{G(\mathbb{k})}(t)$  keine Wurzelgruppe enthält und  $(T_0^g)^F$  nichtausgeartet ist. Nach Proposition 6.1.3 und Proposition 6.1.5 gilt  $\mathfrak{N}_G(T)/T = (\mathfrak{N}_{G(\mathbb{k})}(T_0^g))^F / (T_0^g)^F \cong \mathfrak{C}_{W,F}(w_1) = \mathfrak{C}_W(w_1) = \langle w_1 \rangle \cong \mathbb{Z}_{12}$ . Weil  $(T_0^g)^F$  nichtausgeartet ist, ist  $\mathfrak{C}_{G(\mathbb{k})}(t) = (\mathfrak{C}_{G(\mathbb{k})}(t))^0 = (T_0^g)^F$  und damit  $\mathfrak{C}_G(T) = T$ .

Offenbar ist jeder Primteiler von  $|T|$  ein Teiler von  $q - 1$ ,  $q^4 - 1$  oder  $q^6 - 1$  und deshalb  $|T|$  durch keinen  $q$ -primitiven Teiler von  $q^{12} - 1$  teilbar.

**Proposition 6.2.10** *Für die einfach-zusammenhängende Chevalley-Gruppe  $G = E_6(q)$  vom Typ  $E_6$  über  $\mathbb{F}_q$  gilt  $\mu(G, V) = \nu(G, V) = 12$  auf dem Standardmodul  $V$  der Dimension 27 von  $G$ .*

*$G$  besitzt genau zwei Konjugiertenklassen von maximalen Tori, die irreduzibel auf einem Untermodul von  $V$  der Dimension 12 wirken, die Klasse der mit  $w_1$  aus Lemma 6.2.3 getwisteten Tori aus Lemma 6.2.4 und die Klasse der mit Coxeter-Elementen getwisteten Tori.*

*Ist  $x$  ein Zsigmondy-Element in  $G$  und  $X = \langle x \rangle$ , dann gilt:*

- (i)  $\mathfrak{C}_G(X)$  ist ein maximaler, mit einem Coxeter-Element in der zugehörigen Weyl-Gruppe getwisteter Torus und isomorph zu  $\mathbb{Z}_{(q^4-q^2+1)(q^2+q+1)}$ .
- (ii)  $\text{Aut}_G(X)$  ist eine zyklische Gruppe der Ordnung 12.
- (iii) Je zwei Zentralisatoren von Zsigmondy-Elementen von  $G$  sind konjugiert in  $G$ .
- (iv) Ist  $X_1$  eine nichttriviale Untergruppe der Untergruppe von  $T$  der Ordnung  $q^4 - q^2 + 1$  und  $X_2 \not\leq Z(G)$  eine Untergruppe der Untergruppe von  $T$  der

Ordnung  $q^2 + q + 1$ , so zerfällt der  $X_1$ -Modul  $V$  in die direkte Summe der getwisteten speziellen Ebene  $\mathfrak{C}_V(X_1)$  und zwei irreduzible  $X_1$ -Moduln der Dimension 12, die genau dann isomorph sind, wenn  $|X| = 13$  gilt und 13 ein  $q$ -primitiver Teiler von  $q^{12} - 1$  ist. Der  $X_2$ -Modul  $V$  zerfällt in die direkte Summe des treuen, irreduziblen  $X_2$ -Moduls  $\mathfrak{C}_V(X_1)$  und 8 weitere treue, irreduzible, paarweise isomorphe, zu  $\mathfrak{C}_V(X_1)$  nicht isomorphe  $X_2$ -Moduln.

Beweis: Die Notation aus Kapitel 3.2 bzw. Lemma 6.2.4 wird fortgesetzt.  $F = F_q$  induziert auf  $W$  die Identität. Damit sind alle maximalen Tori in  $G$  enthalten in den mit demselben Element aus  $W$ , betrachtet als Element der Weyl-Gruppe von  $\mathrm{GL}(V^{\mathbb{k}})$ , getwisteten Tori von  $\mathrm{GL}(V)$ . Nach [At] ist 12 die maximale Ordnung eines Elementes in  $W$  und damit  $\mu(G, V) \leq 12$ . Nach Lemma 6.2.4 und den anderen Ergebnissen in Proposition 6.2.10 gilt  $\mu(G, V) = 12$ . Aus der Ordnung von  $G$  oder nach Proposition 6.2.10, (i) folgt  $\nu(G, V) = 12$  mit Satz 2.1. Ein maximaler Torus, der irreduzibel auf einem Unterraum der Dimension 12 wirkt, ist notwendig ein Torus, der mit einem Element in  $W$  getwistet ist, dessen Ordnung durch 12 teilbar ist. Nach Lemma 6.2.3 und Lemma 6.2.4 gibt es zwei konjugierten Klassen solcher Tori.

Sei  $w_0$  wie in Lemma 6.2.3 und  $g \in G(\mathbb{k})$  mit  $\gamma(gF(g)^{-1}) = w_0$ . Nach Proposition 6.1.2 ist  $(T_0^g)^F$  konjugiert zu  $\{t \in T_0 \mid F(t) = t^{w_0}\}$ . Mit  $F(t) = t^{w_0}$  folgen aus  $P_2^{w_0} = P_1, P_3^{w_0} = P_2$  und  $P_4^{w_0} = P_3$  für  $t = t(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$  die Bedingungen  $a_2 = a_1^q, a_3 = a_2^q = a_1^{q^2}$  und  $a_4 = a_3^q = a_1^{q^3}$ . Mit der Hilfsvariablen  $\lambda := a_2 a_3 a_4 a_5 a_6^2$  folgen aus  $P_{16}^{w_0} = P_4$  und  $P_{12}^{w_0} = P_{16}$  die Gleichungen  $\lambda = a_4^q = a_1^{q^4}$  und  $(a_1 a_2 a_6)^{-1} = \lambda^q$  und damit  $a_6 = \lambda^{-q} a_1^{-1} a_2^{-1} = a_1^{-q^5 - q - 1}$ . Schließlich folgt aus  $Q_4^{w_0} = P_{12}$  die Bedingung  $a_1^{-q^5 + q^3 - q - 1} = a_4 a_6 = \lambda^{q^2} = a_1^{q^6}$  und damit  $1 = a_1^{q^6 + q^5 - q^3 + q + 1}$ .

Dabei ist  $q^6 + q^5 - q^3 + q + 1 = (q^4 - q^2 + 1)(q^2 + q + 1)$ . Setzen wir  $a := a_1$ , so folgt  $a_6 = a^{-q^5 - q - 1}$  aus  $x_{12}^t = a^{q^5} x_{12} = a^{-q - 1} a_6^{-1} x_{12}$ . Erfüllt nun  $t \in T_0$  die Bedingung  $F(t) = t^{w_0}$ , so gilt  $x_1^t = a x_1, (x_2')^t = a_2 a_6 x_2' = a^{-q^5 - 1} x_2'$  und  $x_{14}^t = (a_1 a_4 a_6)^{-1} x_{14} = a^{q^5 - q^3 + q} x_{14}$ . Alle weiteren Bedingungen folgen direkt aus  $F(t) = t^{w_0}$  mit  $a^{q^6 + q^5 - q^3 + q + 1} = 1$ . Weil  $\mathbb{k}$  algebraisch abgeschlossen ist, ist  $(T_0^g)^F$  isomorph zu  $\mathbb{Z}_{(q^4 - q^2 + 1)(q^2 + q + 1)}$ .

Liegt  $t$  in der Untergruppe von  $(T_0^g)^F$  der Ordnung  $q^4 - q^2 + 1$ , so gilt zusätzlich  $a^{q^4 - q^2 + 1} = 1$ . Dann gilt  $x_{14}^t = x_{14}, x_1^t = a x_1$  und  $(x_2')^t = a^{-q^3 + q - 1} x_2'$ .

Liegt  $t$  in der Untergruppe von  $(T_0^g)^F$  der Ordnung  $q^2 + q + 1$ , so gilt zusätzlich  $a^{q^2 + q + 1} = 1$ . Dann gilt  $x_{14}^t = a^{-2} x_{14}, x_1^t = a x_1$  und  $(x_2')^t = a^q x_2'$ .

Um zu zeigen, dass  $\mathfrak{C}_G(X) = (T_0^g)^F$  gilt, zeigen wir  $\mathfrak{C}_{G(\mathbb{k})}(X) = T_0^g$ . Es ist nach Satz 6.1.4 zu zeigen, dass keine Wurzelgruppe in  $G(\mathbb{k})$  die Gruppe  $X$  zentralisiert. Dazu beachte man zunächst, dass man wie in Proposition 6.2.2 sieht, dass für

$\langle v \rangle \in \mathcal{P} \setminus \{P_{14}, P_{25}, P_{36}\}$ ,  $1 \leq k \leq 11$ ,  $v^x = \lambda v$  und  $(v^{w_0^k})^x = \mu(v^{w_0^k})$  stets  $\lambda \neq \mu$  gilt. Sei  $x_i^x = a_i x_i$ ,  $(x'_i)^x = b_i x'_i$  und  $x_{ij}^x = a_{ij} x_{ij}$  für  $1 \leq i, j \leq 6$ ,  $i \neq j$ . Wäre  $X$  enthalten im Zentralisator einer Wurzelgruppe in  $G(\mathbb{k})$ , so müsste nach Proposition 3.2.4  $a_1 = b_1$ ,  $a_1 = a_i$  oder  $a_1 = a_{ij}$  gelten für  $2 \leq i, j \leq 6$ ,  $i \neq j$ . Nach der eben gemachten Beobachtung lägen die Punkte, die im gleichen Gewichtsraum von  $X$  lägen, in verschiedenen Zykeln der Länge 12 von  $w_0$ . Es folgte  $a_1 = a_5$ ,  $a_1 = a_6$  oder  $a_1 = a_{ij}$  für  $(i, j) \in \{(2, 3), (2, 4), (2, 6), (3, 5), (4, 6), (5, 6)\}$ . Sind aber  $\langle v_1 \rangle, \langle v_2 \rangle \in \mathcal{P}$ ,  $\langle v_2 \rangle \in \Delta_4(\langle v_1 \rangle)$  und gilt  $v_1^x = \lambda v_1$  und  $v_2^x = \lambda v_2$ , so folgt für jeden Punkt  $X \in \Delta_2(\langle v_1 \rangle) \cap \Delta_2(\langle v_2 \rangle)$  mit  $\{X, \langle v_i \rangle, \langle w_i \rangle\} \in \mathcal{L}$  aus  $w_1^x = \mu w_1$  auch schon  $w_2^x = \mu w_2$  mit Hilfe der Trilinearform  $f$ . Wir erhalten einen Widerspruch dazu, dass jeder Gewichtsraum von  $X$  aus jedem Zykel der Länge 12 von  $w_0$  höchstens einen Punkt enthält, indem wir setzen:

$$X = Q_3, w_1 = x_{13} \text{ und } w_2 = x_{35} \text{ für } a_1 = a_5,$$

$$X = Q_5, w_1 = x_{15} \text{ und } w_2 = x_{56} \text{ für } a_1 = a_6,$$

$$X = Q_2, w_1 = x_{12} \text{ und } w_2 = x_3 \text{ für } a_1 = a_{23},$$

$$X = Q_2, w_1 = x_{12} \text{ und } w_2 = x_4 \text{ für } a_1 = a_{24},$$

$$X = Q_6, w_1 = x_{16} \text{ und } w_2 = x_2 \text{ für } a_1 = a_{26},$$

$$X = Q_3, w_1 = x_{13} \text{ und } w_2 = x_5 \text{ für } a_1 = a_{35},$$

$$X = Q_6, w_1 = x_{16} \text{ und } w_2 = x_4 \text{ für } a_1 = a_{46} \text{ und}$$

$$X = Q_5, w_1 = x_{15} \text{ und } w_2 = x_6 \text{ für } a_1 = a_{56}.$$

Es folgt dass  $(T_0^g)^F$  nichtausgeartet ist und für  $X \leq (T_0^g)^F$  gilt:  $\mathfrak{C}_{G(\mathbb{k})}(X) = T_0^g$  und  $\mathfrak{C}_G(X) = (T_0^g)^F$ .

Sei  $T_0^h$  ein weiterer mit einem Coxeter-Element in  $W$  getwisteter, maximaler Torus in  $G$ . Dann ist  $\tau := \gamma(hF(h)^{-1})$  in  $W$  konjugiert zu  $w_0$ . Nach Proposition 6.1.1 sowie Proposition 6.1.4 sind  $T_0^h$  und  $T_0^g$  und  $(T_0^h)^F$  und  $(T_0^g)^F$  konjugiert in  $G$ .

Schließlich ist  $X$  in  $\mathfrak{C}_G(X)$  charakteristisch, und damit gilt nach Proposition 6.1.3 und Proposition 6.1.5  $\text{Aut}_G(X) = \mathfrak{N}_G(X)/\mathfrak{C}_G(X) = \mathfrak{N}_G(\mathfrak{C}_G(X))/\mathfrak{C}_G(X) \cong \mathfrak{C}_{W,F}(w_0) = \mathfrak{C}_W(w_0) = \langle w_0 \rangle \cong \mathbb{Z}_{12}$  nach Lemma 6.2.3.

Für den Beweis der Aussage über  $X_2$  in (iv) beachte man, dass  $q^2 + q + 1$  nur die Primteiler  $(3, q - 1)$  und  $q$ -primitive Teiler von  $q^3 - 1$  besitzt. Weil für ein erzeugendes Element  $x$  der zu  $X_2$  konjugierten Untergruppe von  $T_0^g$  wie oben gesehen  $x_1^x = a x_1$  und  $(x'_2)^x = a^q x'_2$  gilt, ergeben sich die Eigenwerte  $a, a^q$  und  $a^{-q-1}$  jeweils mit Vielfachheit 8. Weil die Ordnung von  $X_2$  nicht 3 ist, sind diese verschieden. Dies zeigt die acht verschiedenen, isomorphen, treuen  $X_2$ -Moduln. Wegen  $x_{14}^x = a^{-2} x_{14}$  gibt es den weiteren  $X_2$ -Modul  $\mathfrak{C}_V(X_1)$ , auf dem  $x$  das Minimalpolynom  $(t - a^{-2})(t - a^{-2q})(t - a^{2q+2})$  hat. Wäre dieser Modul isomorph zu den anderen  $X_2$ -Untermoduln von  $V$ , so wäre  $a = a^{-2}$ ,  $a = a^{-2q}$  oder  $a = a^{2q+2}$ , in jedem Fall wegen  $a^{q^2+q+1} = 1$  also  $a^3 = 1$  im Widerspruch dazu, dass  $X_2$  keine Untergruppe von  $Z(G)$  ist.

Für den Beweis der Aussage über  $X_1$  beachte man, dass alle Primteiler von  $q^4 - q^2 + 1$   $q$ -primitive Teiler von  $q^{12} - 1$  sind. Weil für ein erzeugendes Element  $x$  der zu  $X_1$  konjugierten Untergruppe von  $T_0^g$  wie oben gesehen  $x_1^x = ax_1$  und  $(x'_2)^x = a^{-q^3+q-1}x'_2$  gilt, ergibt sich ein  $X_1$ -Modul in  $V$  mit Eigenwerten  $a^{q^i}$  und einer mit Eigenwerten  $a^{q^i(-q^3+q-1)}$  für  $x$  in  $\mathbb{k}$ . Wie oben gesehen sind diese beiden Moduln irreduzibel. Sie sind genau dann isomorph, wenn  $v^x = av$  gilt für ein  $v \in V^{\mathbb{k}}$  mit  $\langle v \rangle \in P_5^{\langle w_0 \rangle}$ . Wie oben gesehen sind dann  $P_1$  und  $\langle v \rangle$  kollinear in  $\mathcal{G}$ . Es folgt  $\langle v \rangle \in \{P_{15}, P_{13}, Q_3, Q_2\}$ .

Für  $\langle v \rangle = Q_2$  ergibt sich  $a = a^{-q^3+q-1}$ . Damit ist die Ordnung von  $a$  ein Teiler von  $(q^4 - q^2 + 1, q^3 - q + 2) = (2q - 1, q^3 - q + 2) = (2q - 1, 8q^3 - 8q + 16) = (2q - 1, 13)$ . Für  $\langle v \rangle = Q_3$  ergibt sich  $a = a^{-q^3+q^2-1}$ . Damit ist die Ordnung von  $a$  ein Teiler von  $(q^4 - q^2 + 1, q^3 - q^2 + 2) = (2q + 1, q^3 - q^2 + 2) = (2q + 1, 8q^3 - 8q^2 + 16) = (2q + 1, 13)$ .

Für  $\langle v \rangle = P_{13}$  ergibt sich  $a = a^{q^3-q^2}$ . Damit ist die Ordnung von  $a$  ein Teiler von  $(q^4 - q^2 + 1, q^3 - q^2 - 1) = (q + 2, q^3 - q^2 - 1) = (q + 2, 13)$ .

Für  $\langle v \rangle = P_{15}$  ergibt sich  $a = a^{q-1}$ . Damit ist die Ordnung von  $a$  ein Teiler von  $(q^4 - q^2 + 1, q - 2) = (q - 2, 13)$ .

Umgekehrt ist 13 genau dann ein  $q$ -primitiver Teiler von  $q^{12} - 1$ , wenn  $q + 13\mathbb{Z}$  die multiplikative Gruppe von  $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$  erzeugt, d.h. wenn  $q + 13\mathbb{Z} \in \{2 + 13\mathbb{Z}, 6 + 13\mathbb{Z}, 7 + 13\mathbb{Z}, 11 + 13\mathbb{Z}\}$  gilt.

Ist  $q \equiv 2 \pmod{13}$ , so ist 13 ein Teiler von  $q - 2$ .

Ist  $q \equiv 6 \pmod{13}$ , so ist 13 ein Teiler von  $2q + 1$ .

Ist  $q \equiv 7 \pmod{13}$ , so ist 13 ein Teiler von  $2q - 1$ .

Ist  $q \equiv 11 \pmod{13}$ , so ist 13 ein Teiler von  $q + 2$ .

Schließlich ist  $x_{14}^x = x_{14}$ , und damit folgt die Aussage über  $\mathfrak{C}_V(X_1)$ . Ist  $r$  ein  $q$ -primitiver Teiler von  $q^{12} - 1$ , d.h. ein Teiler von  $q^4 - q^2 + 1$  und  $R$  eine  $r$ -Gruppe in  $G$ , so ist  $\mathfrak{C}_V(R)$  nach Proposition 3.2.7 eine getwistete spezielle Ebene.

**Proposition 6.2.11** *Für die Chevalley-Gruppe  $G = F_4(q)$  vom Typ  $F_4$  über  $\mathbb{F}_q$  gilt  $\mu(G, V) = \nu(G, V) = 12$  auf dem Standardmodul  $\tilde{V}$  der Dimension 26 (bzw. 25 für  $\text{char}(\mathbb{F}) = 3$ ) von  $G$ .*

*Ist  $x$  ein Zsigmondy-Element in  $G$  und  $X = \langle x \rangle$ , dann gilt:*

- (i)  $\mathfrak{C}_G(X)$  ist ein maximaler, mit einem Coxeter-Element in der zugehörigen
- (ii) Weyl-Gruppe vom Typ  $F_4$  getwisteter Torus und isomorph zu  $\mathbb{Z}_{q^4-q^2+1}$ .
- (iii) Je zwei Zentralisatoren von Zsigmondy-Elementen in  $G$  sind konjugiert in  $G$ .
- (iv) Der  $X$ -Modul  $\tilde{V}$  zerfällt in die direkte Summe von  $\mathfrak{C}_{\tilde{V}}(X)$  und zwei irreduzible  $X$ -Moduln der Dimension 12, die genau dann isomorph sind, wenn  $|X| = 13$  gilt und 13 ein  $q$ -primitiver Teiler von  $q^{12} - 1$  ist.

Beweis: Die Notation aus Proposition 3.2.5 und Proposition 6.2.10 wird fortgesetzt. Es ist  $\mu = \mu(H(\mathbb{F}_q)) \leq \mu(G(\mathbb{F}_q)) = 12$ . Aus den restlichen Ergebnissen von Proposition 6.2.11 folgt  $\mu(G, V) = \nu(G, V) = 12$  mit Hilfe von Satz 2.1. Nach Proposition 3.2.5,(iv) ist die Weyl-Gruppe  $W$  von  $G$  gerade der Stabilisator der Geraden  $l := \{P_{14}, P_{25}, P_{36}\}$  in  $\mathcal{G}$ . Damit folgt  $w_0 \in W$  mit  $w_0$  wie in Lemma 6.2.3. Das Element  $w_1$  aus Lemma 6.2.3 stabilisiert keine Gerade in  $\mathcal{G}$ . Also sind alle Elemente der Ordnung 12 in  $W$  konjugiert in der Weyl-Gruppe  $\bar{W}$  von  $G(\mathbb{F})$  vom Typ  $E_6$ . Ist aber  $g \in \bar{W}$  und  $w_0^g \in W$  so ist  $l^{g^{-1}} = l^{g^{-1}w_0gg^{-1}} = l^{g^{-1}w_0}$  und damit  $l^{g^{-1}} = l$ , weil  $w_0$  nur eine Fixgerade in  $\mathcal{G}$  hat. Es folgt  $l^g = l$  und  $g \in W$ . Damit sind je zwei Elemente der Ordnung 12 in  $W$  konjugiert in  $W$ . Nach [Hum3], S. 80 haben Coxeter-Elemente in  $W$  die Ordnung 12, also bilden die Elemente der Ordnung 12 in  $W$  die Klasse der Coxeter-Elemente.

Sei  $T_1 = T_1(\mathbb{F}) := T_0 \cap H(\mathbb{F})$  wie in Proposition 3.2.5 für jeden Körper  $\mathbb{F}$ , d.h.  $T_1 = \mathfrak{C}_{T_0}(\langle x_{14}, x_{25}, x_{36} \rangle)$ . Sei  $g \in H(\mathbb{k})$  mit  $\gamma(gF(g)^{-1}) = w_0$ . Nach Proposition 6.1.2 ist  $(T_1^g)^F$  konjugiert zu  $\{t \in T_1 | F(t) = t^{w_0}\} = \{t \in \mathfrak{C}_{T_0}(\langle x_{14}, x_{25}, x_{36} \rangle) | F(t) = t^{w_0}\}$ . Nach Proposition 6.2.10 ist dann  $(T_1^g)^F$  genau die Untergruppe der Ordnung  $q^4 - q^2 + 1$  des maximalen Torus  $(T_0^g)^F$  von  $G(\mathbb{F}_q)$ , und es folgt (i).

Sei  $T_1^h$  ein weiterer mit einem Coxeter-Element in  $W$  getwisteter, maximaler Torus in  $G$ . Dann ist  $\tau := \gamma(hF(h)^{-1})$  in  $W$  konjugiert zu  $w_0$ . Nach Proposition 6.1.1 sowie Proposition 6.1.4 sind  $T_1^h$  und  $T_1^g$  und  $(T_1^h)^F$  und  $(T_1^g)^F$  konjugiert in  $G$ .

Ist  $\bar{T} \cong \mathbb{Z}_{(q^4 - q^2 + 1)(q^2 + q + 1)}$  ein mit  $w_0$  getwisteter Torus in  $G(\mathbb{F}_q)$ , so enthält  $\bar{T}$  einen mit  $w_0$  getwisteten Torus  $T$  von  $H(\mathbb{F}_q)$ . Es gilt  $T = (T_1^g)^F$  und  $\bar{T} = (T_0^g)^F$  für ein geeignetes  $g \in G(\mathbb{k})$ .

Die Behauptung (iv) folgt direkt aus Proposition 6.2.10,(iv).

Schließlich ist  $X$  in  $\mathfrak{C}_G(X)$  charakteristisch, und damit gilt nach Proposition 6.1.3 und Proposition 6.1.5  $\text{Aut}_G(X) = \mathfrak{N}_G(X)/\mathfrak{C}_G(X) = \mathfrak{N}_G(\mathfrak{C}_G(X))/\mathfrak{C}_G(X) \cong \mathfrak{C}_{W,F}(w_0) = \mathfrak{C}_W(w_0) = \langle w_0 \rangle \cong \mathbb{Z}_{12}$ . Dazu beachte man, dass  $\mathfrak{C}_W(w_0) \cong \mathfrak{C}_{\bar{W}}(w_0) = \langle w_0 \rangle$  gilt.

**Proposition 6.2.12** *Für die getwistete Gruppe  $G = {}^3D_4(q)$  gilt  $\mu(G, V) = \nu(G, V) = 4$  auf dem Standardmodul  $V$  der Dimension 8 über  $\mathbb{F}_{q^3}$  von  $G$ .*

*Ist  $x$  ein Zsigmondy-Element in  $G$  und  $X = \langle x \rangle$ , dann gilt:*

- (i)  $\mathfrak{C}_G(X)$  ist ein maximaler Torus in  $G$  und isomorph zu  $\mathbb{Z}_{q^4 - q^2 + 1}$ .
- (ii)  $\text{Aut}_G(X)$  ist eine zyklische Gruppe der Ordnung 4.
- (iii) Je zwei Zentralisatoren von Zsigmondy-Elementen in  $G$  sind konjugiert in  $G$ .
- (iv) Der  $X$ -Modul  $V$  zerfällt in die direkte Summe von zwei irreduziblen  $X$ -Moduln der Dimension 4, die genau dann isomorph sind, wenn  $|X| = 13$  gilt und 13 ein  $q$ -primitiver Teiler von  $q^{12} - 1$  ist.

Beweis: Sei  $W$  der Standard-Modul der Dimension 27 für  $H := E_6(q)$ ,  $\hat{U} \leq W$  eine getwistete spezielle Ebene,  $G_0 = \mathfrak{C}_H(\hat{U})$  und  $V_0 = [W, G_0]$ . Dann ist  $G_0 \cong G$  nach Proposition 3.2.7, und aus der Konstruktion im Beweis zu Proposition 3.2.7 ist klar, dass  $V_0$  als  $G$ -Modul isomorph ist zu  $V$  betrachtet als Modul über  $\mathbb{F}_q$ . Nach Konstruktion ist  $G \leq O(V, Q)$  für eine quadratische Form  $Q$  mit Witt-Index 4. Nach Proposition 6.2.7 folgt  $\mu \leq 6$ . Außerdem existiert kein  $g \in G$ , das irreduzibel auf einem Teilmodul  $U$  von  $V$  der Dimension 5 wirkt, denn sonst wäre  $Q|_U$  nichtausgeartet im Widerspruch zu Proposition 6.2.5.

Angenommen es existiert ein  $g \in G$ , das irreduzibel auf einem Teilmodul  $U$  von  $V$  der Dimension 6 wirkt. Dann bleibt  $U$  über  $\mathbb{F}_q$  nicht irreduzibel, sonst würde das entsprechende Element in  $G_0$  irreduzibel auf einem Teilmodul von  $W$  der Dimension 18 wirken im Widerspruch zu  $\mu(E_6(q)) = 12$ . Demnach zerfällt  $U$  über  $\mathbb{F}_q$  in drei irreduzible Teilmoduln (siehe z.B. [As1],(26.4)). Es folgt, dass die Ordnung von  $g$  ein Teiler von  $q^6 - 1 = (q^3)^2 - 1$  ist und ein irreduzibler  $\langle g \rangle$ -Modul über  $\mathbb{F}_{q^3}$  im Widerspruch zur Annahme Dimension 2 hat. Aus den restlichen Ergebnissen von Proposition 6.2.12 und Satz 2.1 folgt  $\mu(G, V) = \nu(G, V) = 4$ .

Wirke nun  $g$  irreduzibel auf einem Teilmodul  $U$  von  $V$  der Dimension 4. Angenommen,  $U$  zerfällt über  $\mathbb{F}_q$  in 3 irreduzible Teilmoduln der Dimension 4. Sei  $z \in H$  ein erzeugendes Element der zyklischen Untergruppe  $\mathfrak{C}_H(G_0)$  der Ordnung  $q^2 + q + 1$  (siehe Proposition 3.2.7). Nach Proposition 6.2.10 zerfällt  $W$  in die direkte Summe von 9 irreduziblen  $\langle z \rangle$ -Moduln der Dimension 3. Weil  $z$  und  $g$  kommutieren, wirkt  $zg$  irreduzibel auf einem Teilmodul von  $W$  der Dimension 12. Elemente, die irreduzibel auf einem Teilmodul von  $W$  wirken und in einem der in Lemma 6.2.4 beschriebenen Tori enthalten sind, haben in  $W$  irreduzible Teilmoduln der Dimension 12, 6, 4, 4 und 1, stabilisieren also keine Ebene. Demnach ist  $\mathfrak{C}_H(zg)$  ein mit einem Coxeter-Element getwisteter, maximaler Torus  $T$  in  $H$ . Nach Proposition 6.2.10 ist  $g$  enthalten in der Untergruppe von  $T$  der Ordnung  $q^4 - q^2 + 1$ . Es folgt der Widerspruch, dass  $U$  über  $\mathbb{F}_q$  irreduzibel bleibt. Folglich bleibt  $U$  über  $\mathbb{F}_q$  irreduzibel, und das  $g$  entsprechende Element  $\hat{g}$  in  $G_0$  ist ein Zsigmondy-Element in  $H$ . Dann ist  $T = \mathfrak{C}_H(\hat{g})$  ein maximaler Torus in  $H$ . Sei  $T_1$  die Untergruppe von  $T$  der Ordnung  $q^4 - q^2 + 1$ . Es folgt  $\mathfrak{C}_{G_0}(\hat{g}) = T \cap G_0 = T_1$ . Wegen  $\mathfrak{C}_{G_0}(T_1) = T_1$  ist  $T_1$  ein maximaler Torus in  $G_0$ .

Weil  $X$  charakteristisch in  $T_1$  ist, ist  $\text{Aut}_G(X) = \mathfrak{N}_G(X)/\mathfrak{C}_G(X)$  isomorph zu  $\mathfrak{N}_{G_0}(T_1)/T_1$ , und weil  $T_1$  charakteristisch in  $T$  ist, ist  $\mathfrak{N}_{G_0}(T_1) = \mathfrak{N}_H(T) \cap G_0$ . Nach Proposition 3.2.7 induziert  $\mathfrak{N}_H(T)$  auf  $\hat{U}$  eine nichtabelsche Erweiterung einer normalen, zyklischen Gruppe der Ordnung  $q^2 + q + 1$  mit einer Gruppe der Ordnung 3. Es folgt (ii).

Sei  $y \in G$  ein weiteres Zsigmondy-Element in  $G$ . Nach Proposition 6.2.10 ist der Zentralisator  $T_2$  des entsprechenden Elementes in  $G_0$  konjugiert in  $H$  zu  $T_1$ , etwa  $T_2 = T_1^h$ . Wegen  $\mathfrak{C}_W(T_1) = \mathfrak{C}_W(T_1^h) = \mathfrak{C}_W(T_1)^h$  liegt  $h$  in  $G_0$ . Es folgt (iii).

Aussage (iv) folgt unmittelbar aus Proposition 6.2.10,(iv).

**Proposition 6.2.13** *Sei  $W \cong O_6^-(2)$  die Weyl-Gruppe von  $E_6(\mathbb{F})$  betrachtet als Permutationsgruppe auf der Punktmenge  $\mathcal{P}$  von  $\mathcal{G}$ .*

- (i)  *$W$  besitzt genau eine Konjugiertenklassen von Elementen der Ordnung 9. Ist  $w \in W$  ein Element der Ordnung 9, so ist  $\mathfrak{C}_W(w) = \langle w \rangle$ .*
- (ii) *Ist  $G = E_6(q)$  und  $T \leq G$  ein mit einem Element der Ordnung 9 gewisteter maximaler Torus, so ist  $T \cong \mathbb{Z}_{q^6+q^3+1}$  nichtausgeartet.*
- (iii) *Ist  $G \cong {}^2E_6(q)$ , so ist  $\mu(G, V) = \nu(G, V) = 9$  auf dem Standardmodul  $V$  der Dimension 27 über  $\mathbb{F}_{q^2}$ . Ist  $x$  ein Zsigmondy-Element in  $G$ , so ist  $\mathfrak{C}_G(x)$  ein zu  $\mathbb{Z}_{q^6-q^3+1}$  isomorpher maximaler Torus  $T$  in  $G$ .*
- (iv) *In der Situation in (iii) ist  $\text{Aut}_G(\langle x \rangle)$  eine zyklische Gruppe der Ordnung 9, und je zwei Zentralisatoren von Zsigmondy-Elementen in  $G$  sind konjugiert in  $G$ .*
- (v) *In (ii) und (iii) zerfällt der  $T$ -Modul  $V$  in die direkte Summe dreier irreduzibler Moduln der Dimension 9.*

Beweis: Die Notation von Kapitel 3.2 wird fortgesetzt. Aussage (i) liest man aus der Charaktertafel von  $W$  in [At] ab. Nach [As6], (7.5) ist ein Element der Ordnung 9 in  $W$  gegeben durch  $w_0 = (P_1P_{56}Q_3Q_6P_{23}P_4P_{16}P_{14}P_{34})(P_2P_{46}P_{45}Q_1P_{25}Q_4P_{12}P_{13}P_5)(P_3Q_2P_{24}P_{35}P_{26}P_{15}Q_5P_6P_{36})$ . Sei  $g \in G(\mathbb{k})$  mit  $\gamma(gF(g)^{-1}) = w_0$ . Nach Proposition 6.1.2 ist  $(T_0^g)^F$  konjugiert zu  $\{t \in T_0 \mid F(t) = t^{w_0}\}$ . Mit  $F(t) = t^{w_0}$  folgen aus  $P_2^{w_0} = P_{46}$ ,  $P_{46}^{w_0} = P_{45}$ ,  $P_{45}^{w_0} = Q_1$ ,  $Q_1^{w_0} = P_{25}$ ,  $P_{25}^{w_0} = Q_4$  und  $Q_4^{w_0} = P_{12}$  für  $t = t(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$  die Bedingungen  $a_1a_2a_3a_5a_6^2 = a_2^q$ ,  $(a_4a_5a_6)^{-1} = a_2^{q^2}$ ,  $a_1a_6 = a_2^{q^3}$ ,  $(a_2a_5a_6)^{-1} = a_2^{q^4}$ ,  $a_4a_6 = a_2^{q^5}$  und  $(a_1a_2a_6)^{-1} = a_2^{q^6}$  und damit  $a_1 = a_2^{-q^5+q^4+q^3-q^2+1}$ ,  $a_3 = a_2^{q^4-q^3+q}$ ,  $a_4 = a_2^{q^4-q^2+1}$ ,  $a_5 = a_2^{-q^5-q^2}$ ,  $a_6 = a_2^{q^5-q^4+q^2-1}$  und  $(a_1a_2a_6)^{-1} = a_2^{-q^3-1} = a_2^{q^6}$ . Aus der letzten Gleichung folgt  $a_2^{q^6+q^3+1} = 1$ . Umgekehrt gilt unter diesen Bedingungen stets  $F(t) = t^{w_0}$ . Weil  $\mathbb{k}$  algebraisch abgeschlossen ist, ist  $(T_0^g)^F$  isomorph zu  $\mathbb{Z}_{q^6+q^3+1}$ . Nach [As6], (7.5) sind alle Eigenwerte eines erzeugenden Elementes von  $T$  in  $\mathbb{k}$  verschieden. Insbesondere ist  $T$  nichtausgeartet.

Sei nun  $G \cong {}^2E_6(q)$ . Wie im Fall der unitären Gruppen muss man nun  $F_q$  durch  $\xi F_q$  ersetzen, wobei  $\xi$  die Hintereinanderausführung von Invertieren und Transponieren bezüglich  $B$  ist. Weil für Permutationsmatrizen Transponieren und Invertieren dasselbe ist, wirkt  $\xi F_q$  trivial auf  $W$ . Die Berechnung der maximalen Tori ist nun völlig analog zum Fall der unitären Gruppen, d.h. man hat die Bedingung  $\xi F(t) = t^{w_0}$  statt  $F(t) = t^{w_0}$  zu verifizieren. Auf  $T_0$  wirkt  $\xi$  als die Abbildung, die jedes Element auf sein Inverses abbildet. Für  $x \in B$  mit  $x^{w_0} = y$ ,  $x^t = \lambda x$  und  $y^t = \mu y$  folgt die Bedingung  $\lambda = \mu^{-q}$  statt  $\lambda = \mu^q$ . Da sich  $\nu(G, V) =$

9 direkt aus der Gruppenordnung von  $G$  ablesen läßt und  $\mu(G, V)$  ein Teiler der Ordnung eines Elementes der Weyl-Gruppe von  $E_6(q^2)$  ist, ist  $\mu(G, V) \in \{9, 10, 12\}$ . Wie im Fall der unitären Gruppen in gerader Dimension folgt nun, dass beim twisten mit einem Element  $w$  der Ordnung 12 oder 10 auf allen Zyklen von  $w$  der Länge 12 bzw. 10 die Bedingung  $\lambda^{q^{12}-1} = 1$  bzw.  $\lambda^{q^{10}-1} = 1$  auftritt, der entsprechende Torus also irreduzible Teilräume der Dimension 6 bzw. 5 über  $\mathbb{F}_{q^2}$  hat. Genau so sieht man, dass jeder Torus, der irreduzibel auf einem Teilmodul von  $V$  der Dimension 9 wirkt, erhalten wird wie oben die Tori der Ordnung 9 in  $E_6(q)$  mit den entsprechenden Änderungen bei der Berechnung seiner Gewichte und seiner Ordnung. Man muss in der obigen Rechnung nur jeweils  $q$  durch  $-q$  ersetzen und erhält  $a_1 = a_2^{q^5+q^4-q^3-q^2+1}$ ,  $a_3 = a_2^{q^4+q^3-q}$ ,  $a_4 = a_2^{q^4-q^2+1}$ ,  $a_5 = a_2^{q^5-q^2}$ ,  $a_6 = a_2^{-q^5-q^4+q^2-1}$  und  $a_2^{q^6-q^3+1} = 1$ .

Um zu zeigen, dass  $\mathfrak{C}_G(X) = (T_0^g)^{\xi F}$  gilt, zeigen wir  $\mathfrak{C}_{G(\mathbb{k})}(X) = T_0^g$ . Es ist nach Satz 6.1.4 zu zeigen, dass keine Wurzelgruppe in  $G(\mathbb{k})$  die Gruppe  $X$  zentralisiert. Wir argumentieren wie im Beweis zu Proposition 6.2.10. Entlang der Bahnen von  $w_0$  sind die Eigenwerte eines Zsigmondy-Elementes verschieden. Die Zerlegung in Bahnen von  $w_0$  liefert eine 3-Zerlegung von  $V^{\mathbb{k}}$  in die entsprechenden  $T$ -invarianten Räume. Weil  $G(\mathbb{k})$  auf einer 3-Zerlegung die Gruppe  $S_3$  induziert, genügt es zu zeigen, dass die Eigenwerte eines Zsigmondy-Elementes auf  $x_1$  verschieden sind von denen auf Basisvektoren in  $(x_2)^{w_0}$ . Ist  $v_1$  ein solches Element und  $v_2 \in B$ , so dass  $\langle v_2 \rangle$  in  $\mathcal{G}$  verbunden ist mit  $\langle x_1 \rangle$  und  $\langle v_1 \rangle$ , so sind auch die Eigenwerte auf den jeweiligen dritten Punkten  $\langle v_3 \rangle$  und  $\langle v_4 \rangle$  der Verbindungsgeraden in  $\mathcal{G}$  gleich. Für  $(v_1, v_2, v_3, v_4) \in \{(x_2, x'_3, x_{13}, x_{23}), (x_{46}, x'_6, x_4, x_{16}), (x_{45}, x_{12}, x'_2, x_{36}), (x'_1, x_{14}, x_4, x'_4), (x_{25}, x_{13}, x'_3, x_{46}), (x_5, x'_2, x_{12}, x_{25})\}$  ergibt sich jeweils der Widerspruch, dass man doch gleiche Eigenwerte innerhalb eines Zyklus von  $w_0$  erhält.

Sei  $T_0^h$  ein weiterer, mit einem Element der Ordnung 9 in  $W$  getwisteter, maximaler Torus in  $G$ . Dann ist  $\tau := \gamma(hF(h)^{-1})$  in  $W$  konjugiert zu  $w_0$ . Nach Proposition 6.1.1 sowie Proposition 6.1.4 sind  $T_0^h$  und  $T_0^g$  und  $(T_0^h)^{\xi F}$  und  $(T_0^g)^{\xi F}$  konjugiert in  $G$ .

Schließlich ist  $X$  in  $\mathfrak{C}_G(X)$  charakteristisch, und damit gilt nach Proposition 6.1.3 und Proposition 6.1.5  $\text{Aut}_G(X) = \mathfrak{N}_G(X)/\mathfrak{C}_G(X) = \mathfrak{N}_G(\mathfrak{C}_G(X))/\mathfrak{C}_G(X) \cong \mathfrak{C}_{W,F}(w_0) = \mathfrak{C}_W(w_0) = \langle w_0 \rangle \cong \mathbb{Z}_9$ . Die Aussage (v) folgt aus der Darstellung der Tori auf  $V^{\mathbb{k}}$ .

Im Folgenden sei stets  $\mathbb{F}$  ein Körper mit von 2 verschiedener Charakteristik,  $q$  also ungerade. Diese Einschränkung ergibt sich, weil wir Notation und Beschreibung der Gruppen vom Typ  $E_7$  aus [Coo2] übernehmen. Sie ergibt sich in [Coo2], wenn die 4-Form definiert wird, als deren Isometriegruppe die Gruppen vom Typ  $E_7$  auftreten. Da die Wirkung der Weyl-Gruppe auf einem maximalen Torus jedoch

nicht vom zugrundeliegenden Körper abhängt, sollten die folgenden Ergebnisse auch in Charakteristik 2 gelten. Wir verzichten jedoch darauf, diesen Zusammenhang näher auszuführen.

**Lemma 6.2.5** *Sei  $W$  die Weyl-Gruppe von  $E_7(\mathbb{F})$  betrachtet als Permutationsgruppe auf der Punktmenge  $\Omega$  von  $(\Omega, \Gamma)$  mit der Notation aus Kapitel 3.3. Die Elemente, die mindestens die Ordnung 18 haben, zerfallen in die zwei folgenden Konjugiertenklassen:*

- (i) *Eine Klasse mit Elementen der Ordnung 30. Ein Vertreter dieser Klasse ist gegeben durch*

$$w_0 := (P_{12}Q_{14}P_{13}Q_{12}P_{14}Q_{13})(P_{15}P_{58}P_{18}P_{68}Q_{57}Q_{15}Q_{58}Q_{18}Q_{68}P_{57})(P_{16}Q_{17}Q_{56}P_{67}Q_{78}Q_{16}P_{17}P_{56}Q_{67}P_{78})(P_{23}P_{37}Q_{28}P_{45}Q_{36}Q_{34}Q_{47}P_{38}Q_{25}P_{46}P_{24}P_{27}Q_{48}P_{35}Q_{26}Q_{23}Q_{37}P_{28}Q_{45}P_{36}P_{34}P_{47}Q_{38}P_{25}Q_{46}Q_{24}Q_{27}P_{48}Q_{35}P_{26}),$$
*und es gilt  $\mathfrak{C}_W(w_0) = \langle w_0 \rangle$ .*
- (ii) *Die Klasse der Coxeter-Elemente in  $W$ . Coxeter-Elemente in  $W$  haben die Ordnung 18, und ein Vertreter ist gegeben durch*

$$w_1 := (P_{13}Q_{13})(Q_{12}P_{15}P_{26}P_{37}P_{45}P_{16}P_{27}P_{34}Q_{23}P_{12}Q_{15}Q_{26}Q_{37}Q_{45}Q_{16}Q_{27}Q_{34}P_{23})(P_{14}Q_{35}Q_{56}P_{48}P_{18}P_{28}P_{38}P_{58}Q_{47}Q_{14}P_{35}P_{56}Q_{48}Q_{18}Q_{28}Q_{38}Q_{58}P_{47})(P_{17}P_{24}Q_{25}Q_{36}Q_{57}P_{78}Q_{67}P_{68}Q_{46}Q_{17}Q_{24}P_{25}P_{36}P_{57}Q_{78}P_{67}Q_{68}P_{46}),$$
*und es gilt  $\mathfrak{C}_W(w_1) = \langle w_1 \rangle$ .*

Beweis: Nach [At] hat  $\mathrm{Sp}_6(2)$  genau eine Konjugiertenklasse mit Elementen der Ordnung 9 und eine Konjugiertenklasse mit Elementen der Ordnung 15. Alle weiteren Elemente haben höchstens die Ordnung 12 und höchstens die Ordnung 7, wenn ihre Ordnung ungerade ist. Die Elemente der Ordnung 9 und 15 erzeugen jeweils ihren Zentralisator. Es folgt die Behauptung über die Konjugiertenklassen von  $W$  wegen  $W \cong \mathrm{Sp}_6(2) \times \mathbb{Z}_2$ . Ebenso folgt die Behauptung über die Zentralisatoren von  $w_0$  und  $w_1$ . Das Element  $w_1$  wurde mit Hilfe des Algebra-Programmes GAP gefunden.

Es bleibt zu zeigen, dass  $w_1$  ein Coxeter-Element in  $W$  ist. Für  $1 \leq i \leq 6$  sei  $s_i \in W$  definiert durch  $P_{lm}^{s_i} = P_{l\tau m\tau}$  und  $Q_{lm}^{s_i} = Q_{l\tau m\tau}$  für  $1 \leq l < m \leq 8$  mit  $\tau = (i \ i + 1)$ . Weil  $s_i$  durch ein Element der Gruppe  $P$  (vgl. Kapitel 3.3) induziert wird, liegt  $s_i$  in  $W$ . Sei weiter  $s_7 = (P_{12}Q_{34})(Q_{12}P_{34})(P_{13}Q_{24})(Q_{13}P_{24})(P_{14}Q_{23})(Q_{14}P_{23})(P_{56}Q_{78})(Q_{56}P_{78})(P_{57}Q_{68})(Q_{57}P_{68})(P_{58}Q_{67})(Q_{58}P_{67})$ . Ist  $\sigma$  wie in Kapitel 3.3 und  $\alpha$  definiert wie die Elemente  $s_i$  mit  $\tau = (36)(48)$ , so ist  $s_7 = \sigma^\alpha \in W$ . Offenbar bildet  $(s_1, \dots, s_7)$  ein Coxeter-System in  $W$ . Dazu beachte man, dass die sich Relationen innerhalb von  $\{s_1, \dots, s_6\}$  aus den entsprechenden Relationen in  $S_6$  ergeben. Außerdem sieht man  $[s_i, s_7] = 1$  für  $i \neq 4$ . Da  $s_4 s_7$  ein Element der Ordnung 3 ist, folgt die Behauptung.

**Lemma 6.2.6** *Für die einfach-zusammenhängende Chevalley-Gruppe  $G = E_7(q)$  vom Typ  $E_7$  über  $\mathbb{F}_q$  gilt  $\mu(G, V) = 30$  auf dem Standardmodul  $V$  der Dimension 56 von  $G$ .*

*$G$  enthält genau eine Konjugiertenklasse von maximalen Tori, die irreduzibel auf einem Untermodul einer Dimension größer als 18 wirken. Ist  $T$  ein solcher Torus, so gilt  $T \cong \mathbb{Z}_{(q^5-1)(q^2-q+1)}$ . Der  $T$ -Modul  $V$  zerfällt in die direkte Summe irreduzibler Untermoduln der Dimensionen 30, 10, 10 und 6. Es gilt  $\mathfrak{C}_G(T) = T$  und  $\text{Aut}_G(T) \cong \mathbb{Z}_{30}$ .*

Beweis: Die Notation aus Kapitel 3.3 wird fortgesetzt. Ist  $F = F_q$  bezüglich der Basis  $B$  von  $V$ , so können wir  $G$  mit  $G(\mathbb{k})^F$  identifizieren. Dabei ist  $V = \langle B \rangle_{\mathbb{F}_q}$  und  $V^{\mathbb{k}} = \langle B \rangle_{\mathbb{k}}$ . Nach Proposition 3.3.2 ist  $T_0(\mathbb{k})$  ein maximaler Torus, und die Weyl-Gruppe  $\mathfrak{N}_{G(\mathbb{k})}(T_0(\mathbb{k}))$  wirkt wie dort beschrieben auf  $T_0(\mathbb{k})$ .  $F$  induziert auf  $W$  die Identität. Damit sind alle maximalen Tori in  $G$  enthalten in den mit demselben Element aus  $W$ , betrachtet als Element der Weyl-Gruppe von  $\text{GL}(V^{\mathbb{k}})$ , getwisteten Tori von  $\text{GL}(V)$ . Mit Lemma 6.2.5 folgt  $\mu(G, V) \leq 30$  und dass es höchstens eine Konjugiertenklasse von maximalen Tori gibt, die irreduzibel auf einem Untermodul von  $V$  einer Dimension größer als 18 wirken.

Sei  $w_0$  wie in Lemma 6.2.5 und  $g \in G(\mathbb{k})$  mit  $\gamma(gF(g)^{-1}) = w_0$ . Nach Proposition 6.1.2 ist  $(T_0^g)^F$  konjugiert zu  $\{t \in T_0 \mid F(t) = t^{w_0}\}$ . Setze  $\beta := a_1 a_2 a_7$ . Mit  $F(t) = t^{w_0}$  folgen aus  $P_{26}^{w_0} = P_{23}$ ,  $Q_{35}^{w_0} = P_{26}$ ,  $P_{48}^{w_0} = Q_{35}$ ,  $Q_{27}^{w_0} = P_{48}$ ,  $Q_{24}^{w_0} = Q_{27}$  und  $Q_{46}^{w_0} = Q_{24}$  für  $t = t(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7)$  sukzessive die Bedingungen  $a_7 a_1 a_6 = \beta$ ,  $a_7 a_4 a_6 = \beta^q$ ,  $a_1 a_3 a_6 = \beta^{-q^2}$ ,  $a_7 a_1 a_3 a_4 a_5 a_6^2 = \beta^{-q^3}$ ,  $a_7 a_5 a_6 = \beta^{-q^4}$ ,  $a_7 a_2 a_6 = \beta^{-q^5}$  und  $a_2 a_4 a_6 = \beta^{-q^6}$ . Aus diesen Gleichungen wiederum folgt sukzessive  $a_5 = \beta^{-q^3} (a_1 a_3 a_6)^{-1} (a_7 a_4 a_6)^{-1} = \beta^{-q^3+q^2-q}$ ,  $a_1 = \beta (a_7 a_6)^{-1} = \beta^{q^4+1} a_5 = \beta^{q^4-q^3+q^2-q+1}$ ,  $a_4 = \beta^q (a_7 a_6)^{-1} = \beta^{q^4+q} a_5 = \beta^{q^4-q^3+q^2}$ ,  $a_2 = \beta^{-q^5} (a_7 a_6)^{-1} = \beta^{-q^5+q^4} a_5 = \beta^{-q^5+q^4-q^3+q^2-q}$ ,  $a_6 = \beta^{-q^6} (a_2 a_4)^{-1} = \beta^{-q^6+q^5-2q^4+2q^3-2q^2+q}$ ,  $a_7 = \beta (a_1 a_6)^{-1} = \beta^{q^6-q^5+q^4-q^3+q^2}$  und  $a_3 = \beta^{-q^2} (a_1 a_6)^{-1} = \beta^{q^6-q^5+q^4-q^3-1}$ . Aus  $P_{25}^{w_0} = Q_{46}$  folgt schließlich  $\beta^{q^7} = a_7 a_3 a_6 = \beta^{q^6-q^5-q^2+q-1}$  und damit  $1 = \beta^{q^7-q^6+q^5+q^2-q+1}$ . Dabei ist  $q^7 - q^6 + q^5 + q^2 - q + 1 = (q^2 - q + 1)(q^5 + 1)$ .

Nun überprüft man leicht, dass  $t = t(a_1, \dots, a_7)$  genau dann die Bedingung  $F(t) = t^{w_0}$  erfüllt, wenn die Körperelemente  $a_i$  ( $1 \leq i \leq 7$ ) die oben angegebenen Potenzen von  $\beta$  sind für ein  $\beta \in \mathbb{k}$  mit  $\beta^{q^7-q^6+q^5+q^2-q+1} = 1$ . Weil  $\mathbb{k}$  algebraisch abgeschlossen ist, ist  $(T_0^g)^F$  isomorph zu  $\mathbb{Z}_{(q^2-q+1)(q^5+1)}$ .

Sei  $(T_0^g)^F = \langle t \rangle$ . Dann ist  $x_{23}^t = a_7 a_1 a_6 x_{23} = \beta x_{23}$ ,  $x_{16}^t = a_4 x_{16} = \beta^{q^4-q^3+q^2} x_{16}$ ,  $x_{15}^t = a_3 x_{15} = \beta^{q^6-q^5+q^4-q^3-1} x_{15}$  und  $x_{12}^t = a_7 x_{12} = \beta^{q^6-q^5+q^4-q^3+q^2} x_{12}$ . Ist  $f$  ein ganzzahliges Polynom, so ist die Ordnung von  $\beta^{f(q)}$  gleich  $((q^2 - q + 1)(q^5 + 1)) / ((q^2 - q + 1)(q^5 + 1), f(q))$ , die Ordnung von  $\beta^{q^4-q^3+q^2}$  also gleich  $q^5 + 1$ , die von  $\beta^{q^6-q^5+q^4-q^3-1}$  gleich  $q^5 + 1$  und die von  $\beta^{q^6-q^5+q^4-q^3+q^2}$  gleich  $q^3 + 1$ . Es folgt die Aussage über die Dimensionen der  $T$ -Untermodul von  $V$ .

Außerdem sind die Eigenwerte von  $t$  innerhalb jedes Zyklus von  $w_0$  und zwischen Eigenräumen in Zykeln verschiedener Länge von  $w_0$  verschieden. Würde  $t$  aber eine Wurzelgruppe zentralisieren, so folgte aus der Struktur der Wurzelgruppen, dass die Vereinigung der beiden Zykeln der Länge 10 von  $w_0$  eine Clique in  $(\Omega, \Gamma)$  der Ordnung 6 enthielte, was nicht der Fall ist, weil innerhalb dieser beiden Zykeln nur 5 verschiedene Indizes vorkommen. Mit Satz 6.1.3 und Satz 6.1.4 folgt  $\mathfrak{C}_{G(\mathbb{k})}(t) = \langle t \rangle$  und  $\mathfrak{C}_G(T) = T$ . Nach Proposition 6.1.3 und Proposition 6.1.5 ist  $\text{Aut}_G(T) \cong \mathfrak{C}_W(w_0) = \langle w_0 \rangle \cong \mathbb{Z}_{30}$ .

**Proposition 6.2.14** *Für die einfach-zusammenhängende Chevalley-Gruppe  $G = E_7(q)$  vom Typ  $E_7$  über  $\mathbb{F}_q$  gilt  $\nu(G, V) = 18$  auf dem Standardmodul  $V$  der Dimension 56 von  $G$ .*

*Ist  $x$  ein Zsigmondy-Element in  $G$  und  $X = \langle x \rangle$ , so gilt:*

- (i)  $\mathfrak{C}_G(X)$  ist ein maximaler, mit einem Coxeter-Element in der zugehörigen Weyl-Gruppe getwisteter Torus und isomorph zu  $\mathbb{Z}_{(q^6 - q^3 + 1)(q+1)}$ .
- (ii)  $\text{Aut}_G(X)$  ist eine zyklische Gruppe der Ordnung 18.
- (iii) Je zwei Zentralisatoren von Zsigmondy-Elementen von  $G$  sind konjugiert in  $G$ .
- (iv) Sei  $X_1$  eine Untergruppe von  $\mathfrak{C}_G(X)$ , deren Ordnung  $q^6 - q^3 + 1$  teilt, aber nicht 3, und  $X_2$  eine Untergruppe von  $\mathfrak{C}_G(X)$ , deren Ordnung  $q+1$  teilt, aber nicht 4. Dann ist  $\mathfrak{C}_V(X_1)$  zweidimensional, und für jedes  $0 \neq x \in \mathfrak{C}_V(X_1)$  ist  $-F(x)$  kein Quadrat in  $\mathbb{F}_q$ . Es ist  $\mathfrak{C}_G(\mathfrak{C}_V(X_1)) \cong {}^2E_6(q)$ . Die nichttrivialen  $X_1$ -Untermodule von  $V$  haben die Dimension 18 und sind treue  $X_1$ -Module. Als  $X_2$ -Modul zerfällt  $V$  in die direkte Summe des treuen, irreduziblen  $X_2$ -Moduls  $\mathfrak{C}_V(X_1)$  und 27 weitere treue, irreduzible, paarweise isomorphe, zu  $\mathfrak{C}_V(X_1)$  nicht isomorphe  $X_2$ -Module.

Beweis: Notation und Voraussetzungen seien wie in Lemma 6.2.6. Aus der Ordnung von  $G$  liest man  $\nu(G, V) = 18$  direkt ab. Jedes Zsigmondy-Element wirkt treu auf einem Untermodul der Dimension 18 von  $V$  und ist damit enthalten in einem maximalen Torus von  $G$ , der mit einem Element in  $W$  getwistet ist, dessen Ordnung ein Vielfaches von 18 ist. Es folgt  $\nu(G, V) = 18$ . Sei  $w_1$  wie in Lemma 6.2.5 und  $g \in G(\mathbb{k})$  mit  $\gamma(gF(g)^{-1}) = w_1$ . Nach Proposition 6.1.2 ist  $(T_0^g)^F$  konjugiert zu  $\{t \in T_0 \mid F(t) = t^{w_1}\}$ . Mit  $F(t) = t^{w_1}$  folgen aus  $P_{15}^{w_1} = Q_{12}$ ,  $P_{26}^{w_1} = P_{15}$ ,  $P_{37}^{w_1} = P_{26}$ ,  $P_{45}^{w_1} = P_{37}$ ,  $P_{16}^{w_1} = P_{45}$  und  $P_{27}^{w_1} = P_{16}$  für  $t = t(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7)$  mit  $\alpha := a_2^{-1}$  sukzessive die Bedingungen  $a_2 = \alpha^{-1}$ ,  $a_5 = \alpha^q$ ,  $a_6 = \alpha^{q^5}$ ,  $a_1 = \alpha^{q^2}(a_2 a_6)^{-1} = \alpha^{-q^5 + q^2 + 1}$ ,  $a_4 = \alpha^{q^4}(a_1 a_5)^{-1} = \alpha^{q^5 + q^4 - q^2 - q - 1}$ ,  $a_7 = \alpha^{q^6}(a_1 a_2)^{-1} = \alpha^{q^6 + q^5 - q^2}$  und  $a_3 = \alpha^{q^3}(a_1 a_7)^{-1} = \alpha^{-q^6 + q^3 - 1}$ . Aus  $P_{34}^{w_1} = P_{27}$  folgt schließlich  $a_1 a_3 a_4 = \alpha^{-q^6 + q^4 + q^3 - q - 1} = (a_1 a_2 a_7)^q = \alpha^{q^7}$  und damit  $1 = \alpha^{q^7 + q^6 - q^4 - q^3 + q + 1}$ . Dabei ist  $q^7 + q^6 - q^4 - q^3 + q + 1 = (q^6 - q^3 + 1)(q + 1)$ .

Nun überprüft man leicht, dass  $t = t(a_1, \dots, a_7)$  genau dann die Bedingung  $F(t) = t^{w_1}$  erfüllt, wenn die Körperelemente  $a_i$  ( $1 \leq i \leq 7$ ) die oben angegebenen Potenzen von  $\alpha$  sind für ein  $\alpha \in \mathbb{k}$  mit  $\alpha^{q^7+q^6-q^4-q^3+q+1} = 1$ . Weil  $\mathbb{k}$  algebraisch abgeschlossen ist, ist  $(T_0^g)^F$  isomorph zu  $\mathbb{Z}_{(q^6-q^3+1)(q+1)}$ .

Liegt  $t$  in der Untergruppe von  $(T_0^g)^F$  der Ordnung  $q^6 - q^3 + 1$ , so ist sogar  $\alpha^{q^6-q^3+1} = 1$ . Dann gilt  $x_{13}^t = x_{13}$ ,  $y_{13}^t = y_{13}$ ,  $x_{12}^t = \alpha^{-1}$ ,  $x_{14}^t = \alpha^{q^5+q^4-q^2-q-1}$  und  $x_{17}^t = \alpha^{q^5+q^3-q^2-1}$ . Liegt  $t$  in der Untergruppe von  $(T_0^g)^F$  der Ordnung  $q + 1$ , so ist  $\alpha^{q+1} = 1$ . Dann gilt  $y_{13}^t = \alpha^3 y_{13}$ ,  $y_{12}^t = \alpha y_{12}$ ,  $y_{14}^t = \alpha y_{14}$  und  $y_{17}^t = \alpha y_{17}$ .

Um zu zeigen, dass  $\mathfrak{C}_G(X) = (T_0^g)^F$  gilt, zeigen wir  $\mathfrak{C}_{G(\mathbb{k})}(X) = T_0^g$ . Es ist nach Satz 6.1.4 zu zeigen, dass keine Wurzelgruppe in  $G(\mathbb{k})$  die Gruppe  $X$  zentralisiert. Dazu zeigen wir, dass der Zentralisator der zu  $X$  konjugierten Untergruppe  $\tilde{X} = \langle \tilde{x} \rangle$  in  $\{t \in T_0 \mid F(t) = t^{w_1}\}$  keine Wurzelgruppe bezüglich  $T_0$  enthält. Dazu beachte man zunächst, dass man wie in Proposition 6.2.2 sieht, dass für  $\langle v \rangle, \langle w \rangle \in \Omega$  mit  $v^{\tilde{x}} = \lambda v$  und  $w^{\tilde{x}} = \mu w$  stets  $\lambda \neq \mu$  gilt, falls  $\langle v \rangle$  und  $\langle w \rangle$  in derselben Bahn von  $\langle w_1 \rangle$  liegen oder genau einer der beiden Punkte in  $\{P_{13}, Q_{13}\}$  liegt. Sei  $x_{ij}^{\tilde{x}} = a_{ij} x_{ij}$  für  $1 \leq i, j \leq 8$ ,  $i \neq j$ . Wäre  $\tilde{X}$  enthalten im Zentralisator einer Wurzelgruppe in  $G(\mathbb{k})$ , so müssten nach Proposition 3.3.3 zwei verschiedene Punkte in  $\Omega$ , die in  $(\Omega, \Gamma)$  verbunden sind, in einem gemeinsamen Gewichtsraum von  $\tilde{X}$  liegen. Wir zeigen, dass daraus aber folgt, dass auch zwei verschiedene Punkte in  $\Omega$ , die in einer gemeinsamen Bahn von  $w_1$  der Länge 18 liegen oder von denen genau einer in einer Bahn von  $w_1$  der Länge 2 liegt, in einem gemeinsamen Gewichtsraum von  $\tilde{X}$  liegen. Liege zunächst  $P_{12}$  in einem gemeinsamen Gewichtsraum mit einem adjazenten Punkt  $Q$ , der nicht in  $P_{12}^{w_1}$  liegt. Ist  $Q = Q_{ij}$  mit  $3 \leq i < j \leq 8$ , so folgt  $1 = a_{12} a_{ij} a_{1i} a_{2j} = a_{1i} a_{2j}$  und analog  $1 = a_{1j} a_{2i}$  (vgl. die Monome vom Typ 8. und 9. der zugehörigen 4-Form). Also liegen dann auch  $P_{1i}$  und  $Q_{2j}$  sowie  $P_{1j}$  und  $Q_{2i}$  in einem gemeinsamen Gewichtsraum von  $\tilde{x}$ . Übrig bleiben die Fälle  $Q_{58}, Q_{78}, Q_{68}$  und  $Q_{46}$ . In diesen Fällen ergeben sich, wie eben gesehen, je drei Paare von Punkten in  $\Omega$  mit gleichem Gewicht für  $\tilde{x}$ . Durch Konjugation mit  $w_1$  ergeben sich jeweils vier verschiedene Punkte in  $\Omega$  mit demselben Gewicht. Es ergibt sich ein Widerspruch, weil diese nicht in verschiedenen Zykeln der Länge 18 von  $w_1$  liegen können. Ebenso argumentiert man für die beiden Zykeln  $P_{14}^{w_1}$  und  $P_{17}^{w_1}$  mit  $P_{14}$  und  $Q_{ij}$  für  $\{1, 4\} \cap \{i, j\} = \emptyset$ .

Zu betrachten bleiben die Fälle, dass  $P_{12}$  in einem Gewichtsraum mit  $P_{14}, P_{18}$  oder  $P_{28}$  oder  $P_{14}$  in einem Gewichtsraum mit  $P_{17}, P_{24}$  oder  $P_{46}$  liegt. Mit Hilfe der Monome vom Typ 8 bis 13 ergibt sich, dass mit  $P_{ij}$  und  $P_{ik}$  für  $i \neq j \neq k \neq i$  stets auch für alle  $s \in \Omega \setminus \{i, j, k\}$  die Punkte  $P_{sj}$  und  $P_{sk}$  im gleichen Gewichtsraum von  $\tilde{x}$  liegen wegen  $1 = a_{ij} a_{sk} a_{ik}^{-1} a_{js}^{-1} = a_{sk} a_{js}^{-1}$ . (Dabei wurde  $P_{ij} = P_{ji}$  gesetzt.) In den obigen Fällen folgt in derselben Reihenfolge, dass auch die Paare  $(P_{23}, P_{34}), (P_{23}, P_{38}), (P_{13}, P_{18}), (P_{46}, P_{67}), (P_{13}, P_{23})$  und  $(P_{13}, P_{36})$  in einem gemeinsamen Gewichtsraum von  $\tilde{x}$  liegen, ein direkter Widerspruch

außer im Fall  $(P_{23}, P_{38})$ , aber dort folgt der Widerspruch, weil mit  $(P_{12}, P_{18})$  auch  $(P_{23}, Q_{48})$  in einem gemeinsamen Gewichtsraum liegen.

Es folgt dass  $T_0^g$  nichtausgeartet ist und für  $X \leq (T_0^g)^F$  gilt:  $\mathfrak{C}_{G(\mathbb{k})}(X) = T_0^g$  und  $\mathfrak{C}_G(X) = (T_0^g)^F$ .

Sei  $T_0^h$  ein weiterer mit einem Coxeter-Element in  $W$  getwisteter, maximaler Torus in  $G$ . Dann ist  $\tau := \gamma(hF(h)^{-1})$  in  $W$  konjugiert zu  $w_1$ . Nach Proposition 6.1.1 sowie Proposition 6.1.4 sind  $T_0^h$  und  $T_0^g$  und  $(T_0^h)^F$  und  $(T_0^g)^F$  konjugiert in  $G$ .

Schließlich ist  $X$  in  $\mathfrak{C}_G(X)$  charakteristisch, und damit gilt nach Proposition 6.1.3 und Proposition 6.1.5  $\text{Aut}_G(X) = \mathfrak{N}_G(X)/\mathfrak{C}_G(X) = \mathfrak{N}_G(\mathfrak{C}_G(X))/\mathfrak{C}_G(X) \cong \mathfrak{C}_{W,F}(w_1) = \mathfrak{C}_W(w_1) = \langle w_1 \rangle \cong \mathbb{Z}_{18}$  nach Lemma 6.2.5.

Für den Beweis von Aussage (iv) beachte man die oben ausgeführten Beobachtungen über die Wirkung der entsprechenden Untergruppen von  $(T_0^g)^F$  auf  $P_{12}, P_{13}, P_{14}$  und  $P_{17}$ . Für die Gruppe  $X_2$  erhält man die Eigenwerte  $\alpha$  und  $\alpha^{-1}$  jeweils mit Vielfachheit 27 und mit Vielfachheit 1 die Eigenwerte  $\alpha^3$  und  $\alpha^{-3}$ . Weil  $|X_2|$  kein Teiler von 3 ist, erhalten wir lauter treue  $X_2$ -Moduln. Wären sie nicht zweidimensional, so wäre  $\alpha$  oder  $\alpha^3$  ein Teiler von  $q-1$  und damit von  $(q-1, q+1) = 2$ , ein Widerspruch. Weil  $|X_2|$  kein Teiler von 4 ist, ist  $\mathfrak{C}_V(X_1)$  nicht isomorph zu den übrigen  $X_2$ -Untermoduln von  $V$ .

Weil für ein erzeugendes Element  $\bar{x}$  der zu  $X_1$  konjugierten Untergruppe von  $T_0^g$  wie oben gesehen  $x_{13}^{\bar{x}} = x_{13}$ ,  $y_{12}^{\bar{x}} = \alpha y_{12}$ ,  $x_{14}^{\bar{x}} = \alpha^{q^5+q^4-q^2-q-1} x_{14}$  und  $x_{17}^{\bar{x}} = \alpha^{q^5+q^3-q^2-1} x_{17}$  für ein  $\alpha$  mit  $\alpha^{q^6-q^3-1}$  gilt, ergibt sich ein  $X_1$ -Modul in  $V$  mit Eigenwerten  $\alpha^{q^i}$ , einer mit Eigenwerten  $\alpha^{q^i(q^5+q^4-q^2-q-1)}$  und einer mit Eigenwerten  $\alpha^{q^i(q^5+q^3-q^2-1)}$  für  $\bar{x}$ . Weil  $q^5+q^4-q^2-q-1$  und  $q^5+q^3-q^2-1$  teilerfremd zu  $q^6-q^3+1$  sind, sind diese Moduln irreduzibel. Außerdem ist  $\mathfrak{C}_V(G)$  zweidimensional. Wegen  $F(X_{13}x_{13} + Y_{13}y_{13}) = -X_{13}^2 Y_{13}^2$  ist  $F(v) \neq 0$  für jedes von 0 verschiedene  $v \in \mathfrak{C}_V(X_1)$ . Nach Proposition 3.3.4 ist  $-F(v)$  kein Quadrat, weil  $|E_6(q)|$  durch keinen  $q$ -primitiven Teiler von  $q^{18}-1$  teilbar ist. Nun folgt der Rest von (iv) mit Proposition 3.3.4.



## Kapitel 7

# Zsigmondy-Elemente in endlichen Gruppen vom Lie-Typ

### 7.1 Gruppen vom Typ $G_2$

Die Notation aus Kapitel 3.1 wird fortgesetzt. Stets sei  $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$  ein endlicher Körper,  $q \neq 2$  eine Potenz der Primzahl  $p$  und  $G = G(\mathbb{F})$  eine Chevalley-Gruppe vom Typ  $G_2$  über  $\mathbb{F}$ . Es gilt  $\Phi_6(q) = \Phi_6^*(q) \cdot (\Phi_6(q), 3) \mid |G|$ . Nach Proposition 6.2.9 gilt für jeden Primteiler  $r$  von  $\Phi_6^*(q)$  und jede nichttriviale  $r$ -Untergruppe von  $G$ , dass  $\mathfrak{C}_G(R)$  ein zyklischer, maximaler Torus von  $G$  der Ordnung  $\Phi_6(q)$  und  $\text{Aut}_G(R) \cong \mathbb{Z}_6$  ist. Es folgt sofort:

**Lemma 7.1.1** *Sei  $U$  eine Untergruppe von  $G$  mit  $(|U|, \Phi_6^*(q)) \neq 1$  und  $r$  ein Primteiler von  $(|U|, \Phi_6^*(q))$ .*

*Dann ist  $\mathfrak{N}_G(U)/U$  eine metazyklische Gruppe, deren Ordnung  $\frac{6\Phi_6(q)}{r}$  teilt.*

Beweis: Sei  $R$  eine  $r$ -Sylowgruppe von  $U$  und  $N = \mathfrak{N}_G(U)$ . Nach dem Frattini-Argument ist  $N = U\mathfrak{N}_N(R)$  und damit  $N/U \cong \mathfrak{N}_N(R)/\mathfrak{N}_U(R)$ . Weil  $\mathfrak{N}_N(R)$  metazyklisch ist, ist auch  $N/U$  metazyklisch. Die Aussage über die Ordnung von  $N/U$  folgt, wegen  $R \leq \mathfrak{N}_U(R)$  und wegen  $|\mathfrak{N}_G(R)| = 6\Phi_6(q)$ .

**Proposition 7.1.1** *Sei  $\text{char}(\mathbb{F}) \neq 2$ . Dann gilt:*

- (i) *Es existieren Zerlegungen  $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_7$  mit  $\mathcal{Z} = \{V_i \mid 1 \leq i \leq 7\}$  von  $V$ , so dass  $N := \mathfrak{N}_G(\mathcal{Z})$  imprimitiv und irreduzibel auf  $V$  wirkt und  $C := \mathfrak{C}_G(\mathcal{Z}) \neq 1$  ist. Es ist dann  $\mathfrak{C}_G(C) = C \cong E_8$  und  $\mathfrak{N}_G(C) = N$  eine nicht-zerfallende Erweiterung von  $C$  mit einer zu  $GL_3(2)$  isomorphen Gruppe.*

- (ii) Definiert man auf  $\mathcal{Z}$  eine Geradenmenge bestehend aus allen Tripeln von Punkten  $V_{i_k} = \langle v_{i_k} \rangle$ , ( $1 \leq k \leq 3$ ) mit  $f(v_{i_1}, v_{i_2}, v_{i_3}) \neq 0$ , so erhält man eine zu  $PG_2(2)$  isomorphe Geometrie, auf der  $\mathfrak{N}_G(\mathcal{Z})/\mathfrak{C}_G(\mathcal{Z})$  kanonisch wirkt.
- (ii) Alle Zerlegungen wie in (i) sind unter  $G$  konjugiert.

Beweis: Nach ([As3],(8.2) und (8.5)) bleibt nur zu zeigen, dass die Erweiterung nicht zerfällt und dass (ii) gilt.

Zum Beweis von (ii) beachte man, dass nach [As3],(8.2) für je zwei Punkte  $\langle x \rangle, \langle y \rangle \in \mathcal{Z}$  genau ein  $\langle z \rangle \in \mathcal{Z}$  existiert mit  $f(x, y, z) \neq 0$ . Weil  $f$  alternierend ist, ist  $\langle z \rangle \notin \{\langle x \rangle, \langle y \rangle\}$ . Damit sind je zwei Punkte inzident mit genau einer Geraden. Es ist  $\mathfrak{C}_C(\langle x, y \rangle) \cong \mathbb{Z}_2$  und  $\mathfrak{C}_V(\mathfrak{C}_C(\langle x, y \rangle)) = \langle x, y, z \rangle$ . Würden sich zwei Geraden trivial schneiden, so würde das Produkt der beiden Involutionen, die je eine zentralisieren genau einen Punkt in  $\mathcal{Z}$  zentralisieren im Widerspruch zu der Tatsache, dass der Zentralisator in  $V$  jeder Involution  $\tau$  in  $G$  Dimension 3 hat, wie man sofort sieht, wenn man  $\tau$  in einen maximalen Torus von  $G^{\mathbb{k}}$  einbettet.

Um zu zeigen, dass die Erweiterung nicht zerfällt, zeigen wir, dass jede Involution in  $N$  schon in  $C$  enthalten ist. Angenommen es existiert eine Involution  $\tau \in N \setminus C$ . Alle Involutionen in  $GL_3(2)$  sind konjugiert. Die Fixpunkte von  $\tau$  in  $\mathcal{Z}$  bilden eine Gerade, etwa  $\{\langle x_i \rangle \mid 1 \leq i \leq 3\}$  mit  $f(x_1, x_2, x_3) \neq 0$  und  $x_i^\tau = \lambda_i x_i$  für  $1 \leq i \leq 3$ . Es folgt  $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$ . Also existiert ein Punkt  $\langle y_1 \rangle \in \mathcal{Z}$  mit  $y_1^\tau = y_1$  und eine Gerade  $\{\langle y_i \rangle \mid 1 \leq i \leq 3\}$  mit  $y_2^\tau = \mu_2 y_3$  und  $y_3^\tau = \mu_3 y_2$ . Weil  $f$  alternierend ist, folgt  $\mu_2 \mu_3 = -1$  im Widerspruch zur Annahme, dass  $\tau$  eine Involution ist.

**Satz 7.1.1** Sei  $U$  eine auflösbare Untergruppe von  $G$  mit  $(|U|, \Phi_6^*(q)) \neq 1$ . Sei  $r$  ein Primteiler von  $(|U|, \Phi_6^*(q))$  und  $R$  eine  $r$ -Untergruppe von  $G$ .

Ist  $R$  nicht normal in  $U$ , so gilt:

- (i) Es ist  $|R| = 7$  und  $\text{char}(\mathbb{F}) \neq 2$ .
- (ii) Es existiert eine Zerlegung  $\mathcal{Z}$  von  $V$  wie in Proposition 7.1.1, so dass  $\mathfrak{C}_G(\mathcal{Z}) \leq U \leq \mathfrak{N}_G(\mathcal{Z})$  gilt und  $U$  das semidirekte Produkt von  $\mathfrak{C}_G(\mathcal{Z})$  mit einer zyklischen Gruppe der Ordnung 7 oder einer Frobeniusgruppe der Ordnung 21 ist.

Beweis: Die nicht-trivialen  $R$ -Untermoduln von  $V$  sind  $[V, R]$  und  $\mathfrak{C}_V(R) = [V, R]^\perp$ . Ist  $W$  ein  $U$ -Untermodul von  $V$ , so ist auch  $W^\perp$  ein  $U$ -Untermodul. Deshalb besitzt  $U$  genau einen irreduziblen und treuen Untermodul von  $V$ , nämlich  $V$  oder  $[V, R]$ . Sei  $W$  ein treuer, irreduzibler  $U$ -Modul in  $V$  und  $R \not\trianglelefteq U$ .

Ist  $W$  ein imprimitiver  $U$ -Modul und ist der Kern  $K$  der Wirkung von  $U$  auf der entsprechenden Zerlegung von  $W$  von 1 verschieden, so ist  $K$  eine  $r'$ -Gruppe. Wegen  $|R| \geq 7$  ist  $W = V$  und  $U$  nach Proposition 7.1.1 enthalten in einer Untergruppe von  $\mathfrak{N}_G(\mathcal{Z})$  wie in Proposition 7.1.1. Es folgt  $|R| = 7$  und  $\text{char}(\mathbb{F}) \neq 2$  wegen  $\dim(V) = 7$ . Wegen  $K \neq 1$  ist  $K \leq C$ , und es gilt  $K = C$ , weil  $R$  transitiv auf den von 1 verschiedenen Elementen von  $C$  wirkt. Außerdem sind die einzigen auflösbaren Untergruppen von  $\text{GL}_3(2)$ , die ein Element der Ordnung 7 enthalten, zyklisch der Ordnung 7 oder Frobeniusgruppen der Ordnung 21. Die Erweiterung zerfällt jeweils nach dem Satz von Schur-Zassenhaus.

Angenommen  $W$  ist kein imprimitiver  $U$ -Modul mit von 1 verschiedenem Kern der Wirkung auf der entsprechenden Zerlegung von  $V$ . Sei  $A$  ein maximaler abelscher Normalteiler von  $U$ . Dann ist  $A$  eine  $r'$ -Gruppe und  $W$  ein homogener  $A$ -Modul. Andernfalls würden die  $A$ -homogenen Komponenten eine Zerlegung von  $W$  bestimmen, auf deren Elementen  $U$  wirkte. Der Kern der Wirkung von  $U$  auf diesen Elementen enthielte  $A \neq 1$ . Insbesondere ist  $A$  zyklisch und  $W$  die direkte Summe von isomorphen, irreduziblen  $A$ -Moduln der Dimension  $t \leq \mu(G) = 6$ . Nach Lemma 6.2.1 ist  $\text{Aut}_G(A)$  eine zyklische Gruppe, deren Ordnung  $t$  teilt. Demnach wird  $A$  von  $R$  zentralisiert. Insbesondere ist  $\mathfrak{C}_U(A) \neq A$  und aufgrund der Maximalität von  $A$  nicht abelsch. Nach Lemma 1.1 ist ein minimaler nichtabelscher Normalteiler  $N$  von  $U$  in  $\mathfrak{C}_U(A)$  eine  $s$ -Gruppe vom symplektischen Typ mit Exponent  $s(s, 2)$  für eine Primzahl  $s$  mit  $Z(N) \leq A \leq \mathfrak{C}_U(R)$ . Jeder von 3 verschiedene Primteiler von  $|\mathfrak{C}_G(R)|$  ist ein  $q$ -primitiver Teiler von  $q^6 - 1$ . Weil  $s$ -Gruppen in  $G$  für  $q$ -primitive Primteiler  $s$  von  $q^6 - 1$  zyklisch sind, folgt  $s = 3$  und  $|N| = 3^{1+2k}$ . Die treuen irreduziblen Darstellungen von  $N$  haben den Grad  $3^k$ . Es folgt  $k = 1$  und ein Widerspruch, weil  $|R|$  nicht die Ordnung  $|\text{SL}_2(3)| = 8 \cdot 3$  von  $\text{Out}(N)$  teilt.

**Korollar 7.1.1** *Sei  $r$  eine Primzahl, die  $\Phi_6^*(q)$  teilt,  $U$  eine Untergruppe von  $G$  und  $R$  eine  $r$ -Gruppe, die in  $\mathfrak{N}_G(U)$  liegt, aber nicht in  $U$ .*

*Ist  $[R, U] \neq 1$ , so ist  $\text{char}(\mathbb{F}) \neq 2$ ,  $|R| = 7$ , und es existiert eine Zerlegung  $\mathcal{Z}$  von  $V$  wie in Proposition 7.1.1, so dass  $U = \mathfrak{C}_G(\mathcal{Z})$  gilt.*

Beweis: Sei  $s$  ein Primteiler von  $|U|$ . Zunächst zeigt man wie in [He1], Satz 2, dass  $R$  eine  $s$ -Sylowgruppe  $S$  von  $U$  normalisiert. Sei nämlich  $S \in \text{Syl}_s(U)$  und  $N = \mathfrak{N}_G(U)$ . Nach dem Frattini-Argument ist  $N = U\mathfrak{N}_N(S)$ . Wir wählen eine  $r$ -Sylowgruppe  $R_2$  von  $\mathfrak{N}_N(S)$  und eine  $r$ -Sylowgruppe  $R_1$  von  $N$ , die  $R_2$  enthält, und setzen  $R_3 = R_1 \cap U$ . Es ist  $R_2 \not\leq R_3$ , sonst wäre  $R_1 = R_3$  in  $U$  enthalten im Widerspruch zur Voraussetzung, dass  $R$  nicht in  $U$  liegt. Weil die  $r$ -Sylowgruppen von  $G$  zyklisch sind, ist  $R_3 \leq R_1 \leq \mathfrak{N}_N(S)$ . Nun ist  $R$  in  $N$  konjugiert zu einer Untergruppe von  $R_1$ , etwa  $R \leq R_1^n$ . Dann ist  $R \leq R_1^n \leq (\mathfrak{N}_N(S))^n \leq \mathfrak{N}_N(S^n)$ .

Sei nun  $S$  eine  $s$ -Sylowgruppe von  $U$ , die von  $R$  normalisiert wird. Dann ist  $SR$  eine auflösbare Untergruppe von  $G$ , deren Ordnung durch einen  $q$ -primitiven Teiler von  $q^6 - 1$  teilbar ist. Nach Satz 7.1.1 ist  $SR$  abelsch oder  $s = 2$ . Insbesondere ist  $U$  das Produkt der zyklischen Untergruppe  $\mathfrak{C}_U(R)$  und einer 2-Gruppe und nach dem Satz von Kegel und Wielandt ([Ke]) auflösbar. Ist nun  $[R, U] \neq 1$ , so ist  $UR$  eine auflösbare Gruppe, in der  $R$  nicht normal ist. Die Behauptung folgt nun mit Satz 7.1.1.

**Satz 7.1.2** *Sei  $U$  eine nicht auflösbare Untergruppe von  $G$  mit  $(|U|, \Phi_6^*(q)) \neq 1$ . Sei  $r$  eine Primzahl, die  $(|U|, \Phi_6^*(q))$  teilt,  $R$  eine  $r$ -Sylowgruppe von  $U$  und  $S$  der normale Abschluss von  $R$  in  $U$ . Ist dann  $A$  der maximale auflösbare Normalteiler von  $U$  und  $B/A$  ein nicht auflösbarer, minimaler Normalteiler von  $U/A$ , so gilt:*

- (i)  $U/B$  ist eine Gruppe der Ordnung 1, 2 oder 3 oder isomorph zu  $S_3$ .
- (ii)  $B/A$  ist eine einfache nichtabelsche Gruppe, und es gilt  $(|U|, \Phi_6^*(q)) = (|B/A|, \Phi_6^*(q))$ .
- (iii) Es ist  $A = F(U)$  abelsch,  $|A| = 8$  für  $A \neq Z(B)$  und  $|A| \mid (3, q + 1)$  für  $A = Z(B)$ .
- (iv) Ist  $A \neq Z(B)$ , so ist  $(|U|, \Phi_6^*(q)) = |R| = 7$ ,  $\text{char}(\mathbb{F}) \neq 2$ , und es existiert eine Zerlegung  $\mathcal{Z}$  von  $V$  wie in Proposition 7.1.1 mit  $A = \mathfrak{C}_G(\mathcal{Z})$  und  $U = B = \mathfrak{N}_G(\mathcal{Z})$ .
- (v) Ist  $A = Z(B) = 1$ , so ist  $B = S$  einfach und  $U$  isomorph zu einer Untergruppe von  $\text{Aut}(B)$ .
- (vi) Ist  $A = Z(B) \neq 1$ , so ist  $U$  enthalten in  $\mathfrak{N}_G(\mathfrak{C}_V(R))$ , einer Erweiterung von  $SU_3(q)$  mit einem äußeren Automorphismus der Ordnung 2. Es ist  $B' = S$  quasieinfach,  $F(U) = A$ ,  $E(U) = B'$  und  $F^*(U) = B$ .

Beweis: Aus Lemma 7.1.1 folgt sofort  $(|A|, \Phi_6^*(q)) \neq 1$ . Wäre nun  $(|U/B|, \Phi_6^*(q)) \neq 1$ , so wäre  $B$  nach Korollar 7.1.1 auflösbar. Mit Lemma 7.1.1 ist  $U/B$  eine metazyklische Gruppe, deren Ordnung  $\frac{6\Phi_6(q)}{\Phi_6^*(q)} = 6 \cdot (3, q-1)$  teilt. Nun ist  $B/A$  ein minimaler Normalteiler von  $U/A$ , also das direkte Produkt isomorpher abelscher Gruppen, deren Ordnung durch  $r$  teilbar ist. Weil die  $r$ -Sylowgruppen von  $G$  zyklisch sind, ist  $B/A$  einfach. Mit Korollar 7.1.1 folgt, dass  $A$  abelsch ist, weil  $A$  von  $R$  normalisiert wird. Aus  $R \leq B$  folgt  $S \leq B$  und  $SA \trianglelefteq B$ . Weil  $B/A$  einfach ist, ist  $SA = B$ .

Gilt  $[R, A] = 1$ , so zentralisiert  $A$  als in  $U$  normale Gruppe alle  $r$ -Sylowgruppen in  $U$  und damit  $S$ . Wegen  $B = SA$  ist dann  $A \leq Z(B)$ . Ist also  $A \neq Z(B)$ , so ist  $RA$  eine auflösbare Untergruppe von  $U$ , in der  $R$  nicht normal ist. Nach Satz 7.1.1 und Korollar 7.1.1 folgt (iv).

Sei also  $[R, A] = 1$  und damit  $A = Z(B)$ . Dann ist  $A = 1$  oder  $|A| = 3 \mid q+1$  und es folgt (iii). Außerdem ist  $B/Z(B)$  eine nichtabelsch einfache Gruppe. Nach [As1], (31.1) ist  $B'$  quasieinfach und  $B = B' \cdot Z(B)$ . Insbesondere ist  $R \leq B' \leq E(U)$ . Jede weitere Komponente von  $U$  würde  $B'$  und damit auch  $R$  nach [As1], (31.5) zentralisieren. Weil  $\mathfrak{C}_G(R)$  zyklisch ist, ist  $E(U) = B'$  und  $F^*(U) = E(U)F(U) = B' \cdot Z(B) = B$ . Als Normalteiler der quasieinfachen Gruppe  $B'$ , der nicht in  $Z(B')$  enthalten ist, ist  $S = B'$ . Ist in dieser Situation  $A = 1$ , so ist  $B = SA = S$  eine quasieinfache Gruppe, die keinen nicht-trivialen auflösbaren Normalteiler enthält, also einfach. Mit  $B$  ist auch  $\mathfrak{C}_U(B) \leq \mathfrak{C}_U(R)$  in  $U$  normal und zyklisch und damit trivial. Also wirkt  $U/B$  treu auf  $U$ , und es folgt (v). Ist  $A = Z(B) \cong \mathbb{Z}_3$ , so ist  $U \leq \mathfrak{N}_G(\mathfrak{C}_V(R))$ , weil  $\mathfrak{C}_V(R) = \mathfrak{C}_V(X)$  gilt für jede nicht-triviale Untergruppe  $X$  von  $\mathfrak{C}_G(R)$ , insbesondere für  $X = A$ .

Schließlich gibt es in  $B$  kein normales  $r$ -Komplement. Nach dem Verlagerungssatz von Burnside ([Hup1], Kap. IV, 2.6) ist  $\text{Aut}_B(R) \neq 1$ . Nun ist die maximale Gruppe in  $\mathfrak{N}_U(R)$ , deren Ordnung zu  $\Phi_6^*(q)$  teilerfremd ist, zyklisch der Ordnung 6 oder isomorph zu  $S_3 \times \mathbb{Z}_3$ . Wie in Lemma 7.1.1 ist  $U/B$  isomorph zu einem homomorphen Bild dieser Gruppe mit einem Kern, der einen nicht-trivialen Schnitt mit einer zyklischen Gruppe der Ordnung 6 hat. Es folgt (a).

**Satz 7.1.3** *Sei  $U$  eine nicht auflösbare Untergruppe von  $G$  mit  $(|U|, \Phi_6^*(q)) \neq 1$ . Dann gilt einer der folgenden Fälle:*

- (i)  $U = G$ .
- (ii) *Es ist  $\mathfrak{C}_G(\mathfrak{C}_V(R)) \leq U \leq \mathfrak{N}_G(\mathfrak{C}_V(R))$  mit  $\mathfrak{C}_G(\mathfrak{C}_V(R)) \cong SU_3(q)$  für einen Primteiler  $r$  von  $\Phi_6^*(q)$  und eine  $r$ -Sylowgruppe  $R$  von  $G$ .*
- (iii) *Es ist  $p = 3$  und  $U$  konjugiert zu einer der Gruppen in (ii) unter einem äußeren Automorphismus von  $G$ .*
- (iv) *Es ist  $(|U|, \Phi_6^*(q)) = 7$  und  $U$  eine zu  $PSL_3(2)$  oder zu  $PGL_2(7)$  isomorphe Untergruppe einer Gruppe wie in (ii).*
- (v) *Es ist  $q$  eine ungerade Potenz von 3 und  $U \cong {}^2G_2(q)$  die Gruppe der Fixpunkte unter einem äußeren Automorphismus von  $G$ .*
- (vi) *Für einen Teilkörper  $K$  von  $\mathbb{F}$  mit  $([\mathbb{F}:K], 6) = 1$  ist  $U = G(K)$  oder eine Untergruppe wie in (ii), (iii) oder (iv) von  $G(K)$ .*
- (vii) *Es ist  $\text{char}(\mathbb{F}) \neq 2$ ,  $(|U|, \Phi_6^*(q)) = 7$  und es existiert eine direkte Zerlegung  $\mathcal{Z}$  von  $V$  wie in Proposition 7.1.1 mit  $U = \mathfrak{N}_G(\mathcal{Z})$ .*
- (viii) *Es ist  $\text{char}(\mathbb{F}) \neq 2$ ,  $(|U|, \Phi_6^*(q)) = 7$  und  $U \cong PSL_3(2)$ .  $U$  wirkt imprimitiv und irreduzibel auf  $V$ .*

- (ix) Es ist  $(|U|, \Phi_6^*(q)) = 7$  und  $U$  ist eine Schur-Erweiterung von  $A_7$  oder  $S_7$  mit einem Zentrum der Ordnung 3, und es gilt  $q = 5^a$  mit  $(a, 6) = 1$ .
- (x) Es ist  $(|U|, \Phi_6^*(q)) = 7$  oder  $(|U|, \Phi_6^*(q)) = 13$ ,  $p \neq 13$ ,  $\mathbb{F}$  ein Zerfällungskörper von  $X^2 - 13$  und  $U \cong \text{PSL}_2(13)$ .
- (xi) Es ist  $(|U|, \Phi_6^*(q)) = 7$ ,  $\mathbb{F}$  ein Zerfällungskörper von  $X^3 - 3X + 1$  und  $U \cong \text{PSL}_2(8)$ .
- (xii) Es ist  $(|U|, \Phi_6^*(q)) = 7$ ,  $p > 3$  und  $U \cong G_2(2)$  oder  $U \cong G_2(2)'$ .

*Bemerkungen:*

- (i) 7 ist genau dann ein Teiler von  $\Phi_6^*(q)$ , wenn gilt:  $q \equiv 3 \pmod{7}$  oder  $q \equiv 5 \pmod{7}$ .
- (ii) Alle oben angegebenen Fälle existieren tatsächlich, falls in den Fällen (vii) bis (xii) 7 ein Teiler von  $\Phi_6^*(q)$  ist.

Beweis: Die Notation aus Satz 7.1.2 wird fortgesetzt. Nach Satz 7.1.2 haben wir nur den Fall zu betrachten, dass  $A = Z(B)$  ist. Sei zunächst  $B/A$  eine alternierende Gruppe. Nach [As3], (14.5) enthält  $G$  keine zu  $A_7$  isomorphe Untergruppe. Damit ist  $A \neq 1$ , und  $B/A$  hat eine projektive Darstellung von einem Grad  $\leq 3$ . Nach [KL], Proposition 5.3.7 ist  $\text{char}(\mathbb{F}) = 5$  und  $B/A \cong A_7$ . Umgekehrt enthält  $\text{SU}_3(5)$  nach [At] eine Schur-Erweiterung von  $A_7$  und eine Erweiterung von  $\text{SU}_3(5)$  mit einem Automorphismus der Ordnung 2 eine Schur-Erweiterung von  $S_7$ . Nun ist 7 genau dann ein  $5^a$ -primitiver Teiler von  $5^{6a} - 1$ , wenn  $(a, 6) = 1$  gilt.

Sei nun  $B/A$  eine sporadisch einfache Gruppe oder eine Gruppe vom Lie-Typ in einer von  $p$  verschiedenen Charakteristik. Nach [KL], Proposition 5.3.8 und Table 5.3.A besitzen unter den Gruppen, die einen Primteiler enthalten, der kongruent 1 modulo 6 ist, nur  $\text{PSL}_3(2) \cong \text{PSL}_2(7)$  und  ${}^2B_2(8)$  eine projektive Darstellung von einem Grad  $\leq 3$ . Nach [At] ist die Ordnung ihrer Schur-Multiplikatoren nicht durch 3 teilbar.

Folglich ist  $B$  einfach. Nach [KL], Table 5.3.A haben unter den Gruppen, die einen Primteiler enthalten, der kongruent 1 modulo 6 ist, nur die folgenden Gruppen eine projektive Darstellung, deren Grad  $\leq 7$  ist:

$M_{22}$ ,  $J_1$ ,  $J_2$ ,  $\text{PSL}_2(7) \cong \text{PSL}_3(2)$ ,  $\text{PSL}_2(13)$ ,  $\text{PSL}_2(8) \cong {}^2G_2(3)'$ ,  $\text{PSL}_3(4)$ ,  $\text{PSL}_4(2)$ ,  ${}^2B_2(8)$ ,  $\text{PSU}_3(3) \cong G_2(2)'$ ,  $\text{PSU}_4(3)$ ,  $\text{Sp}_6(2)$ . Darunter haben  $M_{22}$ ,  $\text{PSL}_4(2) \cong A_8$ ,  $\text{PSU}_4(3)$  und  $\text{Sp}_6(2)$  eine zu  $A_7$  isomorphe Untergruppe. Nach [As3], (14.1) ist der  $s$ -Rang jeder  $s$ -Untergruppe von  $G$  mit einer von  $p$  verschiedenen Primzahl  $s$  höchstens 3.  $J_2$  und  $\text{PSL}_3(4)$  enthalten eine elementar-abelsche 2-Gruppe der Ordnung 16. Eine Untergruppe von  ${}^2B_2(8)$  der Ordnung 7 normalisiert eine 2-Gruppe der Ordnung  $2^6$ , und eine Untergruppe der Ordnung 13 wird normalisiert von einer Gruppe der Ordnung 4.  $J_1$  hat nur für  $p = 11$  eine irreduzible

Darstellung vom Grad 7, aber für  $p = 11$  ist 7 kein  $q$ -primitiver Teiler von  $q^6 - 1$ , weil  $11^3 - 1$  durch 7 teilbar ist. Die Existenz der übrigen Gruppen, die Notwendigkeit der angegebenen Bedingungen und die Tatsache, dass jeweils  $\mathfrak{N}_G(B) = B$  gilt, werden bewiesen in [As3], (8.5) und Abschnitt 13.

Sei nun  $B/A$  eine Gruppe vom Lie-Typ in Charakteristik  $p$ . Dann ist die Darstellungsgruppe  $H$  von  $B/A$  eine lineare Gruppe oder eine klassische Gruppe von einem Grad  $\leq 7$ , eine Gruppe vom Typ  $G_2$ ,  ${}^2G_2$  oder eine Suzuki-Gruppe.

Nach [HB2], XI., §3 ist in Suzuki-Gruppen jedes Element mit einer von 2 verschiedenen Primzahlordnung enthalten im Normalisator einer 2-Sylowgruppe oder in einer Frobeniusgruppe mit einem Frobeniuskomplement der Ordnung 4. Demnach ist  $H$  keine Suzuki-Gruppe. Nach [LS], Table 1 sind alle zu  $G_2(K)$  oder  ${}^2G_2(K)$  über einem Teilkörper  $K$  von  $\mathbb{F}$  isomorphen Untergruppen von  $G$  kanonisch.

Sei  $H$  eine lineare oder klassische Gruppe über  $\mathbb{F}_{p^b}$  und  $x$  ein Element der Ordnung  $r$  in  $H$ . Hat  $x$  auf dem natürlichen Modul von  $H$  mehr als einen treuen, irreduziblen Teilmodul, so sind diese Teilmoduln treue Moduln für die zyklische Gruppe  $\mathfrak{C}_H(x)$ . Demnach ist  $H$  eine klassische Gruppe, und es existieren 2 treue  $x$ -Moduln der Dimension  $k$  im Standardmodul von  $H$ , die singulär und paarweise nicht orthogonal sind. Dann ist  $\mathfrak{C}_{B'}(R)$  eine zyklische Gruppe der Ordnung  $p^{bk} - 1$  oder  $p^{bk} - 1/2$ . Andernfalls ist der natürliche Modul zu  $H$  die direkte Summe eines treuen, irreduziblen  $x$ -Teilmoduls und eines trivialen  $x$ -Moduls. Ist  $\varphi$  der natürliche Homomorphismus von  $H$  auf  $B'$ , so ist  $\mathfrak{C}_H(x)/\text{Ker}(\varphi)$  zyklisch. Die Idee des Beweises beruht nun darauf, dass die Ordnung dieses Zentralisators nicht zu klein sein kann, weil er  $x$  enthält, sie dann aber zu 3 teilerfremde Teiler hat, die keine  $q$ -primitiven Teiler von  $q^6 - 1$  sind.

Sei die Darstellungsgruppe  $H$  von  $B/A$  isomorph zu  $\text{SL}_t(p^b)$ . Dann enthält  $\mathfrak{C}_H(x)$  einen maximalen Torus  $T$ , so dass  $\varphi(T) \leq \mathfrak{C}_U(R)$  zyklisch ist. Ist  $\tilde{T}$  der entsprechende (d.h. mit demselben Element der Weyl-Gruppe getwistete) Torus in  $\text{GL}_t(p^b)$ , so ist  $\tilde{T}$  nach 6.2.2, und weil  $\varphi(T)$  zyklisch ist, ein Torus der Form  $\mathbb{Z}_{p^{bt}-1}$  oder  $\mathbb{Z}_{p^{b(t-1)}-1} \times \mathbb{Z}_{p^b-1}$  mit  $|\varphi(T)| = (p^{bt} - 1)/(p^b - 1)(p^b - 1, t)$  bzw.  $(p^{b(t-1)} - 1)/(p^b - 1, t)$ . Wäre  $bt$  bzw.  $b(t-1)$  ungerade, so wäre die Ordnung von  $\mathfrak{C}_{B'}(R)$  durch einen  $p$ -primitiven Teiler von  $p^{bt} - 1$  oder  $p^{b(t-1)} - 1$  teilbar. Dieser müsste 3 sein, ein Widerspruch. Demnach ist die Ordnung von  $\mathfrak{C}_{B'}(R)$  durch einen Ausdruck der Form  $p^k + 1$  oder  $\frac{1}{2}(p^k + 1)$  teilbar. Dasselbe Argument liefert dasselbe Ergebnis für die oben erwähnten Gruppen mit mehr als einem treuen  $x$ -Modul.

Sei  $H$  eine symplektische Gruppe. Wegen  $\text{Sp}_{2k}(q) \leq \text{SL}_{2k}(q)$  und  $\text{Sp}_2(q) \cong \text{SL}_2(q)$  haben wir nur Singer-Zyklen zu betrachten, die nach Proposition 6.2.6 die Ordnung  $q^k + 1$  haben. Wieder enthält  $\mathfrak{C}_{B'}(R)$  eine Gruppe der Ordnung  $p^k + 1$  oder  $\frac{1}{2}(p^k + 1)$  für geeignetes  $k$ . Sei  $H$  eine orthogonale Gruppe. Hat  $H$  den Typ

$O_{2k}^-$ , so hat  $\mathfrak{C}_H(x)$  nach Proposition 6.2.8 die Ordnung  $p^{bk} + 1$ . Hat  $H$  den Typ  $O_{2k+1}$ , so hat  $\mathfrak{C}_H(x)$  nach Proposition 6.2.5 die Ordnung  $p^{bk} + 1$ . Hat  $H$  den Typ  $O_{2k+2}^+$ , so folgt ein Widerspruch mit Proposition 6.2.7. In allen Fällen enthält  $\mathfrak{C}_{B'}(R)$  eine Untergruppe der Ordnung  $p^k + 1$  oder  $\frac{1}{2}(p^k + 1)$ . Alle Primteiler ihrer Ordnung sind 3 oder  $p$ -primitive Teiler von  $p^6 - 1$ , ist sie also nicht gleich 3, so ist 3 ein Teiler von  $k$  und wir können zu einer Untergruppe der Ordnung  $p^{k/3} + 1$  übergehen. Sei also o.B.d.A.  $p^k + 1 = 3$  oder  $\frac{1}{2}(p^k + 1) = 3$ . Es folgt  $(p, k) \in \{(2, 1), (5, 1)\}$ . Dann enthält  $\mathfrak{C}_{B'}(R)$  keine Untergruppe der Ordnung  $p^{3k} + 1$  oder  $\frac{1}{2}(p^{3k} + 1)$ . In allen Fällen ist die Ordnung von  $\mathfrak{C}_{B'}(R)$  ein Teiler von  $p^{2k} - 1 \in \{2^2 - 1, 5^2 - 1\}$ , ein Widerspruch.

Übrig bleibt der Fall, dass  $H$  eine unitäre Gruppe der Form  $SU_k(p^b)$  ist. Nach Proposition 6.2.4 und 6.2.3 ist  $k$  ungerade. Weil nach [As3], (14.1) der  $s$ -Rang jeder  $s$ -Untergruppe von  $G$  mit einer von  $p$  verschiedenen Primzahl  $s$  höchstens 3 ist und ein maximal zerfallender Torus von  $SU_k(p^b)$  isomorph ist zum  $(k-1)$ -fachen direkten Produkt  $(\mathbb{Z}_{p^b+1})^{k-1}$ , ist  $k = 3$ , also  $H \cong SU_3(p^b)$ . Stabilisiert  $B'$  eine Hyperebene von  $V$ , so ist  $B'$  eine kanonische Untergruppe einer Gruppe wie in (ii) über einem Teilkörper von  $\mathbb{F}$ . Nach [As3], Korollar 11 existieren genau für  $p = 3$  irreduzible Untergruppen, die isomorph sind zu  $SU_3(q)$ , diese sind alle konjugiert. Offenbar ist  $B'$  eine kanonische Untergruppe des Stabilisators von  $\mathfrak{C}_V(R)$  oder wirkt irreduzibel und imprimitiv auf  $V$ . Außer der einen Konjugiertenklasse von Untergruppen für  $p = 3$  enthält keine maximale imprimitive irreduzible Untergruppe von  $G$  eine zu  $SU_3(p^b)$  isomorphe Gruppe. Bei Einbettung in  $G(q^2)$  wird der Stabilisator  $K$  einer nichthyperbolischen, nichtausgearteten Hyperebene zum Stabilisator einer hyperbolischen Hyperebene, der erzeugt wird von langen Wurzelgruppen. Ist  $p = 3$ , so vertauscht ein äußerer Automorphismus von  $G(q^2)$  lange und kurze Wurzelgruppen. Die Einschränkung dieses Automorphismus auf  $G$  bildet demnach  $K$  ab auf eine irreduzible, zu  $K$  isomorphe Untergruppe von  $G$ . Nach [LS], Table 1 gibt es für  $\text{char}(\mathbb{F}) = 3$  genau zwei Konjugiertenklassen von Untergruppen von  $G$ , deren verallgemeinerte Fittinggruppe zu  $SU_3(p^b)$  isomorph ist.

## 7.2 Gruppen vom Typ ${}^3D_4$

Die Notation aus Kapitel 3.2 wird fortgesetzt. Stets sei  $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$  ein endlicher Körper,  $q$  eine Potenz der Primzahl  $p$ ,  $G = G(\mathbb{F})$  eine Gruppe vom Typ  ${}^3D_4$  über  $\mathbb{F}$  und  $V$  der zugehörige Standardmodul der Dimension 8 über  $\mathbb{F}_{q^3}$ . Es ist  $\mu(G) = 4$  und  $(\Phi_4^*(q^3), |G|) = (\Phi_4(q^3) / (\Phi_4(q^3), 2), |G|) = q^4 - q^2 + 1 = \Phi_{12}(q)$ . Nach Proposition 6.2.12 gilt für jeden Primteiler  $r$  von  $\Phi_{12}(q)$  und jede nichttriviale  $r$ -Untergruppe von  $G$ , dass  $\mathfrak{C}_G(R)$  ein zyklischer, maximaler Torus von  $G$  der Ordnung  $\Phi_{12}(q)$  und  $\text{Aut}_G(R) \cong \mathbb{Z}_4$  ist. Es folgt unmittelbar:

**Lemma 7.2.1** *Sei  $U$  eine Untergruppe von  $G$  mit  $(|U|, \Phi_{12}(q)) \neq 1$  und  $r$  ein Primteiler von  $(|U|, \Phi_{12}(q))$ .*

*Dann ist  $\mathfrak{N}_G(U)/U$  eine metazyklische Gruppe, deren Ordnung  $\frac{4\Phi_{12}(q)}{r}$  teilt.*

Beweis: Der Beweis ist völlig analog zum Beweis von Lemma 7.1.1.

**Satz 7.2.1** *Sei  $U$  eine auflösbare Untergruppe von  $G$  mit  $(|U|, \Phi_{12}(q)) \neq 1$ . Sei  $r$  ein Primteiler von  $(|U|, \Phi_{12}(q))$  und  $R$  eine  $r$ -Untergruppe von  $G$ .*

*Dann ist  $R$  normal in  $U$ .*

Beweis: Das Resultat ist ein direktes Korollar zu Satz 7.3.1. Wir geben aber einen direkten Beweis, weil der Beweis im Fall der getwisteten Gruppe  ${}^3D_4(q)$  wesentlich einfacher ist als der Beweis zu Satz 7.3.1.

Ein nicht-trivialer  $R$ -Untermodul  $W$  von  $V$  hat nach Proposition 6.2.10 die Dimension 4 oder 8 und ist nach Lemma 7.3.4 ein treuer  $\mathfrak{N}_G(W)$ -Modul. Sei also  $W$  ein treuer, irreduzibler  $U$ -Untermodul von  $V$ .

Ist  $W$  ein imprimitiver  $U$ -Modul, so ist die auf den Elementen der entsprechenden Zerlegung von  $W$  induzierte Gruppe eine Untergruppe einer Gruppe  $S_k$  mit  $k \leq 8$ , insbesondere eine  $r'$ -Gruppe. Es folgt  $V = W$  und dass  $U$  auf zwei irreduziblen  $R$ -Moduln  $W_1, W_2$  mit  $V = W_1 \oplus W_2$  wirkt. Ist  $R$  normal im Kern  $K$  dieser Wirkung, so ist  $R$  als in  $K$  charakteristische Untergruppe auch normal in  $U$ . Wir können also annehmen, dass  $W$  ein primitiver  $U$ -Modul ist.

Sei  $A$  ein maximaler abelscher Normalteiler von  $U$ . Dann ist  $A$  eine  $r'$ -Gruppe und  $W$  ein homogener  $A$ -Modul. Andernfalls würden die  $A$ -homogenen Komponenten eine Zerlegung von  $W$  bestimmen, auf deren Elementen  $U$  wirkte. Insbesondere ist  $A$  zyklisch und  $W$  die direkte Summe von isomorphen, irreduziblen  $A$ -Moduln der Dimension  $t \leq \mu(G) = 4$ . Nach Lemma 6.2.1 ist  $\text{Aut}_G(A)$  eine zyklische Gruppe, deren Ordnung  $t$  teilt. Demnach wird  $A$  von  $R$  zentralisiert.

Damit ist die Ordnung von  $A$  ein Teiler von  $\Phi_{12}(q) = \Phi_{12}^*(q)$ ,  $\mathfrak{C}_G(A)$  ein maximaler Torus von  $G$  der Ordnung  $q^4 - q^2 + 1$  und  $\mathfrak{N}_G(A)$  eine Erweiterung von  $\mathfrak{C}_G(A)$  mit einer zyklischen Gruppe, deren Ordnung 4 teilt. Es folgt  $R \trianglelefteq \mathfrak{N}_G(A)$  und  $R \trianglelefteq U$ .

**Korollar 7.2.1** *Sei  $r$  eine Primzahl, die  $\Phi_{12}(q)$  teilt,  $U$  eine Untergruppe von  $G$  und  $R$  eine  $r$ -Gruppe, die in  $\mathfrak{N}_G(U)$  liegt, aber nicht in  $U$ .*

*Dann ist  $[R, U] = 1$ .*

Beweis: Sei  $s$  ein Primteiler von  $|U|$ . Wie in Korollar 7.1.1 bzw. in [He1], Satz 2 zeigt man, dass  $R$  eine  $s$ -Sylowgruppe  $S$  von  $U$  normalisiert. Sei nun  $S$  eine  $s$ -Sylowgruppe von  $U$ , die von  $R$  normalisiert wird. Dann ist  $SR$  eine auflösbare Untergruppe von  $G$ , deren Ordnung durch einen  $q$ -primitiven Teiler von  $q^{12} - 1$  teilbar ist. Nach Satz 7.2.1 ist  $SR$  abelsch. Es folgt  $U \leq \mathfrak{C}_G(R)$ .

**Satz 7.2.2** *Sei  $U$  eine nicht auflösbare Untergruppe von  $G$  mit  $(|U|, \Phi_{12}(q)) \neq 1$  und  $B$  ein minimaler Normalteiler von  $U$ . Dann gilt:*

*$B$  ist eine einfache, nichtabelsche Gruppe und  $U$  ist eine Untergruppe von  $\text{Aut}(B)$  deren Ordnung  $2 \cdot |B|$  teilt.*

Beweis: Sei  $r$  ein Primteiler von  $\Phi_{12}(q)$  und  $R$  eine  $r$ -Sylowgruppe von  $U$ . Ist  $A$  ein auflösbarer Normalteiler von  $U$ , so gilt  $A \leq \mathfrak{C}_G(R)$  nach Korollar 7.2.1. Wäre  $A \neq 1$ , so wäre  $U \leq \mathfrak{N}_G(A)$  auflösbar. Es folgt  $F(U) = 1$ . Sei  $B$  ein minimaler Normalteiler von  $U$ . Dann ist  $B$  das direkte Produkt isomorpher, nichtabelscher einfacher Gruppen. Nach Korollar 7.2.1 ist  $[U : B]$  eine  $r'$ -Zahl. Damit ist  $B$  einfach, weil  $U$  zyklische  $r$ -Sylowgruppen hat. Nach Lemma 7.2.1 und weil  $[U : B]$  durch keinen  $q$ -primitiven Teiler von  $q^{12} - 1$  teilbar ist, ist  $[U : B]$  ein Teiler von 4. Schließlich gibt es in  $B$  kein normales  $r$ -Komplement. Nach dem Verlagerungssatz von Burnside ist  $\text{Aut}_B(R) \neq 1$ . Damit ist  $[U : B]$  ein Teiler von 2.

**Satz 7.2.3** *Sei  $U$  eine nicht auflösbare Untergruppe von  $G$  mit  $(|U|, \Phi_6^*(q)) \neq 1$ .*

*Dann ist  $U$  isomorph zu einer Gruppe  ${}^3D_4(\tilde{q})$  für einen Unterkörper  $\mathbb{F}_{\tilde{q}}$  von  $\mathbb{F}_q$  in  $G$  mit  $(q/\tilde{q}, 2) = 1$ . Es gibt genau eine Konjugiertenklasse solcher Untergruppen in  $G$ .*

Beweis:  $B$  ist keine alternierende Gruppe, weil nach [KL], Proposition 5.3.7 für eine alternierende Gruppe  $A_n$  mit einer treuen projektiven Darstellung von einem Grad  $\leq 8$  gilt:  $n \leq 10$ . Dann enthält  $|A_n|$  keinen Primteiler, der kongruent 1 modulo 12 ist.

Unter den sporadischen Gruppen und den Gruppen vom Lie-Typ in von  $p$  verschiedener Charakteristik haben nach [KL], Proposition 5.3.8 und Table 5.3.A nur  $\mathrm{PSL}_2(13)$ ,  ${}^2B_2(8)$  und  $\mathrm{PSL}_3(3)$  eine treue projektive Darstellung von einem Grad  $\leq 8$  und einen Primteiler, der kongruent 1 modulo 12 ist. Die irreduziblen Teilmoduln des  $B$ -Moduls  $V$  sind insbesondere  $R$ -Moduln für einen Primteiler  $r$  von  $\Phi_{12}(q)$  und eine  $r$ -Sylowgruppe  $R$  von  $B$  und haben damit die Dimension 4 oder 8. Nach [At] und [AtB] hat keine der genannten Gruppen eine irreduzible Darstellung vom Grad 4 oder 8.

Unter den Gruppen vom Lie-Typ in Charakteristik  $p$  haben nur lineare Gruppen, klassische Gruppen, Suzuki-Gruppen und Gruppen vom Typ  $G_2$ ,  ${}^2G_2$  und  ${}^3D_4$  eine irreduzible Darstellung von einem Grad  $\leq 8$ . Ist  $B$  eine lineare oder klassische Gruppe, aber keine unitäre Gruppe, so haben wir im Beweis von Satz 7.1.3 gesehen, dass  $B \cap \mathfrak{C}_G(R)$  durch  $p^k - 1$ ,  $\frac{1}{2}(p^k - 1)$ ,  $p^k + 1$  oder  $\frac{1}{2}(p^k + 1)$  für ein geeignetes  $k \in \mathbb{N}$  teilbar ist. Weil jeder Teiler von  $|\mathfrak{C}_G(R)|$  ein  $q$ -primitiver Teiler von  $q^{12} - 1$  ist, ist  $|B \cap \mathfrak{C}_G(R)|$  durch  $p^6 + 1$  oder  $\frac{1}{2}(p^6 + 1)$  teilbar, aber damit auch durch  $p^2 + 1$  oder  $\frac{1}{2}(p^2 + 1)$ , ein Widerspruch. Ist  $B$  eine Gruppe  $\mathrm{PSU}_k(p^b)$ , so ist  $k$  ungerade wie im Beweis zu Satz 7.1.3. Nach [K12], Lemma 2.3 ist der  $s$ -Rang von  $G$  höchstens 3 für jede von  $p$  verschiedene Primzahl  $s$ . Weil ein maximal zerfallender Torus von  $\mathrm{PSU}_k(p^b)$  isomorph ist zum  $(k-1)$ -fachen direkten Produkt  $(\mathbb{Z}_{p^{b+1}})^{k-1}$ , ist  $k = 3$ . Wäre eine  $r$ -Gruppe  $R$  in  $G$  enthalten in einem solchen Torus einer Untergruppe von  $\mathrm{PSU}_k(p^b)$ , so wäre 3 ein Teiler von  $\mathrm{Aut}_G(R)$ , ein Widerspruch. Mit demselben Widerspruch scheiden die Ree-Gruppen und die Gruppen vom Typ  $G_2$  aus. Sei nun  $B$  eine Suzuki-Gruppe  $\mathrm{Sz}(p^b)$ . Die Einbettung von  $B$  in  $G$  bildet eine Borel-Gruppe von  $B$  ab auf eine  $p$ -lokale Untergruppe von  $G$  und damit eine zyklische Untergruppe der Ordnung  $p^b - 1$  von  $B$  in eine Gruppe der Ordnung  $q^6 - 1$  von  $G$ . Mit Lemma 2.1, (v) folgt, dass  $\mathbb{Z}_{p^b-1}$  über  $\mathbb{F}_{q^3}$  diagonalisierbar ist, weil  $b$  ungerade ist. Es folgt, dass  $\mathbb{F}_{q^3}$  ein Erweiterungskörper von  $\mathbb{F}_{p^b}$  ist. Weil ein Teiler von  $p^{2b} + 1$  ein  $q$ -primitiver Teiler von  $q^{12} - 1$  ist, ist 3 ein Teiler von  $b$ . Dann enthält aber  $B$  Elemente, deren Ordnung ein nichttrivialer Teiler von  $p^{2b/3} + 1$  ist. Ihre Ordnung teilt  $q^4 - 1$  und damit nicht  $q^4 - q^2 + 1$ . Andererseits teilt sie nicht  $q^6 - 1$ , weil diese Elemente sonst eine 2-dimensionale Darstellung über  $\mathbb{F}_{p^{(b/3)}}$  hätten, ein Widerspruch. Es bleibt nur der Fall übrig, dass  $B$  eine Gruppe vom Typ  ${}^3D_4$  über einem Teilkörper  $K$  von  $\mathbb{F}$  ist. Wie in [LS] sieht man, dass es dafür stets nur eine Konjugiertenklasse solcher Gruppen in  $G$  gibt.

### 7.3 Gruppen vom Typ $E_6$

Die Notation aus Kapitel 3.2 wird fortgesetzt. Stets sei  $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$  ein endlicher Körper,  $q$  eine Potenz der Primzahl  $p$  und  $G = G(\mathbb{F})$  eine einfach-zusammenhängende Chevalley-Gruppe vom Typ  $E_6$  über  $\mathbb{F}$ .

Es gilt  $\Phi_{12}(q) = \Phi_{12}^*(q) \mid |G|$ . Nach Proposition 6.2.10 gilt für jeden Primteiler  $r$  von  $\Phi_{12}(q)$  und jede nichttriviale  $r$ -Untergruppe  $R$  von  $G$ , dass  $\mathfrak{C}_G(R)$  ein zyklischer, maximaler Torus der Ordnung  $\Phi_3(q)\Phi_{12}(q)$  und  $\text{Aut}_G(R) \cong \mathbb{Z}_{12}$  ist.

**Lemma 7.3.1** *Sei  $U$  eine Untergruppe von  $G$  mit  $(|U|, \Phi_{12}(q)) \neq 1$  und sei  $r$  ein Primteiler von  $(|U|, \Phi_{12}(q))$ .*

*Dann ist  $\mathfrak{N}_G(U)/U$  eine metazyklische Gruppe, deren Ordnung  $\frac{12\Phi_3(q)\Phi_{12}(q)}{r}$  teilt.*

Beweis: Der Beweis ist völlig analog zum Beweis von 7.1.1.

Vor den Struktursätzen über Untergruppen von  $G$ , deren Ordnung durch einen  $q$ -primitiven Teiler von  $q^{12} - 1$  teilbar ist, schicken wir zunächst für den Beweis benötigte Ergebnisse voraus.

**Lemma 7.3.2** *Enthält  $\mathbb{F}$  eine primitive dritte Einheitswurzel, so gibt es in  $G$  drei Konjugiertenklassen von elementarabelschen Gruppen der Ordnung 9, die  $Z(G)$  enthalten. Vertreter dieser Klassen sind die folgenden Gruppen  $U_i$  ( $1 \leq i \leq 3$ ):*

$U_1$  *hat die Eigenräume  $\langle x_i \mid 1 \leq i \leq 6 \rangle$ ,  $\langle x'_i \mid 1 \leq i \leq 6 \rangle$  und  $\langle x_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq 6 \rangle$ ,*

$U_2$  *hat die Eigenräume  $\langle x_1, x'_2, x'_3, x'_4, x'_5, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15} \rangle$ ,  $\langle x'_6, x_2, x_3, x_4, x_5, x_{26}, x_{36}, x_{46}, x_{56} \rangle$  und  $\langle x_{16}, x_6, x'_1, x_{23}, x_{24}, x_{25}, x_{34}, x_{35}, x_{45} \rangle$ , und*

$U_3$  *hat als Eigenräume die Teilräume einer 3-Zerlegung von  $V$ .*

Beweis: ([As6], (8.2)).

**Lemma 7.3.3** *Sei  $A \leq G$  eine abelsche Gruppe mit dem Exponenten  $e$ ,  $V$  ein halbeinfacher  $A$ -Modul, und  $\mathbb{F}$  enthalte eine primitive  $e$ -te Einheitswurzel. Sei  $\mathcal{M}$  die Menge aller Paare  $(P, U)$ , so dass  $U \leq V$  konjugiert ist zu  $\langle x_i, x_{i6} \mid 1 \leq i \leq 5 \rangle$  und  $P$  ein singulärer Punkt ist, der nicht in  $U\Theta$  liegt.*

(i) *Ist  $e \neq 3$ , so stabilisiert  $A$  einen brillanten Punkt.*

(ii) *Stabilisiert  $A$  einen brillanten Punkt, so stabilisiert  $A$  auch ein Element  $(P, U) \in \mathcal{M}$ .*

(iii) *Stabilisiert  $A$  ein Element  $(P, U) \in \mathcal{M}$ , so ist  $A^2$  enthalten in einer Cartan-Untergruppe von  $G$ .*

Beweis: Es gilt  $V = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$  für eine Teilmenge  $\Lambda$  von  $\text{Hom}(A, \mathbb{F})$ . Ist  $e \neq 3$ , so enthält  $A$  ein nicht-triviales Element  $g$ , dessen Ordnung zu 3 teilerfremd ist. Induziere  $g$  auf  $V_{\lambda_0}$  die Skalarmultiplikation mit  $\mu \neq 1$ , und sei  $0 \neq v \in V_{\lambda_0}$ . Aus  $T(v) = T(v^g) = T(\mu v) = \mu^3 T(v)$  folgt  $T(v) = 0$ , und damit ist  $\langle v \rangle$  brilliant. Teil (ii) wird bewiesen wie in [As6] im Beweis zu (6.3.1). Aussage (iii) ist [As6], (6.3.2).

**Proposition 7.3.1** *Gibt es in  $\mathbb{F}$  eine primitive dritte Einheitswurzel, so gilt:*

- (i) *Es gibt in  $G$  genau eine Konjugiertenklasse von elementarabelschen Untergruppen der Ordnung 81, deren homogene Komponenten in  $V$  dunkle Punkte sind. Ist  $A$  eine solche Gruppe, so gilt  $\mathfrak{C}_G(A) = A$  und  $\mathfrak{N}_G(A)/A \cong \text{ASL}_3(3)$ . Diese Erweiterung von  $A$  ist nicht-zerfallend, aber zu  $O_3(\mathfrak{N}_G(A))$  existiert ein Komplement in  $\mathfrak{N}_G(A)$ .*
- (ii) *Definiert man auf der Menge der Eigenräume von  $A$  eine Geradenmenge bestehend aus allen Tripeln von Punkten  $P_i = \langle v_i \rangle$ , ( $1 \leq i \leq 3$ ) mit  $f(v_1, v_2, v_3) \neq 0$ , so erhält man eine zu  $\text{AG}_3(3)$  isomorphe Geometrie, auf der  $\mathfrak{N}_G(A)/A$  kanonisch wirkt.*
- (iii) *Die auflösbaren Untergruppen von  $\mathfrak{N}_G(A)$ , die eine nicht normale Untergruppe der Ordnung 13 enthalten, sind je eine Konjugiertenklasse von zerfallenden Erweiterungen von  $O_3(\mathfrak{N}_G(A))$ ,  $A$  oder einer elementarabelschen Untergruppe von  $A$  der Ordnung 27 mit einer zyklischen Gruppe der Ordnung 13 oder einer Frobenius-Gruppe der Ordnung 39.*
- (iv) *Die nicht auflösbaren Untergruppen von  $\mathfrak{N}_G(A)$ , sind je eine Konjugiertenklasse von Komplementen zu  $O_3(\mathfrak{N}_G(A))$  in  $\mathfrak{N}_G(A)$ , von zerfallenden Erweiterungen von  $A$  oder einer elementarabelschen Untergruppe von  $A$  der Ordnung 27 mit einem solchen Komplement und  $\mathfrak{N}_G(A)$  selbst.*

Beweis: Bis auf die Aussagen über die Existenz von Komplementen ist Teil (i) gerade [As6], (8.3.2). Dabei ist  $\mathfrak{N}_G(A)/A$  der Zentralisator von  $Z(G)$  in  $\text{SL}(A)$  und wirkt transitiv auf den 27 Eigenräumen von  $A$ . Ist  $P$  ein solcher Eigenraum, so ist  $\mathfrak{C}_A(P)$  eine Gruppe der Ordnung 27, die  $Z(G)$  nicht enthält. Man erhält so eine Bijektion zwischen den Hyperebenen von  $A$ , die  $Z(G)$  nicht enthalten, und den Eigenräumen von  $A$ . Die Geometrie, deren Punkte die Hyperebenen von  $A$  sind, die  $Z(G)$  nicht enthalten, deren Geraden die Untergruppen der Ordnung 9 von  $A$  sind, die  $Z(G)$  nicht enthalten, und in der Inzidenz durch Inklusion definiert ist, ist ein affiner Raum der Ordnung 3 auf dem  $\mathfrak{N}_G(A)/A$  kanonisch wirkt. Es bleibt für (ii) nur zu zeigen, dass für Eigenräume  $P_i = \langle v_i \rangle$  mit  $1 \leq i \leq 3$  genau dann  $f(v_1, v_2, v_3) \neq 0$  gilt, wenn  $\mathfrak{C}_A(P_1) \cap \mathfrak{C}_A(P_2) \leq \mathfrak{C}_A(P_3)$  gilt. Die eine Richtung ist trivial. Umgekehrt ist jede elementarabelsche Untergruppe von  $A$  der Ordnung

9, die  $Z(G)$  nicht enthält, in genau 3 Hyperebenen in  $A$  enthalten, die  $Z(G)$  nicht enthalten. Es folgt, dass  $\mathfrak{C}_A(P_1) \cap \mathfrak{C}_A(P_2)$  genau 3 Eigenräume von  $A$  zentralisiert. Die Abbildung  $x \rightarrow f(v_1, v_2, x)$  definiert ein Element des Dualraumes von  $V$ . Dieses ist nichttrivial, weil  $v_1$  nach Proposition 3.2.5 konjugiert ist zu  $x_{14} + x_{25} + x_{36}$  und  $V$  damit ein nichtausgearteter  $Q_{v_1}$ -Raum ist. Aus  $f(v_1, v_2, x) \neq 0$  für einen Eigenvektor  $x$  von  $A$  folgt  $\mathfrak{C}_A(P_1) \cap \mathfrak{C}_A(P_2) \leq \mathfrak{C}_A(x)$  und damit (ii).

Der Zentralisator eines Eigenraumes  $P$  von  $A$  in  $\mathfrak{N}_G(A)$  ist eine Erweiterung einer elementarabelschen Gruppe  $U$  der Ordnung 27 mit einer zu  $SL(U)$  isomorphen Gruppe. Ein Element in  $GL(V)$ , das  $P$  zentralisiert und die von  $P$  verschiedenen Punkte jeder Geraden durch  $P$  in der in (ii) definierten Geometrie vertauscht, wirkt wie ein Erzeugendes von  $Z(GL(U))$  auf  $U$ . Damit läßt sich  $\mathfrak{C}_{\mathfrak{N}_G(A)}(P)$  in eine Erweiterung von  $U$  mit  $GL(U)$  einbetten, die nach Lemma 1.2 zerfällt. Demnach gibt es zu  $O_3(\mathfrak{N}_G(A))$  ein Komplement in  $\mathfrak{N}_G(A)$ . Ein Komplement  $K$  zu  $A$  in  $\mathfrak{N}_G(A)$  wäre eine Erweiterung von  $O_3(K)$  mit  $SL(O_3(K))$ . Demnach würde  $SL(O_3(K))$  kanonisch auf den Eigenräumen von  $O_3(K)$  wirken. Damit wäre  $O_3(K)$  konjugiert zu einer Untergruppe von  $A$ . Das Komplement zu  $O_3(K)$  in  $K$  würde nach [At] und [AtB] irreduzibel auf einer Hyperebene von  $V$  wirken und  $P$  zentralisieren. Weil  $O_3(K)$  transitiv auf den Eigenräumen von  $A$  wirken würde, wäre  $P$  kein Eigenraum von  $O_3(K)$ . Es folgt der Widerspruch, dass  $\mathfrak{C}_V(O_3(K))$  von  $K$  nicht normalisiert würde.

Um (iii) und (iv) zu beweisen, genügt es, die Wirkung von  $\mathfrak{N}_G(A)$  auf  $A$  zu beachten und zu beobachten, dass alle echten Untergruppen von  $SL_3(3)$  auflösbar sind und echte Untergruppen, deren Ordnung durch 13 teilbar ist, in Frobenius-Gruppen der Ordnung 39 enthalten sind.

**Proposition 7.3.2** *Gibt es in  $\mathbb{F}$  keine primitive dritte Einheitswurzel und ist  $\text{char}(\mathbb{F}) \neq 3$ , so gilt:*

- (i) *Es gibt in  $G$  genau eine Konjugiertenklasse von elementarabelschen Untergruppen der Ordnung 27, die einen dunklen Punkt zentralisieren und deren andere homogenen Komponenten 2-dimensional sind. Ist  $A$  eine solche Gruppe, so gilt  $\mathfrak{C}_G(A) = A$  und  $\mathfrak{N}_G(A)/A \cong SL_3(3)$ . Die Erweiterung zerfällt.*
- (ii) *Die auflösbaren Untergruppen von  $\mathfrak{N}_G(A)$ , die eine nicht normale Untergruppe der Ordnung 13 enthalten, sind je eine Konjugiertenklasse von Erweiterungen von  $A$  mit einer zyklischen Untergruppe der Ordnung 13 oder einer Frobenius-Gruppe der Ordnung 39.*
- (iii) *Die einzige nicht auflösbare Untergruppe von  $\mathfrak{N}_G(A)$  ist  $\mathfrak{N}_G(A)$  selbst.*

Beweis: Wir betten  $G = G(\mathbb{F}_q)$  kanonisch in  $G(\mathbb{F}_{q^2})$  ein. Der Körper  $\mathbb{F}_{q^2}$  besitzt primitive dritte Einheitswurzeln. Ist  $A$  eine Gruppe wie in (i), so ist  $A$

als Untergruppe von  $G(\mathbb{F}_{q^2})$  diagonalisierbar und hat eindimensionale homogene Komponenten. Wäre einer dieser Eigenräume von  $A$  über  $\mathbb{F}_{q^2}$  brillant, so wäre  $A$  nach Lemma 7.3.3 in einer Cartan-Gruppe von  $G(\mathbb{F}_{q^2})$  enthalten. Dann wären alle homogenen Komponenten von  $A$  über  $\mathbb{F}_{q^2}$  erzeugt von singulären Vektoren im Widerspruch dazu, dass  $\mathfrak{C}_V(A)$  ein dunkler Punkt ist. Demnach ist  $\langle A, Z(G(\mathbb{F}_{q^2})) \rangle$  eine elementarabelsche Gruppe der Ordnung 81 wie in Proposition 7.3.1. Es folgt  $\mathfrak{C}_G(A) = A$ , dass  $\mathfrak{N}_G(A)/A$  isomorph ist zu einer Untergruppe von  $\mathrm{SL}_3(3)$  und dass die Erweiterung zerfällt. Dass es Gruppen wie in (i) gibt, dass  $\mathfrak{N}_G(A)/A \cong \mathrm{SL}_3(3)$  gilt und alle diese Gruppen in  $G$  konjugiert sind, wird bewiesen in [CLSS], Lemma 2.10.

Teil (ii) und (iii) folgen mit Proposition 7.3.1.

**Lemma 7.3.4** *Ist  $r$  ein  $q$ -primitiver Teiler von  $q^{12} - 1$ ,  $R$  eine nichttriviale  $r$ -Untergruppe von  $G$  und  $W$  ein  $R$ -Untermodul von  $V$ , auf dem  $R$  nicht trivial wirkt, so wirkt  $\mathfrak{N}_G(W)$  treu auf  $W$ .*

Beweis: Sei  $\mathbb{k}$  ein algebraischer Abschluss von  $\mathbb{F}$  und  $G = G(\mathbb{F})$  kanonisch eingebettet in  $G(\mathbb{k})$ . Es gilt sogar, dass  $\mathfrak{N}_{G(\mathbb{k})}(W^{\mathbb{k}})$  treu auf  $W^{\mathbb{k}}$  wirkt. Wie im Beweis zu Proposition 6.2.10 seien  $W_1^{\mathbb{k}} = \langle x_1, x_2, x_3, x_4, x_{16}, x_{12}, x'_4, x'_5, x'_6, x'_1, x_{34}, x_{45} \rangle$  und  $W_2^{\mathbb{k}} = \langle x_5, x_{15}, x_{26}, x_{13}, x'_3, x_{23}, x'_2, x_{24}, x_{35}, x_{46}, x_6, x_{56} \rangle$  mit irreduziblen  $R$ -Untermoduln  $W_1$  und  $W_2$  von  $V$ . Es genügt, die Behauptung für  $\dim(W) = 12$  zu zeigen.

Seien zunächst  $W_1$  und  $W_2$  nicht isomorphe  $R$ -Moduln. Es genügt zu zeigen, dass die Behauptung für  $W = W_1$  und  $W = W_2$  gilt. Sei  $g \in G(\mathbb{k})$  und wirke  $g$  trivial auf  $W_1^{\mathbb{k}}$ . Dann ist  $P_{14} = x_2\Delta \cap x_3\Delta \cap x'_5\Delta \cap x'_6\Delta$   $g$ -invariant. Anwendung der Permutation  $w_0$  aus Lemma 6.2.3 zeigt, dass auch  $P_{25}$  und  $P_{36}$   $g$ -invariant sind. Aus  $f(x_{14}, x_1, x'_4) = f(x_{25}, x_2, x'_5) = f(x_{36}, x_3, x'_6) = 1$  folgt, dass  $g$  den Unterraum  $W_0 := (\mathfrak{C}_V(R))^{\mathbb{k}}$  zentralisiert. Außerdem sind  $P_5$  wegen  $P_5 = x_1\Delta \cap x_2\Delta \cap x_3\Delta \cap x_4\Delta \cap x'_5\Delta$  und  $x_5$  wegen  $f(x_2, x_{25}, x_5) \neq 0$   $g$ -invariant. Unter Anwendung von  $w_0$  folgt  $g = 1$ . Für  $W = W_2$  argumentiert man analog mit  $P_{14} = x_5\Delta \cap x'_2\Delta \cap x_{15}\Delta \cap x_{24}\Delta$  und  $P_1 = x_{24}\Delta \cap x_{35}\Delta \cap x_{46}\Delta \cap x_6\Delta \cap x_{26}\Delta$ .

Seien nun  $W_1$  und  $W_2$  isomorphe  $R$ -Moduln. In den Zyklen  $(x_1x_2x_3x_4x_{16}x_{12}x'_4, x'_5, x'_6, x'_1, x_{34}, x_{45})$  und  $(x_5x_{15}x_{26}x_{13}x'_3x_{23}x'_2, x_{24}, x_{35}, x_{46}, x_6, x_{56})$  von  $w_0$  liegen je 4 Elemente nicht in  $x_{14}\Delta$ , die unter  $w_0^3$  permutiert werden. In  $G(\mathbb{k})$  sind die nichttrivialen homogenen  $R$ -Komponenten hyperbolische Geraden. Davon liegen also mindestens 4 in  $x_{14}\Delta$ , etwa  $\{\langle v^{w_0^i}, w^{w_0^i} \rangle\}$  mit  $v \in x_1^{\langle w_0 \rangle}$ ,  $w \in x_5^{\langle w_0 \rangle}$  und  $i \in \{0, 3, 6, 9\}$ . Seien  $z_1, z_2, z_3, z_4$  Vektoren, die  $W^{\mathbb{k}}$  mit diesen 4 hyperbolischen Geraden gemeinsam hat. Weil  $x^{w_0^6}$  für jedes  $x \in X \setminus \{x_{14}, x_{25}, x_{36}\}$  nicht in  $x\Delta$  liegt, folgt mit Lemma 3.2.2  $\bigcap_{1 \leq i \leq 4} z_i\Delta = \bigcap_{1 \leq i \leq 4} v^{w_0^i}\Delta \cap \bigcap_{1 \leq i \leq 4} w^{w_0^i}\Delta$ . Mit den Bezeichnungen  $U_{11} = \langle x_2, x_{16}, x'_5, x_{34} \rangle$ ,  $U_{12} = \langle x_3, x_{12}, x'_6, x_{45} \rangle$ ,  $U_{21} = \langle x_5, x_{13}, x'_2, x_{46} \rangle$  und  $U_{22} = \langle x_{15}, x'_3, x_{24}, x_6 \rangle$  ist demnach einer der Unterräume

$U_{11}\Delta \cap U_{21}\Delta = \langle x_{14}, x_{36} \rangle$ ,  $U_{11}\Delta \cap U_{22}\Delta = \langle x_{14} \rangle$ ,  $U_{12}\Delta \cap U_{21}\Delta = \langle x_{14} \rangle$  oder  $U_{12}\Delta \cap U_{22}\Delta = \langle x_{14}, x_{25} \rangle$   $g$ -invariant. Wie oben folgt  $g \in \mathfrak{C}_G(W_0)$  unter Anwendung von  $w_0$  und der Betrachtung aller entstehenden Durchschnitte.

Damit ist  $\tilde{W} := x_{25}\Delta \cap x_{36}\Delta = \langle x_1, x_4, x'_1, x'_4, x_{23}, x_{56}, x_{26}, x_{35} \rangle$   $g$ -invariant. Sind nun  $x, y$  singuläre Punkte, ist  $\langle x, y \rangle$  eine  $g$ -homogene Komponente und  $x + \lambda y$  für  $\lambda \in \mathbb{F}^*$   $g$ -invariant, so ist auch  $(x + \lambda y)\Delta \cap \tilde{W} = \langle x, y \rangle \Delta \cap \tilde{W}$   $g$ -invariant.

Ist  $\langle x_1, x_{15} \rangle$  eine  $g$ -homogene Komponente, so ist  $\langle x_1 \rangle = \tilde{W} \cap \langle x_2, x_{26} \rangle \Delta \cap \langle x'_1, x_6 \rangle \Delta$   $g$ -invariant.

Ist  $\langle x_1, x_{13} \rangle$  eine  $g$ -homogene Komponente, so ist  $\langle x_1 \rangle = \tilde{W} \cap \langle x_3, x_{23} \rangle \Delta \cap \langle x_{45}, x_{26} \rangle \Delta$   $g$ -invariant.

Ist  $\langle x_1, x'_3 \rangle$  eine  $g$ -homogene Komponente, so ist  $\langle x_1 \rangle = \tilde{W} \cap \langle x_2, x_{23} \rangle \Delta \cap \langle x_4, x_{24} \rangle \Delta$   $g$ -invariant.

Ist  $\langle x_1, x'_2 \rangle$  eine  $g$ -homogene Komponente, so ist  $\langle x_1 \rangle = \tilde{W} \cap \langle x_2, x_{24} \rangle \Delta \cap \langle x_4, x_{46} \rangle \Delta$   $g$ -invariant.

Anwendung von  $w_0$  zeigt, dass in jeder  $g$ -homogenen Komponente 2 verschiedene 1-dimensionale Unterräume invariant bleiben, von denen einer singulär ist. Damit bleibt auch der andere singuläre Punkt darin und damit alle  $\langle x \rangle$  mit  $x \in X$  invariant. Mit Hilfe von  $f$  sieht man nun, dass  $g = 1$  gilt.

**Satz 7.3.1** *Sei  $U$  eine auflösbare Untergruppe von  $G$  mit  $(|U|, \Phi_{12}(q)) \neq 1$ . Sei  $r$  ein Primteiler von  $(|U|, \Phi_{12}(q))$  und  $R$  eine  $r$ -Untergruppe von  $G$ .*

*Ist  $R$  nicht normal in  $U$ , so gilt:*

- (i) *Es ist  $|R| = 13$  und  $\text{char}(\mathbb{F}) \neq 3$ .*
- (ii) *Enthält  $\mathbb{F}$  eine primitive dritte Einheitswurzel, so ist  $U$  eine der Gruppen aus Proposition 7.3.1*
- (iii) *Enthält  $\mathbb{F}$  keine primitive dritte Einheitswurzel, so ist  $U$  eine der Gruppen aus Proposition 7.3.2*

Beweis: Jeder  $R$ -Untermodul, der singuläre Punkte enthält, ist ein treuer  $R$ -Modul und nach Lemma 7.3.4 auch ein treuer  $U$ -Modul. Weil  $\mathfrak{C}_V(O_p(U))$  ein  $U$ -Untermodul von  $V$  ist, der singuläre Punkte enthält, gilt  $O_p(U) = 1$ .

Wir zeigen zunächst, dass  $U$  treu und irreduzibel auf einem Untermodul von  $V$  wirkt. Nach Lemma 7.3.4 gäbe es sonst nur irreduzible Untermoduln, auf denen  $R$  trivial wirkt. Weil es für  $\mathfrak{N}_G(W_0)$  mit  $W_0 = \mathfrak{C}_V(R)$  ein Komplement zu  $W_0$  in  $V$  gibt, wäre die Dimension des Sockels  $\text{Soc}(V)$  des  $U$ -Moduls  $V$  höchstens 2. Sei nun  $M$  ein minimaler Normalteiler von  $U$ . Weil  $M$  eine  $p'$ -Gruppe ist, ist  $V$  ein vollständig reduzibler  $M$ -Modul. Sei  $V_1$  eine homogene  $M$ -Komponente in

$V$ . Wäre  $V_1 \cap \text{Soc}(V) = \{0\}$ , so wäre auch  $\bigoplus_{u \in U} V_1^u \cap \text{Soc}(V) = \{0\}$  im Widerspruch dazu, dass  $\bigoplus_{u \in U} V_1^u$  ein  $U$ -Untermodul von  $V$  ist, der einen irreduziblen  $U$ -Untermodul von  $V$  enthält. Also hat jede homogene Komponente von  $M$  nicht-trivialen Schnitt mit  $\text{Soc}(V)$ . Wäre  $\text{Soc}(V)$  zweidimensional, so wäre  $\text{Soc}(V)$  kein irreduzibler  $M$ -Modul, sonst wäre  $V$  ein homogener  $M$ -Modul mit irreduziblen  $M$ -Moduln der Dimension zwei im Widerspruch dazu, dass die Dimension von  $V$  ungerade ist. Also ist  $M$  diagonalisierbar und besitzt höchstens zwei homogene Komponenten. Sei  $m \in M$ . Dann ist  $m$  in einem maximalen Torus von  $G^{\mathbb{k}}$  enthalten und besitzt über  $\mathbb{k}$  höchstens zwei verschiedene Eigenwerte. Diese Eigenwerte sind dritte Einheitswurzeln, weil alle von 0 verschiedenen Vektoren in  $\text{Soc}(V)$  dunkel sind. Angenommen  $m$  besitzt 2 verschiedene Eigenwerte  $\lambda$  und  $\mu$  über  $\mathbb{k}$ . Weil  $\mathcal{G}$  zusammenhängend ist, existieren Eigenvektoren  $v_1, v_2, v_3$  von  $m$  über  $\mathbb{k}$  mit  $f(v_1, v_2, v_3) \neq 0$  und  $v_1^m = \lambda v_1$ ,  $v_2^m = \lambda v_2$  und  $v_3^m = \mu v_3$  bei entsprechender Bezeichnung der beiden Eigenwerte. Es folgt der Widerspruch  $1 = \lambda^3 = \lambda^2 \mu$ . Also ist  $V$  ein homogener  $m$ -Modul. Es folgt  $M = Z(G)$ . Ist  $N$  das Urbild eines minimalen Normalteilers von  $U/M$  in  $U$ , so ist auch  $N$  eine  $p'$ -Gruppe. Wiederholt man dasselbe Argument mit  $N$  statt  $M$ , so folgt ein Widerspruch.

Sei nun  $W$  ein treuer, irreduzibler  $U$ -Untermodul von  $V$  und  $A$  ein maximaler abelscher Normalteiler von  $U$ . Ist  $W$  kein homogener  $A$ -Modul, so definieren die homogenen Komponenten von  $A$  in  $W$  eine direkte Zerlegung von  $W$ . Auf  $W$  wirkt  $U$  also imprimitiv. Sei  $K \trianglelefteq U$  die Menge aller Elemente in  $U$ , die alle homogenen Komponenten von  $A$  stabilisieren. Es gilt  $(\Phi_{12}(q), |K|) = 1$ , sonst wären die homogenen Komponenten von  $A$  zwei treue irreduzible Untermoduln einer nichttrivialen Untergruppe von  $R$ . Weil 12 keine Potenz von 2 ist, folgt mit Satz 4.1, dass jede  $r$ -Gruppe in  $K$  normal ist in  $K$  und wegen  $[U : K] = 2$  auch jede  $r$ -Gruppe in  $U$  normal in  $U$ . Also wirkt  $R$  treu auf den homogenen Komponenten von  $A$ . Es folgt  $r \leq 27$  und damit  $r = 13$ .

Sei  $A$  zunächst über  $\mathbb{F}$  diagonalisierbar. Sei  $\tilde{R} \leq Z(R)$  eine Untergruppe von  $R$  der Ordnung 13. Dann stabilisiert  $\tilde{R}$  einen Gewichtsraum von  $A$ , der ein dunkler Punkt ist, und wirkt fixpunktfrei auf den übrigen Gewichtsräumen, weil  $\mathfrak{C}_V(\tilde{R})$  ein dreidimensionaler dunkler Unterraum von  $V$  ist. Wäre einer der irreduziblen  $A$ -Untermoduln von  $V$  brillant, so wäre  $A^2$  nach Lemma 7.3.3 enthalten in einer Cartan-Untergruppe von  $G$ , d.h. alle Komponenten von  $A^2$  wären erzeugt von singulären Punkten und zugleich Summen von Komponenten von  $A$ . Sei  $\hat{W}$  der unter  $R$  invariante Gewichtsraum von  $A$ . Die homogene  $A^2$ -Komponente  $\hat{W}$ , die  $\tilde{W}$  enthält, ist also echt größer als  $\tilde{W}$ ,  $R$ -invariant, und damit folgt, dass  $[R, A^2]$  auf  $\hat{W}$  trivial wirkt. Nach Lemma 7.3.4 ist  $[R, A^2] = 1$  und damit  $A^2 \leq Z(G)$ , weil  $Z(G)$  die größte diagonalisierbare Untergruppe von  $\mathfrak{C}_G(R)$  ist. Weil  $A^2$  eine 3-Gruppe ist und  $R$  nichttrivial auf  $A$  wirkt, existiert nach dem Satz von Schur-Zassenhaus ein Komplement  $C$  zu  $A^2$  in  $A$ , das eine elementarabelsche 2-Gruppe

ist, auf der  $R$  nichttrivial wirkt. Nach Lemma 7.3.3 können wir annehmen, dass  $C$  den Punkt  $Q_6$  und den Raum  $U_{10} := \langle x_i, x_{i6} \mid 1 \leq i \leq 5 \rangle$  stabilisiert. Wirkt  $g \in C$  trivial auf  $U_{10}$ , so gilt auch  $(x'_6)^g = x'_6$ , weil  $g$  die Form  $f$  erhält. Sei  $M = (B \cap U_{10}) \cup \{x'_6\}$ . Dann ist  $\langle v \rangle = (M \cap v\Delta)\Delta$  für alle  $v \in B$ . Also gilt  $g \in \mathfrak{N}_G(B)$ . Mit den Bezeichnungen aus Kapitel 3.2 und der Beschreibung von  $T_0$  dort ist  $g = l(a)$  für ein  $a \in \mathbb{F}$  mit  $a^2 = 1$ . Demnach besitzt  $C$  eine Untergruppe  $\tilde{C}$  vom Index 1, 2 oder 4, die treu auf  $U_{10}$  wirkt und  $x'_6$  und damit auch die von  $x'_6$  induzierte orthogonale Form auf  $U_{10}$  invariant lässt. Wären zwei Gewichtsräume  $V_\lambda$  und  $V_\mu$  von  $\tilde{C}$  in  $U_{10}$  bezüglich dieser Form zueinander nicht orthogonal, so existierten  $v \in V_\lambda$ ,  $w \in V_\mu$  und  $c \in \tilde{C}$  mit  $v^c = v$  und  $w^c = -w$  im Widerspruch zu  $f(x'_6, v, w) \neq 0$ . Es folgt  $|\tilde{C}| \leq 2^4$  und  $|C| \leq 2^6$ . Nun teilt 13 nicht die Ordnung von  $\text{Aut}(C)$ , d.h.  $R$  zentralisiert  $C$ . Es folgt  $C = 1$  und der Widerspruch  $A \leq Z(G)$ . Also sind alle Gewichtsräume von  $A$  dunkel. Es folgt, dass  $A$  eine elementarabelsche 3-Gruppe ist und  $\mathbb{F}$  wegen  $A \neq 1$  eine primitive dritte Einheitswurzel enthält.  $K$  ist eine elementarabelsche 3-Gruppe, die  $A$  und  $Z(G)$  enthält. Ihre Ordnung ist wegen  $13 \mid \text{Aut}_U(A)$  und weil  $Z(G)$  von  $R$  zentralisiert wird durch 81 teilbar. Nach Proposition 7.3.1 ist  $U$  eine der dort beschriebenen Gruppen.

Sei nun  $A$  über  $\mathbb{F}$  nicht diagonalisierbar. Wieder stabilisiert  $R$  einen Gewichtsräume von  $A$ , der ein dunkler Punkt ist, und wirkt regulär auf den übrigen, zweidimensionalen Komponenten von  $A$ , weil  $\mathfrak{C}_V(R)$  ein dreidimensionaler, dunkler Unterraum von  $V$  ist. Weil  $A$  abelsch ist und irreduzibel auf jeder zweidimensionalen Komponente wirkt, induziert  $A$  dort je eine zyklische Gruppe, deren Ordnung  $q+1$  teilt. Nach Einbettung von  $G(\mathbb{F})$  in  $G(\mathbb{F}^2)$  ist  $A$  also diagonalisierbar und demnach in  $G(\mathbb{F}^2)$  eine der Gruppen aus Proposition 7.3.1. Demnach ist  $A$  eine elementarabelsche Gruppe der Ordnung 27 und  $U$  eine der Gruppen aus Proposition 7.3.2.

Es bleibt übrig, den Fall zu betrachten, dass der treue, irreduzible  $A$ -Modul  $W$  ein homogener  $A$ -Modul ist. Insbesondere ist  $A$  dann zyklisch. Wegen  $\mu = 12$  ist  $W$  die direkte Summe von isomorphen irreduziblen  $A$ -Moduln der Dimension  $t \leq 12$ . Nach Lemma 6.2.1 ist  $\text{Aut}_G(A)$  eine zyklische Gruppe, deren Ordnung  $t$  teilt. Demnach wird  $A$  von  $R$  zentralisiert. Insbesondere ist  $\mathfrak{C}_U(A) \neq A$  und aufgrund der Maximalität von  $A$  nicht abelsch. Nach Lemma 1.1 ist ein minimaler nichtabelscher Normalteiler  $N$  von  $U$  in  $\mathfrak{C}_U(A)$  eine  $s$ -Gruppe vom symplektischen Typ mit Exponent  $s(2, s)$  für eine Primzahl  $s$  mit  $Z(N) \leq A \leq \mathfrak{C}_U(R)$ . Jeder Primteiler von  $\mathfrak{C}_G(R)$  ist ein  $q$ -primitiver Teiler von  $q^{12} - 1$ ,  $q^3 - 1$  oder gleich 3. Weil  $s$ -Gruppen für  $q$ -primitive Teiler von  $q^{12} - 1$  zyklisch sind, ist  $s$  ein Teiler von  $\Phi_3(q)$ . Wäre  $s$  ein  $q$ -primitiver Teiler von  $q^3 - 1$ , so hätte die Gruppe  $N$  der Ordnung  $s^{1+2k}$  nach Proposition 1.2 nur treue irreduzible Darstellungen vom Grad  $3s^k$ . Es folgt  $s^k \leq 9$  und  $s^k = 7$  wegen  $s \equiv 1 \pmod{3}$ . Es folgt ein Widerspruch,

weil  $|R|$  nicht die Ordnung  $|\mathrm{Sp}_2(7)| = 6 \cdot 7 \cdot 8$  von  $\mathrm{Aut}(N)$  teilt. Folglich besitzt  $\mathbb{F}$  eine primitive dritte Einheitswurzel, und  $N$  ist eine 3-Gruppe der Ordnung  $3^{1+2k}$  mit  $3^k \leq 27$ . Außerdem teilt  $|R|$  die Ordnung von  $\mathrm{Aut}(N) \cong \mathrm{Sp}_{2k}(3)$ . Es folgt  $|R| = 13$  und  $k = 3$ . Es bleibt zu zeigen, dass  $G$  keine extraspezielle Gruppe der Ordnung  $3^{1+6}$  mit Exponent 3 enthält.

Angenommen  $G$  enthält eine extraspezielle Gruppe  $N$  der Ordnung  $3^{1+6}$  mit Exponent 3. Nach Proposition 1.2 besitzt  $\mathbb{F}$  eine primitive dritte Einheitswurzel. Nach Proposition 1.3 und mit dem Witt'schen Lemma sind alle Untergruppen von  $N$  der Ordnung 9, die  $Z(G)$  enthalten, in  $\mathrm{GL}(V)$  konjugiert. Nach Proposition 1.2 haben die Gewichtsräume aller solcher Gruppen die Dimension 9. Es folgt, dass alle diese Gruppen zu  $U_2$  oder zu  $U_3$  nach Lemma 7.3.2 konjugiert sind. Ebenfalls aus Proposition 1.2 folgt, dass  $\mathfrak{C}_N(K)$  für jede solche Untergruppe  $K$  irreduzibel auf jedem der Gewichtsräume von  $K$  wirkt. Jedes Element in  $\mathfrak{C}_G(U_2)$  stabilisiert  $\langle x_1 \rangle$  als den einzigen singulären Punkt  $\langle v \rangle$  im ihn enthaltenden Eigenraum  $W$  mit  $v\Delta \cap W = \langle v \rangle$ . Demnach ist  $K$  konjugiert zu  $U_3$ , d.h. die Gewichtsräume  $A_1, A_2, A_3$  von  $K$  bilden eine 3-Zerlegung von  $V$ . Seien o.B.d.A.  $A_1, A_2, A_3$  die Unterräume aus Proposition 3.2.8 und  $K = \langle g, Z(G) \rangle$ . Dann existiert in  $N$  ein Element  $h$ , so dass  $H = \langle g, h \rangle$  eine extraspezielle Gruppe der Ordnung 27 ist. Dabei permutiert  $h$  die Gewichtsräume von  $K$ , etwa  $A_1^h = A_2$  und  $A_2^h = A_3$ . In der Notation von Proposition 3.2.8 gilt dann auch  $M_1^h = M_2$  und  $M_2^h = M_3$ . Es ist  $\mathfrak{C}_G(K) = M_0T_0$  mit  $M_0 \trianglelefteq M_0T_0$  und  $[M_0T_0 : M_0] = 3$ . Der Zentralisator in  $M_0$  von  $H$  enthält  $Z(G)$  und  $M := \{mm^hm^{h^2} \mid m \in M_1\}$ . Weil  $\{(mm^hm^{h^2}) \mid m \in M_1\}$  den Kern der kanonischen Surjektion  $(M_1 \times M_2 \times M_3) \rightarrow M_1M_2M_3$  enthält, gilt  $M \cong \mathrm{PSL}_3(\mathbb{F})$ . Weil  $\mathbb{F}$  eine primitive dritte Einheitswurzel enthält, ist eine 3-Sylowgruppe von  $M$  elementarabelsch. Sei nun  $m_1m_2m_3 \in \mathfrak{C}_{M_0}(H)$ . Dann liegt  $(m_1m_2m_3)^{-1}(m_1m_1^hm_1^{h^2}) = (m_2^{-1}m_1^h)(m_3^{-1}m_1^{h^2})$  in  $M_2M_3$ , wobei  $\tilde{m}_2 := m_2^{-1}m_1^h \in M_2$  trivial auf  $A_2$  und treu auf  $A_3$  und  $\tilde{m}_3 := m_3^{-1}m_1^{h^2} \in M_3$  trivial auf  $A_3$  und treu auf  $A_2$  wirkt. Außerdem ist  $\tilde{m}_2\tilde{m}_3 = \tilde{m}_2^h\tilde{m}_3^h$ . Die Wirkung dieses Elements auf  $M_3$  wird beschrieben durch  $\tilde{m}_2 \otimes I$  und zugleich durch  $I \otimes \tilde{m}_3^{-h}$  bezüglich derselben Basis des Tensorproduktmoduls für  $M_1 \otimes M_2$ . Es folgt, dass  $\tilde{m}_2$  und  $\tilde{m}_3$  skalare Multiplikationen etwa mit  $\lambda_2$  und  $\lambda_3$  sind. Damit induzieren  $\tilde{m}_2\tilde{m}_3$  auf  $A_1$  skalare Multiplikation mit  $\lambda_2^{-1}\lambda_3$ , auf  $A_2$  mit  $\lambda_3^{-1}$  und auf  $A_3$  mit  $\lambda_2$ . Alle diese Skalare sind gleich, und damit gilt  $\lambda_3 = \lambda_2^{-1}$ ,  $\lambda_2^3 = 1$  und  $\tilde{m}_2\tilde{m}_3 \in Z(G)$ . Es folgt  $\mathfrak{C}_{M_0}(H) = Z(G) \times M$  mit einer elementarabelschen 3-Sylowgruppe. Es folgt der Widerspruch, dass  $\mathfrak{C}_N(H)$  eine elementarabelsche Gruppe enthält, deren Index in  $N$  höchstens 3 ist.

**Korollar 7.3.1** *Sei  $r$  eine Primzahl, die  $\Phi_{12}(q)$  teilt,  $U$  eine Untergruppe von  $G$  und  $R$  eine  $r$ -Gruppe, die in  $\mathfrak{N}_G(U)$  liegt, aber nicht in  $U$ .*

*Ist  $[R, U] \neq 1$ , so ist  $\text{char}(\mathbb{F}) \neq 3$  und  $|R| = 13$ .*

*Enthält  $\mathbb{F}$  eine primitive dritte Einheitswurzel, so ist  $U$  eine der Gruppen  $O_3(\mathfrak{N}_G(A))$ ,  $A$  oder eine elementarabelsche Untergruppe von  $A$  der Ordnung 27 mit  $A$  wie in Proposition 7.3.1.*

*Enthält  $\mathbb{F}$  keine primitive dritte Einheitswurzel, so ist  $U = A$  für eine Gruppe  $A$  wie in Proposition 7.3.2.*

Beweis: Sei  $s$  ein Primteiler von  $|U|$ . Zunächst zeigt man wie in [He1], Satz 2 bzw. Korollar 7.1.1, dass  $R$  eine  $s$ -Sylowgruppe  $S$  von  $U$  normalisiert. Sei nun  $S$  eine  $s$ -Sylowgruppe von  $U$ , die von  $R$  normalisiert wird. Dann ist  $SR$  eine auflösbare Untergruppe von  $G$ , deren Ordnung durch einen  $q$ -primitiven Teiler von  $q^{12} - 1$  teilbar ist. Nach Satz 7.3.1 ist  $SR$  abelsch oder  $s = 3$ . Insbesondere ist  $U$  das Produkt der zyklischen Untergruppe  $\mathfrak{C}_U(R)$  und einer 2-Gruppe und nach dem Satz von Kegel und Wielandt ([Ke]) auflösbar. Ist nun  $[R, U] \neq 1$ , so ist  $UR$  eine auflösbare Gruppe, in der  $R$  nicht normal ist. Die Behauptung folgt nun mit Satz 7.3.1.

**Satz 7.3.2** *Sei  $U$  eine nicht auflösbare Untergruppe von  $G$  mit  $(|U|, \Phi_{12}(q)) \neq 1$ . Sei  $r$  eine Primzahl, die  $(|U|, \Phi_{12}(q))$  teilt,  $R$  eine  $r$ -Sylowgruppe von  $U$  und  $S$  der normale Abschluss von  $R$  in  $U$ . Weiterhin sei  $T_1$  die Untergruppe von  $\mathfrak{C}_G(R)$  der Ordnung  $q^2 + q + 1$  und  $W := \mathfrak{C}_V(R)$ . Ist dann  $A$  der maximale auflösbare Normalteiler von  $U$  und  $B/A$  ein nicht auflösbarer, minimaler Normalteiler von  $U/A$ , so gilt:*

- (i)  $U/B$  ist isomorph zu einem homomorphen Bild der Erweiterung von  $T_1$  mit einer zyklischen Gruppe der Ordnung 12 in  $\mathfrak{N}_G(R)$ .
- (ii)  $B/A$  ist eine einfache nichtabelsche Gruppe, und es gilt  $(|U|, \Phi_{12}(q)) = (|B/A|, \Phi_{12}(q))$ .
- (iii) Es ist  $A = F(U)$ ,  $A = O_3(U)$  eine 3-Gruppe der Ordnung  $3^3$ ,  $3^4$  oder  $3^7$  wie in Proposition 7.3.1, (iv) oder Proposition 7.3.2, (iii) für  $A \neq Z(B)$  und  $A \leq T_1$  für  $A = Z(B)$ .
- (iv) Ist  $A \neq Z(B)$ , so ist  $(|U|, \Phi_{12}(q)) = |R| = 13$ ,  $\text{char}(\mathbb{F}) \neq 3$  und  $U$  eine der Gruppen aus Proposition 7.3.1, (iv) oder Proposition 7.3.2, (iii).
- (v) Ist  $A = Z(B) = 1$ , so ist  $B = S$  einfach und  $U$  isomorph zu einer Untergruppe von  $\text{Aut}(B)$ .
- (vi) Ist  $A = Z(B) = Z(G) \cong \mathbb{Z}_3$ , so ist  $B' = S$  quasieinfach,  $F(U) = A$ ,  $E(U) = B'$  und  $F^*(U) = B$ .

- (vii) Ist  $A = Z(B) \not\leq Z(G)$ , so ist  $U$  enthalten in  $\mathfrak{N}_G(W)$ , dem Produkt  $\mathfrak{N}_G(R) \cdot \mathfrak{C}_G(W)$  und  $B$  in  $T_1 \cdot \mathfrak{C}_G(W)$ . Dabei ist  $\mathfrak{C}_G(W) \cong {}^3D_4(\mathbb{F})$ ,  $[\mathfrak{N}_G(W) : T_1 \cdot \mathfrak{C}_G(W)] = 3$  und  $T_1 \cdot \mathfrak{C}_G(W) \cong T_1 \times \mathfrak{C}_G(W)$ . Es ist  $B' = S$  quasieinfach,  $F(U) = A$ ,  $E(U) = B'$  und  $F^*(U) = B$ . Alle hier auftretenden Fälle lassen sich direkt aus Satz 7.2.2 ablesen.

Beweis: Der Beweis ist analog zum Beweis von Satz 7.1.2, nur verwendet man Lemma 7.3.1, Korollar 7.3.1 und Satz 7.3.1 statt Lemma 7.1.1, Korollar 7.1.1 und Satz 7.1.1.

Die Aussagen in (iii) für den Fall  $A \neq Z(B)$  folgen aus der Struktur der Gruppen in Proposition 7.3.1, (iv) und Proposition 7.3.2, (iii). Die Aussage in (vii) folgt, daraus, dass  $V^{\mathbb{k}}$  als  $T_1$ -Modul zerfällt in die direkte Summe von  $W^{\mathbb{k}}$  und  $[V, R]^{\mathbb{k}}$ . Im Beweis zu Proposition 6.2.10, (iv) hatten wir gesehen, dass die Eigenwerte jedes Elementes  $g$  in  $T_1$ , das nicht in  $Z(G)$  liegt, in  $W^{\mathbb{k}}$  verschieden sind von denen in  $[V, R]^{\mathbb{k}}$ . Folglich ist  $U \leq \mathfrak{N}_G(g) \leq \mathfrak{N}_G(W)$ . Die Aussagen über die Struktur von  $\mathfrak{N}_G(W)$  folgen aus Proposition 3.2.7.

**Satz 7.3.3** Sei  $U$  eine nicht auflösbare Untergruppe von  $G$  mit  $(|U|, \Phi_{12}(q)) \neq 1$ . Dann gilt einer der folgenden Fälle:

- (i)  $U = G$ .
- (ii) Es ist  $\mathfrak{C}_G(\mathfrak{C}_V(R)) \leq U \leq \mathfrak{N}_G(\mathfrak{C}_V(R))$  mit  $\mathfrak{C}_G(\mathfrak{C}_V(R)) \cong {}^3D_4(q)$  für einen Primteiler  $r$  von  $\Phi_{12}(q)$  und eine  $r$ -Sylowgruppe  $R$  von  $G$ .
- (iii) Es ist  $B' \cong F_4(q)$  der Zentralisator eines dunklen Punktes in  $V$ . Es gibt in  $G$  genau  $(q-1, 3)$  Konjugiertenklassen solcher Untergruppen.
- (iv) Es ist  $B' \cong {}^2F_4(q)'$  enthalten in einer Gruppe wie in (iii) und  $q = 2^{2m+1}$  für geeignetes  $m \in \mathbb{N}$ .
- (v) Es ist  $\text{char}(\mathbb{F}) = 2$ , und  $B' \cong {}^3D_4(q)$  zentralisiert einen dunklen Punkt  $Q$ , wirkt irreduzibel auf einer Hyperebene in  $V$  und ist konjugiert unter einem äußeren Automorphismus von  $\mathfrak{C}_G(Q) \cong F_4(q)$  zu  $\mathfrak{C}_G(\mathfrak{C}_V(R))$ , einer Gruppe wie in (ii).
- (vi) Für einen Teilkörper  $K$  von  $\mathbb{F}$  mit  $([\mathbb{F} : K], 12) = 1$  ist  $U = G(K)$  oder eine Untergruppe wie in (ii), (iii), (iv) oder (v) von  $G(K)$ .
- (vii) Es ist  $(|U|, \Phi_{12}(q)) = 13$  und  $U$  eine der Gruppen aus Satz 7.3.2, (iv).
- (viii) Es ist  $\text{char}(\mathbb{F}) \neq 5$ ,  $(|U|, \Phi_{12}(q)) = 13$  und  $B' \cong \text{PSL}_2(25)$ .  $B'$  zentralisiert einen dunklen Punkt und wirkt irreduzibel auf einer Hyperebene von  $V$ . Solche Gruppen existieren als Untergruppen von  ${}^2F_4(2)'$  immer, wenn  $\text{char}(\mathbb{F}) = 2$  gilt oder  $\mathbb{F}$  eine primitive vierte Einheitswurzel enthält.

- (ix) Es ist  $\text{char}(\mathbb{F}) \neq 3$ ,  $(|U|, \Phi_{12}(q)) = 13$  und  $B' \cong SL_3(3)$ . Dabei zentralisiert  $B'$  einen dunklen Punkt und wirkt irreduzibel auf einer Hyperebene von  $V$  und ist enthalten in einer der Gruppen aus (vii). oder wirkt für  $\text{char}(\mathbb{F}) \neq 2$  irreduzibel auf  $V$ . In  $F_4(q)$  existieren solche Gruppen, wenn  $\text{char}(\mathbb{F}) \neq 3$  gilt. Irreduzible Beispiele existieren in  ${}^2F_4(2)'$ , wenn  $\mathbb{F}$  eine primitive vierte Einheitswurzel enthält.
- (x) Es ist  $\text{char}(\mathbb{F}) = 2$ ,  $(|U|, \Phi_{12}(q)) = 13$ , und  $B' \cong PSL_4(3)$  zentralisiert einen dunklen Punkt und wirkt irreduzibel auf einer Hyperebene von  $V$ .  $G$  enthält genau eine Konjugiertenklasse solcher Untergruppen.
- (xi) Es ist  $\text{char}(\mathbb{F}) \neq 2$ , und  $\mathbb{F}$  enthält eine primitive vierte Einheitswurzel. Es gilt  $(|U|, \Phi_{12}(q)) = 13$ , und  $B' \cong {}^2F_4(2)'$  wirkt irreduzibel auf  $V$ .  $G$  enthält genau zwei Konjugiertenklassen solcher Gruppen, und es ist  $\mathfrak{N}_G(B') \cong {}^2F_4(2) \times Z(G)$ .
- (xii) Es ist  $\text{char}(\mathbb{F}) \neq 2$ ,  $(|U|, \Phi_{12}(q)) = 13$ , und  $B' \cong {}^3D_4(2)$  zentralisiert einen dunklen Punkt und wirkt irreduzibel auf einer Hyperebene von  $V$ .
- (xiii) Es ist  $\text{char}(\mathbb{F}) \neq 3$ ,  $(|U|, \Phi_{12}(q)) = 13$ , und  $B' \cong PSL_2(27)$  zentralisiert einen dunklen Punkt und wirkt irreduzibel auf einer Hyperebene von  $V$  oder auf zwei Untermoduln von  $V$  der Dimension 13.
- (xiv) Es ist  $\text{char}(\mathbb{F}) \neq 3$ ,  $(|U|, \Phi_{12}(q)) = 13$  und  $B' \cong PSL_2(13)$ . Der  $B'$ -Modul  $V$  zerfällt in die direkte Summe irreduzibler Moduln der Dimension 1, 12 und 14 oder für  $\text{char}(\mathbb{F}) \notin \{2, 7\}$  in die direkte Summe irreduzibler Untermoduln der Dimension 13 und 14. Genau dann enthält  $G$  solche Gruppen mit einer Zerlegung wie im ersten Fall, wenn  $\mathbb{F}$  eine Wurzel von  $X^3 + X^2 - 2X - 1$  enthält und wie im zweiten Fall, wenn  $-91$  ein Quadrat ist in  $\mathbb{F}$ .

*Bemerkungen:*

- (i) 13 ist genau dann ein Teiler von  $\Phi_{12}(q)$ , wenn gilt:  $q \equiv a \pmod{13}$  mit  $a \in \{2, 6, 7, 11\}$ .
- (ii) Wo in den oben angegebenen Fällen keine Existenzaussagen gemacht werden, bleibt diese offen. Unter diesen Fällen findet sich eine Reihe von Gruppen, deren Existenz auch M. Aschbacher in [As8] offen läßt. Die Existenzaussagen in den Fällen (vii) bis (xiv) setzen voraus, dass 13 ein Teiler von  $\Phi_{12}(q)$  ist.
- (iii) Nach dem Schur'schen Lemma ist offenbar in allen oben genannten Fällen, außer im Fall (ii),  $B \in \{B', B'Z(G)\}$ .

Beweis: Die Notation aus Satz 7.3.2 wird fortgesetzt. Daneben führen wir folgende Notation ein: Für die Primzahlpotenz  $q = p^a$  und  $n \in \mathbb{N}$  mit  $(n, p) = 1$  sei  $d_q(n) := \min\{m \in \mathbb{N} \mid n \mid q^m - 1\}$ .

Nach Satz 7.3.2 haben wir nur den Fall zu betrachten, dass  $A = Z(B) \leq Z(G)$  ist. Sei zunächst  $B/A$  eine einfache Gruppe vom Lie-Typ in Charakteristik  $p$ . Wie im Beweis von Satz 7.1.3 ist der Zentralisator eines Elementes der Ordnung  $r$  mit  $r \mid q^4 - q^2 + 1$  als zyklische Gruppe eine Gruppe der Ordnung  $s$ , wobei  $s$  die Form  $\epsilon(p^b \pm 1)$  hat für  $\epsilon \in \{1, 1/2\}$  und  $b \in \mathbb{N}$  oder die Form  $(p^{bk} - 1)/(\alpha(p^b - 1))$  für  $B/A \cong \text{PSL}_k(p^b)$  oder die Form  $(p^{bk} + 1)/(\alpha(p^b + 1))$  für  $B/A \cong \text{PSU}_k(p^b)$ , jeweils mit  $b, k \in \mathbb{N}$  und einem Teiler  $\alpha$  von  $(k, p^b - 1)$  bzw.  $(k, p^b + 1)$ .

Sei zunächst  $s = \epsilon(p^b - 1)$ . Dann ist  $d_p(s) = b$ . Nach Lemma 2.1 ist  $12 = \frac{b}{(b,a)}$ , insbesondere ist  $b$  gerade. Nun hat  $s$  einen Teiler der Form  $\tilde{s} = \epsilon(p^{(b/2)} - 1)$  mit  $d_q(\tilde{s}) = \frac{b/2}{(b/2,a)} = 6$ . Es folgt ein Widerspruch, weil jeder Teiler der Ordnung von  $\mathfrak{C}_G(R)$ , der kein  $q$ -primitiver Teiler von  $q^{12} - 1$  ist, ein Teiler von  $q^3 - 1$  ist. Für  $s = (p^{bk} - 1)/(\alpha(p^b - 1))$  argumentiert man genau so mit  $12 = \frac{bk}{(bk,a)}$ , wenn  $k \neq 2$  gilt. Im Fall  $k = 2$  ist aber  $s = \frac{1}{\alpha}(p^b + 1)$ , und wir befinden uns in einem der im Folgenden ausgeschlossenen Fälle. Ist  $s = \epsilon(p^b + 1)$ , so ist  $d_p(s) = 2b$  und  $12 = \frac{2b}{(2b,a)}$ ; insbesondere ist 3 ein Teiler von  $b$ . Nun hat  $s$  einen Teiler der Form  $\tilde{s} = \epsilon(p^{(b/3)} + 1)$  mit  $d_q(\tilde{s}) = \frac{2b/3}{(2b/3,a)} = 4$ . Wie oben folgt ein Widerspruch. Für  $s = (p^{bk} + 1)/(\alpha(p^b + 1))$  argumentiert man genau so mit  $12 = \frac{2bk}{(2bk,a)}$ , wenn  $k \neq 3$  gilt. Im Fall  $k = 3$  ist  $B/A \cong \text{PSU}_3(p^b)$  und  $s = \frac{1}{\alpha}(p^{2b} - p^b + 1)$ . Insbesondere enthält  $\mathbb{F}_{q^2}$ , aber nicht  $\mathbb{F}_q$ , einen Körper der Ordnung  $p^b$  wegen  $12 = \frac{6b}{(6b,a)}$ . Nun zerfällt  $V$  als Modul für den Torus der Ordnung  $\frac{1}{\alpha}(p^{2b} - p^b + 1)$  in zwei irreduzible Teilmoduln der Dimension 12 und einen trivialen Modul der Dimension 3, der eine getwistete spezielle Ebene ist. Weiterhin enthält  $B$  auch einen Torus  $\tilde{T}$  der Form  $\mathbb{Z}_t \times \mathbb{Z}_t$  mit  $t = \frac{1}{\alpha}(p^b + 1)$ . Es existiert ein  $q$ -primitiver Teiler  $k$  von  $q^4 - 1$ , der  $t$  teilt. Aus den Ordnungen von  $E_6(q)$  und  $\text{Spin}_8^+(q)$  folgt, dass für jedes solche  $k$  eine  $k$ -Sylowgruppe von  $B$  im Zentralisator einer speziellen Ebene enthalten ist, und aus der Darstellung des Zentralisators einer solchen Ebene nach Proposition 3.2.6 folgt, dass alle weiteren  $\tilde{T}$ -Untermoduln von  $V$  die Dimension 4 haben. Weil jede Gerade in einer speziellen Ebene einen brillanten Punkt enthält, folgt, dass  $B'$  irreduzibel auf  $V$  oder auf einer Hyperebene von  $V$  wirkt. Im ersten Fall ist  $V$  ein absolut irreduzibler Modul für  $\text{SU}_3(p^b)$ , weil  $\dim(V)$  ungerade ist und  $\mathbb{F}_{q^4}$  nach Proposition 5.4.4 in [KL] einen Zerfällungskörper von  $\text{SU}_3(p^b)$  enthält. Die Darstellung auf  $V$  ist realisierbar über einem Teilkörper  $K$  dieses Zerfällungskörpers  $\tilde{K}$ , für den  $\tilde{K}$  eine Körpererweiterung vom Grad 4 ist. Nach Proposition 5.4.6 in [KL] ist  $\dim(V)$  ein Quadrat, ein Widerspruch. Genau so folgt ein Widerspruch im zweiten Fall, falls die Hyperebene ein absolut irreduzibler Modul ist. Andernfalls zerfällt die Hyperebene über  $\mathbb{F}_{q^2}$  in absolut irreduzible Moduln der Dimension 13, die über  $\mathbb{F}_{q^2}$  realisierbar sind. Nach [KL], Proposition 5.4.4 wären diese Moduln selbstdual. Nach [As9], Theorem 1 gibt es

aber keine absolut irreduziblen, selbstdualen Moduln der Dimension 13 für  $B'$ . Folglich ist  $B/A$  keine lineare oder klassische Gruppe in Charakteristik  $p$ . Ebenso ist  $B/A$  keine Gruppe vom Typ  $G_2$ , weil jeder maximale Torus in Gruppen vom Typ  $G_2(p^b)$  in einer Untergruppe  $SL_3(p^b)$  oder  $SU_3(p^b)$  enthalten ist. Ist  $B/A$  eine Suzuki-Gruppe  $Sz(p^b)$ , so ist jede maximale zyklische Untergruppe von  $B'$  nach [HB2], Satz 3.10 enthalten in einer zyklischen Untergruppe der Ordnung  $p^b - 1$  oder  $p^b \pm 2\sqrt{p^b/2} + 1$ . Diese werden ausgeschlossen wie oben. Analog argumentiert man für die Ree-Gruppen. Aus den Graden für minimale Darstellungen für Gruppen vom Lie-Typ ergibt sich nun, dass  $B/A$  eine Gruppe vom Typ  $E_6$ ,  ${}^2E_6$ ,  $F_4$ ,  ${}^2F_4$  oder  ${}^3D_4$  ist.

Ist  $B'$  eine Gruppe vom Typ  $E_6(p^b)$ , so ist jeder  $B'$ -Modul der Dimension 27 nach [KL], Table 5.4.C isomorph zum natürlichen  $B'$ -Modul, der nicht realisierbar ist über einem Teilkörper des Zerfällungskörpers  $\mathbb{F}_{p^b}$ . Insbesondere enthält  $\mathbb{F}$  einen zu  $\mathbb{F}_{p^b}$  isomorphen Teilkörper. Analog argumentiert man für die Gruppen vom Typ  $F_4$  und  ${}^2F_4$ . Beide haben in von 3 verschiedener Charakteristik irreduzible Moduln der Dimension 26, stabilisieren also entweder einen Punkt in  $V$ , der dann aus Ordnungsgründen dunkel ist, oder eine Hyperebene  $H$  von  $V$ . Nun induziert nach [As4], Abschnitt 4 die Abbildung  $\xi : g \mapsto (g^{-1})^t$  (bzgl. der Basis  $B$ ) einen Automorphismus von  $G$ . Stabilisiert  $M \leq G$  eine Hyperebene  $H$ , so stabilisiert  $M^\xi$  einen Punkt, und nach Proposition 3.2.5 auch eine Hyperebene, also stabilisiert auch  $M$  einen Punkt. In Charakteristik 3 hat  $M$  irreduzible Moduln der Dimension 25. Würde  $M$  keinen Punkt stabilisieren, so wäre unter  $M$  ein Modul der Dimension 25 invariant und damit unter  $M^\xi$  eine Gerade, was aus Ordnungsgründen ausgeschlossen ist. Alle Untergruppen von  $G$  vom Typ  $F_4$  oder  ${}^2F_4$  stabilisieren also einen dunklen Punkt in  $V$ . Elemente in  $B'$ , die nicht-trivial auf ihm wirkten würden einen Automorphismus der Ordnung 3, der kein Körperautomorphismus ist, auf  $M$  induzieren oder  $M$  zentralisieren. Ersteres ist ausgeschlossen aufgrund der Struktur der Automorphismengruppe der Gruppen vom Typ  $F_4$  und  ${}^2F_4$  und letzteres, weil ihr Schurmultiplikator trivial ist. Die Anzahl der Konjugiertenklassen der Gruppen  $F_4(q)$  in  $E_6(q)$  folgt aus Proposition 3.2.5. Ist  $B'$  vom Typ  ${}^2E_6(p^b)$ , so ist  $V$  nach [KL], Table 5.4.B isomorph zum natürlichen  $B'$ -Modul. Weil dieser nicht über echten Teilkörpern von  $\mathbb{F}_{p^{2b}}$  realisierbar ist, ist  $\mathbb{F}_{p^{2b}}$  ein Teilkörper von  $\mathbb{F}_q$ . Aus der Ordnung von  ${}^2E_6(p^b)$  sieht man aber nun, dass die Ordnung von  $B'$  durch keinen  $q$ -primitiven Teiler von  $q^{12} - 1$  teilbar ist. Ist  $B' \cong {}^3D_4(p^b)$ , so ist  $R$  enthalten in einem maximalen Torus von  $B'$  der Ordnung  $p^{4b} - p^{2b} + 1$ . Damit ist  $d_p(p^{4b} - p^{2b} + 1) = 12b$  und  $12 = \frac{12b}{(12b, a)}$  und folglich  $\mathbb{F}_{p^b}$  ein Teilkörper von  $\mathbb{F}_q$ . Zentralisiere eine solche Gruppe keine getwistete spezielle Ebene. Ein treuer irreduzibler Faktor  $W$  des  $B'$ -Moduls  $V$  ist nach [Lie2], (2o) nicht realisierbar über einem echten Teilkörper von  $\mathbb{F}_{p^{3b}}$  und zugleich ein Modul für  $P\Omega_8(p^{3b})$  oder der Modul  $M(\lambda_2)$ , realisiert über  $\mathbb{F}_{p^b}$ . Der erste

Fall scheidet aus, weil dann  $W$  nicht absolut irreduzibel wäre und damit  $\mathbb{k} \otimes W$  einen absolut irreduziblen Modul einer Dimension  $\leq 9$  enthielte, der nach [KL], Table 5.4.A notwendig Dimension 8 hätte. Dann würde aber  $B'$  eine Ebene in  $V$  zentralisieren, die nur dunkle Punkte enthielte. Die Wirkung von  $B'$  in  $\mathbb{F}_{q^3} \otimes V$  zeigt, dass diese eine getwistete spezielle Ebene wäre. Damit enthält  $V$  den Modul  $M(\lambda_2)$ , der nach [Lie2], (2o) die Dimension 26, 27 oder 28 hat und realisierbar ist über  $\mathbb{F}_{p^b}$ . Nach [As8], (8.12) hat  $M(\lambda_2)$  die Dimension 26. Nach [As9], Thm. 1 ist  $\text{char}(\mathbb{F}) = 2$ . Wir können den Modul zu einem Modul für  ${}^3D_4(q)$  erweitern und o.B.d.A.  $B' \cong {}^3D_4(q)$  annehmen. Wie in [NW], Abschnitt 5 mit dem Torus  $L \cong \mathbb{Z}_{q^2-q+1} \times \mathbb{Z}_{q^2-q+1}$ ,  $M/L \cong Q_8$  und  $K \cong \mathbb{Z}_{q^2-q+1} \times \text{PSL}_3(q)$  sieht man, dass  $F_4(q)$  höchstens zwei Konjugiertenklassen von Untergruppen besitzt, die isomorph sind zu  ${}^3D_4(q)$ . Ein äußerer Automorphismus von  $F_4(q)$  bildet aber eine Gruppe wie in (ii) ab in eine andere Konjugiertenklasse von Gruppen isomorph zu  ${}^3D_4(q)$ , sonst würde ein Element in  $G$ , das eine getwistete spezielle Ebene normalisiert einen solchen Automorphismus induzieren, was ausgeschlossen wird durch Proposition 3.2.7. Es folgt (v).

Im Folgenden werden häufig die folgenden Argumente verwendet:

- (RC) Ist  $g \in G$  halbeinfach und nicht zentral in  $G$ , ist  $o(g) \in \{2, 3, 5, 7\}$  und ist  $\chi_{27}(g)$  rational für den Brauer-Charakter  $\chi_{27}$  von  $G$  zum Modul  $V$ , so ist  $(o(g), \chi_{27}(g)) \in \{(2, 3), (2, -5), (3, 0), (3, 9), (5, 2), (7, -1), (7, 6)\}$ .
- (AC) Ist  $\mathbb{k}$  algebraisch abgeschlossen,  $A$  eine abelsche, halbeinfache Untergruppe von  $E_6(\mathbb{k})$ , deren Rang höchstens 2 ist, und  $C = \langle c \rangle$  eine zyklische Untergruppe von  $E_6(\mathbb{k})$ , die treu auf  $A$  wirkt, so ist  $A$  enthalten in einem maximalen Torus  $T$  von  $E_6(\mathbb{k})$ , und es existiert ein Element  $w \in \mathfrak{N}_{G(\mathbb{k})}(T) / T$ , das wie  $c$  auf  $A$  wirkt.

Das Argument (RC) folgt aus dem entsprechenden Argument in [KW] für  $E_7(q)$  und  $\chi_{56}$  mit  $(o(g), \chi_{27}(g)) \in \{(2, 8), (2, -8), (3, -7), (3, -25), (3, 2), (3, 20), (5, 6), (7, -7), (7, 0), (7, 14)\}$ . Weil es eine Einbettung von  $E_6(q)$  in  $E_7(q)$  gibt, so dass es eine Kompositionsreihe des entsprechenden Moduls gibt, die zwei Mal den trivialen Modul, den natürlichen und den dazu dualen Modul für  $E_6(q)$  enthält, kommen nur gerade Werte von  $\chi_{56}(g)$  in Frage, und dann gilt  $\chi_{27}(g) = \frac{1}{2}(\chi_{56}(g) - 2)$ .

Das Argument (AC) folgt aus dem Beweis zu Lemma (2.1) in [KW]. Man benötigt nur die Tatsache, dass  $A$  enthalten ist in einem maximalen Torus von  $E_6(\mathbb{k})$  und dass  $\mathfrak{C}_{E_6(\mathbb{k})}(A)$  transitiv auf seinen maximalen Tori wirkt. Dann folgt (AC) mit einem Frattini-Argument.

In allen folgenden Fällen kommt für  $B'$  nach Satz 7.3.2 nur eine einfache Gruppe oder eine Schur-Erweiterung von  $B/A$  mit einem Zentrum der Ordnung 3 in Frage. Ist 3 kein Teiler des Schur-Multiplikators von  $B/A$ , so wird stillschweigend nur die entsprechende einfache Gruppe untersucht. Alle im Folgenden ver-

wendeten Informationen über Charaktere von  $B'$  und die Bezeichnungen für die Konjugiertenklassen entstammen  $[At]$  und  $[AtB]$ .

Sei zunächst  $B/A$  eine alternierende Gruppe, also  $B \cong A_n$  für  $n \in \mathbb{N}$ . Dieser Fall tritt nicht ein, weil für  $A_n \leq E_6(q)$  stets  $n \leq 12$  und für  $\text{char}(\mathbb{F}) \neq 2$  sogar  $n \leq 8$  gilt. Die gewöhnlichen Charaktere von  $A_9$  von einem Grad  $\leq 27$  haben nämlich die Grade 1,8,21,27 mit entsprechenden Werten 1,4,1,7 auf der Klasse 2A. Jede Kombination dieser Charaktere zu einem Charakter vom Grad 27 hat also einen Wert größer als 3 auf der Klasse 2A im Widerspruch zu (RC). Via Restriktion lassen sich so auch alle modularen Charaktere in ungerader Charakteristik ausschließen. Ist  $\text{char}(\mathbb{F}) \neq 11$  so betrachtet man die Frobeniusgruppe der Ordnung 110 in  $A_{13}$ . Ihr Kern ist halbeinfach. Wir betten  $E_6(q)$  ein in  $E_6(\mathbb{k})$  für einen algebraischen Abschluss  $\mathbb{k}$  von  $\mathbb{F}_q$  und wenden (AC) an. Weil die Weyl-Gruppe von  $E_6$  genau eine Konjugiertenklasse von Elementen der Ordnung 10 hat, können wir  $w = g_1 g_2$  annehmen, wobei  $g_1$  induziert wird durch die Permutation  $(2, 3, 4, 5, 6)$  auf den Indizes der Basisvektoren in  $B$ , und  $g_2 = \prod_{i=1}^6 (x_i, x'_i)$  ist. Sei  $A = \langle a \rangle$ . Dann zentralisiert  $a$  die Vektoren  $x_1$  und  $x'_1$ . Ist  $x_{12}^a = \beta x_{12}$ , so folgt  $x_2^a = \beta^{-1} x_2$  und  $(x'_2)^a = \beta^{-1} x'_2$  mit  $f$ . Weil  $a$  von  $w^5$  invertiert wird, folgt  $\beta = 1$  und der Widerspruch  $a = 1$ . Folglich enthält  $E_6(\mathbb{F})$  für  $\text{char}(\mathbb{F}) \neq 11$  keine Frobeniusgruppe der Ordnung 110.

Sei nun  $B/A$  eine sporadisch einfache Gruppe oder eine Gruppe vom Lie-Typ in einer von  $p$  verschiedenen Charakteristik. Nach [KL], Proposition 5.3.8 und Table 5.3.A besitzen unter den Gruppen, die einen Primteiler enthalten, der kongruent 1 modulo 12 ist, nur die folgenden Gruppen eine projektive Darstellung von einem Grad  $\leq 27$ :  $\text{Suz}$ ,  $\text{Co}_1$ ,  $\text{Fi}_{22}$ ,  $\text{PSL}_2(13)$ ,  $\text{PSL}_2(25)$ ,  $\text{PSL}_2(27)$ ,  $\text{PSL}_2(53)$ ,  $\text{PSL}_3(3)$ ,  $\text{PSL}_4(3)$ ,  $\text{Sz}(8)$ ,  $\text{PSP}_4(5)$ ,  $\text{PSU}_3(4)$ ,  $\text{G}_2(3)$ ,  $\text{G}_2(4)$ ,  ${}^3\text{D}_4(2)$ ,  ${}^2\text{F}_4(2)'$ ,  $\text{PSp}_6(3)$  und  $\Omega_7(3)$  für  $r = 13$  und  $\text{PSL}_2(37)$  für  $r = 37$ .

Eine Involution zentralisiert ein Element der Ordnung 13 in  $C_{01}$  und  $\text{PSL}_2(53)$ .  $\text{PSp}_6(3)$  enthält eine elementarabelsche Gruppe der Ordnung  $3^6$ , die von einem Element der Ordnung 13 normalisiert wird, und  $\text{PSL}_2(37)$  enthält ein Element der Ordnung 18, das treu auf einer Gruppe der Ordnung 37 wirkt. Damit scheiden alle diese Gruppen aus. Insbesondere ist stets  $|R| = 13$  und damit  $\text{char}(\mathbb{F}) \neq 3$ , weil 13 ein Teiler von  $3^3 - 1$  ist. Nach Proposition 3.2.5 stabilisiert der Stabilisator eines dunklen Punktes in  $V$  stets eine komplementäre Hyperebene.

Weil die Grade aller treuen, irreduziblen Darstellungen von  $\text{Sz}(8)$  und  $\text{G}_2(3)$  alle gleich 14 oder größer als 27 sind, scheiden diese Gruppen aus. Für Schur-Erweiterungen von  $\text{G}_2(3)$  mit einem Zentrum der Ordnung 3 ist  $\text{char}(\mathbb{F}) = 2$  nach [As8], (20.2). Weil dann aber  $Z(G) \neq 1$  gelten muss, ist  $\mathbb{F}_4$  ein Teilkörper von  $\mathbb{F}$  und damit 13 ein Teiler von  $q^6 - 1$ . Mit  $\text{G}_2(3)$  werden auch alle Gruppen ausgeschlossen, die eine Schurerweiterung von  $\text{G}_2(3)$  enthalten, nämlich  $\Omega_7(3)$  und  $\text{Fi}_{22}$ .

Die treuen, irreduziblen Charaktere von  $\text{PSU}_3(4)$  und  $\text{PSp}_4(5)$ , deren Grad kleiner als 28 ist, haben die Grade 12 und 13 mit Werten 0 und 1 auf der Klasse 3A. Damit ist  $B/A \not\cong \text{PSU}_3(4)$  und  $B/A \not\cong \text{PSp}_4(5)$  nach (RC). Ebenso scheiden alle Gruppen aus, die eine zu  $\text{PSU}_3(4)$  isomorphe Untergruppe haben, nämlich  $G_2(4)$  und Suz. Damit bleiben nur noch die Gruppen aus den Fällen (viii) bis (xiv) übrig.

Die Charaktere für  $\text{PSL}_2(25)$  in den relevanten Charakteristiken mit Graden kleiner als 28 haben die Grade 13, 24, 25 und 26 mit den Werten 1, 0, 1 und -1 oder 2 auf der Klasse 3A in ungerader Charakteristik und 12, 24, 26 mit den Werten 0, 0, -1 in Charakteristik 2. Wegen  $\chi_{27}(3A) \neq 3$  kommt nur der Grad 26 in Frage. Die Existenzaussage in (viii) folgt aus den entsprechenden Aussagen über  ${}^2F_4(2)'$ . Die relevanten Grade von  ${}^2F_4(2)'$  sind 26 und 27. Im Beweis zu [As8], (28.10) wird gezeigt, dass eine elementarabelsche Gruppe der Ordnung 32 in  $B'$  in einem maximalen Torus von  $E_6(\mathbb{k})$  enthalten ist und ihr Zentralisator in  $V$  ein singulärer Punkt ist. Andererseits enthält  ${}^2F_4(2)'$  auch eine zu  $\text{PSL}_2(25)$  isomorphe Untergruppe, deren Zentralisator in  $V$  ein dunkler Punkt ist. Folglich wirkt  $B' \cong {}^2F_4(2)'$  irreduzibel auf  $V$ . Die weiteren Aussagen in (ix) folgen aus [As8], (28.10).

Die relevanten Charaktere für  $\text{SL}_3(3)$  haben die Grade 12, 13, 26 und 27 mit Werten 0, 1, -1 und 0 auf der Klasse 3B in ungerader Charakteristik und die Grade 12 und 26 mit Werten 0 und -1 in Charakteristik 2. Wegen  $\chi_{27}(3B) \neq 3$  zentralisiert  $B'$  einen dunklen Punkt und wirkt irreduzibel auf einer Hyperebene von  $V$  oder wirkt in ungerader Charakteristik irreduzibel auf  $V$ . Weil die Charakteristik von  $\mathbb{F}$  nicht 3 ist, existieren solche Gruppen, die nicht irreduzibel auf  $V$  wirken nach Proposition 7.3.1 und Proposition 7.3.2. Charakterreduktion der Charaktere für  ${}^2F_4(2)'$  zeigt, dass entsprechende Untergruppen in den Beispielen in (xi) irreduzibel auf  $V$  wirken.

Der einzig mögliche Charakter für  $\text{PSL}_4(3)$  hat Grad 26 und den Wert 6 auf der Klasse 2A. Nach (RC) folgt  $\text{char}(\mathbb{F}) = 2$ . Die restlichen Aussagen folgen daraus, dass  $F_4(2)$  nach [NW] genau eine Konjugiertenklasse von Gruppen enthält, die zu  $\text{PSL}_3(4)$  isomorph sind. Die Aussagen für  ${}^3D_4(2)$  folgen aus den Charaktertafeln dieser Gruppe.  $\text{PSL}_2(27)$  enthält eine elementarabelsche Untergruppe der Ordnung 27, auf der ein Element der Ordnung 13 treu wirkt. Nach Proposition 7.3.1 und Proposition 7.3.2 sind die irreduziblen Teilmoduln von  $V$  dieser Gruppe ein dunkler Punkt und zwei Moduln der Dimension 13. Nun hat  $\text{PSL}_2(27)$  nur relevante irreduzible Darstellungen vom Grad 13, 26 und 27; 27 nur in gewissen ungeraden Charakteristiken, nimmt aber dann den Wert -1 auf der Klasse 2A an.

Sei schließlich  $B' \cong \text{PSL}_2(13)$ . Sei  $\langle g, h \rangle$  eine Borelgruppe von  $B'$  mit einem Element  $g$  der Ordnung 13 und einem Element  $h$  der Ordnung 6. Aus der Beschreibung des Normalisators eines Zsigmondy-Elementes in Proposition

6.2.10 sieht man, dass  $N := \langle g, h \rangle$  einen dunklen Punkt zentralisiert und auf einer Geraden in  $\mathfrak{C}_G(g)$  eine Gruppe der Ordnung 3 induziert. Wegen  $|R| = 13$  ist  $\text{char}(\mathbb{F}) \neq 3$ . Sei  $K = \mathbb{F}_q$ , falls  $\mathbb{F}_q$  eine primitive dritte Einheitswurzel enthält,  $K = \mathbb{F}_{q^2}$  sonst, und  $\langle w \rangle$  ein  $N$ -invarianter Punkt, auf dem  $N$  eine Gruppe der Ordnung 3 induziert. Wir benutzen im Folgenden Argumente, die auch in [As8], (21.2) verwendet werden. Der Untermodul  $\langle wB' \rangle$  von  $V$  ist ein homomorphes Bild des 14-dimensionalen induzierten Moduls  $\langle w \rangle^{B'}$ . Auf diesem hat  $h^2$  den Charakterwert -1. Aus den Charaktertafeln für  $B'$  folgt nun, dass  $\langle w \rangle^{B'}$  in den relevanten Charakteristiken ein irreduzibler Modul ist. Damit enthält  $V$  einen irreduziblen  $B'$ -Untermodul der Dimension 14, der  $\mathfrak{C}_G(g)$  in  $[\mathfrak{C}_G(g), h]$  schneidet. Sei  $\langle v \rangle := \mathfrak{C}_G(N)$ . Dann ist  $\langle vB' \rangle$  ein homomorphes Bild des Permutationsmoduls von  $B'$  auf den Nebenklassen von  $N$ . Dieser zerfällt in Charakteristik 2 in irreduzible Untermoduln der Dimension 1,1,6,6, in Charakteristik 7 in die Dimensionen 1,1,12 und sonst in die Dimensionen 1 und 13. Entweder ist also  $\text{char}(\mathbb{F}) \neq 2, 7$ , und  $V$  zerfällt in die direkte Summe irreduzibler Moduln der Dimension 13 und 14, oder es ist  $v \in \mathfrak{C}_V(B')$ . Im zweiten Fall bleibt zu zeigen, dass  $V$  einen irreduziblen Untermodul der Dimension 12 hat. Nach Übergang von  $B'$  zu  $(B')^\zeta$  erhält man mit der obigen Argumentation einen invarianten Untermodul der Dimension 15 für  $(B')^\zeta$ , für  $B' = ((B')^\zeta)^\zeta$  also einen invarianten Untermodul der Dimension 12. Die Existenzaussagen finden sich in [CW], Satz 8.3.

## 7.4 Gruppen vom Typ $F_4$

Die Notation aus Kapitel 3.2 wird fortgesetzt. Stets sei  $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$  ein endlicher Körper,  $q$  eine Potenz der Primzahl  $p$  und  $G = G(\mathbb{F})$  eine Chevalleygruppe vom Typ  $F_4$  über  $\mathbb{F}$  mit dem zugehörigen natürlichen Modul der Dimension  $26 - \delta_{3,p}$ . Es gilt  $\Phi_{12}(q) = \Phi_{12}^*(q) \mid |G|$ . Nach Proposition 6.2.11 gilt für jeden Primteiler  $r$  von  $\Phi_{12}(q)$  und jede nichttriviale  $r$ -Untergruppe  $R$  von  $G$ , dass  $\mathfrak{C}_G(R)$  ein zyklischer, maximaler Torus der Ordnung  $\Phi_{12}(q)$  und  $\text{Aut}_G(R) \cong \mathbb{Z}_{12}$  ist.

**Lemma 7.4.1** *Sei  $U$  eine Untergruppe von  $G$  mit  $(|U|, \Phi_{12}(q)) \neq 1$  und sei  $r$  ein Primteiler von  $(|U|, \Phi_{12}(q))$ .*

*Dann ist  $\mathfrak{N}_G(U)/U$  eine metazyklische Gruppe, deren Ordnung  $\frac{12\Phi_{12}(q)}{r}$  teilt.*

Beweis: Der Beweis ist völlig analog zum Beweis von 7.1.1.

Mit Hilfe der Einbettung von  $G$  in eine einfach-zusammenhängende Chevalleygruppe vom Typ  $E_6$  wie in Proposition 3.2.5 sind Satz 7.4.1, Korollar 7.4.1 und Satz 7.4.2 direkte Konsequenzen von Satz 7.3.1, Korollar 7.3.1 und Satz 7.3.2.

**Satz 7.4.1** *Sei  $U$  eine auflösbare Untergruppe von  $G$  mit  $(|U|, \Phi_{12}(q)) \neq 1$ . Sei  $r$  ein Primteiler von  $(|U|, \Phi_{12}(q))$  und  $R$  eine nicht-triviale  $r$ -Untergruppe von  $G$ .*

*Ist  $R$  nicht normal in  $U$ , so gilt:*

- (i) *Es ist  $|R| = 13$  und  $\text{char}(\mathbb{F}) \neq 3$ .*
- (ii)  *$U$  ist eine Erweiterung einer elementarabelschen Untergruppe der Ordnung 27 wie in Proposition 7.3.1 oder 7.3.2 mit einer Gruppe der Ordnung 13 oder einer Frobeniusgruppe der Ordnung 39.*

**Korollar 7.4.1** *Sei  $r$  eine Primzahl, die  $\Phi_{12}(q)$  teilt,  $U$  eine Untergruppe von  $G$  und  $R$  eine  $r$ -Gruppe, die in  $\mathfrak{N}_G(U)$  liegt, aber nicht in  $U$ .*

*Ist  $[R, U] \neq 1$ , so ist  $\text{char}(\mathbb{F}) \neq 3$ ,  $|R| = 13$  und  $U$  eine elementarabelsche Gruppe der Ordnung 27 wie in Proposition 7.3.1 oder 7.3.2.*

**Satz 7.4.2** *Sei  $U$  eine nicht auflösbare Untergruppe von  $G$  mit  $(|U|, \Phi_{12}(q)) \neq 1$ . Sei  $r$  eine Primzahl, die  $(|U|, \Phi_{12}(q))$  teilt,  $R$  eine  $r$ -Sylowgruppe von  $U$  und  $S$  der normale Abschluss von  $R$  in  $U$ . Ist dann  $A$  der maximale auflösbare Normalteiler von  $U$  und  $B/A$  ein nicht auflösbarer, minimaler Normalteiler von  $U/A$ , so gilt:*

- (i)  *$U/B$  ist eine zyklische Gruppe, deren Ordnung 4 oder 6 teilt.*

- (ii)  $B/A$  ist eine einfache nichtabelsche Gruppe, und es gilt  $(|U|, \Phi_{12}(q)) = (|B/A|, \Phi_{12}(q))$ .
- (iii) Es ist  $A = F(U)$  abelsch,  $|A| = 27$  für  $A \neq Z(B)$  und  $A = 1$  für  $A = Z(B)$ .
- (iv) Ist  $A \neq Z(B)$ , so ist  $(|U|, \Phi_{12}(q)) = |R| = 13$ ,  $\text{char}(\mathbb{F}) \neq 3$ ,  $A$  eine elementarabelsche Gruppe der Ordnung 27 wie in Proposition 7.3.1 oder 7.3.2 und  $U$  eine der Gruppen aus Proposition 7.3.1, (iv) oder Proposition 7.3.2, (iii).
- (v) Ist  $A = Z(B) = 1$ , so ist  $B = S$  einfach und  $U$  isomorph zu einer Untergruppe von  $\text{Aut}(B)$ .

Bemerkung: Es ist zu beachten, dass  $U/B$  als Untergruppe von  $\mathfrak{N}_G(R)$  mit zu  $\Phi_{12}(q)$  teilerfremder Ordnung zyklisch und damit eine echte Untergruppe einer zyklischen Gruppe der Ordnung 12 ist.

**Satz 7.4.3** Sei  $U$  eine nicht auflösbare Untergruppe von  $G$  mit  $(|U|, \Phi_{12}(q)) \neq 1$ . Dann gilt einer der folgenden Fälle:

- (i)  $U = G$ .
- (ii) Es ist  $\mathfrak{C}_G(\mathfrak{C}_V(R)) \leq U \leq \mathfrak{N}_G(\mathfrak{C}_V(R))$  mit  $\mathfrak{C}_G(\mathfrak{C}_V(R)) \cong {}^3D_4(q)$  für einen Primteiler  $r$  von  $\Phi_{12}(q)$  und eine  $r$ -Sylowgruppe  $R$  von  $G$ . Es ist  $[\mathfrak{N}_G(\mathfrak{C}_V(R)) : \mathfrak{C}_G(\mathfrak{C}_V(R))] = 3/(3, q)$ .
- (iii) Es ist  $B \cong {}^2F_4(q)'$  der Zentralisator eines äußeren Automorphismus von  $G$  und  $q = 2^{2m+1}$  für geeignetes  $m \in \mathbb{N}$ .
- (iv) Es ist  $\text{char}(\mathbb{F}) = 2$ , und  $B \cong {}^3D_4(q)$  wirkt irreduzibel auf  $V$  und ist konjugiert unter einem äußeren Automorphismus von  $G$  zu einer Gruppe wie in (ii).
- (v) Für einen Teilkörper  $K$  von  $\mathbb{F}$  mit  $([\mathbb{F} : K], 12) = 1$  ist  $U = G(K)$  oder eine Untergruppe wie in (ii), (iii) oder (iv) von  $G(K)$ .
- (vi) Es ist  $(|U|, \Phi_{12}(q)) = 13$  und  $U$  eine der Gruppen aus Satz 7.4.2, (iv).
- (vii) Es ist  $\text{char}(\mathbb{F}) \neq 5$ ,  $(|U|, \Phi_{12}(q)) = 13$ , und  $B \cong \text{PSL}_2(25)$  wirkt irreduzibel auf  $V$ . Solche Gruppen existieren als Untergruppen von  ${}^2F_4(2)'$ , wenn  $\text{char}(\mathbb{F}) = 2$  gilt.
- (viii) Es ist  $\text{char}(\mathbb{F}) \neq 3$ ,  $(|U|, \Phi_{12}(q)) = 13$ , und  $B \cong \text{PSL}_3(3)$  wirkt irreduzibel auf  $V$ . Es existieren stets solche Gruppen in  $G$ .
- (ix) Es ist  $\text{char}(\mathbb{F}) = 2$ ,  $(|U|, \Phi_{12}(q)) = 13$ , und  $B \cong \text{PSL}_4(3)$  wirkt irreduzibel auf  $V$ .  $G$  enthält genau eine Konjugiertenklasse solcher Untergruppen.
- (x) Es ist  $\text{char}(\mathbb{F}) \neq 2$ ,  $(|U|, \Phi_{12}(q)) = 13$ , und  $B \cong {}^3D_4(2)$  wirkt irreduzibel auf  $V$ .

- (xi) Es ist  $\text{char}(\mathbb{F}) \neq 3$ ,  $(|U|, \Phi_{12}(q)) = 13$ , und  $B \cong \text{PSL}_2(27)$  wirkt irreduzibel auf  $V$  oder auf zwei Untermoduln von  $V$  der Dimension 13.
- (xii) Es ist  $(|U|, \Phi_{12}(q)) = 13$  und  $B \cong \text{PSL}_2(13)$ . Der  $B$ -Modul  $V$  zerfällt in die direkte Summe irreduzibler Moduln der Dimension 12 und 14.

*Bemerkungen:*

- (i) 13 ist genau dann ein Teiler von  $\Phi_{12}(q)$ , wenn gilt:  $q \equiv a \pmod{13}$  mit  $a \in \{2, 6, 7, 11\}$ .
- (ii) Wo in den oben angegebenen Fällen keine Existenzaussagen gemacht werden, bleibt diese offen. Die Existenzaussagen in den Fällen (vi) bis (xii) setzen voraus, dass 13 ein Teiler von  $\Phi_{12}(q)$  ist.

Beweis: Nach Satz 7.3.2 haben wir nur den Fall zu betrachten, dass  $A = Z(B) = 1$  ist. Sei  $0 \neq v \in \mathfrak{C}_V(R)$  für eine  $r$ -Sylowgruppe  $R$  in  $G$ . Ist  $\text{char}(\mathbb{F}) = 3$ , so ist  $\dim(V) = 25$  und  $v^\perp = [V, R]$ . In beliebiger Charakteristik können wir uns  $G$  als Stabilisator eines dunklen Punktes  $\langle w \rangle$  im Modul  $W$  zu  $E_6(q)$  denken. Nun sind  $v, w$  enthalten in  $\mathfrak{C}_W(R)$ , einer Ebene, die über  $\mathbb{F}_{q^3}$  konjugiert ist zu einer speziellen Ebene, etwa  $P_{14} + P_{25} + P_{36}$ . Man sieht sofort, dass der Kern der Abbildung  $V \rightarrow \mathbb{F} : x \mapsto f(v, w, x)$  gleich  $[V, R]$  ist. Damit ist aber auch das orthogonale Komplement zu  $[V, R]$  bezüglich  $f_w$ , nämlich  $\mathfrak{C}_V(R)$  invariant. Es folgt, dass  $\mathfrak{C}_G(\mathfrak{C}_V(R))$  mit  $\mathfrak{C}_{E_6(q)}(\mathfrak{C}_W(R))$  übereinstimmt. Weil  $\mathfrak{N}_{E_6(q)}(\mathfrak{C}_W(R))$  auf  $\mathfrak{C}_W(R)$  eine Erweiterung einer zyklischen Gruppe der Ordnung  $q^2 + q + 1$  mit einer Gruppe der Ordnung 3 induziert, wovon die erste fixpunktfrei auf den Punkten von  $\mathfrak{C}_W(R)$  wirkt und die zweite stets genau einen Punkt zentralisiert, im Fall  $p \neq 3$  über  $\mathbb{F}_{q^2}$  diagonalisierbar ist und im Fall  $p = 3$  das Minimalpolynom  $X^3 - 1$  hat, folgt (ii).

Die Behandlung der Gruppen vom Lie-Typ in Charakteristik  $p$  folgt nun aus dem Beweis zu Satz 7.3.3. In allen übrigen Fällen ist wie dort  $|R| = 13$  und damit  $\text{char}(\mathbb{F}) \neq 3$ . Insbesondere ist  $V$  eine zu  $\langle w \rangle$  in der obigen Bezeichnungsweise komplementäre Hyperebene von  $W$ . Alle restlichen Aussagen folgen nun aus Satz 7.3.3 unter Beachtung der dort angestellten Beobachtungen über die Kompositionsreihe des jeweiligen  $B'$ -Moduls  $W$ .

## 7.5 Gruppen vom Typ ${}^2E_6$

Die Notation aus Kapitel 3.2 wird fortgesetzt. Stets sei  $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$  ein endlicher Körper,  $q$  eine Potenz der Primzahl  $p$  und  $G = G(\mathbb{F})$  eine einfach-zusammenhängende getwistete Gruppe vom Typ  ${}^2E_6$  über  $\mathbb{F}$ . Es gilt  $\Phi_{18}(q) = (3, q + 1) \cdot \Phi_{18}^*(q) \mid |G|$ . Nach Proposition 6.2.13 gilt für jeden Primteiler  $r$  von  $\Phi_{18}(q)$  und jede nichttriviale  $r$ -Untergruppe  $R$  von  $G$ , dass  $\mathfrak{C}_G(R)$  ein zyklischer, maximaler Torus der Ordnung  $\Phi_{18}(q)$  und  $\text{Aut}_G(R) \cong \mathbb{Z}_9$  ist.

**Lemma 7.5.1** *Sei  $U$  eine Untergruppe von  $G$  mit  $(|U|, \Phi_{18}(q)) \neq 1$  und sei  $r$  ein Primteiler von  $(|U|, \Phi_{18}(q))$ .*

*Dann ist  $\mathfrak{N}_G(U)/U$  eine metazyklische Gruppe, deren Ordnung  $\frac{9\Phi_{18}(q)}{r}$  teilt.*

Beweis: Der Beweis ist völlig analog zum Beweis von 7.1.1.

**Satz 7.5.1** *Sei  $U$  eine auflösbare Untergruppe von  $G$  mit  $(|U|, \Phi_{18}(q)) \neq 1$ . Sei  $r$  ein Primteiler von  $(|U|, \Phi_{18}(q))$  und  $R$  eine  $r$ -Untergruppe von  $G$ .*

*Dann ist  $R$  normal in  $U$ .*

Beweis: Sei  $U$  ein minimales Gegenbeispiel. Nach Lemma 6.2.13 zerfällt  $V$  in die direkte Summe von drei irreduziblen  $R$ -Moduln. Diese bestimmen nach Proposition 3.2.9 eine getwistete 3-Zerlegung von  $V$ . Ist  $W$  einer der irreduziblen Teilmoduln in der zugehörigen Zerlegung von  $V^k$  für  $k = \mathbb{F}_{q^3}$ , so ist  $\mathfrak{N}_{G(k)}(W)$  nach [As5], (3.6) enthalten im Normalisator der durch  $R$  bestimmten 3-Zerlegung auf  $V^k$ . Damit wirkt der Normalisator eines irreduziblen  $R$ -Moduls  $\tilde{W}$  in  $V$  nach Proposition 3.2.9 treu auf  $\tilde{W}$ . Insbesondere ist jeder irreduzible  $U$ -Untermodul von  $V$  ein treuer  $U$ -Modul. Sei also  $W$  ein treuer irreduzibler  $U$ -Untermodul von  $V$ .

Ist  $W$  ein imprimitiver  $U$ -Modul, so ist die auf den Elementen der entsprechenden Zerlegung von  $W$  induzierte Gruppe eine  $r'$ -Gruppe wegen  $\dim(W) \in \{9, 18, 27\}$ . Es folgt, dass  $U$  zerfällt in die direkte Summe  $R$ -invarianter Moduln und dass  $R$  im Kern der Wirkung auf diesen Teilmoduln liegt. Ist nun  $R$  normal in diesem Kern, so auch in  $U$ . Wir können deshalb annehmen, dass  $W$  ein primitiver  $U$ -Modul ist.

Sei  $A$  ein maximaler abelscher Normalteiler von  $U$ . Dann ist  $A$  eine  $r'$ -Gruppe und  $W$  ein homogener  $A$ -Modul. Andernfalls würden die  $A$ -homogenen Komponenten eine Zerlegung von  $W$  bestimmen, auf deren Elementen  $U$  wirkte. Insbesondere ist  $A$  zyklisch und  $W$  die direkte Summe von isomorphen, irreduziblen

$A$ -Moduln der Dimension  $t \leq \mu(G) = 9$ . Nach Lemma 6.2.1 ist  $\text{Aut}_G(A)$  eine zyklische Gruppe, deren Ordnung  $t$  teilt. Demnach wird  $A$  von  $R$  zentralisiert. Damit ist die Ordnung von  $A$  ein Teiler von  $\Phi_{18}(q)$ ,  $\mathfrak{C}_G(A)$  ein maximaler Torus von  $G$  oder  $A = Z(G)$ . Im ersten Fall ist  $R \trianglelefteq U$ ; sei also  $A = Z(G)$  und  $\mathfrak{C}_U(A) \neq A$ . Aufgrund der Maximalität von  $A$  ist  $\mathfrak{C}_U(A)$  nicht abelsch und enthält nach Lemma 1.1 einen Normalteiler  $N$  von  $U$ , der eine 2-Gruppe vom symplektischen Typ mit Exponent 4 ist. Aufgrund der Minimalität von  $U$  ist  $U = NR$ . Weil die Dimension von  $W$  nicht durch 4 teilbar ist, ist  $|N| \in \{8, 16\}$ . Es folgt der Widerspruch, dass  $r$  kein Teiler der Ordnung von  $\text{Aut}(N)$  ist.

**Korollar 7.5.1** *Sei  $r$  eine Primzahl, die  $\Phi_{18}(q)$  teilt,  $U$  eine Untergruppe von  $G$  und  $R$  eine  $r$ -Gruppe, die in  $\mathfrak{N}_G(U)$  liegt, aber nicht in  $U$ .*

Dann ist  $[R, U] = 1$ .

Beweis: Sei  $s$  ein Primteiler von  $|U|$ . Zunächst zeigt man wie in [He1], Satz 2 bzw. Korollar 7.1.1, dass  $R$  eine  $s$ -Sylowgruppe  $S$  von  $U$  normalisiert. Nach Satz 7.5.1 ist  $[S, R] = 1$ . Es folgt  $U \leq \mathfrak{C}_G(R)$ .

**Satz 7.5.2** *Sei  $U$  eine nicht auflösbare Untergruppe von  $G$  mit  $(|U|, \Phi_{18}^*(q)) \neq 1$ . Sei  $r$  eine Primzahl, die  $(|U|, \Phi_{18}^*(q))$  teilt,  $R$  eine  $r$ -Sylowgruppe von  $U$  und  $S$  der normale Abschluss von  $R$  in  $U$ . Ist dann  $A$  der maximale auflösbare Normalteiler von  $U$  und  $B/A$  ein nicht auflösbarer, minimaler Normalteiler von  $U/A$ , so gilt:*

- (i)  $U/B$  ist isomorph zu einem homomorphen Bild der Erweiterung von  $Z(G)$  mit einer zyklischen Gruppe der Ordnung 18 in  $\mathfrak{N}_G(R)$ . Diese ist eine zyklische Gruppe der Ordnung 18 oder isomorph zu  $S_3 \times \mathbb{Z}_9$ .
- (ii)  $B/A$  ist eine einfache nichtabelsche Gruppe, und es gilt  $(|U|, \Phi_{18}^*(q)) = (|B/A|, \Phi_{18}^*(q))$ .
- (iii) Es ist  $A = F(U) = Z(B) \leq Z(G)$ .
- (iv) Ist  $A = Z(B) = 1$ , so ist  $B = S$  einfach und  $U$  isomorph zu einer Untergruppe von  $\text{Aut}(B)$ .
- (v) Ist  $A = Z(B) = Z(G) \cong \mathbb{Z}_3$ , so ist  $B' = S$  quasieinfach,  $F(U) = A$ ,  $E(U) = B'$  und  $F^*(U) = B$ .

Beweis: Der Beweis ist analog zum Beweis von Satz 7.1.2, nur verwendet man Lemma 7.5.1, Korollar 7.5.1 und Satz 7.5.1 statt Lemma 7.1.1, Korollar 7.1.1 und Satz 7.1.1.

**Satz 7.5.3** *Sei  $U$  eine nicht auflösbare Untergruppe von  $G$  mit  $(|U|, \Phi_{18}^*(q)) \neq 1$ ,  $r$  ein Primteiler von  $(|U|, \Phi_{18}^*(q))$  und  $R$  eine  $r$ -Sylowgruppe von  $U$ . Dann gilt einer der folgenden Fälle:*

- (i)  $U = G$ .
- (ii) Es ist  $\mathfrak{C}_G(\mathcal{Z}) \leq U \leq \mathfrak{N}_G(\mathcal{Z})$  für die durch  $R$  bestimmte getwistete 3-Zerlegung  $\mathcal{Z}$  von  $V$ . Dabei ist  $\mathfrak{C}_G(\mathcal{Z}) \cong Z(G) \times PSU_3(q^3)$  und  $[\mathfrak{N}_G(\mathcal{Z}) : \mathfrak{C}_G(\mathcal{Z})] = 3$ .  $V$  ist ein irreduzibler, nicht absolut irreduzibler  $B$ -Modul der isomorph ist zu  $N \otimes N^\gamma$ , wobei  $N$  der natürliche Modul für  $PSU_3(q^3)$  als  $\mathbb{F}_q$ -Modul ist und  $\langle \gamma \rangle = Gal(\mathbb{F}_{q^3} : \mathbb{F}_q)$ .
- (iii) Für einen Teilkörper  $K$  von  $\mathbb{F}$  mit  $([\mathbb{F} : K], 18) = 1$  ist  $U = G(K)$  oder eine Untergruppe wie in (ii) von  $G(K)$ .
- (iv) Es ist  $(|U|, \Phi_{18}^*(q)) = 19$ ,  $B' \cong PSL_2(19)$ , und der  $B'$ -Modul  $V$  hat eine Kompositionsreihe mit absolut irreduziblen Faktoren der Dimension 9 und 18.

*Bemerkungen:*

- (i) 19 ist genau dann ein Teiler von  $\Phi_{18}^*(q)$ , wenn gilt:  $q \equiv a \pmod{19}$  mit  $a \in \{2, 3, 10, 13, 14, 15\}$ .
- (ii) Im Fall (iv) bleibt die Existenz solcher Gruppen offen.
- (iii) Nach dem Schur'schen Lemma ist offenbar in allen oben genannten Fällen  $B \in \{B', B'Z(G)\}$ .

Beweis: Die Notation aus Satz 7.5.2 wird fortgesetzt. Nach Satz 7.5.2 haben wir nur den Fall zu betrachten, dass  $A = Z(B) \leq Z(G)$  ist. Die Behandlung des Falles, dass  $B/A$  eine einfache Gruppe vom Lie-Typ in Charakteristik  $p$  ist, verläuft genau analog zum Beweis von Satz 7.3.3. Es bleiben die Fälle übrig, dass  $B/A$  eine Gruppe vom Typ  $G_2$ ,  ${}^2G_2$ ,  ${}^3D_4$ ,  $F_4$ ,  ${}^2F_4$ ,  $E_6$  oder  ${}^2E_6$  ist oder eine unitäre Gruppe vom Rang 2 über einem Teilkörper von  $\mathbb{F}_{q^3}$ , der kein Teilkörper von  $\mathbb{F}$  ist.

In Gruppen vom Typ  $G_2(q)$  ist jeder maximale Torus ein Torus von  $SL_3(q)$  oder  $SU_3(q)$ , kritisch ist also nur der Torus der Ordnung  $q^2 - q + 1$ , auf dem aber in  $B$  eine Involution wirkte im Widerspruch zu  $\text{Aut}_G(R) \cong \mathbb{Z}_9$ . Mit Hilfe der Liste der Normalisatoren maximaler Tori von  ${}^3D_4(q)$  in [K12] schließt man diese Gruppen genau so aus, ebenso die Ree-Gruppen. Mit Hilfe von Table 5.4.B in [KL] sieht man, dass Gruppen vom Typ  $F_4$  und  ${}^2F_4$  keine irreduzible Darstellung vom Grad 27 haben und jede 27-dimensionale Darstellung von Gruppen vom Typ  $E_6$  oder  ${}^2E_6$  die natürliche oder dazu duale ist. Weil  $G$  damit offenbar keine Untergruppe vom Typ  $E_6$  enthält, bleiben Gruppen vom Typ  ${}^2E_6$  übrig, deren natürlicher Modul aber über keinem Teilkörper des definierenden Körpers realisierbar ist, also ist  $B$  eine Gruppe wie in (iii). Sei zuletzt  $B'$  eine unitäre Gruppe vom Rang 2 wie oben, also mit dem Zerfällungskörper  $\mathbb{F}_{q^6}$ . Weil die Darstellung von  $B'$  auf  $V$  realisiert ist über  $\mathbb{F}_q$  oder  $\mathbb{F}_{q^2}$ , ist die Dimension jedes absolut

irreduziblen Teilmoduls in dieser Darstellung nach [KL], Proposition 5.4.6 ein Quadrat. Es folgt, dass  $V$  über  $\mathbb{F}_{q^3}$  zerfällt in die direkte Summe dreier absolut irreduzibler Teilmoduln der Dimension 9. Weil der Normalisator dieser Zerlegung in  $G$  irreduzibel auf  $V$  wirkt, ist  $B$  enthalten im Normalisator einer getwisteten 3-Zerlegung von  $V$ . Der Normalisator dieser Zerlegung in  $G$  enthält  $\mathfrak{C}_G(R)$ . Nach Proposition 3.2.9 ist  $\mathfrak{C}_G(R)$  aber in genau einem Normalisator einer getwisteten 3-Zerlegung enthalten. Folglich ist  $B$  eine Gruppe wie in (ii) oder eine Untergruppe wie in (iii) von dieser Gruppe.

Sei nun  $B/A$  eine alternierende oder sporadische Gruppe oder eine Gruppe vom Lie-Typ in einer von  $p$  verschiedenen Charakteristik. In allen folgenden Fällen kommt für  $B'$  nach Satz 7.5.2 nur eine einfache Gruppe oder eine Schur-Erweiterung von  $B/A$  mit einem Zentrum der Ordnung 3 in Frage. Ist 3 kein Teiler des Schur-Multiplikators von  $B/A$ , so wird stillschweigend nur die entsprechende einfache Gruppe untersucht. Die alternierenden Gruppen werden ausgeschlossen, weil Gruppen vom Typ  $E_6$  nach dem Beweis zu Satz 7.3.3 keine zu  $A_{13}$  isomorphe Untergruppe enthalten. Unter den restlichen Gruppen haben nach [KL], Proposition 5.3.8 und Table 5.3.A nur  $J_1$ ,  $J_3$ ,  $\mathrm{PSL}_2(37)$  und  $\mathrm{PSL}_2(19)$  einen Primteiler, der kongruent 1 modulo 18 ist und eine projektive Darstellung von einem Grad  $\leq 27$ . Die ersten drei fallen weg aufgrund der Struktur des Normalisators der 19-Sylowgruppe bzw. der 37-Sylowgruppe. Sei also  $B' \cong \mathrm{PSL}_2(19)$ . Aus den Charaktertafeln für  $B'$  folgt, dass die Faktoren einer Kompositionsreihe des  $B'$ -Moduls  $V$  die Dimension 9 oder 18 haben. Dabei kann der Grad 9 nicht dreifach auftauchen, weil  $\chi_9(5A) = -1$  gilt und damit  $(3 \cdot \chi_9)(5A) = -3$  im Widerspruch zu (RC).

## 7.6 Gruppen vom Typ $E_7$

Die Notation aus Kapitel 3.3 wird fortgesetzt. Stets sei  $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$  ein endlicher Körper ungerader Charakteristik,  $q$  eine Potenz der Primzahl  $p \neq 2$  und  $G = G(\mathbb{F})$  eine einfach-zusammenhängende Chevalley-Gruppe vom Typ  $E_7$  über  $\mathbb{F}$ . Es gilt  $\Phi_{18}(q) = \Phi_{18}^*(q) \cdot (\Phi_{18}^*(q), 3) \mid |G|$ . Nach Proposition 6.2.14 gilt für jeden Primteiler  $r$  von  $\Phi_{18}^*(q)$  und jede nichttriviale  $r$ -Untergruppe  $R$  von  $G$ , dass  $\mathfrak{C}_G(R)$  ein zyklischer, maximaler Torus der Ordnung  $\Phi_2(q)\Phi_{18}(q)$  und  $\text{Aut}_G(R) \cong \mathbb{Z}_{18}$  ist.

**Lemma 7.6.1** *Sei  $U$  eine Untergruppe von  $G$  mit  $(|U|, \Phi_{18}^*(q)) \neq 1$  und  $r$  ein Primteiler von  $(|U|, \Phi_{18}^*(q))$ .*

*Dann ist  $\mathfrak{N}_G(U)/U$  eine metazyklische Gruppe, deren Ordnung  $\frac{18\Phi_2(q)\Phi_{18}(q)}{r}$  teilt.*

Beweis: Der Beweis ist völlig analog zum Beweis von 7.1.1.

**Lemma 7.6.2** *Ist  $r$  ein  $q$ -primitiver Teiler von  $q^{18} - 1$ ,  $R$  eine nichttriviale  $r$ -Untergruppe von  $G$  und  $W$  ein  $R$ -Untermodul von  $V$ , auf dem  $R$  nicht trivial wirkt, so wirkt  $\mathfrak{N}_G(W)$  treu auf  $W$ .*

Beweis: Sei  $\mathbb{k}$  ein algebraischer Abschluss von  $\mathbb{F}$  und  $G = G(\mathbb{F})$  kanonisch eingebettet in  $G(\mathbb{k})$ . Es gilt sogar, dass  $\mathfrak{N}_{G(\mathbb{k})}(W^{\mathbb{k}})$  treu auf  $W^{\mathbb{k}}$  wirkt. Wie im Beweis zu Proposition 6.2.14 seien  $W_1^{\mathbb{k}} = \langle Q_{12}, P_{15}, P_{26}, P_{37}, P_{45}, P_{16}, P_{27}, P_{34}, Q_{23}, P_{12}, Q_{15}, Q_{26}, Q_{37}, Q_{45}, Q_{16}, Q_{27}, Q_{34}, P_{23} \rangle$ ,  $W_2^{\mathbb{k}} = \langle P_{14}, Q_{35}, Q_{56}, P_{48}, P_{18}, P_{28}, P_{38}, P_{58}, Q_{47}, Q_{14}, P_{35}, P_{56}, Q_{48}, Q_{18}, Q_{28}, Q_{38}, Q_{58}, P_{47} \rangle$  und  $W_3^{\mathbb{k}} = \langle P_{17}, P_{24}, Q_{25}, Q_{36}, Q_{57}, P_{78}, Q_{67}, P_{68}, Q_{46}, Q_{17}, Q_{24}, P_{25}, P_{36}, P_{57}, Q_{78}, P_{67}, Q_{68}, P_{46} \rangle$  mit irreduziblen  $R$ -Untermoduln  $W_1, W_2$  und  $W_3$  von  $V$ . Es genügt, die Behauptung für  $\dim(W) = 18$  zu zeigen. Sei  $H = \langle w_1 \rangle$  mit  $w_1$  wie in Lemma 6.2.5.

Sei zunächst  $W$  einer der Moduln  $W_i$  mit  $1 \leq i \leq 3$ . Sei  $g \in G(\mathbb{k})$  und wirke  $g$  trivial auf  $W_i^{\mathbb{k}}$ . Nach [Coo2], (4.1) ist  $\Lambda(P) = \langle P, Q \mid Q \in \Gamma(P) \rangle$  für alle  $P \in \Omega$  invariant unter  $G_P$ . Es gilt  $P = \bigcap_{Q \in (\Omega \cap W_i^{\mathbb{k}} \cap \Gamma(P))} \Lambda(Q)$  für alle  $P \in \Omega$  und  $1 \leq i \leq 3$ . (Es genügt, die Behauptung für  $P \in \{P_{13}, P_{12}, P_{14}, P_{17}\}$  zu verifizieren und dann  $H$  anzuwenden.) Damit liegt  $g \in T_0$ , und nach der Beschreibung von  $T_0$  in Proposition 3.3.2 ist  $g = 1$ .

Sei  $W$  enthalten in einem der Unterräume  $W_1 + W_2, W_1 + W_3$  oder  $W_2 + W_3$ , aber keiner der Unterräume  $W_1, W_2$  oder  $W_3$ . Dann enthält  $W$  einen Vektor der Form  $v = v_i + v_j$  mit  $0 \neq v_i \in W_i, 0 \neq v_j \in W_j$  und  $\langle v_i \rangle, \langle v_j \rangle \in \Omega$  mit  $1 \leq i < j \leq 3$ . Sei  $P_1 = \langle v_i \rangle$  und  $P_2 = \langle v_j \rangle$ . Im Beweis zu Proposition 6.2.14 haben wir gesehen, dass  $P_1$  und  $P_2$  nicht verbunden sind in  $(\Omega, \Gamma)$ . In der Notation von [Coo2] ist  $v$  brillant aber nicht singulär. Nach [Coo2], (5.7)

ist  $v$  enthalten in genau einem Unterraum von  $V$  der Form  $\langle M \rangle$ , wobei  $M$  konjugiert ist zu einer Menge der Form  $P \cup Q \cup (\Gamma(P) \cap \Gamma(Q))$  mit  $P, Q \in \Omega$  und  $Q \notin \Gamma(P)$ . Diese werde stets bezeichnet mit  $M(P, Q)$ . Nach [Coo2], (3.6) ist  $|M| = 12$ . Wir können  $P = P_1$  und  $Q = P_2$  annehmen. Nach der Darstellung des zu dem Torus, der  $R$  enthält, konjugierten Torus in Proposition 6.2.14 ist für alle  $h \in H$  auch ein Vektor der Form  $w = w_i + w_j$  mit  $0 \neq w_i \in \langle v_i^h \rangle$  und  $0 \neq w_j \in \langle v_j^h \rangle$  in  $W$  enthalten. Damit normalisiert  $g$  alle Unterräume von  $V^{\mathbb{k}}$  der Form  $M(\langle v_i^h \rangle, \langle v_j^h \rangle)$ . Für  $P \in \Omega \cap W_i$ ,  $Q \in \Omega \cap W_j$ ,  $Q \notin \Gamma(P)$  mit  $1 \leq i < j \leq 3$  sei stets  $M(P) = \bigcap_{h \in H \text{ mit } \langle v_i^h \rangle \in \Gamma(P), \langle v_j^h \rangle \in \Gamma(P)} M(\langle v_i^h \rangle, \langle v_j^h \rangle)$  und  $M(Q) = \bigcap_{h \in H \text{ mit } \langle v_i^h \rangle \in \Gamma(Q), \langle v_j^h \rangle \in \Gamma(Q)} M(\langle v_i^h \rangle, \langle v_j^h \rangle)$ . Wir können nun  $P = P_{12}$  und  $Q \in W_2 \cup W_3$  oder  $P = P_{14}$  und  $Q \in W_3$  annehmen. Schneiden sich  $M(P)$  und  $M(Q)$  trivial, so zentralisiert  $g$  sowohl  $v_i$  als auch  $v_j$  und wie oben folgt  $g = 1$ . Insbesondere ist dies der Fall, wenn  $M(P) = P$  oder  $M(Q) = Q$  gilt, weil nach [Coo2], 3.7 für  $P, Q, P', Q' \in \Omega$ ,  $P \notin \Gamma(Q)$ ,  $P' \notin \Gamma(Q')$  stets  $M(P, Q) = M(P', Q')$  oder  $M(P, Q) \cap M(P', Q') = \{0\}$  gilt oder  $M(P, Q) \cap M(P', Q')$  erzeugt wird von einer Clique in  $\Omega$ . Es ergibt sich  $M(P) = P$  für  $P = P_{12}$ ,  $Q \in \{P_{36}, P_{46}, P_{56}, P_{58}, P_{67}, P_{68}, P_{78}, Q_{14}, Q_{18}, Q_{24}, Q_{28}\}$  und  $P = P_{14}$ ,  $Q \in \{P_{57}, P_{67}, P_{68}, P_{78}\}$ , und in den restlichen Fällen ergibt sich  $M(Q) = Q$  für  $P = P_{12}$ ,  $Q \in \{P_{38}, P_{47}, P_{48}, P_{57}, Q_{17}\}$  und  $P = P_{14}$ ,  $Q \in \{P_{25}, P_{36}, Q_{17}, Q_{46}\}$ . Übrig bleiben die Fälle  $(P, Q) \in \{(P_{12}, P_{35}), (P_{12}, Q_{25}), (P_{14}, Q_{24})\}$ . Im ersten Fall wären in der Darstellung aus Proposition 6.2.14 für den zu dem Torus, der  $R$  enthält, konjugierten Torus die Eigenwerte des Elementes, das die zu  $R$  konjugierte Untergruppe erzeugt, die Eigenwerte  $\alpha^{-1}$  und  $\alpha^{-q^5+q^2+q+1}$  gleich. Damit wäre die Ordnung von  $R$ , die gleich  $\alpha$  ist, ein Teiler von  $(q^6 - q^3 + 1, q^5 - q^2 - q - 2)$  ein Teiler von  $(q^6 - q^3 + 1) - q(q^5 - q^2 - q - 2) = (q+1)^2$ . Es folgt der Widerspruch, dass  $r$  ein Teiler von  $q^2 - 1$  ist. Im zweiten Fall folgt  $\alpha^{-1} = \alpha^{q^5 - q^2 - q}$ . Dann wäre  $|R|$  ein Teiler von  $(q^6 - q^3 + 1, q^5 - q^2 - q + 1)$ , damit von  $(q^6 - q^3 + 1) - q(q^5 - q^2 - q + 1) = q^2 - q + 1$  und damit von  $q^6 - 1$ . Im dritten Fall folgt  $\alpha^{q^5+q^4-q^2-q-1} = \alpha^{-q^4+q+1}$ . Dann wäre  $|R|$  ein Teiler von  $(q^6 - q^3 + 1, q^5 + 2q^4 - q^2 - 2q - 2) = (4q^4 - 2q - 3, q^5 + 2q^4 - q^2 - 2q - 2) = (4q^4 - 2q - 3, 2q^2 + q + 2) = (3q^2 + 3, 2q^2 + q + 2)$  und damit von  $q^4 - 1$ .

Sei nun  $W$  in keinem der Unterräume  $W_1 + W_2$ ,  $W_1 + W_3$  und  $W_2 + W_3$  enthalten. Dann enthält  $W$  einen Vektor  $v$  der Form  $v = v_1 + v_2 + v_3$  mit  $0 \neq v_i \in W_i$  und  $\langle v_i \rangle \in \Omega$  für  $1 \leq i \leq 3$ . Wir können  $v_1 = x_{12}$  annehmen. Im Beweis zu Proposition 6.2.14 haben wir gezeigt, dass  $\langle v_1 \rangle$ ,  $\langle v_2 \rangle$  und  $\langle v_3 \rangle$  paarweise nicht verbunden sind in  $(\Omega, \Gamma)$ . In der Notation von [Coo2] ist  $v$  luminiszent, aber nicht brilliant. Nach [Coo2], Thm. (5.8) existiert genau ein singulärer Punkt  $P$  mit  $v \in \Lambda(P)$ . Offenbar ist stets  $P \in \Omega$ , weil alle  $\langle v_i \rangle$  in  $\Omega$  liegen. Sei zunächst  $P \notin \{P_{13}, Q_{13}\}$ . Unter Anwendung von  $w_1$  folgt, dass  $g$  die

Punkte  $\Omega \cap W_i$  invariant läßt für ein  $i$ . Damit ist auch der eindeutig bestimmte Punkt  $Q$ , der Abstand 3 in  $(\Omega, \Gamma)$  von  $P$  hat, invariant. Sei  $Q = \langle y \rangle$  mit  $y^g = \mu y$ , so ist  $O \neq F(v + y) = F(v^g + y^g) = F(v + \mu y) = \mu F(v + y)$ . Folglich zentralisiert  $g$  einen der Räume  $W_i$  mit  $1 \leq i \leq 3$ , und wie oben gesehen folgt  $g = 1$ . Es bleibt der Fall  $P \in \{P_{13}, Q_{13}\}$  übrig. Wir können o.B.d.A.  $P = P_{13}$  und  $v_1 = x_{12}$  annehmen. Nun liegen  $\langle v_2 \rangle$  und  $\langle v_3 \rangle$  in  $\Gamma(P_{13})$ . Es folgt  $\langle v_2 \rangle = P_{35}$  und  $\langle v_3 \rangle = Q_{25}$ . Oben hatten wir aber schon ausgeschlossen, dass die Punkte  $P_{12}$  und  $P_{35}$  für die zu  $R$  konjugierte Untergruppe in demselben Gewichtsraum von  $R$  liegen.

**Satz 7.6.1** *Sei  $U$  eine auflösbare Untergruppe von  $G$  mit  $(|U|, \Phi_{18}^*(q)) \neq 1$ . Sei  $r$  ein Primteiler von  $(|U|, \Phi_{18}^*(q))$  und  $R$  eine  $r$ -Untergruppe von  $G$ .*

*Dann ist  $R$  normal in  $U$ .*

Beweis: Jeder  $R$ -Untermodul, der singuläre Punkte enthält, ist ein treuer  $R$ -Modul und nach Lemma 7.6.2 auch ein treuer  $U$ -Modul. Weil  $\mathfrak{C}_V(O_p(U))$  ein  $U$ -Untermodul von  $V$  ist, der singuläre Punkte enthält, gilt  $O_p(U) = 1$ .

Sei  $U$  ein Gegenbeispiel kleinster Ordnung und  $A$  ein maximaler abelscher Normalteiler von  $U$ .  $V$  ist ein halbeinfacher  $AR$ -Modul. Jeder irreduzible  $AR$ -Untermodul von  $V$  ist als  $R$ -Untermodul treu oder enthalten in  $\mathfrak{C}_V(R)$ . Ist  $W$  ein irreduzibler, treuer  $AR$ -Modul, so wirkt  $R$  transitiv auf den homogenen  $A$ -Komponenten in  $W$ . Wäre  $W$  ein inhomogener  $A$ -Modul, so wäre  $|R| = 19$  und  $\dim(W) \in \{19, 38\}$  oder  $|R| = \dim(W) = 37$ . Die Summe aller irreduziblen, treuen  $AR$ -Moduln ist ein  $AR$ -Modul und hat mindestens die Dimension 54. Weil keine der Zahlen 54, 55 oder 56 durch 19 oder 37 teilbar ist, existiert ein irreduzibler, treuer  $AR$ -Untermodul  $W_0$  von  $V$ , der ein homogener  $A$ -Modul ist. Sei  $W_0$  die direkte Summe von irreduziblen  $A$ -Untermoduln der Dimension  $t$ . Nach Lemma 6.2.5 ist  $t = 30$  oder  $t \leq 18$ , und nach Lemma 6.2.1 ist  $\text{Aut}_{\text{GL}(W_0)}(A)$  eine zyklische Gruppe der Ordnung  $t$ . Folglich gilt  $[R, A] = 1$ . Insbesondere ist  $\mathfrak{C}_U(A) \neq A$ . Sei  $N$  ein minimaler nichtabelscher Normalteiler von  $U$  in  $\mathfrak{C}_U(A)$ . Nach Lemma 1.1 ist  $N$  eine  $s$ -Gruppe vom symplektischen Typ für eine Primzahl  $s \neq p, r$ . Weil  $\mathfrak{C}_G(R)$  zyklisch ist, folgt  $U = NR$  aus der Minimalität von  $U$ .  $V$  ist ein halbeinfacher  $N$ -Modul. Die Summe aller irreduziblen  $N$ -Untermoduln von  $V$ , auf denen  $N$  nicht treu wirkt, ist  $R$ -invariant und nach Lemma 7.6.2 enthalten in  $\mathfrak{C}_V(R)$ . Die Summe aller treuen, irreduziblen  $N$ -Untermoduln ist also ein  $U$ -Modul, dessen Dimension mindestens 54 ist. Nach Proposition 1.2 ist  $s^i$  ein Teiler von 54, 55 oder 56 und damit von 8, 27, 5, 7 oder 11 für  $[N : Z(N)] = s^{2i}$ . In allen Fällen ist aber die Ordnung von  $\text{Aut}(N)$  durch keinen Primteiler teilbar, der kongruent 1 modulo 18 ist. Es folgt  $N \leq \mathfrak{C}_G(R)$  im Widerspruch dazu, dass  $\mathfrak{C}_G(R)$  zyklisch ist.

**Korollar 7.6.1** *Sei  $r$  eine Primzahl, die  $\Phi_{18}^*(q)$  teilt,  $U$  eine Untergruppe von  $G$  und  $R$  eine  $r$ -Gruppe, die in  $\mathfrak{N}_G(U)$  liegt, aber nicht in  $U$ .*

*Dann ist  $[R, U] = 1$ .*

Beweis: Sei  $s$  ein Primteiler von  $|U|$ . Zunächst zeigt man wie in [He1], Satz 2 bzw. Korollar 7.1.1, dass  $R$  eine  $s$ -Sylowgruppe  $S$  von  $U$  normalisiert. Nach Satz 7.6.1 ist  $[S, R] = 1$ . Es folgt  $U \leq \mathfrak{C}_G(R)$ .

**Satz 7.6.2** *Sei  $U$  eine nicht auflösbare Untergruppe von  $G$  mit  $(|U|, \Phi_{18}^*(q)) \neq 1$ . Sei  $r$  eine Primzahl, die  $(|U|, \Phi_{18}^*(q))$  teilt,  $R$  eine  $r$ -Sylowgruppe von  $U$  und  $S$  der normale Abschluss von  $R$  in  $U$ . Weiterhin sei  $T_1$  die Untergruppe von  $\mathfrak{C}_G(R)$  der Ordnung  $q+1$  und  $W := \mathfrak{C}_V(R)$ . Ist dann  $A$  der maximale auflösbare Normalteiler von  $U$  und  $B/A$  ein nicht auflösbarer, minimaler Normalteiler von  $U/A$ , so gilt:*

- (i)  *$U/B$  ist isomorph zu einem homomorphen Bild der Erweiterung von  $T_1 Z(G)$  mit einer zyklischen Gruppe der Ordnung 18 in  $\mathfrak{N}_G(R)$ .*
- (ii)  *$B/A$  ist eine einfache nichtabelsche Gruppe, und es gilt  $(|U|, \Phi_{18}^*(q)) = (|B/A|, \Phi_{18}^*(q))$ .*
- (iii) *Es ist  $A = F(U) = Z(B)$ .*
- (iv) *Ist  $A = Z(B) = 1$ , so ist  $B = S$  einfach und  $U$  isomorph zu einer Untergruppe von  $\text{Aut}(B)$ .*
- (v) *Ist  $A = Z(B) = Z(G) \cong \mathbb{Z}_2$ , so ist  $B' = S$  quasieinfach,  $F(U) = A$ ,  $E(U) = B'$  und  $F^*(U) = B$ .*
- (vi) *Ist  $A = Z(B) \not\leq Z(G)$ , so ist  $U$  enthalten in  $\mathfrak{N}_G(W)$ , dem Produkt  $\mathfrak{N}_G(R) \cdot \mathfrak{C}_G(W)$ , und  $B$  in  $T_1 \cdot \mathfrak{C}_G(W)$ . Dabei ist  $\mathfrak{C}_G(W) \cong {}^2E_6(\mathbb{F})$ ,  $[\mathfrak{N}_G(W) : T_1 \cdot \mathfrak{C}_G(W)] = 2$  und  $T_1 \cdot \mathfrak{C}_G(W) \cong T_1 \times \mathfrak{C}_G(W)$ . Es ist  $B' = S$  quasieinfach,  $F(U) = A$ ,  $E(U) = B'$  und  $F^*(U) = B$ . Alle hier auftretenden Fälle lassen sich bestimmen mit Hilfe von Satz 7.5.3.*

Beweis: Der Beweis ist analog zum Beweis von Satz 7.1.2, nur verwendet man Lemma 7.6.1, Korollar 7.6.1 und Satz 7.6.1 statt Lemma 7.1.1, Korollar 7.1.1 und Satz 7.1.1.

Die Aussage in (vi) folgt daraus, dass  $V^{\mathbb{k}}$  als  $T_1$ -Modul zerfällt in die direkte Summe von  $W^{\mathbb{k}}$  und  $[V, R]^{\mathbb{k}}$ . Im Beweis zu Proposition 6.2.14, (iv) hatten wir gesehen, dass jedes Element  $g \in T_1$  in  $W^{\mathbb{k}}$  die Eigenwerte  $\alpha^3$  und  $\alpha^{-3}$  und in  $[V, R]^{\mathbb{k}}$  die Eigenwerte  $\alpha$  und  $\alpha^{-1}$  jeweils mit Vielfachheit 27 hat. Dabei ist  $\alpha^{q+1} = 1$ . Ist die Ordnung von  $g$  kein Teiler von 4, so ist  $\alpha^3 \notin \{\alpha, \alpha^{-1}\}$  und damit  $\mathfrak{N}_G(\langle g \rangle) \leq \mathfrak{N}_G(W)$ . Ist  $g$  eine Involution, so folgt  $\alpha = \alpha^{-1} = \alpha^3 = \alpha^{-3}$ , und es ist  $g \in Z(G)$ . Ist die Ordnung von  $g$  gleich 4, so ist  $\alpha = \alpha^{-3}$  und  $\alpha^{-1} = \alpha^3$ .

Nach Einbettung von  $G$  in  $G(\mathbb{k})$  und Konjugation wie im Beweis zu Proposition 6.2.14 normalisiert  $\mathfrak{C}_G(\langle g \rangle)$  nun die Eigenräume  $U_1 := P_{13} \oplus (\Lambda(Q_{13}) \cap P_{13}^\perp)$  und  $U_2 := Q_{13} \oplus (\Lambda(P_{13}) \cap Q_{13}^\perp)$  von  $g$ . (Dabei bezieht sich die Bezeichnung  $\perp$  auf die symplektische Form  $\zeta$ .) Nun ist  $P_{13}$  der einzige singuläre Punkt  $P$  in  $U_1$  mit der Eigenschaft, dass  $\Lambda(P) \cap U_2$  eine Hyperebene von  $U_2$  ist. Nach [Coo2], (3.12) und (3.17) ist nämlich  $G(\mathbb{k})_{P_{13}, Q_{13}}$  von der Form  $LT_0$ , wobei  $T_0$  der maximale Torus mit Eigenräumen in  $B$  ist und  $L$  eine Gruppe vom Typ  $E_6(\mathbb{k})$ , die auf den beiden dualen Moduln  $\Lambda(Q_{13}) \cap P_{13}^\perp$  und  $\Lambda(P_{13}) \cap Q_{13}^\perp$  wirkt.  $LT_0$  hat nach [Coo2], (3.14) auf  $\Lambda(Q_{13}) \cap P_{13}^\perp$  vier Bahnen von Vektoren mit den Repräsentanten  $0, x_{13}, x_{24} + x_{56}$  und  $x_{24} + x_{56} + x_{78}$ . Demnach ist jeder singuläre Punkt in  $U_1$  konjugiert unter  $\mathfrak{N}_{G(\mathbb{k})}(U_1)$  zu einem Punkt, der erzeugt wird von  $x_{13}, \beta x_{13} + x_{24}, \beta x_{13} + x_{24} + x_{56}$  oder  $\beta x_{13} + x_{24} + x_{56} + x_{78}$  für ein  $\beta \in \mathbb{k}$ . Nach [Coo2], (3.3) sind dabei nur  $P_{13}$  und  $P_{24}$  singulär. Damit ist also  $P_{13}$  invariant unter  $\mathfrak{N}_{G(\mathbb{k})}(U_1)$ , analog auch  $Q_{13}$  unter  $\mathfrak{N}_{G(\mathbb{k})}(U_2)$ . Es folgt  $\mathfrak{N}_G(g) \leq \mathfrak{N}_G(W)$ . Die Struktur von  $\mathfrak{N}_G(W)$  folgt aus Proposition 3.3.4.

**Satz 7.6.3** *Sei  $U$  eine nicht auflösbare Untergruppe von  $G$  mit  $(|U|, \Phi_{18}^*(q)) \neq 1$ ,  $r$  ein Primteiler von  $(|U|, \Phi_{18}^*(q))$  und  $R$  eine  $r$ -Sylowgruppe von  $U$ . Dann gilt einer der folgenden Fälle:*

- (i)  $U = G$ .
- (ii) *Es ist  $\mathfrak{C}_G(\mathfrak{C}_V(R)) \leq U \leq \mathfrak{N}_G(\mathfrak{C}_V(R))$  mit  $\mathfrak{C}_G(\mathfrak{C}_V(R)) \cong {}^2E_6(q)$  und  $\text{Aut}_G(\mathfrak{C}_V(R)) \cong D_{2(q+1)}$ . Alle hier auftretenden Fälle lassen sich bestimmen mit Hilfe von Satz 7.5.3.*
- (iii) *Für einen Teilkörper  $K$  von  $\mathbb{F}$  mit  $([\mathbb{F}:K], 18) = 1$  ist  $U = G(K)$ .*
- (iv) *Es ist  $(|U|, \Phi_{18}^*(q)) = 19$  und  $B' \cong \text{PSL}_2(37)$ . Der  $B'$ -Modul  $V$  zerfällt in die direkte Summe irreduzibler Teilmoduln der Dimension 38 und 18 oder 37 und 19.*
- (v) *Es ist  $(|U|, \Phi_{18}^*(q)) = 19$ , und  $B' \cong \text{PSU}_3(8)$  wirkt irreduzibel auf  $V$ .*

*Bemerkungen:*

- (i) *19 ist genau dann ein Teiler von  $\Phi_{18}^*(q)$ , wenn gilt:  $q \equiv a \pmod{13}$  mit  $a \in \{2, 3, 10, 13, 14, 15\}$ .*
- (ii) *Die Existenz von Gruppen wie im Fall (iv) und (v) bleibt offen.*
- (iii) *Nach dem Schur'schen Lemma ist offenbar in allen oben genannten Fällen, außer im Fall (ii),  $B \in \{B', B'Z(G)\}$ .*

**Beweis:** Die Notation aus Satz 7.6.2 wird fortgesetzt. Nach Satz 7.6.2 haben wir nur den Fall zu betrachten, dass  $A = Z(B) \leq Z(G)$  ist. Die Behandlung

des Falles, dass  $B/A$  eine einfache Gruppe vom Lie-Typ in Charakteristik  $p$  ist, verläuft genau analog zum Beweis von Satz 7.3.3. Es bleiben die Fälle übrig, dass  $B/A$  eine Gruppe vom Typ  $G_2$ ,  ${}^2G_2$ ,  ${}^3D_4$ ,  $F_4$ ,  ${}^2F_4$ ,  $E_6$ ,  ${}^2E_6$  oder  $E_7$  ist oder eine unitäre Gruppe vom Rang 2 über einem Teilkörper von  $\mathbb{F}_{q^3}$ , der kein Teilkörper von  $\mathbb{F}$  ist.

In Gruppen vom Typ  $G_2(\tilde{q})$  ist jeder maximale Torus ein Torus von  $SL_3(\tilde{q})$  oder  $SU_3(\tilde{q})$ , kritisch ist also nur der Torus der Ordnung  $\tilde{q}^2 - \tilde{q} + 1$ . Folglich ist  $B/A$  definiert über einem Teilkörper von  $\mathbb{F}_{q^3}$ , der kein Teilkörper von  $\mathbb{F}_q$  ist. Weil die Darstellung auf  $V$  realisiert ist über  $\mathbb{F}_q$  und  $\mathbb{F}_{q^3}$  ein Zerfällungskörper für  $B/A$  ist, wäre nach [KL], Proposition 5.4.6 jeder absolut irreduzible Teilmodul von  $V$  ein Modul mit einer Dimension, die eine dritte Potenz wäre. Weil kein  $R$ -Teilmodul von  $V$  eine solche Dimension hat, zerfallen alle irreduziblen Teilmoduln über  $\mathbb{F}_{q^3}$ , haben also eine Dimension, die durch 3 teilbar ist. Es folgt, dass  $\mathfrak{C}_V(R)$  invariant bleibt unter  $B$ . Dieser Fall ist aber ausgeschlossen nach Satz 7.5.3. Für die Ree-Gruppen gilt dieselbe Argumentation mit Bemerkung 5.4.7 (b) in [KL]. Gruppen vom Typ  ${}^3D_4(q)$  schließt man aus, weil nach [KL2] auf jedem kritischen maximalen Torus eine Gruppe der Ordnung 4 treu wirkt. Mit Hilfe von Table 5.4.B in [KL] sieht man, dass Gruppen vom Typ  $F_4$  und  ${}^2F_4$  nur absolut irreduzible Darstellungen vom Grad 26 oder 25 und 52 oder mindestens 96 haben. Ebenfalls dort findet man, dass für Gruppen vom Typ  $E_6$  unter den absolut irreduziblen Moduln nur der natürliche oder der dazu duale Modul eine Dimension kleiner als 82 haben. Wieder folgt, dass  $\mathfrak{C}_V(R)$  invariant bleibt unter  $B$  im Widerspruch zu Satz 7.5.3. Wiederum nach Table 5.4.B in [KL] verbleiben der natürliche Modul für  $E_7$  oder ein irreduzibler Modul für  ${}^2E_6$  der Dimension 54, der über  $\mathbb{F}_{q^2}$  in zwei absolut irreduzible Moduln der Dimension 27 zerfällt. Damit befinden wir uns im Fall (iii).

Sei zuletzt  $B'$  eine unitäre Gruppe vom Rang 2 wie oben, also mit dem Zerfällungskörper  $\mathbb{F}_{q^6}$ . Weil die Darstellung von  $B'$  auf  $V$  realisiert ist über  $\mathbb{F}_q$ , wäre die Dimension jedes absolut irreduziblen Teilmoduls in dieser Darstellung nach [KL], Proposition 5.4.6 eine dritte Potenz. Jeder irreduzible Teilmodul zerfällt über  $\mathbb{F}_{q^3}$ ,  $\mathbb{F}_{q^6}$  oder über  $\mathbb{F}_{q^2}$  in absolut irreduzible Moduln. In den beiden ersten Fällen ist seine Dimension durch 3 teilbar, im letzten Fall ist die Hälfte seiner Dimension eine dritte Potenz, also 27. In jedem Fall ist  $\dim[V, B']$  durch 3 teilbar und damit  $\mathfrak{C}_V(R)$  invariant unter  $B$ . Damit ist aber  $B'$  eine der Gruppen aus Fall (ii).

In allen folgenden Fällen kommt für  $B'$  nach Satz 7.6.2 nur eine einfache Gruppe oder eine Schur-Erweiterung von  $B/A$  mit einem Zentrum der Ordnung 2 in Frage. Ist 2 kein Teiler des Schur-Multiplikators von  $B/A$ , so wird stillschweigend nur die entsprechende einfache Gruppe untersucht. Alle im Folgenden verwendeten Informationen über Charaktere von  $B'$  und die Bezeichnungen für die

Konjugiertenklassen entstammen  $[At]$  und  $[AtB]$ .

Wir wiederholen nochmals die Argumente (RC) und (AC) aus dem Beweis von Satz 7.3.3 in der für  $G \cong E_7(q)$  gültigen Form:

- (RC) Ist  $g \in G$  halbeinfach und nicht zentral in  $G$ , ist  $o(g) \in \{2, 3, 5, 7\}$  und ist  $\chi_{56}(g)$  rational für den Brauer-Charakter  $\chi_{56}$  von  $G$  zum Modul  $V$ , so ist  $(o(g), \chi_{56}(g)) \in \{(2, 8), (2, -8), (3, -7), (3, -25), (3, 2), (3, 20), (5, 6), (7, -7), (7, 0), (7, 14)\}$ .
- (AC) Ist  $\mathbb{k}$  algebraisch abgeschlossen,  $A$  eine abelsche, halbeinfache Untergruppe von  $E_7(\mathbb{k})$ , deren Rang höchstens 2 ist, und  $C = \langle c \rangle$  eine zyklische Untergruppe von  $E_7(\mathbb{k})$ , die treu auf  $A$  wirkt, so ist  $A$  enthalten in einem maximalen Torus  $T$  von  $E_7(\mathbb{k})$ , und es existiert ein Element  $w \in \mathfrak{N}_{G(\mathbb{k})}(T) / T$ , das wie  $c$  auf  $A$  wirkt.

Sei zunächst  $B/A$  eine alternierende Gruppe. Jede treue Darstellung einer Schur-Erweiterung von  $A_{16}$  mit einem Zentrum der Ordnung 2 hat mindestens den Grad 64. Folglich ist  $B'$  einfach. Nach den Charaktertafeln für  $A_{10}$  ist jeder Charakter eine Kombination von Restriktionen von Charakteren der Grade 1, 9, 35, 36 und 42 mit den Werten 1, 5, 11, 8 und 6 auf der Klasse 2A im Widerspruch zu (RC).

Sei nun  $B/A$  eine sporadisch einfache Gruppe oder eine Gruppe vom Lie-Typ in einer von  $p$  verschiedenen Charakteristik. Nach [KL], Proposition 5.3.8 und Table 5.3.A besitzen unter den Gruppen, die einen Primteiler enthalten, der kongruent 1 modulo 18 ist, nur die folgenden Gruppen eine projektive Darstellung von einem Grad  $\leq 56$ :  $J_1$ ,  $J_3$ , O'N, HN, Th,  $\text{PSL}_2(19)$ ,  $\text{PSL}_3(7)$ ,  $\text{PSL}_2(113)$  und  $\text{U}_3(8)$  für  $r = 19$ ,  $\text{PSL}_2(37)$  für  $r \in \{19, 37\}$ ,  $\text{PSL}_2(109)$  für  $r = 109$  und  $\text{PSL}_2(73)$  für  $r \in \{37, 73\}$ .

Aufgrund der Struktur ihrer Borel-Gruppen scheiden  $\text{PSL}_2(109)$  und  $\text{PSL}_2(73)$  für  $r = 73$  aus. Weil die Weyl-Gruppe von  $G$  kein Element der Ordnung 36 enthält, ist  $\text{char}(\mathbb{F}) = 73$  für  $\text{PSL}_2(73)$  nach (AC). Dann ist aber 37 ein Teiler von  $73^2 - 1$ . Weil die Weyl-Gruppe von  $G$  kein Element der Ordnung 56 enthält, ist  $\text{char}(\mathbb{F}) = 113$  für  $\text{PSL}_2(113)$ . Dann ist aber 19 ein Teiler von  $113^2 - 1$ . Die sporadischen Gruppen werden ausgeschlossen nach den Ergebnissen von [KW].

Aus den Charaktertafeln für  $\text{PSL}_3(7)$  entnimmt man, dass  $\chi_{56}$  ein irreduzibler Charakter ist oder die Summe des 1-Charakters und eines irreduziblen Charakters in Charakteristik 3. In jedem Fall nimmt dieser Charakter auf der Klasse 7A den Wert 7 an im Widerspruch zu (RC).

Alle absolut irreduziblen Charaktere von  $\text{SL}_2(19)$  nehmen den Wert 0 auf der Klasse 2A an, oder es ist  $(\chi(1), \chi(2A)) \in \{(1, 1), (9, 1), (18, -2), (18, 2), (19, -1)\}$ . Mit Hilfe des Arguments (RC) folgt nun, dass alle treuen Moduln in einer Kompositionsreihe für den  $B'$ -Modul  $V$  mit  $B/A \cong \text{PSL}_2(19)$  den Grad 9 oder 18 haben. Wieder ist  $\mathfrak{C}_V(R)$  invariant unter  $B'$  und wir befinden uns im Fall (ii).  $\text{SU}_3(8)$

hat keine irreduzible Darstellung von einem Grad kleiner als 57 und  $\text{PSU}_3(8)$  nur Darstellungen vom Grad 56.

Sei zuletzt  $B' \cong \text{PSL}_2(37)$ . Wir arbeiten zunächst in  $\mathfrak{C}_G(\mathfrak{C}_V(R))$  und verwenden die Darstellung für Gruppen vom Typ  ${}^2E_6$  in Proposition 6.2.13. Aus der Darstellung von  $\mathfrak{C}_G(R)$  im Beweis zu Proposition 6.2.13 über dem algebraischen Abschluss von  $\mathbb{F}$  sieht man, dass unter den drei dort angegebenen kanonischen Teilmoduln der Dimension 9 für  $R$  nur dann zwei paarweise isomorph sein können, wenn  $R$  auf verschiedenen Basisvektoren gleiche Eigenwerte hat. Wie in Proposition 6.2.13 genügt es anzunehmen, dass  $R$  auf  $x_1$  dieselben Eigenwerte hat wie auf  $x_{12}$ ,  $x'_4$  oder  $x_{13}$ . Dabei ist zu beachten, dass Zsigmondy-Elemente in  $G(\mathbb{F})$  auch bei der Einbettung von  $G(\mathbb{F})$  in  $G(\mathbb{F}_{q^t})$  mit einem  $t \in \mathbb{N}$ , das zu 18 teilerfremd ist, Zsigmondy-Elemente bleiben. Für ausreichend großes  $t$  zerfällt  $\mathbb{F}_{q^t} \otimes \mathfrak{C}_V(R)$  in drei paarweise nicht isomorphe Moduln von  $\mathfrak{C}_{G(\mathbb{F}_{q^t})}(R)$ . Die Urbilder dieser Moduln bezeichnen wir als die kanonischen Teilmoduln von  $R$ . Ist  $R = \langle s \rangle$  und  $x_2^s = \lambda x_2$  in der oben gewählten Darstellung, so ist  $x_1^s = \lambda^{q^5+q^4-q^3-q^2+1}x_1$ ,  $(x'_4)^s = \lambda^{-q^5}x'_4$ ,  $x_{12}^s = \lambda^{q^3-1}x_{12}$  und  $x_{13}^s = \lambda^{-q^4+q}x_{13}$ . Wären die Eigenwerte von  $R$  auf  $x_1$  und  $x_{12}$  gleich, so wäre die Ordnung von  $\lambda$  ein Teiler von  $(q^6 - q^3 + 1, q^5 + q^4 - 2q^3 - q^2 + 2) = (3q^4 - 2q^3 - q^2 - 2q + 3, q^5 + q^4 - 2q^3 - q^2 + 2) = (3q^4 - 2q^3 - q^2 - 2q + 3, 5q^3 - 2q^2 - q - 3) = (2q^2 + q - 7, 5q^3 - 2q^2 - q - 3) = (2q^2 + q - 7, 75q - 75)$  ein Teiler von  $q - 1$ , ein Widerspruch. Wären die Eigenwerte von  $R$  auf  $x_1$  und  $x_{13}$  gleich, so wäre die Ordnung von  $\lambda$  ein Teiler von  $(q^6 - q^3 + 1, q^5 + 2q^4 - q^3 - q^2 - q + 1) = (5q^4 - 2q^3 - q^2 - 3q + 3, q^5 + 2q^4 - q^3 - q^2 - q + 1) = (5q^4 - 2q^3 - q^2 - 3q + 3, 4q^3 + 2q^2 - 4q - 11) = (2q^2 + 2q - 3, 4q^3 + 2q^2 - 4q - 11) = (2q^2 + 2q - 3, 2q - 7)$  ein Teiler von 57 und damit von 19. Wären die Eigenwerte von  $R$  auf  $x_1$  und  $x'_4$  gleich, so wäre die Ordnung von  $\lambda$  ein Teiler von  $(q^6 - q^3 + 1, 2q^5 + q^4 - q^3 - q^2 + 1) = (3q^4 - 3q^3 - q^2 - 2q + 5, 2q^5 + q^4 - q^3 - q^2 + 1) = (3q^4 - 3q^3 - q^2 - 2q + 5, 2q^3 + q^2 - q - 3) = (11q^2 + q - 7, 2q^3 + q^2 - q - 3) = (11q^2 + q - 7, 2q - 25)$  ein Teiler von  $6897 = 3 \cdot 11^2 \cdot 19$ . Ist also  $r = 37$ , so lässt  $R$  nur die kanonischen Untermoduln invariant. Dieselbe Beobachtung überträgt sich dann auf die Wirkung von  $R$  auf  $[V, R]$ . Nach der Einbettung in  $G(\mathbb{F}_{q^t})$  für geeignetes  $t$  wie oben enthält der Stabilisator eines  $r$ -Untermoduls von  $V$ , der  $[V, R]$  nicht enthält, eine Gruppe, deren Ordnung  $\Phi_{18}^*(q^t) > 19$  ist. Nach den bisher bewiesenen Ergebnissen ist er auflösbar, kann also keine zu  $\text{PSL}_2(37)$  isomorphe Gruppe enthalten. Damit bleibt für  $B' \cong \text{PSL}_2(37)$  nur der Fall  $|R| = 19$  übrig. Mit Hilfe der eben gemachten Beobachtung sieht man auch, dass für  $|R| = 19$  höchstens zwei der kanonischen  $R$ -Moduln isomorph sind. Andernfalls müssten die Eigenwerte von  $R$  auf drei Punkten aus den verschiedenen Zyklen von  $w_0$  gleich sein, die eine Gerade in  $\mathcal{G}$  bilden. Weil wir o.B.d.A.  $P_1$  als einen der Punkte wählen können, sind diese Punkte  $P_1$ ,  $P_{12}$  und  $Q_2$  im Widerspruch zur obigen Rechnung. Die Grade der irreduziblen Darstellungen von  $\text{PSL}_2(37)$  sind 18, 19,

36, 37 und 38. Würde die Einschränkung des Brauercharakters  $\chi_{56}$  zum Modul  $V$  zerfallen in Charaktere, deren Grad kleiner als 36 ist, so wäre also ein kanonischer Untermodul für  $R$  invariant unter  $B'$ . Es folgt ein Widerspruch wie im Fall  $|R| = 37$ . Enthielte die Einschränkung von  $\chi_{56}$  den 1-Charakter, so wäre ein Punkt in  $\mathfrak{C}_V(R)$ , und damit auch  $\mathfrak{C}_V(R)$ , invariant, was nach Satz 7.5.3 ausgeschlossen ist. Damit ist schließlich auch (iv) bewiesen.

# Literatur

- [As1] M. Aschbacher, *Finite Group Theory*, Cambridge University Press, 1986.
- [As2] M. Aschbacher, On the maximal subgroups of the finite classical groups, *Invent. Math.* **76** (1984), 469-514.
- [As3] M. Aschbacher, Chevalley groups of type  $G_2$  as the group of a trilinear form, *J. Algebra* **109** (1987), 193-259.
- [As4] M. Aschbacher, The 27-dimensional module for  $E_6$ . I, *Invent. Math.* **89** (1987), 159-195.
- [As5] M. Aschbacher, The 27-dimensional module for  $E_6$ . II, *J. London Math. Soc.* (2) **37** (1988), 275-293.
- [As6] M. Aschbacher, The 27-dimensional module for  $E_6$ . III *Trans. Amer. Math. Soc.* **321** No. 1 (1990), 45-84.
- [As7] M. Aschbacher, The 27-dimensional module for  $E_6$ . IV, *J. of Algebra* **131** No. 1 (1990), 23-39.
- [As8] M. Aschbacher, The maximal subgroups of  $E_6$ , Preprint.
- [As9] M. Aschbacher, Small degree representations of groups of Lie type, Preprint.
- [Sem] A. Borel, R. Carter, C.W. Curtis, N. Iwahori, T.A. Springer, R. Steinberg, *Seminar on Algebraic Groups and Related Finite Groups*, Springer Lecture Notes in Mathematics **131**, Berlin-Heidelberg-New York, 1970.
- [Ca1] R.W. Carter, *Simple Groups of Lie Type*, Wiley-Interscience, 1972.
- [Ca2] R.W. Carter, *Finite Groups of Lie Type: conjugacy classes and complex characters*, Wiley-Interscience, 1985.

- [Coh] A.M. Cohen, Point-line spaces related to buildings, *Handbook of Incidence Geometry*, F. Buekenhout (ed.), Elsevier Science, Amsterdam, 1995, 647-738.
- [CLSS] A.M. Cohen, M.W. Liebeck, J. Saxl and G. Seitz, The local maximal subgroups of exceptional groups of Lie type, finite and algebraic, *Proc. London Math. Soc.* (3) **64** (1992), 21-84.
- [CW] A.M. Cohen, D.B. Wales, Embeddings of the group  $L(2, 13)$  in groups of Lie type  $E_6$ , *Israel J. Math.* **82** (1993), 45-86.
- [At] J.H. Conway, R.T. Curtis, S.P. Norton, R.A. Parker and R.A. Wilson, *An ATLAS of Finite Groups*, Oxford University Press, 1985.
- [Coo1] B.N. Cooperstein, A note on the Weyl group of type  $E_7$ , *Europ. J. Combin.* **11** (1990), 415-419.
- [Coo2] B.N. Cooperstein, The fifty-six-dimensional module for  $E_7$ . I. A four form for  $E_7$ , *J. of Algebra* **173** (1995), 361-389.
- [DH] K. Doerk, T. Hawkes, *Finite Soluble Groups*, de Gruyter, 1992.
- [Fe] W. Feit, On large Zsigmondy primes, *Proc. Amer. Math. Soc.* **102** (1988), 29-36.
- [GPPS] R. Guralnick, T. Penttila, C.E. Präger, J. Saxl, Linear groups with orders having certain large prime divisors, *Proc. London Math. Soc.* (3) **78** (1999), 167-214.
- [He1] Ch. Hering, Zweifach transitive Permutationsgruppen, in denen 2 die maximale Anzahl von Fixpunkten von Involutionen ist, *Math. Zeitschrift* **104** (1968), 150-174.
- [He2] Ch. Hering, Transitive linear groups and linear groups which contain irreducible subgroups of prime order, *Geom. Ded.* **2** (1974), 425-460.
- [He3] Ch. Hering, Transitive linear groups and linear groups which contain irreducible subgroups of prime order II, *J. Algebra* **93** (1985), 151-164.
- [Hum1] J.E. Humphreys, *Linear Algebraic Groups*, Graduate Texts in Mathematics **21**, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1975.
- [Hum2] J.E. Humphreys, *Ordinary and modular representations of Chevalley groups*, Springer Lecture Notes in Mathematics **528**, Berlin-Heidelberg-New York, 1976.

- [Hum3] J.E. Humphreys, *Reflection Groups and Coxeter Groups*, Cambridge University Press, 1990.
- [Hup1] B. Huppert, *Endliche Gruppen I*, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1967.
- [Hup2] B. Huppert, Singer-Zyklen in Klassischen Gruppen, *Math. Zeitschrift* **117** (1970), 141-150.
- [Hup3] B. Huppert, Lineare auflösbare Gruppen, *Math. Zeitschrift* **67** (1957a), 479-518.
- [HB1] B. Huppert, N. Blackburn, *Finite Groups II*, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1982.
- [HB2] B. Huppert, N. Blackburn, *Finite Groups III*, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1982.
- [AtB] C. Jansen, K. Lux, R.A. Parker and R.A. Wilson, *An ATLAS of Brauer Characters*, Oxford, Clarendon Press, 1995.
- [Ke] O. Kegel, Produkte nilpotenter Gruppen, *Arch. Math.* **12** (1961), 90-93.
- [Kl1] P.B. Kleidman, The maximal subgroups of the Chevalley groups  $G_2(q)$  with  $q$  odd, the Ree groups  ${}^2G_2(q)$ , and their automorphism groups, *J. Algebra* **117** (1988), 30-71.
- [Kl2] P.B. Kleidman, The maximal subgroups of the Steinberg triality groups  ${}^3D_4(q)$  and of their automorphism groups, *J. Algebra* **115** (1988), 182-199.
- [KL] P.B. Kleidman, M.W. Liebeck, *The Subgroup Structure of the Finite Classical Groups*, London Mathematical Society Lecture Note Series **129**, Cambridge University Press, 1990.
- [KW] P.B. Kleidman, R.A. Wilson, Sporadic simple subgroups of finite exceptional groups of Lie type, *J. of Algebra* **157** (1993), 316-330.
- [Lie1] M. Liebeck, The local maximal subgroups of the finite simple groups, *Proc. Symp. Pure Math* **47** (1987), 455-461.
- [Lie2] M. Liebeck, The affine permutation groups of rank three, *Proc. London Math. Soc.* (3) **54**, (1987), 477-516.
- [LPS] M. Liebeck, C. Praeger, J. Saxl, A classification of the maximal subgroups of the alternating and symmetric groups, *J. of Algebra* **111** (1987), 365-383.

- [LS] M. Liebeck, J. Saxl, On the orders of maximal subgroups of the finite exceptional groups of Lie Type, *Proc. London Math. Soc.* (3) **55** (1987), 299-330.
- [Me] B. Merkt, Zsigmondy-Elemente in klassischen Gruppen, Dissertation, Universität Tübingen, 1995.
- [NW] S.P. Norton, R.A. Wilson, The maximal subgroups of  ${}^2F_4(2)$  and its automorphism group, *Communications in Algebra* **17** (11) (1989), 2809-2824.
- [Ro] M. Ronan, *Lectures on Buildings*, Academic Press, Boston, 1989.
- [St] R. Steinberg, Endomorphisms of linear algebraic groups, *Mem. Amer. Math. Soc.* **80** (1968).
- [Su1] M. Suzuki, *Group Theory I*, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1982.
- [Su2] M. Suzuki, *Group Theory II*, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1982.
- [Ta] D.E. Taylor, *The Geometry of the Classical Groups*, Heldermann, Berlin, 1992.
- [Th] J.A. Thas, Generalized Polygons, *Handbook of Incidence Geometry*, F. Buekenhout (ed.), Elsevier Science, Amsterdam, 1995, 383-432.
- [Ti1] J. Tits, *Buildings of spherical type and finite BN-pairs*, Springer Lecture Notes in Mathematics, **386**, Berlin-Heidelberg-New York 1974.
- [Ti2] J. Tits, Sur la trialité et certaines groupes qui s'en déduisent, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **2** (1959), 13-60.
- [Zs] K. Zsigmondy, Zur Theorie der Potenzreste, *Monatsh. für Math. u. Phys.* **3** (1892), 265-284.

# Lebenslauf

Am 20. August 1966 wurde ich als Sohn des Mathematikers Franz Hauptvogel und seiner Ehefrau Hedwig, geb. Pöschl, in Stuttgart geboren.

Von 1973 bis 1977 besuchte ich die Grundschule in Stuttgart-Sillenbuch und anschließend das Geschwister-Scholl-Gymnasium in Stuttgart-Sillenbuch, wo ich 1986 das Abitur ablegte.

Im Anschluss an die Ableistung meines Zivildienstes und eine einjährige Weltreise begann ich im Oktober 1989 mein Studium an der Eberhard-Karls-Universität Tübingen. Seit Oktober 1990 studierte ich Mathematik im Diplomstudiengang mit dem Nebenfach Linguistik des Deutschen sowie Mathematik und Deutsch im Studiengang Lehramt für Gymnasien. Nach dem Vordiplom im Jahr 1992 war ich mehrfach als wissenschaftliche Hilfskraft am Mathematischen Institut beschäftigt. Unter Anleitung von Prof. Dr. Ch. Hering fertigte ich meine Diplomarbeit mit dem Titel „Chevalley-Gruppen vom Typ  $G_2$  als Gruppe einer Trilinearform und eine Konstruktion für die Jankogruppe  $J_1$ “ an. Im September 1996 legte ich die Diplomprüfung ab, im Mai 1997 das erste Staatsexamen.

In der nachfolgenden Zeit entstand die vorliegende Dissertation. Seit April 1997 bin ich wissenschaftlicher Angestellter am Mathematischen Institut der Universität Tübingen.

Meine akademischen Lehrer waren die Damen und Herren Professoren, Dozenten und akademischen Oberräte

V. Batyrev, G. Betsch, K.-P. Hadeler, Ch. Hering, G. Huisken, W. Knapp, Ch. Lubich, P. Schmid und E. Siebert in Mathematik

und

V. Ehrlich, M. Reis und W. Sternefeld in Linguistik.